arXiv:2303.07952v1 [math.CA] 14 Mar 2023

Bessel情形中的黎斯变换与分数积分算子

Jorge J. Betancor、Xuan Thinh Duong、Ming-Yi Lee、Ji Li 和 Brett D. Wick

摘要： 固定 $\lambda > 0$。考虑定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的贝塞尔算子 $\triangle_\lambda := -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$，其中 $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$，且 $dm_\lambda := x^{2\lambda}dx$，并配备 dx 勒贝格测度。我们通过与 $\triangle_\lambda$ 相关的 Besov 空间和 Triebel–Lizorkin空间，对贝塞尔Riesz变换和分数积分算子进行了深入研究。此外，我们还探讨了分数积分算子交换子的一些可能刻画；这方面的结果在Bessel情形的文献中尚付阙如。

关键词：交换子；贝塞尔算子；贝塞尔Riesz变换。

2010年数学主题分类：42B30, 42B20, 42B35

1 引言与主要结果陈述

1.1 背景

1965年，Muckenhoupt 和 Stein 在 [26] 引入了与贝塞尔算子 $\triangle_\lambda$ 相关的调和函数理论，其定义为:

$$\triangle_\lambda := -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}, \quad \lambda > 0.$$

他们在 $\triangle_\lambda$ 的框架下建立了一套理论，与经典的、通常与拉普拉斯算子 $\triangle$ 相关的理论相平行。他们得到了与 $\triangle_\lambda$ 相关的共轭函数和分数阶积分的 $L^p(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$-有界性结果，其中 $p \in [1,\infty)$，$\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$ and$dm_\lambda(x) := x^{2\lambda}\,dx$。

相关的椭圆型偏微分方程如下，称为“奇异拉普拉斯方程”:

$$\triangle_{t,\,x}(u) := -\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \frac{2\lambda}{x}\partial_x u = 0 \tag{1.1}$$

Weinstein [36]，和 Huber 在更高维度下研究了该方程 [23], ，他们考察了广义轴对称势，并获得了该方程解的若干性质，例如延拓、唯一性定理，以及某些区域上的边值问题。

此后，贝塞尔背景得到了广泛研究；例如，参见 [1, 2, 4, 6,7, 25, 35, 38]及其中的参考文献。与欧几里得空间上的标准拉普拉斯算子相比，关键区别在于，贝塞尔情形下没有傅里叶变换。因此，关于 $\mathbb{R}^n$ 的一些基本结果直到最近才在贝塞尔情形下通过不同方法得以确立，这些方法避开了涉及傅里叶变换的论证。

例如，在欧几里得情形下，Coifman–Rochberg–Weiss [11]首次建立了通过 BMO空间刻画 Riesz变换交换子有界性的方法。在其研究中，交换子下界的首个证明运用了傅里叶展开。[11] 的一个对应版本于 [15] 和 [16] 中通过实分析方法在贝塞尔情形下得以确立，之后，贝塞尔情形下交换子紧性的刻画也在 [17]中被发现。

然而，贝塞尔Riesz变换的交换子 $[b, R_{\triangle_\lambda}]$ 还有若干方面尚未解决。

问题1：贝塞尔情形下，贝塞尔Riesz变换的交换子与Besov空间或Triebel–Lizorkin空间之间有何联系?

请注意，在 $\mathbb{R}^n$ 欧几里得情形下，M. Paluszyński[29], 建立了这种联系，其方法在很大程度上依赖于傅里叶变换。

问题2：贝塞尔Riesz变换交换子的端点有界性如何刻画？也就是说，研究符号b的充要条件，使得 $[b, R_{\triangle_\lambda}]$ 从贝塞尔Hardy空间到 L^1以及从 L^∞ 到贝塞尔BMO空间有界。

事实证明，简单照搬关于 $\mathbb{R}^n$ （[31]）的经典结果，尤其是从 L^∞到贝塞尔BMO空间的情形，并不合适，因此这一问题至今仍未解决。

问题 3：分数阶算子 $\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}$的交换子 $[b, \triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]$ 的有界性刻画是什么?

与欧几里得情形相比，这个问题要困难得多。由于贝塞尔拉普拉斯算子的内在结构，其论证不同于关于 $\mathbb{R}^n$ 的经典结果。

本文旨在解决 Bessel 情形下的这些问题。

1.2 主要结果

我们将 $\mathbb{R}_+$ 视为 Coifman 和 Weiss 意义下的齐次型空间， [12], 配备欧几里得度量（即绝对值 $|\cdot|$）和测度 m_λ。具体而言，对于任意 $x \in \mathbb{R}_+$ 和 $r > 0$，集合 $I(x, r) := B(x, r) \cap \mathbb{R}_+$ 被视为 $\mathbb{R}_+$ 中的一个球，其中 $B(x, r)$ 是以 x 为中心、半径为 r 的欧几里得球。由 [17] 可知， m_λ 在 $\mathbb{R}_+$ 上满足如下倍增条件：对每个 $I \subset \mathbb{R}_+$,

$$\min\{2^2, 2^{2\lambda+1}\} m_\lambda(I) \le m_\lambda(2I) \le 2^{2\lambda+1} m_\lambda(I). \tag{1.2}$$

令 $\mathrm{Q} = 2\lambda + 1$ 为测度 m_λ 的上维数。

接下来，将 $(\mathbb{R}_+, |\cdot|, m_\lambda)$ 视为一个齐次型空间。令 $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为作用于 $\mathbb{R}_+$ 上的一个算子族，它是恒等逼近，并令 $D_k = S_k - S_{k+1}$。完整

。详情见第2.1节。此外，对于 $0 < \beta_0, \gamma_0 < 1$，我们用 $(\mathcal{G}_1(\beta_0, \gamma_0))'$ 表示 $(\mathbb{R}_+, |\cdot|, m_\lambda)$ 上的广义函数空间，详情见第2.2节。

我们首先考察与 $\triangle_\lambda$ 相关的 Besov空间 $\dot{B}^{\beta,\,\lambda}_{\infty}{}^{,\,\infty}$, $(\mathbb{R}_+)$，然后研究它与 Bessel情形下的 Riesz 变换和分数积分算子的交换子。

定义 1.1. 设 $0 < \beta_0, \gamma_0 < 1$。对于 $\beta \in (0, 1)$，*Besov*空间 $\dot{B}^{\beta,\,\lambda}_{\infty}{}^{,\,\infty}$, $(\mathbb{R}_+)$ 是满足以下条件的广义函数集合 f 属于 $(\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta_0, \gamma_0))'$ 使得 $\|f\|_{\dot{B}^{\beta,\,\lambda}_{\infty}{}^{,\,\infty}{}_{,\,(\mathbb{R}_+)}} := \sup_{k\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{R}_+} 2^{\beta k} |D_k f(x)| < \infty.$

接下来，我们通过逼近恒等算子 $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$中的算子 $\{D_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$，给出与 $\triangle_\lambda$ 相关的 Triebel–Lizorkin空间的定义。

定义1.2。设 $0<\beta_0,\gamma_0<1$。对于 $|\alpha|<1$, $1<p<\infty$ 和 $1\le q\le\infty$，与 $\triangle_\lambda$ 相关的 Triebel– Lizorkin空间定义如下。令

$$\dot{\mathcal{F}}^{\alpha,q}_{\lambda,p}(\mathbb{R}_+):=\big\{f\in(\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta_0,\gamma_0))':\|f\|_{\dot{\mathcal{F}}^{\alpha,q}_{\lambda,p}}:<\infty\big\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{F}}^{\alpha,q}_{\lambda,p}}=\begin{cases}\Big\|\Big\{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\big(2^{k\alpha}|D_k(f)|\big)^q\Big\}^{1/q}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)} & \text{if } 1\le q<\infty,\\ \Big\|\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}2^{k\alpha}|D_k(f)|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)} & \text{if } q=\infty.\end{cases}$$

需要注意的是，$\dot{\mathcal{F}}^{\alpha,\lambda}{}^{q}{}_{,p}(\mathbb{R}_+)$的定义与$\{D_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$的选择无关。当 $q=\infty$时，这由我们的定理3.4得以证明。当 $1\le q<\infty$时，这可由Han、Müller和Yang关于齐次型空间上 Triebel–Lizorkin空间的Plancherel–Polya型不等式看出 [19, 20]。

由此得到我们的第一个主要结果：通过交换子 $[b,R_{\triangle_\lambda}]$刻画Besov空间 $\dot{B}^{\beta,\lambda}{}^{\infty}_{\infty,}(\mathbb{R}_+)$，其中交换子定义为 $[b,R_{\triangle_\lambda}](f)=bR_{\triangle_\lambda}(f)-R_{\triangle_\lambda}(bf)$。

定理1.3。设 $1<p<\infty,0<\beta<1$。以下条件等价：

(a) $b\in\dot{B}^{\beta,\infty}_{\lambda,\infty}(\mathbb{R}_+)$;

(b) $[b,R_{\triangle_\lambda}]$ 是从 $L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)$ 到 $\dot{F}^{\beta,\lambda}{}^{\infty}{}_{,p}(\mathbb{R}_+)$的有界算子。

这解决了**问题1**，并为 M. Paluszyński 在 $\mathbb{R}^n$ 中的结果提供了一种不同的方法（无需使用傅里叶变换） [29] 。

现在我们转向第二个主要结果：$[b,R_{\Delta_\lambda}]$的端点有界性刻画。回顾一下，BMO空间定义如下。

定义1.4。函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 属于空间 $\mathrm{BMO}_\lambda(\mathbb{R}_+)$，当且仅当

$$\sup_{x,\,r\in(0,\,\infty)}\frac{1}{m_\lambda(I(x,\,r))}\int_{I(x,r)}\left|f(y)-\frac{1}{m_\lambda(I(x,r))}\int_{I(x,r)}f(z)\,dm_\lambda(z)\right|\,dm_\lambda(y)<\infty.$$

定理1.5。设 $\lambda>0$。假设 $b\in\mathrm{BMO}_\lambda(\mathbb{R}_+)$。那么，以下断言等价：

(a) $[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 从 $L^\infty_c(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 到 $\mathrm{BMO}_\lambda(\mathbb{R}_+)$是有界的；
(b) 上确界 $_{I=(x_0-r_{0,}x_0+r_0)}$对数$\big(\frac{x_0}{r_0}\big)^{1}_{m_\lambda\,(I)}\int_I|b(z)-b_I|dm_\lambda$
$(z)<\infty$.$_{0<4r_0<x_0}$

定义 1.6 ([3])。若存在一个有界开区间 $I\subset\mathbb{R}_+$ 使得 $\mathrm{supp}\,(a)\subset I$, $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\le[m_\lambda(I)]^{-1/2}$ 且 $\int_0^\infty a(x)\,dm_\lambda(x)=0.$，则称函数 a 为一个 $(1,2)^{\triangle_\lambda}$-原子。

定理1.7。设 $\lambda>0$。假设 $b\in\mathrm{BMO}_\lambda(\mathbb{R}_+)$。那么，$[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 可从 $span\{(1,2)^{\triangle_\lambda}$-原子$\}$ 延拓为 $H^1(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$，成为从 $H^1(\mathbb{R}_+,m_\lambda)$ 到 $L^1(\mathbb{R}_+,m_\lambda)$的有界算子，当且仅当 b 为常数。

定理1.5和定理1.7对**问题 2**给出了肯定的回答。此外，值得指出的是，与 $\mathbb{R}^n$ [31] 上的经典结果（Riesz变换的交换子从 L^∞ 到 BMO 有界，当且仅当 b 为常数）相比，定理1.5中的条件 (b) 是新的，并揭示了 Bessel情形的内在结构。

现在我们转向第三个主要结果。回顾分数阶算子 $\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}$，其中 $0<\alpha<\mathrm{Q}$，定义如下：

$$\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{t\triangle_\lambda}(f)(x)\frac{dt}{t^{1-\alpha/2}}.$$

我们考察交换子 $[b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}](f)(x):=b(x)\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}(f)(x)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}(bf)(x)$，如下所示。

定理1.8。设 $1<p<q<\infty, 0<\alpha<1$，且 $0<\beta<1$。若 $b\in \dot{B}^{\beta,\lambda}_{\infty}{}^{,\infty}(\mathbb{R}_+)$ 则 $[b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]$ 是从 $L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 到 $\dot{F}^{\beta,\lambda}{}^{,\infty}_{,q}(\mathbb{R}_+)$ 的有界算子，其中 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{\mathrm{Q}}$。

我们指出，这一结果的逆命题仍未解决。此外，L^p-L^q 有界性的刻画问题仍未解决，它可能与现有的 Bessel BMO空间相对应，也可能不对应。

本文组织如下。第 2 节介绍 Bessel情形下所需的预备知识。第 3 节给出 Bessel情形下 Besov空间的刻画，并证明定理1.3。第 4 节证明定理 1.5 和定理 1.7。最后一节证明定理1.8。

2 预备知识

2.1 恒等逼近

我们首先回顾恒等逼近的定义。

定义 2.1. 如果算子族 $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上满足$\lim_{k\to+\infty}S_k=Id$、$\lim_{k\to-\infty}S_k=0$，并且其核 $S_k(x,y)$ S_k满足以下条件：对于 $\beta,\gamma\in(0,1]$,

（$\mathrm{A_i}$）对任意 x，$y\in\mathbb{R}_+$ 和 $k\in\mathbb{Z}$,

$$|S_k(x,y)|\lesssim\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))+m_\lambda(I(y,2^{-k}))+m_\lambda(I(x,|x-y|))}\left(\frac{2^{-k}}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\gamma;$$

（$\mathrm{A_{ii}}$）对任意 x，y，$\widetilde{y}\in\mathbb{R}_+$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，其中 $|y-\widetilde{y}|\le(2^{-k}+|x-y|)/2$,

$$\begin{aligned}&|S_k(x,y)-S_k(x,\widetilde{y})|+|S_k(y,x)-S_k(\widetilde{y},x)|\\&\lesssim\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))+m_\lambda(I(y,2^{-k}))+m_\lambda(I(x,|x-y|))}\left(\frac{|y-\widetilde{y}|}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\beta\left(\frac{2^{-k}}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\gamma;\end{aligned}$$

($\mathrm{A_{iii}}$) 对任意 x，y，$\widetilde{x}$，$\widetilde{y}\in\mathbb{R}_+$和 $k\in\mathbb{Z}$，满足 $|x-\widetilde{x}|, |y-\widetilde{y}|\le(2^{-k}+|x-y|)/3$,

$$\begin{aligned}&|S_k(x,y)-S_k(x,\widetilde{y})|+|S_k(\widetilde{x},y)-S_k(\widetilde{x},\widetilde{y})|\\&\lesssim\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))+m_\lambda(I(y,2^{-k}))+m_\lambda(I(x,|x-y|))}\\&\quad\times\left(\frac{|x-\widetilde{x}|}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\beta\left(\frac{|y-\widetilde{y}|}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\beta\left(\frac{2^{-k}}{|x-y|+2^{-k}}\right)^\gamma;\end{aligned}$$

$(\mathrm{A_{iv}})$ 对任意 $x \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^\infty S_k(x,y)\,dm_\lambda(y) = \int_0^\infty S_k(y,x)\,dm_\lambda(y) = 1.$$

恒等逼近的一种构造归功于 Coifman，见 [13]。令 $D_k := S_k - S_{k+1}$。显然， D_k 的核 $D_k(x,y)$ 满足 $(\mathrm{A_i})$、$(\mathrm{A_{ii}})$ 和 $(\mathrm{A_{iii}})$，其中 $S_k(x,y)$ 被 $D_k(x,y)$ 取代，并且

$$\int_0^\infty D_k(x,y)\,dm_\lambda(y) = \int_0^\infty D_k(y,x)\,dm_\lambda(y) = 0$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in \mathbb{Z}$。

2.2 测试函数空间与广义函数

现在回顾 Han、Müller 和 Yang 定义的测试函数空间与分布空间[19, 20]。

定义 2.2 ([19])。考虑空间 $(\mathbb{R}_+,\ |\cdot|,\ dm_\lambda)$。设 $0 < \gamma,\ \beta \le 1$ 和 $r > 0.$。定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 f 称为以 $x_0 \in \mathbb{R}_+$ 为中心的类型 $(x_0,\ r,\ \beta,\ \gamma)$ 测试函数，当且仅当f 满足以下条件:

(i) $|f(x)| \le C\dfrac{1}{m_\lambda(I(x_0,r)) + m_\lambda(I(x_0,|x_0-x|))}\Big(\dfrac{r}{r+|x-x_0|}\Big)^\gamma;$

(ii) $|f(x)-f(y)| \le C\Big(\dfrac{|x-y|}{r+|x-x_0|}\Big)^\beta \dfrac{1}{m_\lambda(I(x_0,r)) + m_\lambda(I(x_0,|x_0-x|))}\Big(\dfrac{r}{r+|x-x_0|}\Big)^\gamma$ *for all* $x,y \in \mathbb{R}_+$ *with* $|x-y| \le \frac{1}{2}(r+|x-x_0|)$.

若 f是一个类型为 (x_0,r,β,γ)的测试函数，我们记作 $f \in \mathcal{G}(x_0,r,\beta,\gamma)$，而 $f \in \mathcal{G}(x_0,r,\beta,\gamma)$ 的范数定义为 $\|f\|_{\mathcal{G}(x_0,\,r,\,\beta,\,\gamma)} :=$ 满足条件 (i) 和 (ii) 的 $\{C > 0$ 的下确界$\}$.

现在，对于任意固定的 $x_0 \in \mathbb{R}_+$，我们记 $\mathcal{G}(\beta,\gamma) := \mathcal{G}(x_0, 1, \beta, \gamma)$，并用 $\mathcal{G}_0(\beta,\gamma)$ 表示 $\mathcal{G}(\beta,\gamma)$ 中所有满足 $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dm_\lambda(x)$ 的测试函数的集合。$= 0.$注意，对于所有 $x_1 \in \mathbb{R}_+$ 和 $r > 0$， $\mathcal{G}(x_1,r,\beta,\gamma)$ 与 $= \mathcal{G}(\beta,\gamma)$ 的范数等价；此外， $\mathcal{G}(\beta,\gamma)$ 关于 $\mathcal{G}(\beta,\gamma)$ 中的范数构成一个巴拿赫空间。

Let $\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta,\gamma)$ 是空间 $\mathcal{G}_0(1,1)$ 在 $\mathcal{G}(\beta,\gamma)$ 范数下的完备化，其中 $0 < \beta,\gamma < 1$。

若 $f \in \mathcal{G}_1(\beta,\gamma)$，则定义 $\|f\|_{\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta,\gamma)} := \|f\|_{\mathcal{G}(\beta,\gamma)}$. $(\mathcal{G}_1(\beta,\gamma))'$ 为分布空间,

它定义为从 $\mathcal{G}_1(\beta,\gamma)$ 到 $\mathbb{C}$ 的所有线性泛函 L 的集合，且具有如下性质:

存在 $C \ge 0$ 使得对所有 $f \in \mathcal{G}_1(\beta,\gamma)$， $|L(f)| \le C\|f\|_{\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta,\gamma)}$.

2.3 Bessel情形下的泊松核、共轭泊松核与黎斯变换

令 $P_t^{[\lambda]} := e^{-t\sqrt{\Delta_\lambda}}$ 为与 Δ_λ 相关联的 Poisson半群。我们回顾文献 [3] 中的以下性质。

引理 2.3。那么 $\{P_t^{[\lambda]}\}_{t>0}$是一个对称扩散半群，满足：对于任意 $t,\ s \in (0,\infty)$，具有 C_0 性质，$\lim_{t\to 0} P_t^{[\lambda]} f = f$在 $L^2(\mathbb{R}_+,\ dm_\lambda)$ 中，且

(Si) 对所有 $p \in [1,\infty]$ 和 $t \in (0,\infty)$，$\|P_t^{[\lambda]} f\|_{L^p(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}$；*(Sii)* 对所有 $f \ge 0$ 和 $t \in (0,\infty)$，$P_t^{[\lambda]} f \ge 0$；*(Siii)* 对所有 $t \in (0,\infty)$，$P_t^{[\lambda]}(1) = 1$。

接下来我们回顾泊松核和共轭泊松核的定义，见 [3]。对于任意 $t, x, y \in (0,\infty)$，

$$P_t^{[\lambda]} f(x) := \int_0^\infty P_t^{[\lambda]}(x,y) f(y)\, dm_\lambda(y),$$

其中

$$P_t^{[\lambda]}(x,y) = \frac{2\lambda t}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(x^2+y^2+t^2-2xy\cos\theta)^{\lambda+1}}\, d\theta.$$

若 $f \in L^p(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$，$p \in [1,\infty)$，则 f 的 Δ_λ-共轭定义如下：对于任意 $t, x, y \in (0,\infty)$，

$$Q_t^{[\lambda]}(f)(x) := \int_0^\infty Q_t^{[\lambda]}(x,y) f(y)\, dm_\lambda(y), \tag{2.1}$$

其中

$$Q_t^{[\lambda]}(x,y) := -\frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\pi \frac{(x-y\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(x^2+y^2+t^2-2xy\cos\theta)^{\lambda+1}}\, d\theta;$$

见 [26, 第 84] 页。我们指出，对于几乎处处的 $x \in (0,\infty)$，边界值函数 $\lim_{t\to 0} Q_t^{[\lambda]}(f)(x)$ 存在（见 [26, 第 84] 页），并将其定义为 Riesz变换 $R_{\Delta_\lambda}(f)$，即，

$$R_{\Delta_\lambda}(f)(x) := \lim_{t\to 0} Q_t^{[\lambda]}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} -\frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\pi \frac{(x-y\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(x^2+y^2-2xy\cos\theta)^{\lambda+1}}\, d\theta\ f(y) dm_\lambda(y). \tag{2.2}$$

命题 *2.4*（[38]）。对于任意固定的 t 和 $x \in \mathbb{R}_+$，作为 x 的函数，$P_t^{[\lambda]}(x,\cdot)$、$Q_t^{[\lambda]}(x,\cdot)$、$t\partial_t P_t^{[\lambda]}(x,\cdot)$ 以及 $t\partial_y P_t^{[\lambda]}(x,\cdot)$ 对于所有 $\beta, \gamma \in (0,1]$ 均属于 $\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta,\gamma)$。对称地，对于任意固定的 t 和 $y \in \mathbb{R}_+$，$t\partial_t P_t^{[\lambda]}(\cdot,y)$ 和 $t\partial_y P_t^{[\lambda]}(\cdot,y)$ 对于所有 $\beta, \gamma \in (0,1]$ 均属于 $\mathring{\mathcal{G}}_1(\beta,\gamma)$。

我们注意到，正如 [3], 中所指出的（另见 [6], ），这个 Riesz变换 R_{Δ_λ} 是一个 Calderón–Zygmund 算子。为了证明主要结果，我们需要用到 Riesz变换 R_{Δ_λ} 的核 $R_{\Delta_\lambda}(x,y)$ $x, y \in \mathbb{R}_+$ 的以下性质，这些性质可见于 [5, 16]。

命题 2.5。设 $\lambda > 0$。存在常数 K_0，$K_1 > 1$ 使得

(a) $|R_{\Delta_\lambda}(x,y)| \lesssim \begin{cases} \frac{1}{x^{2\lambda+1}}, & 0 < y < K_0^{-1}x, \\ \frac{1}{y^{2\lambda+1}}, & 0 < K_0 x < y; \end{cases}$

(b) 对于每个 $x, y \in \mathbb{R}_+$，满足 $x \ne y$，

$$|R_{\Delta_\lambda}(x,y)| \lesssim \frac{1}{m_\lambda(I(x,|x-y|))};$$

(c) 对于每个 $x, y, u \in \mathbb{R}_+$ 且满足 $|x-y| > \frac{3}{2}|x-u|$，

$$|R_{\Delta_\lambda}(x,y) - R_{\Delta_\lambda}(u,y)| + |R_{\Delta_\lambda}(y,x) - R_{\Delta_\lambda}(y,u)| \lesssim \frac{|x-u|}{|x-y|} \frac{1}{m_\lambda(I(x,|x-y|))};$$

(d) $R_{\Delta_\lambda}(x,y) \gtrsim \frac{1}{(xy)^\lambda (y-x)}, 0 < x < y < K_0 x$;

(e) $R_{\Delta_\lambda}(x,y) \lesssim -\frac{1}{(xy)^\lambda (x-y)}, 0 < K_0^{-1} x < y < x$;

(f) $R_{\Delta_\lambda}(x,y) \gtrsim \frac{x}{y^{2\lambda+2}}, 0 < K_1 x < y$;

(g) $R_{\Delta_\lambda}(x,y) \lesssim -\frac{1}{x^{2\lambda+1}}, 0 < y < K_1^{-1} x$.

2.4 Bessel情形下的Hardy空间

现在回顾 [3] 中 Hardy空间 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 的原子刻画。由 [3], 可知，Hardy空间 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 可以通过原子分解来刻画。也就是说，一个$L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 函数 $f \in H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 当且仅当

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_j \quad \text{in} \quad L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda),$$

其中，对每个 j, a_j都是一个(1, 2)$\triangle_\lambda$-原子，且 $\alpha_j \in \mathbb{R}$满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$。此外，$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \sim \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \right\}$，其中下确界取遍 f上述所有分解。

我们还指出， $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$可以通过与一类函数的Hankel卷积相关联的径向极大函数来刻画，其中包括Poisson半群和热半群作为特例。文献 [3] 还证明， $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$是与Coifman和Weiss在[12]中定义的齐次型空间$(\mathbb{R}_+, \rho, dm_\lambda)$相关联的空间。

3 通过Riesz变换的交换子刻画Lipschitz空间 Λ^β, $0 < \beta < 1$：定理1.3的证明

为了证明定理1.3，我们需要如下的 Besov空间刻画。我们回顾 $\mathbb{R}_+$ 上的标准 Lipschitz空间，记为 Λ^β。

定义 3.1。 对于 $\beta \in (0,1)$，*Lipschitz*空间 Λ^β 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上满足下列条件的函数集合

$$\|f\|_{\Lambda^\beta} := \sup_{x,y \in \mathbb{R}_+:\ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty.$$

注意到 Λ^β 等价于与 $\triangle_\lambda$ 相关联的 Besov空间 $\dot{B}^{\beta,\lambda}_{\infty}{}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$。

定理 3.2。 对于 $\beta \in (0,1)$ 且 $q \in [1, \infty)$，以下陈述等价 $t.$

(i) $f \in \Lambda^\beta$;

(ii) $\sup_{I(x_0,r)} \frac{1}{r^\beta} \left(\frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |f(x) - f_I|^q dm_\lambda(x) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$;

(iii) f 属于 *Besov*空间 $\dot{B}^{\beta,\lambda}_{\infty}{}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$。

我们注意到，这一结果并非完全新颖。(i)⇔(iii) 的证明隐含在 Deng 和 Han [14, 第 98 页的引理 4 中，该引理是他们先前关于齐型空间的相关结果的一部分。3], 其中，他们假设球的测度与球的半径等价。然而，这一假设并非必要条件。而且，(i)⇔(ii) 的等价性可由 [27, 定理 2,4]推出。

注 3.3。 定理 *3.2* 表明，空间 $\dot{B}^{\beta,\,\lambda}_{\infty}{}^{\infty}$，$(\mathbb{R}_+)$ 不依赖于 λ。

我们还需要 Triebel–Lizorkin空间的差分刻画。

定理3.4。 对于 $0<\beta<1$ 和 $1<p<\infty$，有

$$\|f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}\sim\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(\cdot,2^{-k})}|f(y)-f_{I(\cdot,2^{-k})}|dm_\lambda(y)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)}.$$

为了证明这一结果，我们需要齐型空间上的 Triebel–Lizorkin空间的差分刻画，见 [37, 命题 4.1 和 4.6]。

命题 3.5。 对于 $0<\beta<1<p<\infty$，有

$$\|f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}\sim\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(\cdot,2^{-k})}|f(\cdot)-f(y)|dm_\lambda(y)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)}.$$

定理*3.4*的证明。取定 $x\in\mathbb{R}_+$ 和 $k\in\mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(x,2^{-k})}|f(y)-f_{I(x,2^{-k})}|dm_\lambda(y)\\
&\quad\le\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(x,2^{-k})}|f(y)-f(x)|dm_\lambda(y)\\
&\qquad+\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(x,2^{-k})}|f(x)-f_{I(x,2^{-k})}|dm_\lambda(y)\\
&\quad\le\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(x,2^{-k})}|f(y)-f(x)|dm_\lambda(y)\\
&\qquad+\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))}\int_{I(x,2^{-k})}\int_{I(x,2^{-k})}|f(x)-f(z)|dm_\lambda(z)dm_\lambda(y)\\
&\quad\le\frac{2}{m_\lambda(I(x,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(x,2^{-k})}|f(y)-f(x)|dm_\lambda(y).
\end{aligned}$$

因此，利用命题 3.5,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(\cdot,2^{-k})}|f(y)-f_{I(\cdot,2^{-k})}|dm_\lambda(y)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)}\\
&\quad\le 2\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(\cdot,2^{-k})}|f(\cdot)-f(y)|dm_\lambda(y)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)}\\
&\quad\lesssim\|f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}.
\end{aligned}$$

反过来，我们采用 [37, 命题 4.1] 的证明，将 $f(\cdot)$替换为$f_{I(\cdot,2^{-k})}$，得到以下估计

$$\|f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}\lesssim\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}}\int_{I(\cdot,2^{-k})}|f_{I(\cdot,2^{-k})}-f(y)|dm_\lambda(y)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\,dm_\lambda)}.$$

因此,

$$\|f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}} \sim \left\| \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m_\lambda(I(\cdot,2^{-k}))2^{-k\beta}} \int_{I(\cdot,2^{-k})} |f_{I(\cdot,2^{-k})} - f(y)| dm_\lambda(y) \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}$$

证明至此完成。 □

现在我们证明定理1.3。

定理*1.3*的证明。 (a) $\Rightarrow$ (b): 固定 $x \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{Z}$和 $r = 2^{-k}$。设 $I = I(x,r)$ 和$f \in L^p(\mathbb{R}_+)$。令 $f_1 = f\chi_{2I}$和 $f_2 = f - f_1$。注意到 $[b, R_{\Delta_\lambda}]f = [b - b_I, R_{\Delta_\lambda}]f$，并且我们有:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |[b, R_{\Delta_\lambda}]f(y) - ([b, R_{\Delta_\lambda}]f)_I| dm_\lambda(y) \\
&= \frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |[b - b_I, R_{\Delta_\lambda}]f(y) - ([b - b_I, R_{\Delta_\lambda}]f)_I| dm_\lambda(y) \\
&\le \frac{2}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |[b - b_I, R_{\Delta_\lambda}]f(y) - R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_2)(x)| dm_\lambda(y) \\
&\le \frac{2}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |(b(y) - b_I)R_{\Delta_\lambda}f(y)| dm_\lambda(y) + \frac{2}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_1)(y)| dm_\lambda(y) \\
&\quad + \frac{2}{r^\beta} \sup_{y\in I} |R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_2)(y) - R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_2)(x)| \\
&=: I + II + III.
\end{aligned}$$

我们分别估计这些项。对于 $1 < t < p$，由Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |(b(y) - b_I)R_{\Delta_\lambda}f(y)| dm_\lambda(y) \\
&\le \frac{1}{r^\beta} \Big(\frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y) - b_I|^{t'} dm_\lambda(y) \Big)^{\frac{1}{t'}} \Big(\frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |R_{\Delta_\lambda}f(y)|^t dm_\lambda(y) \Big)^{\frac{1}{t}} \\
&\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta} M_t(R_{\Delta_\lambda}f)(x),
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由定理 3.2 得出，且 M是齐次型空间 $(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 上的Hardy-Littlewood极大函数，而 $M_t(f) = (M(f^t))^{\frac{1}{t}}$。因此,

$$I \lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta} M_t(R_{\Delta_\lambda}f)(x).$$

为了估计 II，我们利用 R_{Δ_λ} 的有界性和 Hölder不等式，得到 $1 < t < p$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta} \int_I |R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_1)(y)| dm_\lambda(y) \\
&\le \frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta} \|R_{\Delta_\lambda}((b - b_I)f_1)\|_{L^t(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} m_\lambda(I)^{1-\frac{1}{t}} \\
&\le m_\lambda(I)^{-\frac{1}{t}} r^{-\beta} \|(b - b_I)f_1\|_{L^t(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}.
\end{aligned}$$

由 Hölder不等式以及 $1 < s$ 和 $st < p$,

$$\frac{1}{m_\lambda(I)} \|(b - b_I)f_1\|^t_{L^t(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} = \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_{2I} |b(y) - b_I|^t |f|^t dm_\lambda(y)$$

$$\leq \Big(\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{2I}|b(y)-b_I|^{ts'}dm_\lambda(y)\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{2I}|f|^{ts}dm_\lambda(y)\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

现在利用定理 3.2 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{2I}|b(y)-b_I|^{ts'}dm_\lambda(y)\\
&\lesssim \frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{2I}|b(y)-b_{2I}|^{ts'}dm_\lambda(y)+|b_{2I}-b_I|^{ts'}\\
&\lesssim \frac{1}{m_\lambda(2I)}\int_{2I}|b(y)-b_{2I}|^{ts'}dm_\lambda(y)+\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{I}|b_{2I}-b(y)|^{ts'}dm_\lambda(y)\\
&\lesssim r^{\beta s't}\|b\|^{s't}_{\Lambda^\beta}.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

因此， $II\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}M_{ts}(f)(x)$。

为了估计 III，我们使用定理 3.2 得出，对于 $I^*\subseteq I(x,r)$，有

$$|b_{I^*}-b_I|\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}r^\beta\frac{m_\lambda(I)}{m_\lambda(I^*)}.$$

根据命题 2.5 (c),

$$\begin{aligned}
&|R_{\Delta_\lambda}((b-b_I)f_2)(y)-R_{\Delta_\lambda}((b-b_I)f_2)(x)|\\
&=\Big|\int_{\mathbb{R}_+}(R_{\Delta_\lambda}(y,z)-R_{\Delta_\lambda}(x,z))(b(z)-b_I)f_2(z)dm_\lambda(z)\Big|\\
&\lesssim\int_{(2I)^c}\frac{|x-y|}{|x-z|}\frac{1}{m_\lambda(I(x,|x-z|))}|b(z)-b_I||f(z)|dm_\lambda(z)\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr<|x-z|\leq2^{j+1}r}2^{-j}\frac{1}{m_\lambda(I(x,|x-z|))}|b(z)-b_I||f(z)|dm_\lambda(z)\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^jr))}\int_{|x-z|\leq2^{j+1}r}2^{-j}\big(|b(z)-b_{2^jI}|+|b_{2^jI}-b_I|\big)|f(z)|dm_\lambda(z)\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}}{m_\lambda(I(x,2^jr))}\int_{|x-z|\leq2^{j+1}r}|b(z)-b_{2^jI}||f(z)|dm_\lambda(z)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\|b\|_{\Lambda^\beta}(2^jr)^\beta M(f)(x)j\\
&\lesssim\Big(\|b\|_{\Lambda^\beta}r^\beta M_{ts}(f)(x)+\|b\|_{\Lambda^\beta}r^\beta M(f)(x)\Big)\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j(1-\beta)}j,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由式（3.1）得出。因此，$III\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}M_{ts}(f)(x)+\|b\|_{\Lambda^\beta}M(f)(x)$。综合这些估计，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)r^\beta}\int_I|[b,R_{\Delta_\lambda}]f(y)-([b,R_{\Delta_\lambda}]f)_I|dm_\lambda(y)\\
&\qquad\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}\big(M_t(R_{\Delta_\lambda}f)(x)+M_{ts}(f)(x)+M(f)(x)\big).
\end{aligned}$$

对所有 $I(x,r)$ 取上确界，再对两边取 L^p-范数，并利用定理3.4，我们得出

$$\|[b,R_{\Delta_\lambda}]f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}} \lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.$$

因此，(a) $\Rightarrow$(b) 得证。

(b) $\Rightarrow$(a):

假设交换子 $[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 是一个有界算子，从 $L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 映射到 $\dot{F}^{\beta,\ \lambda\ ^\infty,\ p}(\mathbb{R}_+)$。对于满足 $x_0\in\mathbb{R}_+$ 和 $r>0$的 $I=I(x_0,r)$，我们考虑

$$\frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\int_I |f(x)-f_I|dm_\lambda(x).$$

定义 3.6. 设 f 在 $\mathbb{R}_+$上几乎处处有限。对于满足 $m_\lambda(I)<\infty$的 $I\subseteq\mathbb{R}_+$，我们将 f 在 I 上的中位数 $m_f(I)$ 定义为满足以下条件的实数

$$m_\lambda(\{x\in I: f(x)>m_f(I)\})\le\frac{1}{2}m_\lambda(I) \qquad and \qquad m_\lambda(\{x\in I: f(x)<m_f(I)\})\le\frac{1}{2}m_\lambda(I).$$

注意

$$[b,R_{\Delta_\lambda}]f(x)=b(x)R_{\Delta_\lambda}f(x)-R_{\Delta_\lambda}(bf)(x)\big)=\int_{\mathbb{R}_+}(b(x)-b(y))R_{\Delta_\lambda}(x,y)f(y)dm_\lambda(y).$$

注意到，如果 $r>x_0$，则 $I(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)\cap\mathbb{R}_+=I(\frac{x_0+r}{2},\frac{x_0+r}{2})$。因此，不妨设 $r\le x_0$。下面考虑以下两种情形。

情形 (1)： $x_0\le 2r$。在这种情况下，$m_\lambda(I)\sim x_0^{2\lambda}r\sim x_0^{2\lambda+1}$。令 $\tilde{x}_0=x_0+2(K_1-1)r$，其中 K_1 如命题 2.5 中所述。于是 $K_1x_0\le\tilde{x}_0\le(2K_1+1)x_0$。应用命题 2.5 (f),

$$R_{\Delta_\lambda}(x_0,\tilde{x}_0)\gtrsim\frac{x_0}{\tilde{x}_0^{2\lambda+2}}\sim\frac{1}{m_\lambda(I)}.$$

~根据命题 5.1], ，对于每个 $x\in I$ 和 $y\in I=I(\tilde{x}_0,r)$，我们有

$$|R_{\Delta_\lambda}(x,y)|\gtrsim\frac{1}{m_\lambda(I)}.$$

情形（2）： $x_0>2r$。在这种情况下，$m_\lambda(I)\sim x_0^{2\lambda}r$。令 $\tilde{x}_0=x_0+2(K_0-1)r$，其中 K_0 如命题 2.5 所述。则 $x_0\le\tilde{x}_0\le K_0x_0$。由命题 2.5 (d)，我们得到

$$R_{\Delta_\lambda}(x_0,\tilde{x}_0)\gtrsim\frac{1}{\tilde{x}_0^{2\lambda}(\tilde{x}_0-x_0)}\sim\frac{1}{m_\lambda(I)}.$$

~再次根据 [15, 命题 5.1], ，对于每个 $x\in I$ 和 $y\in I=I(\tilde{x}_0,r)$，我们有

$$|R_{\Delta_\lambda}(x,y)|\gtrsim\frac{1}{m_\lambda(I)}.$$

Set

$$E_1:=\{y\in\widetilde{I}:b(y)\le m_b(\widetilde{I})\} \qquad \text{and} \qquad E_2:=\{y\in\widetilde{I}:b(y)\ge m_b(\widetilde{I})\}$$

并进一步定义

$$I_1:=\{y\in I:b(y)\ge m_b(\widetilde{I})\} \qquad \text{and} \qquad I_2:=\{y\in I:b(y)<m_b(\widetilde{I})\}.$$

定义 3.6 表明 $m_\lambda(E_i) \geq \frac{1}{2} m_\lambda(\widetilde{I})$ $i=1,2$。此外，对于 $(x,y) \in I_i \times E_i, i=1,2$,

$$\begin{aligned} |b(x)-b(y)| &= |b(x)-m_b(\tilde{I})+m_b(\widetilde{I})-b(y)| \\ &= |b(x)-m_b(\widetilde{I})|+|m_b(\widetilde{I})-b(y)| \geq |b(x)-m_b(\widetilde{I})|. \end{aligned}$$

因此，我们有以下事实：

$$\begin{aligned} &\text{(i) } I=I_1\cup I_2, \widetilde{I}=E_1\cup E_2 \text{ and } m_\lambda(E_i)\geq \frac{1}{2}m_\lambda(\widetilde{I}), i=1,2; \\ &\text{(ii) } b(x)-b(y) \text{ does not change sign for all } (x,y)\in I_i\times E_i, i=1,2; \\ &\text{(iii) } |b(x)-m_b(\tilde{I})|\leq |b(x)-b(y)| \text{ for all } (x,y)\in I_i\times E_i, i=1,2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

我们还有，对于 $(x,y) \in I_i \times E_i, i=1,2$,

$$|R_{\Delta_\lambda}(x,y)| \gtrsim \frac{1}{m_\lambda(I)} \sim \frac{1}{m_\lambda(I(\tilde{x}_0,r))}.$$

选择一个 C^∞ 函数 a，使其满足以下性质：

(1) supp $a \subseteq I(x_0,3r)$, $\int_{\mathbb{R}_+} a(x)\,dm_\lambda(x)=0$, $a(x)=1$ 在 I 上，且 $|a(x)|\lesssim 1$;

(2) $\|a\|_{\dot{F}^{-\beta,\ \triangle_\lambda^{\frac{1}{p'}},\ (\mathbb{R}_+)}} \lesssim r^\beta m_\lambda(I)^{1/p'}$。

我们给出这样的函数 a 存在性的证明。也就是说，如果 a 满足上述 (1) 中的条件，那么我们就有 (2) 中的范数估计。

回顾一下，$(\mathbb{R}_+, |\cdot|, dm_\lambda)$ 是一个齐次型空间。令 $\{\overline{S}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 Coifman 的恒等近似。那么 $\overline{S}_k$ 的核 $\overline{S}_k(x,y)$ 满足以下性质：

(i) $\overline{S}_k(x,y)=\overline{S}_k(y,x)$;

(ii) $\overline{S}_k(x,y)=0$ if $|x-y|>c2^{-k}$ and $|\overline{S}_k(x,y)|\lesssim \dfrac{1}{V_k(x)+V_k(y)}$;

(iii) $|\overline{S}_k(x,y)-\overline{S}_k(x',y)|\lesssim \dfrac{2^k|x-x'|}{V_k(x)+V_k(y)}$ for $|x-x'|\leqslant c_1 2^{-k}$;

(iv) $|\overline{S}_k(x,y)-\overline{S}_k(x,y')|\lesssim \dfrac{2^k|y-y'|}{V_k(x)+V_k(y)}$ for $|y-y'|\leqslant c_1 2^{-k}$;

(v) $\big|[\overline{S}_k(x,y)-\overline{S}_k(x',y)]-[\overline{S}_k(x,y')-\overline{S}_k(x',y')]\big|\lesssim \dfrac{2^k|x-x'|2^k|y-y'|}{V_k(x)+V_k(y)}$

for $|x-x'|\leqslant c_1 2^{-k}$ and $|y-y'|\leqslant c_1 2^{-k}$;

(vi) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \overline{S}_k(x,y)dm_\lambda(x)=1$ for all $y\in\mathbb{R}_+$;

(vii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \overline{S}_k(x,y)dm_\lambda=1$ for all $x\in\mathbb{R}_+$.

这里， $V_k(x)$ 表示当 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathbb{R}_+$ 时的测度 $m_\lambda(I(x, 2^{-k}))$。并且，对于 $x, y \in \mathbb{R}_+$， $V(x, y) := m_\lambda(I(x, |x-y|))$。

令 $\overline{D}_k := \overline{S}_k - \overline{S}_{k-1}$。注意到 $\dot{F}^{-\beta,\lambda}_{1,p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 等价于齐型空间 $(\mathbb{R}_+, |\cdot|, dm_\lambda)$ 上的 Triebel–Lizorkin空间 $\dot{F}^{-\beta,p'}_{1,CW}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$。因此，我们有

$$\|a\|_{\dot{F}^{-\beta,1}_{\lambda,p'}} \sim \|a\|_{\dot{F}^{-\beta,1}_{p',CW}} := \Big\| \Big\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta^{k\beta} |\overline{D}_k(a)| \Big\} \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}.$$

取 $k_0 \in \mathbb{Z}$，使得 $2^{-k_0} \sim r$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\beta} |\overline{D}_k(a)| \Big\} \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \\
&\le \Big\| \Big\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k\beta} |\overline{D}_k(a)| \Big\} \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} + \Big\| \Big\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{-k\beta} |\overline{D}_k(a)| \Big\} \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

假设 $k > k_0$, $k \in \mathbb{N}$。由于对 $|x-y| > c2^{-k}$ 有 $\overline{S}_k(x, y) = 0$，我们有 $\overline{D}_k(x, y)$ 的支集包含于 $|x-y| \le c2^{-k+1}$。另注意到 supp $a \subseteq I(x_0, 3r)$，我们有

$$\overline{D}_k(a)(x) = \int_{I(x_0,3r)} \overline{D}_k(x, y) a(y) dm_\lambda(y)$$

其支集包含于某个绝对正常数 C 对应的 $I(x_0, Cr)$ 中。此外，我们还有

$$|\overline{D}_k(a)(x)| \le \int_{I(x_0,3r)} |\overline{D}_k(x, y)||a(y)| dm_\lambda(y) \lesssim \int_{I(x_0,3r)} |\overline{D}_k(x, y)| dm_\lambda(y) \lesssim 1.$$

因此,

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \left(\int_{I(x_0,Cr)} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k\beta} \big|\overline{D}_k(a)(x)\big| \right\}^{p'} dm_\lambda(x) \right)^{1/p'} \\
&\lesssim \left(\int_{I(x_0,Cr)} \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k\beta} \right\}^{p'} dm_\lambda(x) \right)^{1/p'} \\
&\lesssim r^\beta m_\lambda(I)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

为了估计 I_2，我们利用 $a(x)$ 的消失矩条件和光滑性 $\overline{D}_k$ 得到

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \sum_{k=-\infty}^{k_0} \Big\| 2^{-k\beta} |\overline{D}_k(a)| \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\int_{I(x_0,C\delta^k)} \left| 2^{-k\beta} \int_{I(x_0,3r)} \Big(\overline{D}_k(x, y) - \overline{D}_k(x, x_0) \Big) a(y) dm_\lambda(y) \right|^{p'} dm_\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\int_{I(x_0,C\delta^k)} \left| 2^{-k\beta} \int_{I(x_0,3r)} \frac{|y-x_0| 2^k}{m_\lambda(I(y, 2^{-k})} dm_\lambda(y) \right|^{p'} dm_\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\int_{I(x_0,C2^{-k})}\left|2^{-k\beta}\int_{I(x_0,3r)}\frac{r2^k}{m_\lambda(I(x_0,2^{-k})}dm_\lambda(y)\right|^{p'}dm_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{k_0} r2^{-k(\beta-1)}\Big(\frac{m_\lambda(I(x_0,r))}{m_\lambda(I(x_0,2^{-k})}\Big)^{1-1/p'}m_\lambda(I(x_0,r))^{1/p'}\\
&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{k_0} r2^{-k(\beta-1)}m_\lambda(I(x_0,r))^{1/p'}\\
&\lesssim r^\beta m_\lambda(I)^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

现在继续证明。令 $f_i=\chi_{E_i}, i=1,2$。于是由 (3.2) 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\left|\int_I[b,R_{\Delta_\lambda}](f_i)(x)a(x)dm_\lambda(x)\right|\\
&\geq \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\left|\int_{I_i}[b,R_{\Delta_\lambda}](f_i)(x)a(x)dm_\lambda(x)\right|\\
&= \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\int_{I_i}\int_{E_i}|b(x)-b(y)||R_{\Delta_\lambda}(x,y)||a(x)|dm_\lambda(y)dm_\lambda(x)\\
&\gtrsim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\int_{I_i}|b(x)-m_b(\widetilde{I})|\frac{1}{m_\lambda(I(\tilde{x}_0,r))}\int_{E_i}dm_\lambda(y)dm_\lambda(x)\\
&\gtrsim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\int_{I_i}|b(x)-m_b(\widetilde{I})|dm_\lambda(x)\\
&\gtrsim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\int_I|b(x)-b_I|dm_\lambda(x).
\end{aligned}
$$

另一方面，由对偶性及 $[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 的有界性，我们推出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\left|\int_I[b,R_{\Delta_\lambda}](f_i)(x)a(x)dm_\lambda(x)\right|\\
&\lesssim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\|[b,R_{\Delta_\lambda}]f_i\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}\|a\|_{\dot{F}^{-\beta,1}_{\lambda,p'}}\\
&\lesssim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\sum_{i=1}^2\|[b,R_{\Delta_\lambda}]\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)\to\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}\|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\|a\|_{\dot{F}^{-\beta,1}_{\lambda,p'}}\\
&\lesssim \frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\|[b,R_{\Delta_\lambda}]\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)\to\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}m_\lambda(\widetilde{I})^{1/p}r^\beta m_\lambda(I)^{1/p'}\\
&\lesssim \|[b,R_{\Delta_\lambda}]\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)\to\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}.
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\frac{1}{r^\beta m_\lambda(I)}\int_I|b(x)-b_I|dm_\lambda(x)\lesssim\|[b,R_{\Delta_\lambda}]\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)\to\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,p}}.
$$

因此，(b) $\Rightarrow$ (a) 得证。证明完成。 □

4 端点结果

定理1.5 的证明。设 $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$。由于 $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$，我们有$[b, R_{\Delta_\lambda}] \in L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$。令 I为 $(0,\infty)$ 中的一个区间。将 $f = f_1 + f_2$分解，其中$f_1 = f\chi_{4I}$。如 [21,第 680]页所示，我们写作

$$\begin{aligned}&[b, R_{\Delta_\lambda}]f(x) - ([b, R_{\Delta_\lambda}]f)_I\\ &= \sigma_1(x) - (\sigma_1)_I + \sigma_2(x,u) + \sigma_4(x,u) - (\sigma_2(\cdot,u))_I + (\sigma_3(x,\cdot))_I,\ x,u \in I,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= [b, R_{\Delta_\lambda}]f_1(x),\ x \in I;\\ \sigma_2(x,u) &= (b(x) - b_I)(R_{\Delta_\lambda}(f_2)(x) - R_{\Delta_\lambda}(f_2)(u)),\ x,u \in I;\\ \sigma_3(x,u) &= R_{\Delta_\lambda}((b-b_I)f_2)(u) - R_{\Delta_\lambda}((b-b_I)f_2)(x),\ x,u \in I;\end{aligned}$$

and

$$\sigma_4(x,u) = (b(x) - b_I)[b, R_{\Delta_\lambda}]f_2(u),\ x \in I.$$

由于 $[b, R_{\Delta_\lambda}]$ 是从 $L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 到其自身的有界算子，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |\sigma_1(x)|dm_\lambda(x) &\le \left(\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |\sigma_1(x)|^2 dm_\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\lesssim \frac{1}{(m_\lambda(I))^{1/2}}\left(\int_{4I}|f(x)|^2 dm_\lambda(x)\right)^{1/2}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\left(\frac{m_\lambda(4I)}{m_\lambda(I)}\right)^{1/2}\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.\end{aligned}$$

根据命题 2.5 (c)，并利用 m_λ 的倍增性质，我们得到

$$\begin{aligned}|R_{\Delta_\lambda}(f_2)(x) - R_{\Delta_\lambda}(f_2)(u)| &\lesssim \sum_{j=2}^\infty \int_{(2^{j+1}I)\setminus(2^jI)} \frac{|x-u|}{|x-y|}\frac{|f(y)|}{m_\lambda(B(x,|x-y|))}dm_\lambda(y)\\ &\lesssim \sum_{j=2}^\infty \frac{m_\lambda(2^{j+1}I)}{2^j m_\lambda(B(x,2^j r_0))}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\sum_{j=2}^\infty 2^{-j}\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)},\ x,u \in I.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |\sigma_2(x,u)|dm_\lambda(x) &\le C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |b(x)-b_I|dm_\lambda(x)\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)},\ u \in I.\end{aligned}$$

再次利用命题 2.5 (c)，我们得到对于 $x,u \in I$,

$$|\sigma_3(x,u)| \le \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} |b(y)-b_I||R_{\Delta_\lambda}(x,y) - R_{\Delta_\lambda}(u,y)|dm_\lambda(y)\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$$

$$\lesssim \sum_{j=2}^{\infty} \int_{(2^{j+1}I)\setminus(2^jI)} |b(y)-b_I| \frac{|x-u|}{|x-y|} \frac{dm_\lambda(y)}{m_\lambda(B(x,|x-y|))} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j} \frac{1}{m_\lambda(B(x,2^j r_0))} \int_{(2^{j+1}I)} |b(y)-b_I| dm_\lambda(y)$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j} \frac{1}{m_\lambda(2^jI)} \int_{(2^{j+1}I)} |b(y)-b_I| dm_\lambda(y)$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \sum_{j=2}^{\infty} j2^{-j}$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.$$

于是,

$$\frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |\sigma_3(x,u)| dm_\lambda(x) \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}, \quad u \in I.$$

对于每个区间 $I \subseteq \mathbb{R}_+$，我们选取 $u_I \in I$，可得

$$\left| \sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |[b,R_{\Delta_\lambda}](f)(x) - ([b,R_{\Delta_\lambda}](f))_I| dm_\lambda(x) - \sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |\sigma_4(x,u_I)| dm_\lambda(x) \right|$$

$$\leq \sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |\sigma_1(x) - (\sigma_1)_I + \sigma_2(x,u_I) - (\sigma_2(\cdot,u_I))_I + (\sigma_3(x,\cdot))_I| dm_\lambda(x)$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.$$

We 得到 $\|[b,R_{\Delta_\lambda}](f)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\ dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$ 当且仅当 if,

$$\sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |\sigma_4(x,u_I)| dm_\lambda(x) \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \tag{4.1}$$

对于某个 $u_I \in I$。

估计式 (4.1) 可写为

$$\sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y)-b_I| dm_\lambda(y) \left| \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z) \right|$$

$$\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$$

对于某个 $u_I \in I$。

设 K_0 为命题 2.5 中出现的常数。记

$$\int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z)$$

$$= \left(\int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ K_0^{-1}u_I \leq z \leq K_0 u_I}} + \int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ 0<z\leq K_0^{-1}u_I}} + \int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ K_0 u_I < z}} \right) R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z)$$

$$=: J_1(I) + J_2(I) + J_3(I), \qquad I \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ interval and } u_I \in I.$$

根据命题 2.5 (a)，对于每个区间 $I \subseteq \mathbb{R}_+$ 和 $u_I \in I$，我们得到:

$$|J_2(I)| \lesssim \int_0^{K_0^{-1}u_I} \frac{dm_\lambda(z)}{u_I^{2\lambda+1}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$$

and

$$|J_3(I)| \lesssim \int_{K_0u_I}^{\infty} \frac{dm_\lambda(z)}{u_I^{2\lambda+2}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\left| \sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y)-b_I| dm_\lambda(y) \right| \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z) \Bigg| \\ &\quad - \sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y)-b_I| dm_\lambda(y) \left| \int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I}} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z) \right| \Bigg| \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)},\end{aligned}$$

其中 $u_I \in I$，对每个区间 $I \subseteq \mathbb{R}_+$ 都成立。

我们推得 $\|[b,R_{\Delta_\lambda}](f)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&\sup_{I\subseteq\mathbb{R}_+} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y)-b_I| dm_\lambda(y) \left| \int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I}} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z) \right| \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)},\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $u_I \in I$，对每个区间 $I \subseteq \mathbb{R}_+$ 都成立。

注意，若 (4.2) 对某个族 $\{u_I:\ I\subseteq\mathbb{R}_+\}$ 成立，则 (4.2) 对每个族 $\{u_I : I\subseteq\mathbb{R}_+\}$ 都成立。

设 $I=(0,2x_0)$，其中 $x_0>0$。则 $4I=(0,5x_0)$。我们有 $(\mathbb{R}_+\setminus(4I))\cap\{z\in\mathbb{R}_+ : K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I\}=\varnothing$ 对每个 $u_I\in I$ 都成立。

现在考虑 $I=(x_0-r_0,x_0+r_0)$，其中 $0<r_0<x_0\le 4x_0$。于是，$4I=(0,x_0+4r_0)$。取 $u_I=x_0$，并注意到

$$\varnothing \neq (\mathbb{R}_+\setminus(4I))\cap\{z\in\mathbb{R}_+ : K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I\} = [x_0+4r_0, K_0x_0]$$

当且仅当 $x_0+4r_0\le K_0x_0$.

根据 [38,(1.3)], , 可得

$$\begin{aligned}|J_1(I)| &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \int_{x_0+4r_0}^{K_0x_0} \frac{dm_\lambda(z)}{m_\lambda(B(z,|x_0-z|))} \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \int_{x_0+4r_0}^{K_0x_0} \frac{dz}{z-x_0} \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \log\Big(\frac{(K_0-1)x_0}{4r_0}\Big) \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.\end{aligned}$$

由于 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+)$，不等式 (4.2) 成立当且仅当

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{I=(x_0-r_0,x_0+r_0) \\ 0<4r_0<x_0}} \frac{1}{m_\lambda(I)} \int_I |b(y)-b_I| dm_\lambda(y) \left| \int_{\substack{\mathbb{R}_+\setminus(4I) \\ K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I}} R_{\Delta_\lambda}(u_I,z) f(z) dm_\lambda(z) \right| \\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.\end{aligned}$$

假设 $I=(x_0-r_0,x_0+r_0)$，且 $0<4r_0<x_0$。如果 $K_0x_0>x_0+4r_0$ 我们得 t

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0+4r_0}^{K_0x_0}R_{\Delta_\lambda}(x_0,z)f(z)dm_\lambda(z)\right| &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\log\Big(\frac{(K_0-1)x_0}{4r_0}\Big)\\ &\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\log\Big(\frac{x_0}{r_0}\Big).\end{aligned}$$

如果 $K_0^{-1}x_0<x_0-4r_0$，那么

$$\left|\int_{K_0^{-1}x_0}^{x_0-4r_0}R_{\Delta_\lambda}(x_0,z)f(z)dm_\lambda(z)\right|\lesssim\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\log\Big(\frac{x_0}{r_0}\Big).$$

我们推得，在满足 $b\in$ BMO$(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 且.....的条件下，$[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 是从 $L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 到 BMO$(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 的有界算子

$$\sup_{\substack{I=(x_0-r_0,x_0+r_0)\\0<4r_0<x_0}}\log\Big(\frac{x_0}{r_0}\Big)\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I|b(y)-b_I|dm_\lambda(y)<\infty. \tag{4.3}$$

现在假设 $I=(x_0-r_0,x_0+r_0)$，其中 $0<4r_0<x_0$ 满足

$$(\mathbb{R}_+\setminus(4I))\cap\{z\in\mathbb{R}_+:K_0^{-1}u_I\le z\le K_0u_I\}\neq\varnothing.$$

我们有 $r_0<(K_0-1)x_0/4$。根据命题 2.5 (d)，我们推得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}R_{\Delta_\lambda}(x_0,z)\chi_{(x_0+4r_0,K_0x_0)}(z)dm_\lambda(z)\right|\\ &\quad\ge C\int_{x_0+4r_0}^{K_0x_0}\frac{1}{(x_0z)^\lambda(z-x_0)}z^{2\lambda}dz\\ &\quad\ge C\log\Big(\frac{(K_0-1)x_0}{4r_0}\Big)\\ &\quad\ge C\log\Big(\frac{x_0}{r_0}\Big).\end{aligned}$$

由此可知，若 $b\in$ BMO$(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$，且 $[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 是从 $L^\infty(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 到 BMO$(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$ 的有界算子，则 (4.3) 成立。□

*定理 1.7 的证明。*假设 a 是一个 $(1,2)_{\triangle_\lambda}$-原子，且 supp $a\subseteq I=(x_0-r_0,x_0+r_0)$，其中 $0<r_0\le x_0$。由于 $b\in$ BMO$(\mathbb{R}_+,m_\lambda)$ $b\in L^1(\mathbb{R}_+,m_\lambda)$，且 $[b,R_{\Delta_\lambda}]$ 定义良好。我们可以写成（见 [21, 第 688] 页）

$$\begin{aligned}[b,R_{\Delta_\lambda}](a)(x)&=\chi_{4I}(x)[b,R_{\Delta_\lambda}](a)(x)+\chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(b(x)-b_I)R_{\Delta_\lambda}(a)(x)\\&\quad+\chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(x)R_{\Delta_\lambda}(a(b-b_I))(x)\\&=\chi_{4I}(x)[b,R_{\Delta_\lambda}](a)(x)+\chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(b(x)-b_I)R_{\Delta_\lambda}(a)(x)\\&\quad+\chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(x)\int_I(R_{\Delta_\lambda}(x,y)-R_{\Delta_\lambda}(x,u))(b(y)-b_I)a(y)dm_\lambda(y)\\&\quad+\chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(x)-R_{\Delta_\lambda}(x,u)\int_I(b(y)-b_I)a(y)dm_\lambda(y)\\&=:T_1(a)(x)+T_2(a)(x)+T_3(a)(x,u)+T_4(a)(x,u),\ u\in I\text{ and }x\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

由于 $[b, R_{\Delta_\lambda}]$ 是从 $L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 到其自身的有界算子，因此

$$\begin{aligned}\|T_1(a)\|_{L^1(\mathbb{R}_+,m_\lambda)} &= \int_{4I} |[b, R_{\Delta_\lambda}](a)(x)| dm_\lambda(x) \le (m_\lambda(4I))^{1/2} \|[b, R_{\Delta_\lambda}](a)\|_{L^2(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \\ &\lesssim (m_\lambda(4I))^{1/2} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.\end{aligned}$$

对于任意 $u \in I$，我们有

$$T_2(a)(x) = \chi_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)}(x)(b(x) - b(y)) \int_I (R_{\Delta_\lambda}(x, z) - R_{\Delta_\lambda}(x, u)) a(y) dm_\lambda(y),\ x \in \mathbb{R}_+.$$

根据命题 2.5 (c)，并取 $u \in I$，可得

$$\begin{aligned}\|T_2(a)\|_{L^1(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} &\le \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} |b(x) - b_I| \int_I |R_{\Delta_\lambda}(x, y) - R_{\Delta_\lambda}(x, u)||a(y)| dm_\lambda(y) dm_\lambda(x) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} |b(x) - b_I| \int_I \frac{|y-u|}{|x-y| m_\lambda(I(x, |x-y|))} |a(y)| dm_\lambda(y) dm_\lambda(x) \\ &\lesssim r_0 \sum_{j=2}^{\infty} \int_{(2^{j+1}I)\setminus(2^jI)} |b(x) - b_I| \int_I \frac{|a(y)|}{|x-y| m_\lambda(I(x, |x-y|))} dm_\lambda(y) dm_\lambda(x).\end{aligned}$$

对于每个 $j \in \mathbb{Z}$、$j \ge 2$、$x \in (2^{j+1}I) \setminus (2^jI)$ 和 $y \in I$，我们得到

$$2^j I \subseteq I(y, 2^{j+1} r_0) \subseteq I(y, 4|x-y|) \subseteq I(x, 5|x-y|),$$

并且，由于 m_λ 是倍增的，

$$m_\lambda(2^j I) \lesssim 2^j m_\lambda(I(x, |x-y|)).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|T_2(a)\|_{L^1(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} &\lesssim r_0 \sum_{j=2}^{\infty} \int_{(2^{j+1}I)} \frac{|b(x) - b_I|}{2^j r_0 m_\lambda(2^j I)} dm_\lambda(x) \\ &\lesssim \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j r_0 m_\lambda(2^j I)} \int_{(2^{j+1}I)} |b(x) - b_I| dm_\lambda(x) \\ &\lesssim \sum_{j=2}^{\infty} j 2^{-j} \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.\end{aligned}$$

再次利用命题 2.5 (c)，我们可以写出

$$\begin{aligned}&\|T_3(a)(\cdot, u)\|_{L^1(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} \\ &\le \int_{\mathbb{R}_+\setminus(4I)} \int_I |R_{\Delta_\lambda}(x, y) - R_{\Delta_\lambda}(x, u)||b(y) - b_I||a(y)| dm_\lambda(y) dm_\lambda(x) \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty} \int_{(2^{j+1}I)\setminus(2^jI)} \int_I \frac{|y-u|}{|x-y| m_\lambda(I(x, |x-y|))} |b(y) - b_I||a(y)| dm_\lambda(y) dm_\lambda(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim r_0 \sum_{j=2}^{\infty} \int_{(2^{j+1}I)} \int_I \frac{1}{2^j r_0 m_\lambda(2^j I)} |b(y)-b_I||a(y)| dm_\lambda(y) dm_\lambda(x) \\
&\lesssim \sum_{j=2}^{\infty} \frac{m_\lambda(2^{j+1}I)}{2^j m_\lambda(2^j I)} \|b-b_I\|_{L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \\
&\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}, \ u \in I.
\end{aligned}$$

注意，上述隐含常数与 a 和 $u \in I$ 无关。我们已证明，对于每个 $u \in I$,

$$\|[b, R_{\Delta_\lambda}](a) - T_4(a)(\cdot, u)\|_{L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)}. \tag{4.4}$$

根据 [39, 定理 1.1], $[b, R_{\Delta_\lambda}]$ 可以从 span{(1, 2)$_{\triangle_\lambda}$-原子} 扩展为 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 上的有界算子，从 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 映射到 $L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$，当且仅当存在一个正的常数，使得对于每个满足 supp $a \subseteq I$ 的 (1, 2)$_{\triangle_\lambda}$- 原子

$$\|T_4(a)(\cdot, u)\|_{L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)} \lesssim 1,$$

等价地，由于 $\int_I a(x) dm_\lambda(x) = 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+ \setminus (4I)} R_{\Delta_\lambda}(x, u) dm_\lambda(x) \right| \left| \int_I b(y) a(y) dm_\lambda(y) \right| \lesssim 1. \tag{4.5}$$

注意，利用 (4.4) 可知，在上述性质中，我们可以将“存在$u \in I$”改为“对于每个 $u \in I$”。下文中我们固定 $u = x_0$，其中 $I = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ 且满足$0 < r_0 \leq x_0$。

根据命题 2.5 (a) 和 [38, (1.4)]，我们得到

$$|R_{\Delta_\lambda}(x, z)| \lesssim \frac{1}{m_\lambda(B(x, |x-z|))} \lesssim \frac{1}{m_\lambda(B(z, |x-z||))} \lesssim \frac{1}{z^{2\lambda}|x-z|}, \ x, z \in \mathbb{R}_+.$$

如果 $x_0 > 4r_0$，那么

$$\left| \int_0^{x_0 - 4r_0} R_{\Delta_\lambda}(x, x_0) dm_\lambda(x) \right| \lesssim \int_0^{x_0 - 4r_0} \frac{x^{2\lambda}}{x_0^{2\lambda}|x - x_0|} dx \lesssim \frac{(x_0 - 4r_0)^{2\lambda+1}}{x_0^{2\lambda} r_0}.$$

如果 $K_1 x_0 > x_0 + 4r_0$，则可得

$$\left| \int_{x_0 + 4r_0}^{K_1 x_0} R_{\Delta_\lambda}(x, x_0) dm_\lambda(x) \right| \lesssim \int_{x_0 + 4r_0}^{K_1 x_0} \frac{x^{2\lambda}}{x_0^{2\lambda}|x - x_0|} dx \lesssim \frac{x_0}{r_0}.$$

利用命题 2.5 (g)，我们得到

$$\left| \int_{K_1 x_0}^{\infty} R_{\Delta_\lambda}(x, x_0) dm_\lambda(x) \right| \gtrsim \int_{K_1 x_0}^{\infty} \frac{1}{x^{2\lambda+1}} x^{2\lambda} dx = \infty.$$

由上述估计可推得

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+ \setminus (4I)} R_{\Delta_\lambda}(x, x_0) dm_\lambda(x) \right| = \infty.$$

若 (4.5) 对满足 $0 < r_0 \le x_0$ 的 $I = (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ 成立，且 $u = x_0$ 和一个 (1, 2)$\triangle_\lambda$-原子 a 满足 supp $(a) \subseteq I$，则

$$\int_I b(y)a(y)dm_\lambda(y) = 0.$$

我们已证明，$[b, R_{\Delta_\lambda}]$ 可以从形式为 span{(1, 2)$\triangle_\lambda$-原子} 延拓到 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$，成为从 $H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 到 $L^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)$ 的有界算子，当且仅当对每个 (1, 2)$\triangle_\lambda$-原子 a，$\int_0^\infty b(y)a(y)dm_\lambda(y) = 0$，因为 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}_+, dm_\lambda) = \left(H^1(\mathbb{R}_+, dm_\lambda)\right)'$，若

$$\int_0^\infty b(y)a(y)dm_\lambda(y) = 0$$

对每个 (1, 2)$\triangle_\lambda$-原子 a，则 $b = 0$ 作为BMO($\mathbb{R}_+$)中的一个元素，也就是说，b 几乎处处为常数。

□

5 定理1.8的证明

设 $K^\alpha(x, y)$ 是 ${\triangle_\lambda}^{-\alpha/2}$ 的核。那么

$$K^\alpha(x,y) \sim (x+y)^{-2\lambda} \begin{cases} |x-y|^{\alpha-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ \ln \frac{2(x+y)}{|x-y|}, & \alpha = 1, \\ (x+y)^{\alpha-1}, & 1 < \alpha < \mathbf{Q}. \end{cases}$$

上述估计可见于 [28, 定理 2.1]。由此可得

引理5.1. 设 $0 < \alpha < 1$。我们有

$$K^\alpha(x,y) \sim \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(x, |x-y|))}. \tag{5.1}$$

证明. 设 $x, y \in \mathbb{R}_+$ 满足 $x < y$。若 $x > 2|x-y|$，则

$$\frac{1}{(x+y)^{2\lambda}} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{x^{2\lambda}} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \sim \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(x, |x-y|))}.$$

若 $x \le 2|x-y|$，则 $x + y \sim |x-y|$，从而得到

$$\frac{1}{(x+y)^{2\lambda}} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{|x-y|^{2\lambda}} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \sim \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(x, |x-y|))}.$$

设 $x, y \in \mathbb{R}_+$ 满足 $y < x$，则有

$$\frac{1}{(x+y)^{2\lambda}} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \sim \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(y, |x-y|))} \sim \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(x, |x-y|))}.$$

□

利用 [28, 定理 2.1], 证明中的论证，我们还可得到如下光滑性条件。

引理5.2。 设 $0 < \alpha < 1$。若 x，x'，$y \in \mathbb{R}_+$ 且 $|x - x'| < |x-y|/2$，则

$$|K^\alpha(x,y) - K^\alpha(x',y)| \lesssim \frac{|x-x'|}{|x-y|} \frac{|x-y|^\alpha}{m_\lambda(I(x, |x-y|))}. \tag{5.2}$$

证明。 我们首先证明

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}K^\alpha(x,y)\Big| \lesssim \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^2(x+y)^{2\lambda}}, \qquad x,y\in(0,\infty), x\neq y. \tag{5.3}$$

令 I_λ 表示阶数为 λ 的第二类贝塞尔函数。我们有

$$K^\alpha(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty W_t^\lambda(x,y)t^{\frac{\alpha}{2}-1}dt, \qquad x,y\in(0,\infty), x\neq y,$$

其中， $W_t^\lambda(x,y)$ 是与 $\triangle_\lambda$ 相关的热核，其显式表达式如下（例如参见 [3]）

$$W_t^\lambda(x,y)=\frac{1}{2t}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big)(xy)^{-\lambda+\frac12}I_{\lambda-\frac12}\Big(\frac{xy}{2t}\Big), \qquad t,x,y\in(0,\infty).$$

由于 $\frac{\partial}{\partial_z}(z^{-\mu}I_\mu(z)) = z^{-\mu}I_{\mu+1}(z)$ $z\in(0,\infty)$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x}W_t^\lambda(x,y)=\frac{1}{2t}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big)\Big[-\frac{x}{2t}(xy)^{-\lambda+\frac12}I_{\lambda-\frac12}\Big(\frac{xy}{2t}\Big)+\frac{y}{2t}(xy)^{-\lambda+\frac12}I_{\lambda+\frac12}\Big(\frac{xy}{2t}\Big)\Big]$$

对于 $t,x,y\in(0,\infty)$。利用 I_μ 的渐近展开以及 $I_\mu(z)\sim \frac{z^\mu}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}$，的渐近性质，当 $z\to 0^+$ 时，我们推得

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}W_t^\lambda(x,y)\Big| \lesssim \begin{cases} \frac{x+y}{t^{\lambda+\frac32}}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big), & xy\le t,\\ \Big(\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}+\frac{x+y}{\sqrt{t}}\Big)\ \frac{1}{t}\ \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big)(xy)^{-\lambda}, & xy\ge t, \end{cases} \qquad t,x,y\in(0,\infty).$$

因此，

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial}{\partial x}K^\alpha(x,y)\Big| &\lesssim (x+y)\Big[(xy)^{-\lambda}\int_0^{xy}\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big)t^{\frac{\alpha-4}{2}}dt\Big(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\Big)\\ &\qquad+\int_{xy}^\infty\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4t}\Big)t^{\frac{\alpha}{2}-\lambda-\frac52}dt\Big]\\ &\lesssim (x+y)(xy)^{-\lambda+\frac{\alpha-3}{2}}\Big[\int_0^1\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4xyu}\Big)u^{\frac{\alpha-4}{2}}du\Big(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\Big)\\ &\qquad+\int_0^1\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4xy}u\Big)u^{\lambda+\frac12-\frac{\alpha}{2}}du\Big], \qquad x,y\in(0,\infty).\end{aligned}$$

根据引理 3.1], 的 [28,

$$\int_0^1\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4xyu}\Big)u^{\frac{\alpha-4}{2}}du\lesssim\exp\Big(-c\frac{(x-y)^2}{xy}\Big)\Big(\frac{(x-y)^2}{xy}\Big)^{\frac{\alpha-2}{2}}, \qquad x,y\in(0,\infty), x\neq y,$$

and

$$\int_0^1\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{4xy}u\Big)u^{\lambda+\frac12-\frac{\alpha}{2}}du\lesssim\Big(\frac{x^2+y^2}{xy}\Big)^{-\lambda-\frac32+\frac{\alpha}{2}}, \qquad x,y\in(0,\infty), x\neq y.$$

由此可知，对于 $x,y\in(0,\infty)$ 且满足 $x\neq y$ 的情形，

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{\partial}{\partial x}K^{\alpha}(x,y)\Big|\\&\lesssim(x+y)\bigg[\exp\Big(-c\frac{(x-y)^2}{xy}\Big)|x-y|^{\alpha-2}(xy)^{-\lambda}\Big(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\Big)+(x+y)^{\alpha-2\lambda-3}\bigg].\end{aligned}$$

假设 $(x-y)^2\leq xy$。那么， $xy\sim(x+y)^2$，并且我们有

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}K^{\alpha}(x,y)\Big|\lesssim\frac{|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^2(x+y)^{2\lambda}}.$$

另一方面，若 $(x-y)^2\geq xy$，则对于某个固定的 $C>1$，要么 $y<x/C$，要么 $y>Cx$。假设 $y<x/C$。我们得到

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial}{\partial x}K^{\alpha}(x,y)\Big|&\lesssim e^{-c\frac{x}{y}}|x-y|^{\alpha-2}(xy)^{-\lambda}\Big(1+\sqrt{\frac{x}{y}}\Big)+(x+y)^{\alpha-2\lambda-2}\\&\lesssim|x-y|^{\alpha-2}x^{-2\lambda}+(x+y)^{\alpha-2\lambda-2}\\&\lesssim\frac{|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^2(x+y)^{2\lambda}}.\end{aligned}$$

当 $y>Cx$ 时，只需利用对称性。因此，式 (5.3) 得证。

令 x、x'、$y\in\mathbb{R}_+$，其中 $|x-x'|<|x-y|/2$。我们有

$$\begin{aligned}|K^{\alpha}(x,y)-K^{\alpha}(x',y)|&\lesssim\bigg|\int_{x'}^{x}\frac{|z-y|^{\alpha}}{|z-y|^2(z+y)^{2\lambda}}dz\bigg|\\&\lesssim|x-x'|\frac{1}{|x-y|^{2-\alpha}(x+y)^{2\lambda}}\\&\lesssim\frac{|x-x'|}{|x-y|}\frac{|x-y|^{\alpha}}{m_{\lambda}(I(x,|x-y|))}.\end{aligned}$$

证明完成。 □

接下来，我们证明以下辅助极大函数估计，它将在定理1.8的证明中用到。

假设对每个区间 I，都有一个定义在该区间上的函数 h^I。令 $\beta\geq0$，并定义

$$h_{\beta}(x)=\sup_{I\ni x}\frac{1}{m_{\lambda}(I)^{1+\frac{\beta}{\mathbf{Q}}}}\int_I|h^I(y)|dm_{\lambda}(y),\qquad x\in(0,\infty),$$

其中，上确界取遍所有满足 $x\in I$ 的区间 $I\subseteq(0,\infty)$。为了证明定理1.8，我们需要以下引理。

引理5.3。令 $0\leq\beta<\alpha<\infty$ 和 $1<p<q<\infty,1/p-1/q=(\alpha-\beta)/\mathbf{Q}$。假设对每个区间 I，都有一个定义在该区间上的函数 h^I。那么，

$$\|h_{\beta}\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_{\lambda})}\lesssim\|h_{\alpha}\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_{\lambda})},\tag{5.4}$$

其中隐含常数仅依赖于 p,q,α 和 λ。

证明。设 $0<r<\mathbf{Q}/(\alpha-\beta)$，并令 I 为 $(0,\infty)$ 中的一个区间。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\beta}{\mathbf{Q}}}}\int_I |h^I|dm_\lambda &\le m_\lambda(I)^{\frac{\alpha-\beta}{\mathbf{Q}}}\int_{u\in I} h_\alpha(u)\\ &\le m_\lambda(I)^{\frac{\alpha-\beta}{\mathbf{Q}}-\frac{1}{r}}\left(\int_I h_\alpha(u)^r dm_\lambda(u)\right)^{1/r}\\ &= \left(\frac{1}{m_\lambda(I)^{1-\frac{r(\alpha-\beta)}{\mathbf{Q}}}}\int_I h_\alpha(u)^r dm_\lambda(u)\right)^{1/r}\\ &\lesssim \left(\int_I \frac{h_\alpha(u)^r}{m_\lambda(I(x,|x-u|))^{1-\frac{r(\alpha-\beta)}{\mathbf{Q}}}}dm_\lambda(u)\right)^{1/r},\quad x\in I.\end{aligned}$$

我们对每个 $0<\gamma<1$ 定义分数阶积分 I_λ^γ 如下：

$$I_\lambda^\gamma(f)(x)=\int_0^\infty \frac{f(u)}{m_\lambda(I(x,|x-u|))^{1-\gamma}}dm_\lambda(u).$$

于是，

$$h_\beta(x)\lesssim\{I_\lambda^\gamma[h_\alpha]^r(x)\}^{1/r},\qquad x\in(0,\infty). \tag{5.5}$$

由 [30, 定理 1] 可知，只要$1<\tilde p<\tilde q$ 且 $\frac{1}{\tilde p}=\frac{1}{\tilde q}+\gamma$，算子 I_λ^γ 就将 $L^{\tilde p}$ 有界映射到 $L^{\tilde q}$。设 $\tilde p=p/r$ 和 $\tilde q=q/r$ 满足 $r<p$ 且 $\gamma=r(\alpha-\beta)/\mathbf{Q}<1$ 如上所述。则由 (5.5)，当 $g=I_\lambda^\gamma[(h_\alpha)^r]$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|h_\beta\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)} &\lesssim \|g^{1/r}\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}=\|g\|^{1/r}_{L^{\tilde q}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\ &\lesssim \|(h_\alpha)^r\|_{L^{\tilde p}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\ &=\|h_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)},\end{aligned}$$

这就是 (5.4)。 □

现在我们来证明定理1.8。

定理*1.8* 的证明。固定 $x\in\mathbb{R}_+, k\in\mathbb{Z}$。令 $I=I(x,2^{-k})$ 和 $f\in L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)$。令 $f_1=f\chi_{(2I)}$和 $f_2=f-f_1$。注意到 $[b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f=[b-b_I,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f$，于是有：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}}\int_I |[b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f(y)-([b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f)_I|dm_\lambda(y)\\ &=\frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}}\int_I |[b-b_I,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f(y)-([b-b_I,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f)_I|dm_\lambda(y)\\ &\le\frac{2}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}}\int_I |[b-b_I,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(x)|dm_\lambda(y)\\ &\le\frac{2}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}}\int_I |(b(y)-b_I)\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f(y)|dm_\lambda(y)\\ &\quad+\frac{2}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}}\int_I |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y)\\ &\quad+\frac{2}{2^{-k\beta}}\sup_{y\in I}|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(x)|.\end{aligned}$$

接下来，利用命题 3.5 得到

$$
\begin{aligned}
&\|[b,\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}]f\|_{\dot{F}^{\beta,\infty}_{\lambda,q}}\\
&\lesssim \Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}} \int_I |(b(y)-b_I)\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2} f(y)|dm_\lambda(y)\Big\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\quad+\Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}} \int_I |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y)\Big\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\quad+\Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{2^{-k\beta}} \sup_{y\in I}|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(\cdot)|\Big\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\lesssim \Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}} \int_I |(b(y)-b_I)\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2} f(y)|dm_\lambda(y)\Big\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\quad+\Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}2^{-k\beta}} \int_I |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\quad+\Big\| \sup_{I(\cdot,2^{-k})} \frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}} \sup_{y\in I}|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(\cdot)|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&=: III_1+III_2+III_3,
\end{aligned}
$$

最后两个不等式由引理5.3得出。

我们分别估计这些项。对于 $1<t<p$，由Hölder不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)2^{-k\beta}} \int_I |(b(y)-b_I)\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2} f(y)|dm_\lambda(y)\\
&\le \frac{1}{2^{-k\beta}}\Big(\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |b(y)-b_I|^t dm_\lambda(y)\Big)^{\frac{1}{t'}}\Big(\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f(y)|^t dm_\lambda(y)\Big)^{\frac{1}{t}}\\
&\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta} M_t(\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f)(x),
\end{aligned}
$$

最后一个不等式由定理 3.2得出。因此， [28, 定理 2.1] 蕴含

$$
\begin{aligned}
III_1 &\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}\|M_t(\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f)\|_{L^q(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}\|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\\
&\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.
\end{aligned}
$$

为了估计 III_2，我们选取 s、 $1<s<p$和 $\bar{s}$，使得$\frac{1}{s}-\frac{1}{\bar{s}}=\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}$。由Hölder不等式,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}2^{-k\beta}} \int_I |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y)\\
&\le \frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}2^{-k\beta}}\|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)\|_{L^{\bar{s}}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\ m_\lambda(I)^{1-\frac{1}{\bar{s}}}\\
&= \frac{1}{m_\lambda(I)^{\frac{1}{s}}2^{-k\beta}}\|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)\|_{L^{\bar{s}}(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.
\end{aligned}
$$

然后我们利用 [28, 定理 2.1] 得到

$$
\frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}2^{-k\beta}} \int_B |\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y) \lesssim \frac{1}{m_\lambda(I)^{\frac{1}{s}}2^{-k\beta}}\|(b-b_I)f_1\|_{L^s(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}.
$$

容易验证

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_{\mathbb{R}_+}|b(x')-b_I|^s|f_1(x')|^s dm_\lambda(x')\\
&\lesssim \frac{1}{m_\lambda(2I)}\int_{2I}|b(x')-b_I|^s|f(x')|^s dm_\lambda(x')\\
&\lesssim \left(\sup_{y\in 2I}|b(y)-b_I|\right)^s\frac{1}{m_\lambda(2I)}\int_{2I}|f(x')|^s dm_\lambda(x')\\
&\lesssim \left(\sup_{y\in 2I}\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I|b(y)-b(z)|dm_\lambda(z)\right)^s M_s^s(f)(x)\\
&\lesssim \left(2^{-k\beta}\sup_{y\in 2I}\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I\sup_{|y-z|\neq 0}\frac{|b(y)-b(z)|}{|y-z|^\beta}dm_\lambda(z)\right)^s M_s^s(f)(x)\\
&\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}^s 2^{-ks\beta}M_s^s(f)(x).
\end{aligned}$$

我们看到

$$\|(b-b_I)f_1\|_{L^s(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{1}{s}}M_s(f)(x).$$

因此，我们有

$$\frac{1}{m_\lambda(I)^{1+\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}2^{-k\beta}}\int_I|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_1)(y)|dm_\lambda(y)\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}M_s(f)(x)$$

因此 $III_2\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}\|M_s(f)\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}\lesssim\|b\|_{\Lambda^\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$.

最后，我们估计 III_3。由 (5.2),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}}\left|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(x)\right|\\
&=\frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}}\left|\int_{\mathbb{R}_+}[K^\alpha(y,z)-K^\alpha(x,z)](b(z)-b_I)f_2(z)dm_\lambda(z)\right|\\
&\lesssim\frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{|x-y|}{|x-z|}\frac{|x-z|^\alpha}{m_\lambda(I(x,|x-z|))}|b(z)-b_I||f_2(z)|dm_\lambda(z)\\
&\lesssim\frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}}\int_{(2I)^c}\frac{|x-y|}{|x-z|}\frac{|x-z|^\alpha}{m_\lambda(I(x,|x-z|))}|b(z)-b_I||f(z)|dm_\lambda(z).
\end{aligned}$$

由于

$$m_\lambda(I(x,r))\sim x^{2\lambda}r+r^{\mathbf{Q}}\geq r^{\mathbf{Q}},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{-k\beta}m_\lambda(I)^{\frac{\alpha}{\mathbf{Q}}}}\left|\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(y)-\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}((b-b_I)f_2)(x)\right|\\
&\lesssim\frac{1}{2^{-k\beta}}\sum_{j=1}^\infty\int_{2^{j-k}<|x-z|\leq 2^{j-k+1}}2^{-j(1-\alpha)}\frac{1}{m_\lambda(I(x,|x-z|))}|b(z)-b_I||f(z)|dm_\lambda(z)\\
&\lesssim\frac{1}{2^{-k\beta}}\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{m_\lambda(I(x,2^{j-k}))}\int_{|x-z|\leq 2^{j+1-k}}2^{-j(1-\alpha)}\big(|b(z)-b_{2^jI}|+|b_{2^jI}-b_I|\big)|f(z)|dm_\lambda(z)
\end{aligned}$$

$$\lesssim \frac{1}{2^{-k\beta}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j(1-\alpha)}}{m_\lambda(I(x,2^{j-k}))}\int_{|x-z|\le 2^{j-k+1}}|b(z)-b_{2^jI}||f(z)|dm_\lambda(z)$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j(1-\alpha)}\|b\|_{\Lambda^\beta}2^{(j-k)\beta}M(f)(x)j$$
$$\lesssim \Big(\|b\|_{\Lambda^\beta}M_{ts}(f)(x)+\|b\|_{\Lambda^\beta}M(f)(x)\Big)\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j(1-\alpha-\beta)}j$$
$$\lesssim \Big(\|b\|_{\Lambda^\beta}M_{ts}(f)(x)+\|b\|_{\Lambda^\beta}M(f)(x)\Big)$$

对于 $\alpha+\beta<1$。

因此，我们有

$$III_3 \lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,dm_\lambda)}$$

对于 $\alpha+\beta<1$。由于 $\triangle_\lambda{}^{-\alpha/2}\triangle_\lambda{}^{-\beta/2}=\triangle_\lambda{}^{-(\alpha+\beta)/2}$，可通过 [29, 中的事实1.9和1.10]所述方法去除假设 $\alpha+\beta<1$。证明完毕。 □

致谢： JB的研究部分得到了西班牙政府项目PID2019-106093GB-I00的资助。XD和JL的研究得到了澳大利亚研究理事会项目DP 220100285的资助。MYL的研究得到了科技部项目110-2115-M-008-009-MY2的资助。BDW的研究部分得到了美国国家科学基金会项目DMS #1800057、#2054863和#20000510，以及澳大利亚研究理事会项目DP 220100285的资助。

参考文献

[1] K. F. Andersen 和 R. A. Kerman，广义Hankel共轭变换的加权范数不等式，《数学研究》71 (1981/82)，15–26.[2] J. J. Betancor、A. Chicco Ruiz、J. C. Fariña 和 L. Rodríguez-Mesa，与贝塞尔算子相关的 BMO 上的极大算子、Riesz变换和 Littlewood–Paley函数，《数学分析与应用杂志》363 (2010)，310–326.[3] J. J. Betancor、J. Dziubański 和 J. L. Torrea，关于与贝塞尔算子相关的 Hardy空间，《数学分析杂志》107 (2009)，195–219.[4] J. J. Betancor、J. C. Fariña、D. Buraczewski、T. Martínez 和 J. L. Torrea，与贝塞尔算子相关的 Riesz变换，《爱丁堡皇家学会会刊 A辑》137 (2007)，701–725.[5] J. J. Betancor、A. Castro 和 A. Nowak，贝塞尔情形中的 Calderón–Zygmund算子。《月刊数学》167 (2012)，375–403.[6] J. J. Betancor、J. C. Fariña 和 A. Sanabria，关于与贝塞尔算子相关的 Littlewood–Paley函数，《格拉斯哥数学杂志》51 (2009)，55–70.[7] M. Bramanti 和 M. C. Cerutti，与贝塞尔算子相关的调和分析中泛函算子的映射性质，《数学研究》197 (2010)，101–140.[8] M. Bramanti 和 M. C. Cerutti，齐性空间上的奇异积分交换子，《意大利数学联合会通报》B(7) 10 (1996)，843–883.[9] M. Christ，一条带有关于解析容量和柯西积分的注记的 T(b)定理，《数学讨论会》60/61 (1990)，第 2 期，601–628。

[10] D.-C. Chang、S.G. Krantz 和 E.M. Stein， H^p 光滑区域上的理论以及 $\mathbb{R}^N$ 和椭圆边值问题，《函数分析杂志》114 (1993)，286–347.[11] R. R. Coifman、R. Rochberg 和 G. Weiss，多变量 Hardy空间的分解定理，《数学年刊》(2) 103 (1976)，611–635.[12] R. R. Coifman 和 G. Weiss，Hardy空间的扩张及其在分析中的应用，《美国数学会通报》83 (1977)，569–645.[13] G. David、J.-L. Journé 和 S. Semmes。Calderón-Zygmund算子、拟正函数与插值。《伊比利亚美洲数学杂志》1(4):1–56, 1985.[14] D. Deng 和 Y. Han，齐型空间上的调和分析，序言由 Yves Meyer 撰写。《数学讲义》1966，Springer-Verlag，柏林，2009.[15] X. Duong、R. Gong、M.J. Kuffner、J. Li、B.D. Wick 和 D. Yang，齐型空间上的双权交换子及其应用，《几何分析杂志》31 (2021)，第 1 期，980–1038.[16] X. Duong、J. Li、B. D. Wick 和 Do. Yang，贝塞尔情形中通过交换子对 Hardy空间进行分解及对 BMO 空间进行刻画。《印第安纳大学数学杂志》66 (2017)，1081–1106.[17] X. Duong、J. Li、S. Mao、H. Wu 和 D. Yang，与贝塞尔算子相关的 Riesz变换交换子的紧性，《数学分析杂志》135 (2018)，第 2 期，639–673.[18] C. Fefferman 和 E. M. Stein，多变量 H^p 空间，《数学学报》129 (1972)，137–193.[19] Y. Han、D. Müller 和 D. Yang，齐型空间上 Hardy空间的 Littlewood-Paley刻画。《数学新消息》279(13-14):1505–1537, 2006.[20] Y. Han、D. Müller 和 D. Yang，以 Carnot-Carathéodory空间为模型的度量测度空间上的 Besov空间和 Triebel-Lizorkin空间理论。《抽象与应用分析》，第 893409 号文章，250 页，2008.[21] E. Harboure、C. Segovia、J. L. Torrea，分数阶积分与奇异积分的交换子在 p的极端取值下的有界性，《伊利诺伊数学杂志》41 (1997)，第 4 期，676–700.[22] T. Hytönen 和 A. Kairema，倍增度量空间中的二进立方体系统，《数学讨论会》**126** (2012)，第 1 期，1–33.[23] A. Huber。广义轴对称势的唯一性。《数学年刊》(2), 60:351–358, 1954.[24] J. Li 和 B. D. Wick，通过弱分解和交换子刻画 $H^1_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$及 $\mathrm{BMO}^{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$，《函数分析杂志》272 (2017)，5384–5416.[25] R. A. Kerman，广义Hankel共轭变换的有界性判据，《加拿大数学杂志》30 (1978)，147–153.[26] B. Muckenhoupt 和 E. M. Stein，经典展开及其与共轭调和函数的关系，《美国数学会会刊》118 (1965)，17–92.[27] E. Nakai，齐型空间上的 Campanato、Morrey 和 Hölder空间，《数学研究》176 (2006)，1–19.[28] A. Nowak 和 K. Stempak，与Hankel变换和Hankel-Dunkl变换相关的势算子，《数学分析杂志》131 (2017)，277–321.[29] M. Paluszyński，通过 Coifman、Rochberg 和 Weiss 的交换子算子刻画 Besov空间，《印第安纳大学数学杂志》**44**，(1995)，1–17.[30] W. J. Pan，齐型空间上的分数阶积分。《逼近理论与应用》**8**(1992)，第 1 期，1–15.[31] C. Pérez，奇异积分算子交换子的端点估计，《函数分析杂志》**128**(1995)，163–185。

[32] E. M. Stein和G. Weiss，论多变量调和函数理论。I. H^p-空间理论，《数学学报》103 (1960) 25–62。[33] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》。美国新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1993[34] A. Uchiyama，齐次型空间上 H^p 的因子分解，《太平洋数学杂志》92 (1981)，453–468。[35] M. Villani，与贝塞尔算子相关的Riesz变换，《伊利诺伊数学杂志》52 (2008) 77–89。[36] A. Weinstein，不连续积分与广义势理论，《美国数学会会刊》63 (1948)，342–354。[37]F. Wang、Z. He、D. Yang和W. Yuan，齐次型空间上Besov和Triebel–Lizorkin空间的差分刻画，预印本见 https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.02390。[38] Da. Yang和Do. Yang，与贝塞尔算子相关的Hardy空间的实变量刻画，《分析与应用（新加坡）》9 (2011)，345–368。[39] Da, Yang, 和Y. Zhou，通过原子判定Hardy空间上线性算子的有界性，《构造逼近》29 (2009)，207–218。拉拉古纳大学数学分析系，安奇埃塔校区，Astrofísico Francisco Sánchez大道，s/n，38271，西班牙圣克鲁斯-德特内里费（拉拉古纳）。电子邮箱: jbetanco@ull.es 麦考瑞大学数学系，澳大利亚新南威尔士州2109。电子邮箱: xuan.duong@mq.edu.au 国立中央大学数学系，台湾电子邮箱: mylee@math.ncu.edu.tw 麦考瑞大学数学系，澳大利亚新南威尔士州2109。电子邮箱: ji.li@mq.edu.au 圣路易斯华盛顿大学数学系，美国密苏里州圣路易斯63130-4899电子邮箱: wick@math.wustl.edu