arXiv:2303.07950v1 [physics.plasm-ph] 14 Mar 2023

重新审视 AKR 中的 ECMI 共振：双曲共振、谐波、波波相互作用

W. Baumjohann[1] 和 R. A. Treumann[2]

[1]奥地利科学院空间研究所，格拉茨，奥地利[2]国际空间科学研究所，
伯尔尼，瑞士[3]慕尼黑大学地球物理研究所，德国通信地址：
Wolfgang.Baumjohann@oeaw.ac.at

摘要。 回顾电子回旋脉泽不稳定性（ECMI）中基频及更高次电子回旋谐波的共振条件，可知其能够产生低于谐波频率的辐射，并证实在谐波频率以上的窄频带内也可能产生辐射 $n>1$。在 $n=1$ <style id='9}>受限的 X 模下支上，共振附近的放大得益于相速度和群速度的降低。受限的慢速大振幅准静电 X 模对等离子体进行非线性调制，形成空穴子；随着波数进一步增大，这些波模会被自陷于空穴子中。它们发生波波相互作用，从而能够在 $n=2$以下的二次谐波频带逃逸至自由空间。当平行波数足够大（斜传播）时，基频共振 $n=1$ 呈双曲型；这一可能性迄今被忽视，却对向上电流区内有效的电子回旋脉泽不稳定性至关重要。在此，共振双曲线与损失锥边界相当吻合；损失锥边界对应的电子分布可能是向上电流区 ECMI 的重要源电子分布，能够在可达到的极光电子能量下激发 ECMI 增长。

关键词。电子回旋脉泽、极光千米波辐射、亚暴、谐波辐射、共振拓扑

1 引言

电子回旋脉泽不稳定性（ECMI）机制（Twiss, 1958；Hirshfield & Granatstein, 1977；Melrose, 1986；Treumann,2006）近半个世纪以来（自 Wu & Lee, 1979 起）一直被视为产生极光千米波辐射（AKR）的经典机制。这种著名的“极光千米波辐射”（由 Gurnett 于 1974 年首次分析并确定其极光起源）是一种间歇出现、窄带且强烈的无线电发射（Benediktov 等人于 1965 年在一项难以查阅的研究中发现）。它主要在亚暴期间发射；亚暴是地球磁层的一种重大扰动（Kamide & Baumjohann, 1993；Akasofu, 2004, 2021）。

极光千米波辐射（关于观测的近期综述，参见 Yearby & Pickett, 2022）以 X 模偏振传播，并从靠近地球的极光带辐射出来。该区域磁场强，在各种尺度上，热等离子体会在局部变得稀薄，等离子体与回旋频率比 $\omega_e/\omega_{ce}\ll 1$ 往往极小。在这种情况下，只有当电子回旋脉泽不稳定性的必要条件和充分条件同时满足时，它才会发生。这些条件涉及占据激发能态的弱相对论性电子的回旋共振（Twiss 于 1958 年首次在更广泛的天体物理背景下提出），而充分条件还要求存在合适的电子能量源。在经典物理学中，激发

非热态是指某种高度非热的电子相空间分布函数，它与热（甚至各向异性的相对论性，见 Treumann & Baumjohann, 2016）玻尔兹曼-麦克斯韦分布有显著偏离。迄今为止，实验上尚未最终确定能够有效激发电子回旋脉泽不稳定性的相关分布函数。通常认为它是一种简单的（弱相对论性）损失锥分布（参见 Wu & Lee, 1979；Pritchett, 1984，以及许多其他文献），这种分布在相空间中常有测量记录；在可能的 AKR 源区也曾进行过原位测量（典型测量参见 Delory 等，1998）。然而，这一假设受到了质疑（LaBelle & Treumann, 2002；Baumjohann & Treumann, 2022）。

在近期的一篇短文（Baumjohann & Treumann, 2022年）中，我们考察了极光千米波辐射这一典型机制；它是近地空间中最强烈的天然射电辐射。我们指出，该机制存在若干问题，这些问题至今尚未得到解决，或至多只是近似解决。尽管如此，可以肯定的是，电子回旋脉泽不稳定性是唯一足够强、因而合理且可能解释极光千米波辐射这一异常强烈辐射模式的机制。同时，它也可作为强磁化天体中的非热射电辐射范式，应用于其他空间环境：一般的行星磁层、系外行星系统，也可能应用于天体物理学，用以产生射电波段中的零星强辐射。这些辐射无法用同步辐射来解释，必定由未知的非热电子分布所引起，尽管其中效率最高的分布仍有待明确鉴定。

在本文中，我们不讨论充分条件这一重要问题：什么样的分布会导致电子回旋脉泽不稳定性。我们只探讨必须首先澄清的必要条件，而后才考虑应选取哪种最可能且有实验依据的相空间分布，以获得足够的辐射强度。我们在此试图回答的问题是：给定任意合适的分布函数，在什么条件下电子回旋脉泽不稳定性能够被激发并逃逸到自由空间中，希望达到观测到的大振幅？这个问题与动理学理论，以及电子回旋脉泽不稳定性源电子和相关电磁波模之间的共振条件有关。

2 共振——必要条件

ECMI 是一种以 X 模偏振形式辐射的动力学不稳定性（参见 Melrose，1986年；Treumann，2006年）。根据观测，它主要以电磁 X-R 模传播（Krall & Trivelpiece，1973年；Baumjohann & Treumann，1996年），传播方向几乎垂直于强背景磁场 $\boldsymbol{B}$。在 ECMI 中，当等离子体中的电子组分呈现出特定的动量空间分布函数时，X 模便会被激发；如上所述，这种分布函数相当于共振电子组分处于较高能态。

假设电子具有这种高能型的相对论速度（动量）分布 $f_e(\boldsymbol{p})$。在一定的频率 ω 和波数 $\boldsymbol{k}$范围内，它满足所需的性质，并允许电子回旋脉泽不稳定性的激发，且

增长率

$$\Gamma(\omega,\boldsymbol{k}) = -\mathrm{Im}\,\mathcal{D}(\omega,\boldsymbol{k})/\partial_\omega \mathrm{Re}\,\mathcal{D}(\omega,\boldsymbol{k})\big|_{\omega_X} = \sum_n \Gamma_n(\omega,\boldsymbol{k}) > 0. \tag{1}$$

其中 $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega_X(\boldsymbol{k})$ 是 X 模频率关于波数 $\boldsymbol{k}$ 的函数，而 $\mathcal{D}(\omega,\boldsymbol{k})$ 是动理学色散关系，在 (Krall & Trivelpiece, 1973年; Baumjohann & Treumann, 1996年) 中有明确给出；对于损失锥分布，其表达式详见 (Wu & Qiu, 1983年)。该关系取值于 X 模频率和波数处（关于冷电子-质子等离子体中 X 模的完整磁离子理论，参见例如 Budden, 1988；Melrose, 1986）。$\mathcal{D}(\omega,\boldsymbol{k})$ 是对均匀磁化等离子体中的源电子分布函数 $f_e(\boldsymbol{p})$ 及其关于 $\boldsymbol{p}$ 分量 $p_\parallel, p_\perp$ 的回旋对称导数进行相空间积分所得；即使在 X 模纯垂直传播的情况下，对于非麦克斯韦等离子体，这也是一个相当复杂的表达式。

在不稳定性中，每个共振 n 都会对总正增长率 $\Gamma(\omega,\ \boldsymbol{k}) > 0$ 在特定频率处作出正或负贡献。因此，该增长率作为 X 模频率 ω_X的函数，会在每个共振 n处或附近呈现离散的极大值或极小值，具体取决于该特定频率处 $\Gamma_n(\omega, \boldsymbol{k})$的贡献是否为正。能够以增长率$\Gamma > 0$激发电子回旋脉泽不稳定性的等离子体，例如上极光亚暴磁层，密度较低；就 X 模传播而言，有充分理由将其视为冷且非相对论性的，因为只有弱相对论性非热极光电子群——其来源不同于电离层——会导致电子回旋脉泽不稳定性的激发。在温度高得多的天体物理等离子体中，情况可能有所不同；在那里，可能需要考虑 X-R 模色散中的相对论修正。不过，在磁层这一语境下，我们不讨论这个问题。所假定的低密度状态将极光千米波辐射的源区及电子回旋脉泽不稳定性的激发限定在空间范围广阔的极光上行电流区，并通常排除了狭窄而密集的下行电流区；这也意味着，人们认为普遍存在的电子分布属于损失锥族。尽管这一观点受到了质疑（Baumjohann & Treumann, 2022; Treumann et al., 2012），但尚未被推翻。下文不尝试计算任何特定分布下的增长率，因此这一问题仍悬而未决。

2.1 谐波共振 $n > 1$

在谐波数为 $n > 1$ 且平行或反平行传播时，对不稳定性产生贡献的必要条件

$$\omega - n\omega_{ce}/\gamma - k_\parallel c\beta_\parallel = 0 \tag{2}$$

其中 $k_\parallel = k\cos\theta$是相空间积分中的第 n次共振，$n = \pm1, \pm2, \ldots$为回旋谐波数；在计算总增长率 $\Gamma(\omega,\boldsymbol{k})$ 关于 X 模频率 $\omega = \omega_X$的函数时，对该谐波数求和。由于相对论因子 $\gamma > 1$，它们的基频（相对论性）共振频率 $\omega_{1X} = \omega_{ce}/\gamma$ 在 $n = 1$ 处始终低于非相对论回旋频率 $\omega_{ce} = eB/m_e$，因此被限制在等离子体内；而在所有高次谐波 $|n| > 1$ 中，共振频率 ω_{nX}均超过上混杂频率 $\omega_{uh} = \omega_{ce}\sqrt{1 + \omega_e^2/\omega_{ce}^2}$与上截止频率之间的 X 模阻带 $\omega_{uh} \le \omega_X \le \omega_{co}^u$

[1]需要注意的是，磁离子理论是一种流体理论。它假设这些波模已经存在，而热动理学等离子体组分仅起激发或阻尼作用。因此，在线性色散中可以忽略所有非线性修正。

$\omega_{co}^{u} = \frac{1}{2}\omega_{ce}(\sqrt{1+4\omega_e^2/\omega_{ce}^2}+1)$ 频率。基频若没有外力帮助便无法逃逸；而高次谐波一旦被激发，便会以接近光速自然辐射出去，此时它们几乎没有时间得到放大，因此通常应当相当微弱。

在增长率求和中，每一项 $\Gamma_n(\omega,\ \boldsymbol{k})$ 都表示谐波共振 n 对 $\Gamma(\omega,\ \boldsymbol{k})$ 的贡献，换句话说，也就是谐波数为 n 的谐波频率的增长率。谐波数 $-\infty < n < \infty$ 引入了一连串无限多个可能的共振，而给定的分布函数 $f_e(\boldsymbol{p})$ 和可用的共振电子能量$\epsilon_e = m_e c^2\gamma(\boldsymbol{p})$则从中选出相应的共振。对于发射，AKR 源必须具有相对论性（Wu & Lee，1979年；Melrose，1986年、1994年；Treumann & Baumjohann，1997），这由 $\gamma(\boldsymbol{p}) = \sqrt{1+p^2/m_e^2c^2}$ 和电子动量 $\boldsymbol{p} = m_e\gamma c\boldsymbol{\beta}$ 体现，其中$\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c$ 有定义。

在动量空间 $\boldsymbol{p}$ 中进行研究更为方便。这样做的优点是无需对 $\boldsymbol{p}$ 加以限制，因为完全相对论性动量遍布整个空间 $0 \le |p| < \infty$，从而避免了对 $\beta \le 1$ 施加不便的上界；该上界是 $\boldsymbol{\beta}$ 空间中以光速为半径的圆，它显然会排除任何高速束流参与其中。这种人为限制在动量空间中便不复存在。

对于任意 $\gamma \gtrsim 1$ 和 $\kappa_\parallel = k_\parallel c/\omega_{ce} = kc\cos\theta/\omega_{ce}$，完全相对论性的共振条件为

$$\gamma(\boldsymbol{p})x - \kappa_\parallel p_\parallel/m_e c = n \tag{3}$$

其中，$x = \omega/\omega_{ce}$ 是归一化频率。引入平行动量偏移 $p_0 = nm_e c\kappa_\parallel/(x^2-\kappa_\parallel^2)$ 后，可得回旋对称动量空间中的共振线（$p_\parallel,\ p_\perp$），它是一条椭圆

$$\frac{(p_\parallel - p_0)^2}{a_{\parallel p}^2} + \frac{p_\perp^2}{a_{\perp p}^2} = 1, \quad \text{with} \quad 0 < p^2 < \infty \tag{4}$$

其中两个半径为

$$a_{\parallel p}^2 = m_e^2c^2x^2(n^2+\kappa_\parallel^2-x^2)/(x^2-\kappa_\parallel^2)^2 \tag{5}$$

$$a_{\perp p}^2 = m_e^2c^2(n^2+\kappa_\parallel^2-x^2)/(x^2-\kappa_\parallel^2) \tag{6}$$

当 $\kappa_\parallel = k_\parallel = 0$ 时，椭圆退化为一个未偏移的圆，且对于任意能量 γ，所有垂直谐波发射均低于 $x < n$。通常，文献中用 $\boldsymbol{\beta}$表示共振椭圆。$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 共振的两种表示方式之间存在细微差别。前者不受频率 x 与平行波数$\kappa_\parallel$之间关系的影响，而后者中这一关系可能会影响共振曲线的形状；我们稍后将再讨论这个问题。

在斜传播中，情况 $x^2 > n^2 + \kappa_\parallel^2$ 被排除，因为两个半径都会变成虚数。为了保持椭圆，必须满足 $a_{\perp p}^2 > 0$ 为正，这意味着 $x > \kappa_\parallel$ 和 $n^2 > x^2 - \kappa_\parallel^2$。当然，发射频率低于

$$x < \sqrt{n^2+\kappa_\parallel^2} \tag{7}$$

谐波数越高，参与的波模斜向程度越大。对于较小的斜向程度 $\theta \lesssim \pi/2$，在自由空间电子回旋脉泽不稳定性中，$\omega_{Xn} = kc$ 是最有趣的情形；这对发射角提出了一个条件，以便延伸至

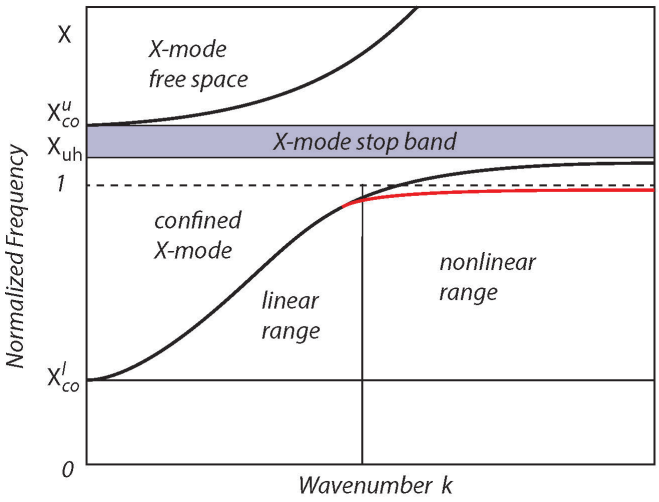


图1。 极光上行电流 AKR 源区中等离子体约束 X 模色散关系（下方实线曲线），对应普遍存在的低密度等离子体条件 $\omega_e \ll \omega_{ce}$。上方曲线为自由空间 X 模。在两条 X 模分支之间的阻带内，X 模无法传播。频率以 $x \equiv \omega/\omega_{ce}$ 归一化，其中 $x = 1$ 是非相对论电子回旋频率；线性色散下分支曲线在略高于相对论性电子回旋脉泽不稳定性共振的位置与其交叉。它在下截止频率与上混杂频率之间传播。红线趋近于 $x = 1$，表示在共振频率 $x_{res} \approx$ 保持恒定、$\lesssim 1$ 不变时的非线性 X 模色散分支，并延伸至较大的波数 k。请注意，在此虚线上，线性色散关系 (17) 不再有效。在这一范围内，共振频率保持不变且低于 ω_{ce} 时，下分支 X 模的相速度和群速度均显著降低，波在与适当电子分布共振时变为准静电波。此处可能发生波波相互作用，并在自由空间上 X 模分支的 $x \lesssim 2$ 处产生逃逸辐射。四波相互作用还可能激发高次谐波。此处未显示色散关系随传播角 θ 的形变；这种形变会略微改变共振、色散和相互作用，在大波数条件下甚至会使其从椭圆型转变为双曲型（双曲型情形见下文）。

频带中的谐波 n

$$n < \frac{\omega_{Xn}}{\omega_{ce}} < \frac{n}{|\sin\theta|} \tag{8}$$

这只是一个很窄的范围。对于低于 n的任何发射，除了其频率必须高于上截止频率 ω^u_{co}外，没有其他限制。对于较小的比值 $\omega_e/\omega_{ce} < 1$，可得到辅助条件

$$1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_{ce}^2} < \frac{\omega_{Xn}}{\omega_{ce}} = \frac{n}{\gamma} \tag{9}$$

对于第 n 次谐波的激发和传播。共振于第 n 次谐波的电子能量 $\epsilon_e = m_e c^2 \gamma$ 存在上限 $\gamma \lesssim n$，只有低于该上限的电子才能对上截止频率附近的辐射作出贡献。这意味着，所有共振都会对自由空间X模最低频带的辐射作出贡献，因此该频带的辐射将最强。

在 n 以下，共振和辐射原则上不受限制。然而，最后一个条件还表明，在 $|n|$ 以上仅存在一个狭窄的频率范围 $|n| < x < \sqrt{2}\,|\overline{n}|$；这取决于电子分布函数和共振能量 γ 是否有利于电子回旋脉泽不稳定性。在高于这一上限的频率处，共振条件不允许产生辐射。这是一项与任何粒子分布函数无关的一般必要条件。它与（Wu & Qiu, 1983年）中的主张略有矛盾，同时也使这些主张更加明确。通常，谐波辐射始终低于谐波 n，只有其上方存在这一狭窄的斜向辐射频率范围 n。高频受限辐射的观测可用于测量 n。

然而，尽管谐波共振（若导致不稳定性并表现为辐射）是可能的，但它们必然相当微弱，因为辐射位于上X模分支上，能够以光速 c轻易逃离源区。直接激发的最强发射来自二次谐波 $x = \omega/\omega_{ce} < 2$以下、紧邻上截止频率的位置

$$\omega_{co}^{u} = \tfrac{1}{2}\omega_{ce}\left[\left(1 + 4\omega_e^2/\omega_{ce}^2\right)^{1/2} + 1\right] < \omega_{nX} \tag{10}$$

在该处，若存在更高次谐波，它们也都会有所贡献。在磁层中，只有低于 $n = 2$ 的辐射才值得关注；其频率受到 $\omega_{co}^{u} < \omega_{2X} < 2\omega_{ce}$ 的限制，因此共振电子能量的上限为

$$1 < \gamma < 2/\left(1 + \omega_e^2/\omega_{ce}^2\right) \tag{11}$$

这意味着，在极光AKR源区中，能量为 $\epsilon_e = m_e\gamma c^2 \lesssim 0.9$ MeV 的电子有资格在自由空间中以近乎垂直的传播方向，直接激发低于二次X模谐波的AKR，前提是它们的分布函数适合电子回旋脉泽不稳定性。所需电子能量范围确实包含极光电子能量，这表明二次谐波AKR辐射可以自然地产生于极光磁层，正如 Wu & Qiu (1983) 所提出的，并由观测结果所支持（Pottelette & Treumann, 2005）。不过，鉴于上述辐射不受阻碍地逃逸且缺乏空间放大，辐射应当较弱。通常，极光电子能量远低于这一上限（但不同的观测情况请参见 Xiao 等人, 2016）。它们几乎没有能力激发更高次谐波。基于这一简单原因，AKR中应不存在谐波 $n > 2$。

2.2 超相对论共振

对动量 $\boldsymbol{p}$ 没有任何限制，这表明即使是非常高的共振电子动量/能量，通常也可能参与电子回旋脉泽不稳定性。进一步探讨极端情况，自然会引起人们对超相对论极限的兴趣。这里列出这一极限是为了完整起见，并非用于磁层，但它很可能对天体物理学至关重要。

超相对论条件意味着 $p^2 \gg m_e^2c^2$ 和 $\gamma(\boldsymbol{p}) = p/m_ec$。共振椭圆的半径为

$$\frac{a_{\parallel p}^2}{m_e^2c^2} = \frac{n^2x^2}{(x^2-\kappa_\parallel^2)^2}, \quad \frac{a_{\perp p}^2}{m_e^2c^2} = \frac{n^2}{x^2-\kappa_\parallel^2} \tag{12}$$

它退化为一个圆　　垂直传播中的圆形，半径为 $\kappa_\parallel = 0$ $a_p = nm_ec/x$。通常，一个 h　　as

$$\frac{\omega}{\omega_{ce}} = \frac{n}{p/m_ec} + \kappa_\parallel\cos\theta_p \tag{13}$$

其中 θ_p 是共振粒子的动量夹角。将频率替换为 X 模的上截止频率，即可得到 n 或 p 的上下界

$$\frac{|n|}{p/m_e c} > \left|1+\frac{\omega_e^2}{\omega_{ce}^2}-\kappa_\parallel\cos\theta_p\right|, \quad |n|>1 \tag{14}$$

请记住， n 既可以为正，也可以为负，因为它会出现在谐波增长率之和 Γ_n中。关于 n 的第二个条件只是指出，这一限制适用于所有以自由空间 X-R 模传播的谐波辐射。

2.3 基频共振

鉴于其在地球磁层中的应用，有人正确地指出（Wu & Lee，1979年），电子回旋脉泽不稳定性共振（弱相对论性）在谐波数为 $n=1$，即基频时占主导地位。我们已经列出了原因：任何更高次谐波在离开源区之前，几乎没有足够时间得到显著放大。因此，理论上似乎存在（Wu & Qiu，1983年），以及观测上疑似或确实声称在磁层中存在的任何强烈第二谐波极光千米波辐射，都很难理解为直接激发的结果。

将共振限制在 X 模下支上，会排除所有谐波 $n>1$。对于 $0\le\gamma-1=\sqrt{1+p^2/m^2c^2}-1\ll 1$，这一点在极光区成立；电子回旋脉泽不稳定性波无法从该区域逃逸到自由空间（图 1），因为这需要穿过上混杂频率与上截止频率之间的 X 模阻带 $\omega_{uh}\le\omega\le\omega_{co}^u$。

共振通常并不限于 ω_{ce} 附近。对于零波数 $k\approx 0$，X模下支从下截止频率 $\omega_X>\omega_{co}^l=\frac{1}{2}[(\omega_{ce}^2+4\omega_e^2)^{1/2}-\omega_{ce}]\approx\omega_e^2/\omega_{ce}$ 开始；在等离子体频率与回旋频率之比较小的参数范围内，电子回旋脉泽不稳定性会变得有效。假设严格垂直传播 $k_\parallel=0$，分布函数中所有相对论因子

$$1<\gamma<\omega_{ce}^2/\omega_e^2 \tag{15}$$

的电子原则上都可能参与共振。这些电子的斜向相对论共振条件由式（3）给出，其中 $n=1$。平行位移（现在通常用 $\boldsymbol{\beta}$ 表示）变为$\beta_0=\kappa_\parallel/(1+\kappa_\parallel^2)<1$，而椭圆半径为

$$\frac{a_\parallel^2}{m_e^2c^2}=\frac{1+\kappa_\parallel^2-x^2}{(1+\kappa_\parallel^2)^2}, \quad \frac{a_\perp^2}{m_e^2c^2}=1-\frac{x^2}{1+\kappa_\parallel^2} \tag{16}$$

当 $\gamma\lesssim\omega_{ce}^2/\omega_e^2$ 较大时，如果能够提供足够高能量的电子，共振会沿下方 X 模分支远低于 ω_{ce}，其频率相差因子为 ω_e/ω_{ce}，这意味着此时的共振能量会很高。在磁层中，我们有 $\omega_{ce}^2/\omega_e^2\gtrsim 10^2$ 或更大；远离回旋频率时，这对应 $\epsilon_e=m_e\gamma c^2\sim 50\,\mathrm{MeV}$。那里不存在这种（约为超相对论的）电子，回过头来看，这也证实了假设共振接近 ω_{ce} 是合理的。（不过，我们注意到，Xiao 等人（2016年）曾提及高能电子，他们认为观测到的（A）KR 的源区位于辐射带。）另一方面，在含有极高能、甚至大多为超相对论电子的遥远天体物理系统中，接近回旋频率的情况可能并不常见，而激发

接近下截止频率 $\omega_{co}^{l} < \omega_X^{l} \ll \omega_{ce}$、被俘获于下支的长波长 $k_\perp \gtrsim 0$ X 模波可能成为可能，甚至可能是常态。在那里，电子回旋脉泽不稳定性将涵盖几乎整个 X 模下支。

宽广的高能电子分布可能在 X 模下支的大部分区域发生共振，从而促成电子回旋脉泽不稳定性（ECMI），并使下支 X 模波在很宽的频率范围内增长 $\omega_X^{l} < \omega_X(k) < \omega_{ce}$。共振波数由垂直传播条件下纯下支电子 X 模色散关系得出（Krall & Trivelpiece, 1973年；Baumjohann & Treumann, 1996年）

$$\frac{k^2c^2}{\omega_{ce}^2} = \frac{(\omega_{co}^{u2} - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{co}^{l2})}{\omega_{ce}^2(\omega_{uh}^2 - \omega^2)} \tag{17}$$

鉴于我们只关注电子，离子贡献以及小量的高次幂均已忽略。

这条色散曲线在 $\omega = \omega_{ce}$处与回旋频率相交，对应于 $k_{m\perp} \approx \sqrt{2}\,\omega_e/c$，其值约为电子惯性长度的倒数 $\lambda_e = c/\omega_e$，由此设定了共振波数的上限 $k_\perp$；这确实是一个很大的数，也就是说波长很短。不稳定范围 $\Delta k_\perp$ 对应于共振电子的能量范围 $\Delta\gamma(k_\perp)$

$$0 < k_\perp(\omega,\gamma) \lesssim \sqrt{2}/\lambda_e \tag{18}$$

取决于电子分布函数，只要电子能量足够高，沿着 X 模下支几乎任何位置都可能发生不稳定性。$k_\perp = 0$ 对应于在 X 模截止处的反射ω_{co}^{l}，显然位于不稳定波数范围之外。

在 $\omega \approx \omega_{ce}$ 附近，X 模的相速度变为 $v_X \approx c/\sqrt{2}$，这意味着在观测频率 $\omega \lesssim \omega_{ce} \approx 300$ kHz（即名义上的磁层 AKR 频率；Gurnett，1974年）下，相速度足够低，波在离开源区之前可以经历多次放大。

为验证这一点，我们求得群速度为

$$v_{gX} = \frac{d\omega}{dk_\perp} \approx -2^{3/2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_{ce}}\right)^2 c \ll -c \tag{19}$$

这远小于光速。对于 ECMI 增长率 Γ（ω_X），空间放大率 $K \approx -\Gamma/v_{gX}$为

$$K(\omega) \approx \frac{\Gamma(\omega)}{2\sqrt{2}c}\left(\frac{\omega_{ce}}{\omega_e}\right)^2 \tag{20}$$

这是一个相当大的值。假设 $\omega_e/\omega_{ce} \lesssim 0.1$，这对于极光源区来说是近似适用的，则群速度约为 $v_{gX} \lesssim 10^3$ km/s；在极光磁层中，这与阿尔fvén速度 v_A相当，约为$K \gtrsim 2\times10^{-4}\Gamma$（$\omega_X$）$\mathrm{km}^{-1}$。因此，对于增长率 $\Gamma \sim 10^{-4}\omega$，在名义发射频率 $\omega \sim 300$ kHz 下，我们有

$$K \gtrsim 4\times10^{-1}\ \text{千米}^{-1} \tag{21}$$

这相当于在一个波长内经历数个 e 折叠长度，足以激发中等（甚至较大）振幅的 X 模波。当然，这种量级的增长率 $\Gamma(\omega)$可能非常极端。将 $\Gamma(\omega)$降低两个数量级

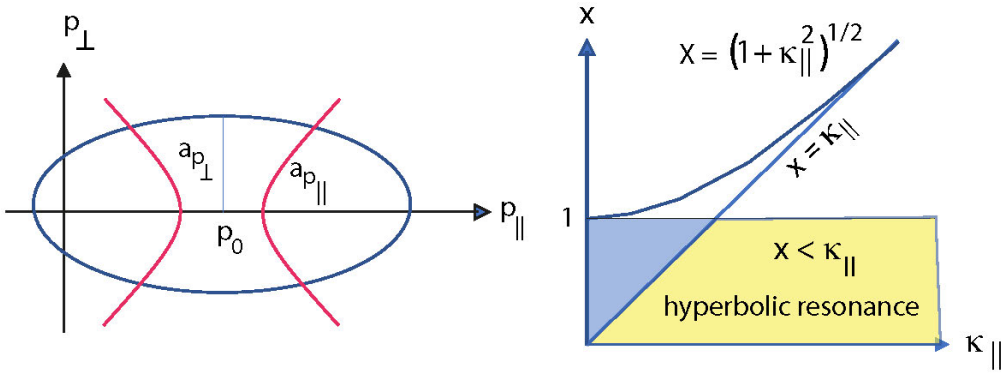


图2。方程（5）所示的不同共振拓扑随基频带 $x=\omega/\omega_{ce}$ 中的归一化频率$x<1$变化。图左侧所示类型的椭圆共振曲线，出现在直线$x=\kappa_{\parallel}$ 左侧以及曲线$x^2=1+\kappa_{\parallel}^2$下方，且位于基频带中完全相对论共振所要求的范围 $x<1$ $n=1$内。右侧黄色区域中，在 $x<\kappa_{\parallel}$ 和 $x<1$的条件下会出现双曲共振。红色部分左侧所示的类型即为共振双曲线。显然，其范围远大于椭圆共振曲线的范围。不过，其延展程度取决于共振非线性演化过程中对大波数的限制。事实上，共振范围并不局限于弱相对论共振理论所描述的 $x=1$ 附近。当相对论能量较高且 $\gamma\gg1$时，远低于 $x=1$ 的频率也会发生共振。

仍可在振荡和增长时间内，于 $\lambda_X\sim1$ km的一个波长范围内实现一次 e 折叠。这种放大率仍然很高。

这一估算表明，X 模下支上的电子回旋脉泽不稳定性能够在接近局部非相对论回旋频率 ω_{ce} 处产生振幅相当大的受限 X 模波，这主要是因为此处群速度显著降低，波有充足的时间增长，而后才离开源区。

如果源区沿着大致垂直于磁场 $\boldsymbol{B}_0$的传播方向延伸了足够多个波长，这里的增长就会变得显著。正是这一点，使 X 模下支上的电子回旋脉泽不稳定性（见图1）不仅本身十分引人关注，也因其可能与稀薄等离子体成分发生非线性相互作用而值得研究；这种成分的压力必然较低，因而容易受到大振幅电磁辐射及其有质动力影响。电子回旋脉泽不稳定性的不稳定波可能发生调制不稳定性，从而形成孤子链并使等离子体产生结构。这些效应尚未在电子回旋脉泽不稳定性的背景下得到研究，但在考察其精细结构时（参见 Baumjohann & Treumann, 2022 中的图2）以及研究极光环境对其存在的反应／响应时，可能发挥重要作用。

然而，在远离局部回旋频率 ω_{ce} 的区域，X 模分支上的增长会减弱，因为这里需要存在处于激发态的更高能电子 $\gamma\gg0.1$；这种情况在极光区几乎不存在。在这里，群速度会略微增加，而在接近较低的 X 模截止时则降至较低值。极光磁层中不存在大量相对论电子（不过，反例见 Xiao 等人，2016年）。二者之间的关系

$k_\perp$ 与 γ 是

$$k_\perp^2\lambda_e^2+1\approx\frac{1}{\gamma^2}\frac{\omega_{ce}^2}{\omega_e^2} \tag{22}$$

在较长波长范围内 $\lambda_\perp>\lambda_e$，由此可得

$$1<\gamma\lesssim\frac{\omega_{ce}}{\omega_e}\left(1-\tfrac{1}{2}k_\perp^2\lambda_e^2\right) \tag{23}$$

位于 $k_\perp$ 和 γ 之间，远离等离子体共振，且由于所需共振能量增加，共振频率降低。这些波数根据式（17）确定了 X 模下支上的共振位置。

然而，等离子体共振条件的椭圆性质难以与磁层中任何合理且实测的电子分布函数相匹配。这种分布应当是某种（相空间位移的）空心束，或带有平行位移 β_0 （以动量 p_0计）的马蹄形分布，其中高度稀薄的区域缺少高能电子，形成空穴。其边界由加速或散射后的冷电子束构成（Muschietti 等人，1999；Ergun 等人，1998）。这应当提供所需的正 $\beta_\perp$ 空间梯度，模拟共振电子的激发态。分布的束状特征是由观测者参考系中沿外场方向可见的有限位移 $\pm p_0$ 所决定的。这引出了一个问题：这种空心束分布是如何形成的？其成因可在强沿磁场电流产生电子空穴的过程中找到；这种现象被认为与极光磁层中的向下电流区有关（Treumann et al., 2012），在那里人们假定存在这类局部空穴，它们可能是电子空穴，也可能是在尺度较大时形成所谓的马蹄形分布。

然而，极光带观测似乎表明（理论也支持这一点），向下运动的电子中占主导地位的电子分布会形成损失锥分布；其中一部分电子被下方密集的电离层反射，另一部分则被吸收。基于共振椭圆并采用观测到的损失锥分布进行数值计算（Omidi 和 Gurnett，1984年），发现此处的放大率极低。此外，根据甚低频观测和理论，人们已相当清楚，强烈的甚低频噪声相互作用与放大会迅速耗尽或大幅削弱任何损失锥分布（LaBelle & Treumann，2002年）。这样一来，残余的共振几乎所剩无几，难以激发电子回旋脉泽不稳定性；这与基于损失锥分布进行的计算结果相当吻合。

电子空穴的形成会产生其他相关的电子源分布。这些电子空穴会形成强烈的场向电流，并衰减为局域静电结构，其沿磁场方向的延伸尺度仅为几个德拜长度 $\ell_\parallel\sim$ few λ_D，而垂直尺度较大，$\ell_\perp\gg\ell_\parallel$ 约为垂直方向 X 模波长的量级 $\ell_\perp\sim k_\perp^{-1}$。在这些空穴内部，满足激发电子态的条件。此处我们不详细探讨这一极为有趣的事实（Muschietti 等人，1999年）；我们在早期工作中曾提及此事（Treumann 等人，2012）。下一节将讨论我们在此最关心的问题：电子回旋脉泽不稳定性在 X模下支上的激发条件，以及它能否在不借助通常所设想的非均匀等离子体传播效应的情况下逃逸到自由空间（Zarka 等人，1986年；Louarn 等人，1990年；Lamy 等人，2010年）。

根据可用电子能量以及激发相空间分布函数 $f_e(p_\perp,\ p_\parallel)$，电子回旋脉泽不稳定性将在下 X 模分支的很大范围内发挥作用，驱动 X 模发生不稳定。可能发生这种情况的范围

由稀薄等离子体的条件 $\omega_e^2 \ll \omega_{ce}^2$ 以及分布函数所需满足的附加必要条件规定，即在（$p_\parallel$，$p_\perp$）平面上，共振曲线的适当范围内满足 $\partial f_e/\partial p_\perp > 0$。纯垂直传播时的这条共振线为

$$\sqrt{1+p_\perp^2/m^2c^2+p_\parallel^2/m^2c^2} = \omega_{ce}/\omega_X^l(k_\perp) \tag{24}$$

其中 $\omega_X^l(k_\perp)$ 是下 X 模分支的频率，右侧是 $k_\perp$ 的函数。当然，这些不稳定的 X 模波的频率 $\omega_X^l < \omega_{ce}$ 均低于非相对论回旋频率。它们被限制在等离子体中，只能通过原位探测，除非找到某种机制，使它们能够通过隧穿穿过回旋频率与上 X 模截止频率之间的 ECMI-X 模阻带 $\omega_{ce} < \omega < \omega_{co}^u$，从而逃逸到自由空间。

另一种可能性是经历我们提出的三波相互作用过程（Baumjohann & Treumann, 2022），下文将对此进行探究。然而，若严格保持垂直传播，也可以设想直接激发回旋频率 $\omega_X^u = n\omega_{ce}/\gamma$ 的高次谐波 $n > 1$。在回到三波过程之前，我们简要讨论这种

2.4 基频处的波波相互作用

从观测结果来看，尚不完全清楚是否观测到了二次谐波 AKR。基频辐射被困在 X 模阻带以下（见图1），只有在强烈非均匀的条件下才能逃逸，而这些条件至今尚未得到令人信服的阐明。另一方面，一旦识别出谐波辐射，就会发现其强度出乎意料地高。鉴于上述原因，人们可能会怀疑任何直接辐射机制的重要性。理论上很难重现它们所需的高增长率 $\Gamma_n \sim n\omega_{ce}$，也很难重现相应的大放大因子 κ_n。自由空间模会迅速逃逸，来不及获得任何放大，除非源区延伸到很远的距离，同时仍满足所有有利于激发的条件。除了基频 $\omega_X \lesssim \omega_{ce}$ 明显受到限制之外，在频谱图中观测到看似强烈的谐波辐射（例如，参见 Pottelette 等，2001）也构成了一个问题。

当然，这些条件还涉及对相空间中电子分布函数的必要充分条件，而且一般而言，满足这些条件可能并不容易。它们要求电子分布函数具有相当特殊的形式；若要有效促进增长，这些函数必须适应相空间中共振曲线的特定几何形状。此类分布函数沿相空间共振曲线（或至少沿其较大部分）必须具有正的垂直动量梯度，以便吸收沿共振曲线尽可能多的电子所作出的贡献，并使这些电子跃迁到更高的动量／能量激发能级。

这里我们关注的是使电子回旋脉泽不稳定性在 X 模下支转化为自由空间模的条件。如上所述，在下列条件 $\omega^l < \omega_{ce}$ 下，由于群速度相对较慢，电子回旋脉泽不稳定性在 X 模下支确实能够获得较大的放大。由于这里可以在垂直于外磁场的任意方向激发波，因此，(Baumjohann & Treumann, 2022) 提出的三波过程（Sagdeev & Galeev, 1969; Davidson, 1972）便成为可能：两个下支模相互作用，以抵消其较大的垂直波数，并产生一个长波长模；根据三波相互作用，该模的频率约为两波频率之和

总能量和动量守恒条件

$$\omega_X^u = \omega_{1X}^l + \omega_{2X}^l, \quad k_\perp^u = k_{1\perp}^l - k_{2\perp}^l \ll k_{1,2\perp}^l \tag{25}$$

它会产生一个长波长的 $k_\perp^u \approx \omega_X^u/c$ 上支 X 模，其频率 $\omega_X^u \lesssim 2\omega_{ce}$ 虽低于、但接近二次谐波 $n=2$。该波振幅很大，以自由空间模传播，可以毫无困难地逃离源区，并且不需要进一步放大。它可能与自由空间分支相交的条件是，其频率必须高于上支 X 模截止频率。由于下支上的每个共振波都满足共振条件 $\omega_X^l = \omega_{ce}/\gamma$，电子回旋脉泽不稳定性波在上支逃逸的条件为

$$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} > 1 + \omega_e^2/\omega_{ce}^2 \tag{26}$$

其中下标指参与相互作用的两个下支波，且我们忽略小量的高次幂。如果共振能量相差不大，则可得

$$1 < \gamma < \frac{2}{1+\omega_e^2/\omega_{ce}^2} \tag{27}$$

当然，这与上文给出的上 X 模分支上二次谐波 $n=2$ 以下直接激发的条件相同。然而，在当前情况下，其含义却大不相同。两个相互作用的波均为慢波，且已增长到大振幅。在迎头碰撞相互作用中，它们会产生略低于二次谐波 $n<2$的大振幅逃逸辐射。当分母中的频率比 ω_e/ω_{ce} 较小时，边际相对论因子接近 $\gamma \lesssim 2$；或者如前所述，电子能量的上限为 $\epsilon_e \lesssim 0.9$ MeV。

低能电子会在接近 ω_{ce}处激发 X 模下支上的电子回旋脉泽不稳定性，但接近能量上限的较高能电子也会有所贡献。它们会根据 $\omega_X^l = \omega_{ce}/\gamma$使下支上的共振频率降低。因此，原则上，电子回旋脉泽不稳定性几乎可以在整个 X 模下支上被激发。然而，只有由上述能量范围有限的电子激发的波，才允许通过三波碰撞过程产生逃逸辐射。这些电子的能量决定了共振在 X 模下支色散关系 (17) 上的位置。

我们有 $\omega^2 \ll \omega_{co}^{u2}$，并忽略 ω_e/ω_{ce} 的高次幂；在所有预期电子回旋脉泽不稳定性会变得有效的情况下，这种处理都是合理的。在这种情况下，X模下支的色散关系（17）可简化为

$$\frac{k_\perp^2 c^2}{\omega_{ce}^2} \approx \frac{\omega^2 - \omega_{co}^{l2}}{\omega_{ce}^2} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\omega_e^2}{\omega_{ce}^2} \tag{28}$$

得到 $k_\perp$ 与 γ 之间的关系；该关系重现了条件（15），且沿整个X模下支均成立

$$1 < \gamma < \frac{\omega_{ce}/\omega_e}{\sqrt{k_\perp^2\lambda_e^2+1}} \tag{29}$$

所有波数

$$k_\perp \lambda_e \lesssim \frac{\omega_{ce}}{\omega_e}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\omega_e}{\omega_{ce}}\right) \tag{30}$$

都适用于上截止频率以上的三波电子回旋脉泽不稳定性辐射过程，包括几乎整个下支波数范围。结合关于 γ 和 $k_\perp$ 的最后三个条件可知，当频率比

$$\omega_{ce} > \sqrt{3}\,\omega_e \tag{31}$$

在极光磁层中，这一条件很容易满足：在极光千米波辐射发射的情况下，电子回旋频率远高于等离子体频率。

作为本节的收尾，值得特别指出的是，对于 Z 模，完全相同的非线性波波相互作用辐射生成机制已在近似的第二 $n = 2$ 和第四 $n = 4$ 回旋频率谐波处得到详细阐明（Yoon 等人，2016）。原则上，这一机制会与本文提出的 X 模下支上的电子回旋脉泽不稳定性波波生成机制相竞争，但遗憾的是，这两种机制彼此排斥。电子回旋脉泽不稳定性仅在比值 $\omega_e/\omega_{ce} \ll 1$ 较小时起作用。在这种情况下，Z 模会被限制在 $x \approx \omega_e/\omega_{ce}$ 附近一个相当狭窄的区域内（Melrose，1986）。另一方面，当该比值较大时——例如在向下电流区可能就是如此——电子回旋脉泽不稳定性便变得无关紧要，而 Z 模的激发占据主导地位（不过，参见下文关于向下电流的章节中的讨论）。这确实是一个非常有趣的情形，因为它预示着在这种情况下，极光千米波辐射可能由上混杂频率 $\omega \sim \omega_{uh}$附近 Z 模的非线性并合而产生。在这种情况下，Z 模的生成远不像 X 模上的电子回旋脉泽不稳定性那样受到限制。众所周知，在极光磁层中，甚低频的持续存在会相当频繁地激发 Z 模（LaBelle & Treumann，2002）；这些 Z 模不一定只出现在极光带且磁活动极强时，而是会在空间和时间上扩展到更广的纬度和经度区域。可以预期，通过波波相互作用机制，Z 模（可能位于向下电流区、向上电流区之外）和 X 模（优先位于向上电流区）都会在自由空间 X 模中产生强烈逃逸的极光千米波辐射，其谐波频率几乎相同。

2.5 非线性演化

位于 $\omega_X/\omega_{ce} \equiv x = 1$ 下方、具有电子回旋脉泽不稳定性的 X 模下支是一种慢波，其相速度$v_{ph} = \omega/k < c$ 相对较低，尤其是群速度 $v_g = \partial\omega/\partial k < c$较低，二者都远低于光速。正如上一节所述，这些特性使波能够增长并达到足以违反线性假设的振幅。在这种中等或大振幅状态下，由于无法离开 X 模阻带下方的等离子体，该波会对稀薄的低压等离子体背景施加缓慢变化的有质动力。（请注意，在这一整套理论中，通常假设等离子体至多处于温和状态；就波的色散而言，甚至假设背景是冷的。）有质动力是对整个不稳定波系综取平均的结果，因此体现了集体作用。有质动力的变化很缓慢，发生在离子时间尺度上。等离子体对这一力作出响应：如 Sagdeev-Zakharov（缓慢变化的非线性薛定谔）方程所述（例如，参见 Davidson, 1972；Treumann & Baumjohann, 1997），等离子体会激发离子声波，在稳态条件下，这些离子声波会导致

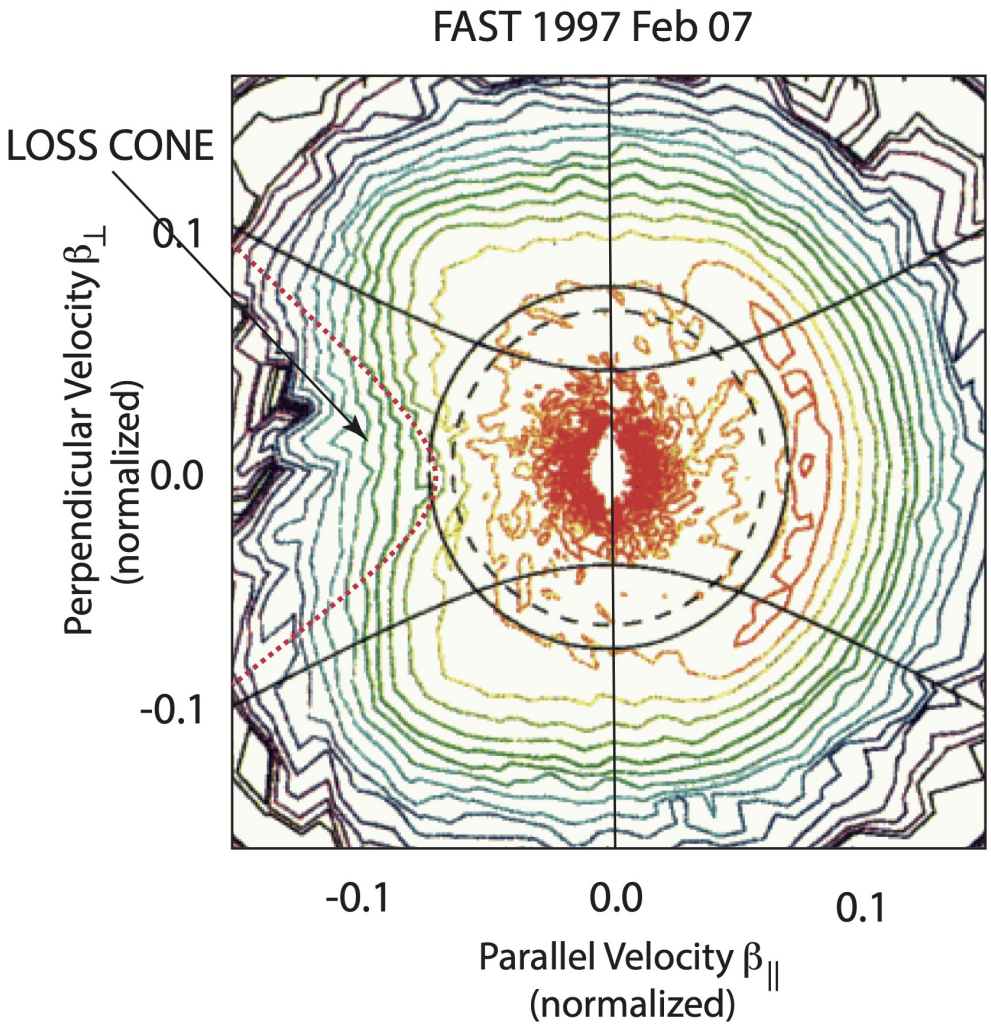


图3. 在推测的极光千米波辐射上行电流极光源区测得的损失锥分布（引自 Delory 等，1998年；详细观测描述请参阅该文）。向下电子通量的强度以颜色编码（从黑色到红色，覆盖5个数量级的通量），红色表示最高强度，此处指示较稠密的温暖的极光磁层电子背景。宽度相当大的上行（归一化平行速度为负 $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c < 0$）电子损失锥清晰可见。圆圈表示其理论（实线）和观测到的（虚线）低速边界。在正平行速度处，红色香蕉形区域表示高能向下极光电子束。两条黑色双曲线表示内、外相空间区域的理论角度界限。负值（向上） $\beta_{\parallel}$ 处的红色点虚线双曲线，是沿损失锥边界、关于 $k_{\parallel}c > \omega$ 的共振双曲线。沿此双曲线及其内部的正垂直梯度会促成共振电子回旋脉泽不稳定性增长。损失锥足够宽，其边界内可容纳连续的一系列此类双曲线，从而使电子回旋脉泽不稳定性在恒定频率 ω 下具有带宽 $\Delta\omega$。观测结果的不确定性过大，无法计算定量数值。

形成包络孤子，即能够俘获高频下支 X 模波的密度空穴。这些结构的相对准中性密度调制 $\delta N/N_0$（离子声波振幅）根据压力平衡表现为密度空穴（空穴子），其与 X 模振幅的关系为

$$\frac{\delta N}{N_0} \approx -\frac{\epsilon_0}{4m_i N_0 c_{ia}^2}|\delta E_X|^2 \tag{32}$$

其中 $c_{ia} \ll c$ 为离子声速。X 模波在密度空穴中的俘获会导致波谱出现空间调制。（值得注意的是，此处只有电场振幅。电磁波的磁场振幅在相对论效应下很小。）与此同时，这还会带来另外两种重要效应。

首先，参与其中的 X 模波谱被俘获后，波会分裂成两组波数方向相反的波 $\pm k_{tr}$，它们在密度空穴内来回反弹。因此，多个这样的波将参与上述三波过程，产生二次谐波辐射 $\omega_X \lesssim 2\omega_{ce}$。这会造成波能量损失，并可能最终阻止密度空穴继续加深，也就是说，使非线性离子声波振幅趋于稳定，尽管辐射损失通常仍然很弱。

第二个有趣的效应涉及俘获波模的波长 λ（或波数 k_X）。空穴子形成和演化过程中空穴子形状保持不变，这意味着空腔内的波数（波长）保持不变。因此，空腔尺寸缩小必然会使波长变短、波数增大 k_X，如下所示

$$k^2 \propto \epsilon_0|\delta E_X|^2 \tag{33}$$

右侧为波能量密度，它在空穴子非线性形成过程中演化，即空穴子单位体积内各个波能量之和 $\hbar\omega$，而频率保持不变。这会影响俘获波的色散。这一点本身就非常有趣。

尽管空穴子内部的受困X模波最初沿线性X模的线性色散支传播，但空腔收缩和波长缩短会改变共振附近的线性X模支，直至其变为非线性；这是一个相当复杂的过程，会显著改变线性色散。事实上，由于与高能源电子组分发生共振相互作用，色散曲线偏离了其线性拓扑，X模在此处变为准静电波，因此能够通过有质动力和自洽生成的空穴子内部的粒子俘获来影响等离子体（例如，参见Schamel，2022年，关于纯静电波的完整非线性理论）。共振仍发生在此处的 ω_{ce} 之下，不过接近该位置（除非考虑非线性频移；此处假设该频移属于高阶效应，因而可忽略）。波频率保持不变意味着，非线性（近似静电的）相互作用会将色散曲线延伸至较大的波数 k_{nl}，显著超过线性波数 k；与此同时，频率仍低于电子回旋频率，从而避免向上穿越该频率并接近上混杂共振 ω_{uh}，因为共振条件不允许这种情况（只要其本身仍保持线性）。

这会使 $k \to k_{nl}$ 相速度 $v_{ph,\ nl} = \omega/k_{nl} \propto \omega/\sqrt{|E_X|^2}$ 进一步大幅降低。此外，波在空穴子内部突然发生的自洽俘获（由有质动力所致）意味着

群速度会急剧减慢至 $v_g \sim c_{ia}$，从而与离子声速相匹配。正如上文所述，相速度减慢会显著提高空间放大率。因此，波在局部经历许多 e 折叠，且由于 e 折叠长度增加，波放大也会很大。由于这两种效应，受困X模波的振幅很容易增大；这不仅会使空穴子进一步加深，还会强烈促进波波相互作用和二次谐波辐射 $\omega_X \lesssim 2\omega_{ce}$。如上文所述，高次谐波共振几乎不可能产生同样强烈的辐射。相比之下，X模下支处的共振 $x = \omega/\omega_{ce} \lesssim 1$ 会放大受限短波长X模（例如从热电磁背景噪声中拾取的短波，参见 Yoon & Lopéz, 2017），这些波以大幅降低的相速度传播，并经历许多 e 折叠。

3 双曲共振

线性色散的非线性变形对共振的拓扑结构还有另一项深远影响；迄今为止（至少据我们所知），ECMI相关文献尚未注意到这一点。考察共振条件 (4) 即可发现这一点。线性状态下的相对论共振在 $\boldsymbol{\beta}$ 空间或 $\boldsymbol{p}$ 空间中表现为著名的椭圆。然而，在非线性状态下，椭圆有可能转变为双曲线

$$\frac{(p_\parallel - p_0)^2}{a_{\parallel p}^2} - \frac{p_\perp^2}{a_{\perp p}^2} = 1 \tag{34}$$

在非线性演化过程中，随着波数 $\kappa = kc/\omega_{ce}$ 增大，根据方程 (5)，当某个斜传播角 θ 下的守恒归一化频率 $x = \omega/\omega_{ce} < \kappa_\parallel$ 降至低于平行归一化非线性波数 $\kappa_\parallel$ 时，就会出现这种情况。（可以注意到，这会使 (5) 中的分子保持不变，因此只有横向半径 $a_{\perp p}$ 会受到影响并变为虚数。）该条件只涉及平行波数，因此只是对传播角 θ 的一个简单限制，这意味着

$$\cos\theta > \omega/ck_{nl} = \frac{v_{ph,nl}}{c} \tag{35}$$

超过了大幅降低的非线性相速度$v_{ph,\ nl}$与光速之比。这表明，要发生拓扑切换，共振角应转向更加平行的方向。在接近回旋频率ω_{ce} 处，即使在线性区间内，这一条件也很容易满足；如图1所示，色散在穿过 $x = 1$线之前不久便开始变平。这实际上排除了垂直传播产生双曲共振的可能性，不过这一点本来就很明显。共振仅限于非线性演化开始时的 $x < 1$，而波数$k \to k_{nl}$ 随后平滑增加，这保证了在满足上述条件的斜传播中始终符合该条件；随着非线性进一步演化，这一条件会有所放宽。值得注意的是，这一重要的共振拓扑变化发生在完全相对论共振区间内，而迄今为止，相关应用一直避开了这一区间。这一变化在具有天体物理学意义的超相对论区间中尤为重要。

因此，从线性椭圆型共振过渡到非线性双曲共振是很自然的。在这一过程中，共振波在非线性相互作用期间变得越来越倾斜。另一方面，显然，对于任何未受限、因而不会发生非线性相互作用的共振 $n>1$，都不可能实现这种情况。

对相对论共振条件 $x\gamma(\boldsymbol{p}) = 1+\kappa_{\|}p_{\|}/m_e c$ 在 $x\approx 1$ 保持恒定时进行变换，可得其上限

$$\cos\theta < \frac{\gamma-1}{\gamma\beta_{\|}}\frac{\omega_{ce}}{k_{nl}c} = \frac{\epsilon_{kin}}{m_e c^2\beta_{\|}}\frac{\omega_{ce}}{\omega_e}(k_{nl}\lambda_e)^{-1} \tag{36}$$

其中，k_{nl} 是增大的非线性波数。只要右侧大于 1，这实际上并非严格限制。否则，它只会排除一段近似平行传播角，从而允许在宽广的斜向角区间内发生双曲共振 $\Delta\theta$。

3.1 向上电流区

事实证明，向上电流区是应用双曲共振的理想场所。我们将证明，该区域最适合以著名的损失锥分布作为此处产生极光千米波辐射的主要源。

极光磁层中推测的向上电流极光千米波辐射源区的观测结果（例如，Pottelette & Treumann, 2005）表明，源电子的动能约为 $\epsilon_{kin}\sim 10$ 千电子伏，而频率比约为$\omega_{ce}/\omega_e\sim 10$。测得极光电子的平行速度约为 $\beta_{\|}\sim 10^{-1}$。此外，稀薄向上电流区的电子惯性长度约为 $\lambda_e\sim 0.5$ 千米。在这些数值的不确定范围内，可得

$$\omega/ck_{nl} < \cos\theta < 1/k_{nl}\lambda_e \tag{37}$$

由于左侧很容易接近 $x=1$，因此对于任何长于电子惯性长度的非线性波长 $\lambda_{nl}\gtrsim\lambda_e$，传播角在此均不受限制；这只是一个相当宽松的条件。如果 k_{nl} 进一步增大并超过这一限值，双曲共振会变得更加倾斜，但仍覆盖较大的角度范围。

因此，向上电流区中 X 模下支上的共振（该区域或许是其最重要的适用范围）很自然地会从椭圆型转变为双曲型。这种形式与损失锥分布及损失锥内部十分契合，至少不亚于共振椭圆。

图3展示了一个例子：这是二十年前在向上电流区对向下电子通量进行的 FAST 最高分辨率观测之一（Delory 等，1998）。图中表明，与通常采用的共振椭圆不同，双曲共振能够方便地覆盖整个内部垂直电子通量（速度空间分布）梯度 $\partial f_e/\partial\beta_{\perp}>0$；该梯度由损失锥内部提供，可用于激发电子回旋脉泽不稳定性的 X 模下支。这对源电子分布函数的选择具有一定的阐释意义。显然，双曲共振恰恰支持广为认可的损失锥分布，将其视为此处主要的电子相空间源分布；这一点既有持续观测，也有理论依据。

合理的结论是，在向上电流区，损失锥分布（如图3所示，Delory 等，1998）在任何情况下都能使 $\omega\lesssim\omega_{ce}$ 正下方（见图1）的 ECMI下支变得越来越不稳定

并进入其向大波数 $k\lambda_e < 1$ 演化的非线性阶段。预计在相当适中的振幅下，这种情况就会发生；此时线性色散关系很容易变形成其非线性对应关系，从而参与双曲型而非椭圆型共振。

在稀薄的上行电流低压等离子体背景中，需要强调的是，只要选择热电磁背景噪声所提供、适合放大的初始波数和频率区间（关于这种噪声的存在，斜传播时尤其在低于且接近 ω_{ce} 处可见 Yoon & Lopéz, 2017），即使受限的 ECMI-X 模式振幅相当适中，也足以进入非线性状态。

这种共振转换与上行损失锥分布相当吻合：对于波数谱 $\Delta k_{res}\ k$，在 ω_{ce}以下激发窄谱带 $\Delta\omega$。这些区间由损失锥的角宽以及共振垂直动量空间梯度的陡峭程度决定。

如图3图注所述，圆圈将损失锥与低电子速度下未受影响的等离子体主分布区分开来。观测结果无法明确识别分布的平行位移 p_0。图中两条黑色双曲线在向上的部分描绘了损失锥的边界，而在向下的一侧则是伪影。暂定沿损失锥边界画出了一条共振双曲线（红色）。损失锥内整个垂直动量/速度梯度为正的区域，都可能由一系列这样的共振双曲线连续填充。在任意固定的共振平行动量$p_\parallel$ （或速度 $\beta_\parallel$）下，这决定了增长率 $\Gamma_{n=1}(p_\parallel,\ \omega)$随共振频率的变化，并可估算激发带宽；AKR 源的原位观测表明，在所谓的基本事件中，该带宽仅为数千赫兹左右（参见 Baumjohann & Treumann, 2022 中的讨论）。遗憾的是，等通量线上的数据散布很大，因此无法进行这一估算。

基频 X 模中的辐射受到限制，无法逃逸，至少无法在局部逃逸；除非它发生散射，并沿磁场方向向上传播（但传播方向与磁场有倾角），直至逐渐转变，最终进入磁层尾部的自由空间 X-R 模分支。否则，如上所述，大振幅 X 模仍会被困住，并经历非线性波波相互作用，产生能够逃逸的二次谐波辐射。据推测，这就是为何在向上电流区观测到局部强烈、但由于接近 $x = 1$ 而极窄带且受等离子体限制的电子回旋脉泽不稳定性辐射；其频率接近基频 $x \sim 1$ （Pottelette & Treumann, 2005; Baumjohann & Treumann, 2022）。这些受限的大振幅放大波通过波波相互作用，将受限的 X 模转变为能够逃逸至自由空间的 X 模辐射，其频率为 $\omega \lesssim 2\omega_{ce}$，低于二次谐波。

3.2 向下电流区

当然，同一双曲共振条件 (36) 在向下电流区也成立，但此处基本已获证实且合理地不存在任何损失锥分布，因此必须通过其他机制，使源区电子分布函数沿共振双曲线具有正的垂直相空间梯度。否则，如果向下电流区不存在适合双曲共振的电子分布，则需要$v_{ph} \sim kc$，此时共振会重新变为椭圆型。看来这确实适用于向下电流区，尽管

这一条件难以满足。这意味着低支 X 模波必须保持相当大的相速度，并且共振会偏离电子回旋频率；这一条件很难实现。

遗憾的是，目前（至少据我们所知）这里还没有角分布电子通量和分布函数的同等高分辨率测量。因此，电子分布的确切形式尚不清楚，未来（希望已规划并能够实施）的极光磁层空间任务确实值得在亚暴期间空间范围相当狭窄、且成排出现的极光向下电流区中对此加以重点研究。电子通量向上，能量低，在空间上具有高度结构化特征，且随时间高度变化。相应的向上电流并不像向上电流区中的向上电流那样平滑地分布在较宽的纬度范围内；在向上电流区，向上片状电流分布较为平滑，这反映在电流横向磁场分量平滑的空间变化上，而这正是宽阔、基本无结构的主磁场对齐片状电流的典型特征。

与向上电流区不同，向下主磁场对齐电流流经纬度范围狭窄的平行电流片或电流束，它们被强度相当大的外部地磁场彼此隔开。因此，电流横向磁场分量在空间上显著波动，这是存在许多狭窄电流丝的典型特征。主地磁场足够强，能够抵消这些准静态狭窄磁场对齐片状电流之间的洛伦兹力；这些电流彼此吸引，却无法合并。向下电流区位于极光空腔边界，其平均密度相对较高，但仍处于 $\omega_e/\omega_{ce} < 1$ (Temerin& Carlson, 1998年)所述范围内。电离层来源的向上运动的载流闭合电流电子能量至多只有 $\epsilon_{kin} \sim$ 几千电子伏左右，约比向上电流区低一个数量级。相关的向上速度 $\beta_{\|}$ 降低约十倍，大致抵消了动能的下降。

向下电流足够强烈，能够引发电流不稳定性，包括在强平行于电流的导引磁场中发生磁重联，尤其是非线性演化（Carlson 等人，1998年）；这种演化会重塑并扭曲电子分布函数，并产生大量（所谓的）德拜尺度静电结构（Bernstein 等人，1957年；Ergun 等人，1998年），以及沿磁场传播的离子空穴和电子空穴。此处的德拜长度约为 $\lambda_D \lesssim 10\,\mathrm{m}$，具体取决于空间变化的密度和温度。尚不清楚这是否有利于电子回旋脉泽不稳定性。由于缺乏损失锥，双曲共振的吸引力较低，因此需要相当特殊的源电子相空间分布。这些分布可能由此类非线性德拜尺度结构——电流驱动电子空穴——提供。有人提出（Muschietti 等人，1999年等），空穴会剧烈扭曲电子分布函数，在其中挖出相空间空穴；这些空穴内部包含高度稀薄、温度较低且压强较低的电子群体，周围则由密度更高、空穴场加速速度远高得多的冷壁在相空间中所界定。在这些边界处，相空间分布会形成陡峭梯度，可能有助于激发电子回旋脉泽不稳定性。基于这些不完整的空心电子相空间分布（有时称为马蹄形分布），有人也用这一模型提出了此处可能存在电子回旋脉泽不稳定性，其依据是椭圆型而非双曲型共振（Treumann 等人，2011年，2012年）。

观测到的电子空穴沿磁场延伸数个 λ_D，但在垂直延伸方向上的限制要小得多，其范围受不稳定场向电流丝的宽度和电子回旋半径所限；对于主要源电子而言，后者约为 $r_{ce} = \beta_{\perp} c/\omega_{ce} \lesssim 1$ km。在这些.....中俘获线性激发的 X 模（为此目的而言

的电子回旋脉泽不稳定性预先存在的）等离子体空洞中（这些空洞是电流不稳定性非线性演化的结果；有关这一主题，最新的完整理论参见 Schamel，2022年），俘获线性激发的 X 模主要发生在 $k_\perp > k_\parallel$，即垂直波长较短且传播略呈斜向 $\theta \lesssim 90°$。在下支 X 模靠近 $x = \omega_X/\omega_{ce} \sim 1$ 处，这一观点得到支持：此处波数增大、波群速度降低，不过这一点仅适用于垂直波数。这意味着，在这些空穴内，$\kappa_\parallel < x$ 是合理的选择；其德拜尺度结构特性仅适用于平行方向。因此，电子空穴俘获假说认为，此处的共振呈椭圆形，而相邻向上电流区的共振则呈双曲线形。

X 模频率范围与这些垂直波长相吻合，而这些波长会被俘获在平行方向的德拜尺度空穴中。将椭圆共振条件应用于此类扁椭球空穴内部，表明电子回旋脉泽不稳定性（ECMI）可以被激发。与向上电流区不同，ECMI 是由相空间空穴的垂直边界引起的，而不是由中尺度电子分布的一般形态引起的，因为这里的电子分布并不属于损失锥族。相反，这种电子分布是由电子空穴自洽的非线性演化所形成的。空心／马蹄形电子空穴及相关相空间分布的生成，主要独立于 X 模的激发，而是由足够强的沿磁场电子电流的非线性演化所致（关于静电波的相关研究，Schamel（2022年）已作过详尽综述）。正是这种非线性演化所形成的特殊电子相空间分布，在下游电流区可能促进下支 X 模在椭圆共振或双曲共振条件下的激发，并促使其增强至较大的局部振幅，同时经历波波相互作用，从而逃逸至自由空间。

被空穴俘获的下支 X 模沿磁场方向具有很长的平行波长 $\lambda_\parallel \gg \lambda_D$，远大于德拜尺度。它与大量沿磁场密集串联的德拜尺度低密度空穴重叠，因此在其平行波长范围内，实际上会受到沿磁场分布的所有这些空穴的放大作用。与此同时，波在垂直方向上同步地在所有空穴内来回反射。尽管每个空穴对波的增长贡献各不相同，但所有空穴的协同作用平均而言应能显著放大 X 模。如果确实如此，预期原位观测将探测到高度暂态结构化、窄带且强烈的受限短垂直波长 X 模辐射，其传播群速度显著低于光速。其频率将非常接近局地电子回旋频率 $\omega \sim \omega_{ce}$。这种缓慢辐射增长至大振幅后，将再次发生波波相互作用，产生逃逸出源区、可从远处观测到的二次谐波辐射。然而，受俘获的大振幅基频窄带 X 模辐射只能通过原位观测到（例如 Baumjohann & Treumann, 2022 的图2），此时它与整串空穴一起沿磁场移动。如果它在空穴的整个寿命期间都保持受俘获状态，那么（正如令人惊讶地观测到的那样，参见 LaBelle等人, 2022 及其中的参考文献），它也会被空穴从源区输运出去，向下到达电离层（Treumann et al., 2012a），或向上进入磁层。DEMETER航天器的观测也报告了上电离层中的类似现象（Parrot与Berthelier, 2012；Parrot等人, 2022）。

4 结论

将完全相对论理论下的 ECMI 共振条件应用于极光磁层后发现，此前遗漏的一个区域中，椭圆共振转变为双曲共振，因而其拓扑性质完全不同；这与极光上行电流区中损失锥的观测相符，并揭示了若干有趣的事实。首先，即使损失锥狭窄且部分填充，损失锥分布在完全相对论理论下仍可成为有效源，激发相当窄带的下支 X 模，而这些模式无法逃离源区。这些模式的频率带宽由给定波数下狭窄的损失锥边界决定；根据观测，其带宽至多约为几千赫兹。只有在 ECMI 源区内进行原位观测才能探测到它们。其次，这些局地激发的波具有较低的相速度和群速度，被俘获在源区内，经历多次指数增长，并演化至大振幅。这会产生非线性效应，使波数进一步减小，直至非线性波被俘获在空腔中；在空腔内，波发生波波相互作用，产生高于上 X 模截止频率、处于自由空间模中的二次谐波辐射。此后，辐射便会逃逸。这一图景完善了极低密度向上电流区中由电子回旋脉泽不稳定性激发极光千米波辐射的理论。

电子回旋脉泽不稳定性是否也能在向下电流区起作用，仍不确定。首先，该区域未必具备极低密度这一条件。在这种情况下，电子回旋脉泽不稳定性不应发展。然而，向下电流区存在大量所谓的德拜尺度结构，即极低密度的电子空穴。它们沿磁场方向的长度为数十个德拜长度，而在垂直方向延伸的范围则有多个电子回旋半径，对应于 X 模的横向波长。X 模在垂直方向上能够容纳于空穴之中，并在空穴的低密度区域得到进一步放大并发生非线性演化。因此，电子回旋脉泽不稳定性产生的极光千米波辐射也可能由此产生，不过其机制截然不同。

此外，在向下电流区中，Z模辐射也可能在所有未因德拜结构而发生稀释的区域与其他辐射竞争。在这些区域，Z模传播并受甚低频波激发，经历波—波相互作用，进而在第二次谐波、甚至可能更高次谐波处辐射。这种机制并非基于电子回旋脉泽不稳定性，但在研究向下电流区时值得考虑。

关于极光千米波辐射，另一项极为有趣的观测是：在航天器高度处，它似乎会微弱地泄漏至电离层，并且在有利但仍未知的条件下，甚至能一路传播到地面。这些观测提出了一个有趣的问题：在距地面至少 1000 km 的高度产生的极光千米波辐射，如何穿过电离层密度屏障，甚至跨越它？这种传播似乎是不可能的。然而，如果辐射产生于密度空腔中——无论是在向上电流区的自生空腔，还是在向下电流区的德拜尺度空腔中——那么 X 模可能会被困在这些空腔内，并随空腔一同向下输运至电离层。在这一过程中，少数波可能存活下来并泄漏出去。这项极为有趣的观测仍有待理论解释。

致谢。这项工作是（RT）在伯尔尼国际空间科学研究所参加短期访问科学家计划期间开展的。我们感谢 ISSI 管理层对此表示关注，也感谢 ISSI 工作人员的热情接待；特别感谢图书馆员 Andrea Fischer 和 Irmela Schweitzer，以及系统管理员 Willi Wäfler 提供的协助。

参考文献

Akasofu, S.-I., 关于亚暴的若干“争议性”问题。《空间科学评论》113, 1, 2004年。https://doi.org/10.1023/B:SPAC.0000042938.57710.fb. Akasofu, S.-I., 基于电流方法对地磁暴和极光／磁层亚暴研究的综述。《天文学与空间科学前沿》7, 100, 2020年。https://doi.org/10.3389/fspqs.2020.604750. Baumjohann, W., and Treu mann, R.A., 《基础空间等离子体物理学》。ICP London, 1996年。第三版：世界科技出版公司，新加坡，2022年。Baumjohann, W., and Treumann, R.A., 极光千米波辐射——电子回旋脉泽范式。《天文学与空间科学前沿》9, 1053303, 2022年。https://doi.org/10-3389/fspas.2022.1053303. Benediktov, E.A., Getmantsev, G.G., Sazonov, Y.A., and Tarasov, A.F., 《宇宙研究》。《苏联宇宙研究物理学》3, 614492, 1965年。Bernstein, I.B., Greene, J.M., and Kulsrud, M.D., 精确的非线性等离子体振荡。《物理评论》108, 546, 1957年。https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.546. Budden, K.G., 《无线电波的传播》，英国剑桥，剑桥大学出版社，1988年。Carlson, C.W., McFadden, J.P., Ergun, R.E., Temerin, M., Peria, W., Mozer, F.S., 等，FAST在向下极光电流区的观测：高能向上电子束、平行电势降和离子加热。《地球物理研究快报》25, 2017, 1998年。https://doi.org/10.1029/98GL00851. Davidson, R.C., 《非线性等离子体理论方法》。学术出版社，纽约，1973年。Delory, G.T., Ergun, R.E., Carlson, C.W., Muschietti, L., Chaston, C.C., Peria, W., 等，FAST对极光千米辐射源区内电子分布的观测。《地球物理研究快报》25, 2069, 1998年。https://doi.org/10.1029/98GL00705. Ergun, R.E., Carlson, C.W., McFadden, J.P., Mozer, F.S., Muschietti, L., Roth, I., and Strangeway, R.J., 与沿磁场方向的电场相关的德拜尺度等离子体结构。《物理评论快报》81, 826, 1998年。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.826. Gurnett, D.A., 地球作为射电源：地球千米辐射。《地球物理研究杂志》79, 4227, 1974年。https://doi.org/10.1029/JA079i028p04227. Hirshfield, J.L., and Granatstein, V.I., 电子回旋脉泽——历史回顾。《IEEE微波理论与技术汇刊》25, 522, 1977年。https;//doi.org/10.1109/TMTT:1977.1129150. Kamide, Y., and Baumjohann, W., 《磁层—电离层耦合》。施普林格，纽约，1993年。Krall, N.A., and Trivelpiece, A.W., 《等离子体物理学原理》。麦格劳-希尔，纽约，1973年。LaBelle, J., and Treumann, R.A., 极光射电辐射，1. 嘶声、轰鸣声和脉冲。《空间科学评论》101, 295, 2002年。https://doi.org/10.1023/A:1020850022070. LaBelle, J., Yearby, K., and Pickett, J.S., 南极站地基观测与Cluster卫星对泄漏和逃逸极光千米辐射的测量。《地球物理研究杂志》127, e2021JA029399, 2022年。https://doi.org/10.1029/2021JA029399. Lamy,L., Zarka,P.,Cecconi, B.,andPrange, R.,卡西尼号观测揭示的极光千米波辐射日、半日及更短周期调制。《地球物理研究杂志》115, A09221, 2010年。https://doi.org/10.1029/2010JA015434. Louarn, P., Roux, A., de Ferraudy, H., Le Queau, D., Andre, M., and Matson, I., 俘获电子作为极光千米波辐射的自由能来源。《地球物理研究杂志》95, 5983, 1990年。https://doi.org/10.1029/JA095iA05p05983. Melrose, D.B., 《空间与实验室等离子体中的不稳定性》。剑桥大学出版社，英国剑桥，1986年。Melrose, D.B., 回旋脉泽与太阳尖峰暴发。《空间科学评论》68, 159, 1994年。https://doi.org/10.1007/BF00749134.

Muschietti, L., Ergun, R.E., Roth, I., and Carlson, C.W., 沿磁力线分布的相空间电子空穴。《地球物理研究快报》26, 1093, 1999年。https://doi.org/10.1029/1999GL900207. Omidi, N., and Gurnett, D.A., 极光千米波辐射的沿路径积分增长。《地球物理研究杂志》89, 10801, 1984年。https://doi.org/10.1029/JA089iA12p10801. Parrot, M., and Berthelier, J.-J., DEMETER卫星在低高度观测到的类极光千米波辐射发射。《地球物理研究杂志》117, ID 10314. https://doi.org/10.1029.2012JA017937. Parrot, M., Nemec, F., and Santolik, O., 低高度DEMETER卫星在6.5年间记录的类极光千米波辐射发射特性。《地球物理研究杂志》127, ID e30495. https://doi.org/10.1029/2022JA030495. Pottelette, R., Treumann, R.A., and Berthomier, M., 极光等离子体湍流与极光千米波辐射精细结构的成因。《地球物理研究杂志》106, 8465, 2001年。https://doi.org/10.1029/2000JA000098. Pottelette, R., and Treumann, R.A., 极光上行电流区中的电子空穴。《地球物理研究快报》32, L12104, 2005年。https://doi.org/qo.1029/2005GL022547. Pritchett, P.L., 相对论损失锥分布产生的电子回旋脉泽辐射，《流体物理》27, 2393, 1984年。https://doi.org/10.1063/1.864542. Sagdeev, R.Z., and Galeev, A.A., 《非线性等离子体理论》。W.A. Benjamin Inc., 纽约，1969年。Schamel, H., Landau理论之外Vlasov-Poisson等离子体中的图样形成：由电子和离子空穴平衡态连续谱所致。arXiv [physics.plasma-ph] 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.01433. Temerin, M., and Carlson, C.W., 向下极光电流区中的电流—电压关系。《地球物理研究快报》25,2365, 1998年。https://doi.org/10.1029/98GL01865. Treumann, R. A., 电子回旋脉泽的天体物理应用。《天文学与天体物理学评论》13, 229-315, 2006年。https://doi.org/10.1007/s00159-006-0001-y. Treumann, R.A., and Baumjohann, W., 《高级空间等离子体物理学》，帝国理工学院出版社，伦敦，1997年。Treumann, R.A., Baumjohann, W., and Pottelette, R., 来自电子空穴的电子回旋脉泽辐射：向上电流区。《地球物理年鉴》29, 1885, 2011年。https://doi.org/angeo-29-1885-2011. Treumann, R.A., Baumjohann, W., and Pottelette, R., 来自电子空穴的电子回旋脉泽辐射：向下电流区。《地球物理年鉴》30, 119, 2012年。https://doi.org/10.5194/angeo-30-119-2012. Treumann, R.A., Baumjohann, W., LaBelle, J., and Pottelette, R., 电子空穴对电磁辐射的向下输运？arXiv:1208.3055, 2012年。https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.3055. Treumann, R.A., and Baumjohann, W., 各向异性Jüttner（相对论玻尔兹曼）分布，《地球物理年鉴》34, 737, 2016年。https://doi.org/10.5194/angeo-34-737-2016. Treumann, R.A., and Baumjohann, W., 强磁导引场磁重联中的电子回旋脉泽不稳定性（ECMI）。《地球物理年鉴》35, 999, 2017年。https://doi.org/10.5194/angeo-35-999-2017. Twiss, R.Q., 射电天文学中的辐射传输与负吸收可能性。《澳大利亚物理学杂志》11, 564, 1958年。https://doi.org/10.1071/PH580564. Wu, C.S., and Lee L.C., 地球千米辐射理论。《天体物理学杂志》230, 621, 1979年。https://doi.org/10.1086/157120. Wu, C.S., and Qiu, X.M., 极光千米波辐射二次谐波的发射，《地球物理研究杂志》88, 10072, 1983年。https://doi.org/10.1029/JA088iA12p10072.

Xiao, F., Zhou, Q., Su, Z., He, Z., Yang, C., Liu, S., 等. 解释范艾伦辐射带中极光千米波辐射的出现。《地球物理研究快报》43, 971. 2016年. https://doi.org/10.1002/2016GL071728. Yearby, K.H., and Pickett, J.S., 关于利用Cluster宽带数据多航天器观测极光千米波辐射的综述。《地球物理研究杂志：空间物理》127, e2021JA029499, 2022年. HTTPS://DOI.ORG/10.1029/2021JA029499. Yoon, P.H., LaBelle, J., and Weatherwax, A.T., 右旋偏振4fce极光轰鸣发射：2. 非线性产生理论。《地球物理研究杂志》121, 7981- https://doi.org/10.1002/2016JA022889. Yoon, P.H.,and Lopéz, R.A., 磁化等离子体中电磁涨落的自发发射。《等离子体物理》24, 022117, 2017年. https://doi.org/10.1063/1.4976321. Zarka, P., Le Queau, D., and Genova, F., 非均匀介质中的脉泽回旋不稳定性：极光千米波辐射谱强度的确定。《地球物理研究杂志》91, 13542, 1986年. https://doi.org/10.1029/JA091iA12p13542.