arXiv:2303.07979v2 [math.AT] 3 Jan 2024

分划代数的同调

Rachael Boyd、Richard Hepworth 和 Peter Patzt

Abstract. 我们证明，将分划代数的同调解释为相应的 Tor 群后，在一定次数范围内，它与对称群的同调同构；这一范围随节点数增加而扩大。此外，我们证明，当分划代数的定义参数 δ 可逆时，分划代数的同调事实上在所有次数上都与对称群的同调同构。这些结果与作者早先关于 Brauer 代数的研究所得结果相呼应，但在证明所需的归纳分解和高阶无环性论证方面，存在显著差异与困难。我们的研究加入了关于代数同调稳定性日益丰富的文献之中；如今，这一领域已涵盖 Temperley-Lieb、Brauer 和分划代数，以及 A 型和 B型的 Iwahori-Hecke 代数。

1. 引言

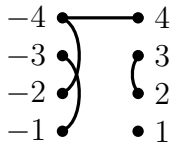
过去几年间，人们日益认识到，同调稳定性技术虽然最常用于群族，但也能成功应用于代数族，其中同调被解释为适当的 Tor 群。事实上，Boyd–Hepworth [BH20], Boyd– Hepworth–Patzt [BHP21], Hepworth [Hep22] 和 Moselle [Mos22] 的论文分别证明了 Temperley-Lieb 代数、Brauer 代数以及类型 A 和 B 的 Iwahori-Hecke 代数的同调稳定性，并确定了前两种情形下的稳定同调。Temperley-Lieb 代数和 Brauer 代数不满足某个平坦性条件，而该条件对于群族会自动成立，因此有必要引入归纳分解这一新技术。运用相关技术，Sroka [Sro22] 证明，奇数条股线上的 Temperley-Lieb 代数在正次数的同调消失；这与已知的偶数条股线情形下同调不消失形成对比。最近，Boyde [Boy22] 通过细致研究幂等元，将来自[BH20、BHP21], 的“可逆参数”结果与 Sroka 的消失结果统一并推广。本文证明了分划代数的同调稳定性，并确定了其稳定同调。

这些分划代数由 Jones 独立引入 [Jon94] 和 Martin[Mar94] ，用于研究统计力学中的 Potts 模型。它们在表示论中也很重要，作为对称群的 Schur–Weyl 对偶，参见 Halverson–Ram 的工作[HR05，定理 5.4、3。6] 以及

2020年数学主题分类。20J06、16E40（主要），20B30（次要）。关键词和短语：同调、同调稳定性、分划代数。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受稿版本适用知识共享署名（CC BY）许可。

Bowman–Doty–Martin [BDM22]。它们包含丰富多样的子代数，包括平面分划代数、rook Brauer 代数、rook 代数、平面 rook 代数、Brauer 代数、Motzkin 代数和 Temperley-Lieb 代数。

给定交换环 R、元素 $\delta \in R$ 和非负整数 n，分划代数 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 定义为 R 上以集合 $\{-1,\dots,-n,1,\dots,n\}$ 的分划为基的自由模。这些分划可以画成图表：左侧有 n 个节点，标记为 -1、…、$-n$；右侧有 n 个节点，标记为 1、…、n。同一分划中属于同一个块的节点用边连接。为便于绘图，我们不画出所有边，而是利用传递性。允许存在不相连的节点，它们对应于大小为一的块。例如，下图展示了 $\mathrm{P}_4(R,\delta)$ 的基元素 $\{\{-1,-3\},\{-2,-4,4\},\{2,3\},\{1\}\}$。



乘法通过将图并排放置、识别中间节点，并将任何未与左侧或右侧相连的块替换为因子 δ 来定义。

每个左侧节点都只与右侧的一个节点相连、除此之外没有其他连接的图，称为置换图；它们与对称群 $\mathfrak{S}_n$的元素一一对应。这便产生了包含映射和投影映射

$$R\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\iota} \mathrm{P}_n(R,\delta) \xrightarrow{\pi} R\mathfrak{S}_n$$

其中，ι 将置换映射为置换图，而 π 则执行相反操作，并将所有其余图映射为 0。特别地，$\pi\circ\iota$ 是 $R\mathfrak{S}_n$上的恒等映射。

我们将 $R\mathfrak{S}_n$ 的平凡模记作 $\mathbb{I}$。沿着 π拉回后，可得 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 的平凡模 $\mathbb{I}$。由此得到 $\mathfrak{S}_n$ 的同调群 $H_*(\mathfrak{S}_n;\mathbb{I}) = \mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I},\mathbb{I})$，以及 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 的 $\mathrm{Tor}^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}_*(\mathbb{I},\mathbb{I})$。同调群上存在诱导同态 ι_* 和 π_*，其中 $\pi_*\circ\iota_*$ 仍为恒等映射，因此 $\mathfrak{S}_n$ 的同调是 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 的同调的一个直和项。

定理 A. 假设 δ 在 R 中可逆。那么，分划代数的同调与对称群的同调同构：

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I}) \cong H_*(\mathfrak{S}_n;\mathbb{I})$$

事实上，包含映射和投影映射

$$R\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\iota} \mathrm{P}_n(R,\delta) \xrightarrow{\pi} R\mathfrak{S}_n$$

诱导出互为逆映射的同构

$$\mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I},\mathbb{I}) \xrightarrow[\cong]{\iota_*} \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I}) \xrightarrow[\cong]{\pi_*} \mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I},\mathbb{I}).$$

我们的第二个结果不要求对 δ 的取值作任何假设。

Th定理 B. 包含映射 $\iota\colon R\mathfrak{S}_n \to \mathrm{P}_n(R,\delta)$ 在同调上诱导出一个映射

$$\iota_*\colon H_i(\mathfrak{S}_n;\mathbb{I}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I})$$

这是范围 $n \geq 2i+1$ 内的一个同构。

直接由定理 B 可得以下推论。

推论 C. 分划代数满足同调稳定性，也就是说，包含映射 $\mathrm{P}_{n-1}(R,\delta) \hookrightarrow \mathrm{P}_n(R,\delta)$ 诱导出一个映射

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_{n-1}(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I})$$

该映射在次数 $n \geq 2i+1$ 上是同构，且此稳定范围是锐利的。此外，$\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 与 $\mathfrak{S}_n$ 具有相同的稳定同调：

$$\lim_{n\to\infty} H_*(\mathfrak{S}_n;\mathbb{I}) \cong \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n(R,\delta)}(\mathbb{I},\mathbb{I}).$$

该推论的第一部分可由以下结果结合得出：定理 B 以及 Nakaoka 关于对称群的同调稳定性结果，该结果的稳定范围是锐利的（[Nak60]）。关于稳定同调，该同构左侧的结果由 Barratt–Priddy–Quillen 定理众所周知 [BP72, FM94]。上述结果与 Brauer 代数的情形完全平行，且正如[BHP21]所讨论的，令人联想到 $\mathfrak{S}_n$ 与自由群自同构群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 之间的关系（见 Galatius[Gal11]）。

1.1. 文章纲要及与先前工作的比较。第 2 节介绍分划代数，并提供本文其余部分所需的背景知识。第 3 节重新阐述一个抽象原理，该原理是归纳分解技术背后的核心思想；这项技术由 [BH20], 引入，并且是 [BH20] 和 [BHP21] 中的关键要素。第 4 节证明分划代数存在归纳分解。这些分解比 Temperley-Lieb [BH20] 和 Brauer [BHP21] 的情形复杂得多；我们发现，为了完成归纳论证，必须考虑若干族彼此不同的模。第 5 节沿用 [BHP21] 的论证，在分划代数的背景下替代 Shapiro 引理。任何关于同调稳定性的新证明所需的高连通性结果见第 6 节。与我们的归纳分解论证一样，这一部分也比 [BHP21], 中的类似结果复杂得多，并大量利用了该文引入的带分隔符的单射词复形的高连通性。最后，我们在第 7 节概述主定理的证明，其总体论证与 [BHP21] 中的相同。

在群族的同调稳定性研究中，不同结果的证明通常具有非常相似的整体结构，但证明相关复形高度无环的方法却可能截然不同。如今我们在代数的同调稳定性研究中也看到了类似的情形：比较本文与 [BH20]和 [BHP21], 的工作可知，整体技术被用于多种情形，但无圈性证明的细节——如今还有归纳分解证明的细节——才是重要差异和困难所在。

1.2. 致谢。第一作者获得了英国工程与自然科学研究委员会博士后奖学金 EP/V043323/1 和 EP/V043323/2 的资助。第三作者获得了西蒙斯合作资助。我们感谢匿名审稿人细致审阅本文并提出宝贵意见。

2. Partition algebras

本节将介绍分划代数，以及本文后续部分会用到的一些特殊元素和模。

定义 2.1（分划代数 [Jon94, Mar94]）。如引言中所述，若 R 是交换环，δ 是 R中的一个指定元素，且 n是非负整数，则分划代数 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 定义为以 R为底环、以集合 $\{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$的分划为基的自由模。我们将这些分划画成图表：左侧的节点为 $-1,\dots,-n$，右侧的节点为 $1,\dots,n$，用弧线表示哪些节点属于分划中的同一个块。（我们可以省略一些弧线，并利用传递性来确定各块。）图 1 给出了一个例子。乘法的定义方法是将图表并排放置，使中间的节点重合，并将任何未连接到右侧或左侧的块替换为因子 δ，如图 2 所示。

我们将交替使用“分拆”和“图”这两个术语，指代 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 的一个基元素，并且常将 $\mathrm{P}_n(R,\delta)$ 简写为 P_n。

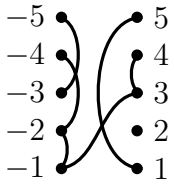


Figure 1. 分拆 $\{\{-5,-3\},\{-4,-2,-1,3,4\},\{1,5\},\{2\}\}$ 的可视化

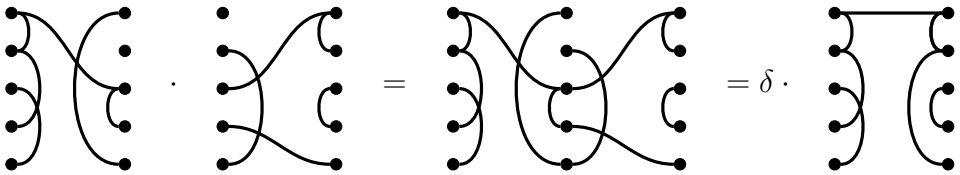


Figure 2. 分划代数中的乘法

分划代数由三类图生成 [Mar96], 它们分别对应于以下分拆：

- 对于 $1\le i\le n-1$, S_i 是对应于这样的分拆的图：其块为成对的 $\{-j,j\}$，其中 $j\neq i,i+1$，再加上 $\{-(i+1)\ i\}$ 和 $\{-i,(i+1)\}$。这些元素生成对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的群环，作为 P_n 的一个子代数。
- 对于 $1\le i\neq j\le n-1$, V_{ij}是对应于这样的分拆的图：其块为成对的 $\{-k,k\}$，其中 $k\neq i,j$，以及一个大小为四的块 $\{-j,-i,i,j\}$。
- 对于 $1\le i\le n$, T_i 是对应于如下分拆的图：其中包含配对块 $\{-j,j\}$（适用于 $j\neq i$），以及两个单元素块 $\{-i\}$ 和 $\{i\}$。

参见 图 3，其中展示了其中一些示意图。

现在介绍我们将要研究的模。

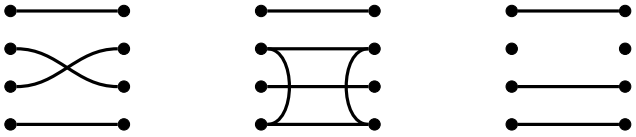


FIGURE 3. 元素 S_2、V_{13}、$T_3 \in \mathrm{P}_4$

回顾一下，置换图是指这样一种图：左侧的每个节点都与右侧的一个节点相连，除此之外没有其他连接。等价地说，置换图中右侧不含任何单元素块，也不含包含右侧 ≥ 2 个元素的块。

定义 2.2（平凡模 $\mathbb{I}$）。对于任意 n，我们将平凡 $R\mathfrak{S}_n$-双模 $\mathbb{I}$ 定义为由环 R给出的模，其中置换作用为恒等作用。

对于任意 n，我们将平凡 P_n-双模 $\mathbb{I}$ 定义为由环 R给出的模，其中置换图作用为恒等作用，而所有其他图作用为 0。这等价于通过投影 $\pi\colon \mathrm{P}_n \to \mathfrak{S}_n$，利用 P_n 在 R 上的作用。

定义 2.3。对于 $m \leq n$，我们可以将 P_m 视为 P_n的子代数。给定 $\{-m, \ldots, -1, 1, \ldots, m\}$的一个分拆，将 $(\pm 1, \ldots, \pm m)$ 映射为 $(\pm(n-m+1) \ldots, \pm n)$ 的映射，在 $\{-n \ldots, -(n-m+1)、(n-m+1) \ldots、 n\}$ 上诱导出一个分拆。对于所有 $i \in \{1, \ldots, (n-m)\}$，我们添加块 $\{-i, i\}$，从而得到 P_n 中的一个分拆。从图示上看，我们取 P_m 中的图，通过在已有节点下方添加新节点，并在新节点之间添加水平连接，将其扩展为 P_n 中的图。然后，在该子代数的作用下，P_n 可以视为左 P_n-模和右 P_m-模，由此得到诱导的左 P_n-模 $\mathrm{P}^n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$。

以下命题摘自 [Pat20]。

命题 2.4 ([Pat20，命题 2.5])。 诱导模 $\mathrm{P}^n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$ 是一个自由的 R-模，并且是 P_n的商。

用图来描述，这个模的一组基由满足以下条件的图组成：顶端右侧的m 个节点位于一个方框下方，

- 该方框恰好与 m 个不同的块相连。

按照这种描述，P_n 在 $\mathrm{P}^n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$ 上的作用由图的粘合和化简给出，方法与 P_n的乘法完全相同；如果某个图不满足上述条件，则将其视为 0。

因此，图在经过 P_n 中的图左乘后被化为 0，有两种可能：与方框相连的某个块在粘合后可能只包含中心的节点（从视觉上看，该块可以缩回方框中，随后消失）。另一种可能是，两个或更多原本与方框相连的不同块合并成一个块（从视觉上看，此时有一条两端都与方框相连的弧线）。这两种可能性对应于 P_m 中的图无法成为置换的两种情形

图，因此在 $\mathbb{I}$ 上作用为 0：它右侧可以有一个单元素块，也可以有两个属于同一块的节点。

例 2.5。 图 4 描绘了 $\mathrm{P}^{5\otimes_{\mathrm{P}_3}}\mathbb{I}$ 的模结构。在第一个例子中，与方框相连的块之一完全由中心的节点组成，因此会“消失”或“缩回方框内”。在第二个例子中， δ 这一因子源于一个完全由中心的节点组成且未与方框相连的块。

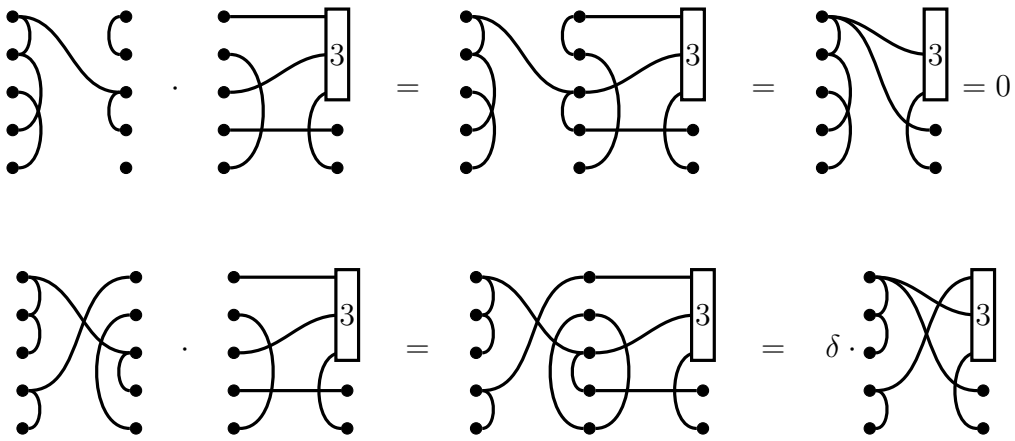


FIGURE 4. $\mathrm{P}^{5\otimes_{\mathrm{P}_3}}\mathbb{I}$ 的模结构

3. THE PRINCIPLE OF INDUCTIVE RESOLUTIONS

在本节中，我们简要陈述归纳分解这一技术背后原理的抽象形式；该技术曾见于[BH20] 和 [BHP21]。它使我们能够识别在固定的 $\mathrm{Tor}_i^A(M,-)$ 形式的函子作用下变为零的模：通过使用本身已具有此性质的模来分解它们，因此称为“归纳分解”。下文的定理是对 [BH20] 第 3.3 节的抽象概括。它可视为一般原理的一种应用：导出函子可通过使用对该导出函子而言无环的对象所构成的分解来计算。

定理 3.1. 设 A 是环 R 上的代数，且 M 是右 A-模。假设 N 是左 A-模，并配备了一个满足以下两个性质的分解 $Q_* \to N$：

- $\mathrm{Tor}_*^A(M,Q_j)$ 在所有 $j \geqslant 0$ 的正次数上均为零。
- $M \otimes_A Q_* \to M \otimes_A N$ 是一个分解。

那么 $\mathrm{Tor}_*^A(M,N)$ 在正次数上为零。

证明。 设 $P_* \to M$ 是一个投射分解，因此对于任意左 A-模 B，群 $\mathrm{Tor}_*^A(M,B)$ 可由复形 $P_* \otimes_A B$计算。考虑双复形 $P_* \otimes_A Q_*$。有两个自然的谱序列收敛到全化 $\mathrm{Tot}(P_* \otimes_A Q_*)$ 的同调。关于这些谱序列的更多信息，见 [Wei94] 第 5.6 节以及 [BH20]第 3.2 节的概要。

第一个谱序列的 E^1-项为

$$ {}^{I}E^1_{i,j} = H_j(P_i \otimes_A Q_*) \cong P_i \otimes_A H_j(Q_*) $$

其由 P 的微分诱导，记为 d^1。这个同构成立，因为每个 P_i 都是投射的，因而也是平坦的。由此可知， E^2 项为

$$ {}^{I}E^2_{i,j} = \operatorname{Tor}^A_i(M, H_j(Q_*)). $$

由于 Q_* 是 N 的一个分解，因此 ${}^{I}E^2_{*,\,*}$ 就是集中在 x 轴上的 $\operatorname{Tor}^A_*(M,N)$，所以 ${}^{I}E^\infty_{*,\,*}$ 也如此，故我们得出$H_*(\operatorname{Tot}(P_* \otimes_A Q_*)) \cong \operatorname{Tor}^A_*(M,N)$。

第二个谱序列的 E^1 项由 ${}^{II}E^1_{i,\,j} = H_j(P_* \otimes_A Q_i)$ 给出，即

$$ {}^{II}E^1_{i,j} = \operatorname{Tor}^A_j(M, Q_i) $$

其由 Q_* 的边界映射诱导，记为 d^1。现在，根据我们的第一个假设，${}^{II}E^1_{*,\,*}$ 集中在 x 轴上，其值为 $\operatorname{Tor}^A_0(M,Q_*) = M \otimes_A Q_*$。因此，${}^{II}E^2_{*,\,*}$ 由 $M \otimes_A Q_*$ 的同调给出；根据我们的第二个假设，它在原点处恰为 $M \otimes_A N$ 的一个副本。这说明 $\operatorname{Tot}(P_* \otimes_A Q_*)$ 的同调恰为次数 0 处 $M \otimes_A N$ 的一个副本。

比较两个谱序列的结果可知，$\operatorname{Tor}^A_*(M,N)$ 在正次数上消失，正如所要求的那样。□

4. Inductive resolutions

本节将使用归纳分解这一技术，它最初见于 [BH20]，后来又被用于 [BHP21]。

定义 4.1. 设 X 是集合 $\{1,\dots,n\}$ 的子集。定义 J_X 为 P_n 中的左理想，它由所有满足以下条件的图表在 R 中张成：在右侧标记为 X 的节点中，至少有一个单元素块，或有一对节点属于同一个块。对于 $m \le n$，记 $J_{\{n-m+1,\dots,n\}}$ 为 J_m。

注意， $J_n = J_{\{1,\dots,n\}}$ 恰由所有非置换图组成的张成空间。因此，它是投影映射 $\pi\colon \mathrm{P}_n \to R\mathfrak{S}_n$ 的核。

本节的目标是证明以下定理。在最后一节中，我们将利用它来理解 Tor 群 $\operatorname{Tor}^{\mathrm{P}_n}_*(\mathbb{I}, \mathrm{P}^{n} \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I})$。

定理 4.2. 设 $X \subseteq \{1,\dots,n\}$，并假设以下条件之一成立：

- $|X| \le n$，且 δ 在 R 中可逆。
- $|X| < n$。

则 $\operatorname{Tor}^{\mathrm{P}_n}_*(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n / J_X)$ 群在正次数上消失。

定理定理 4.2 的证明将占据本节余下部分。部分内容与 [BH20 第 3] 节以及 [BHP21 第 3], 节的内容相近，但总体而言，这里的内容复杂得多。

继续之前，我们先记录下面这个引理，它将定理 4.2 扩展到 0 次。我们将需要这个引理来证明该定理。

引理 4.3. 设 J 是 P_n 的一个包含于 J_n中的左理想。那么

$$\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n / J \cong \mathbb{I}.$$

特别地,

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n / J_X) \cong \mathbb{I}$$

对所有 $X \subset \{1, \ldots, n\}$。

证明。由于包含映射 $0 \subset J \subset J_n$，我们有满射

$$\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n / J \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n / J_n.$$

因为

$$\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n \cong \mathbb{I}$$

and

$$\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathrm{P}_n / J_n \cong \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} R\mathfrak{S}_n \cong \mathbb{I} \otimes_{R\mathfrak{S}_n} R\mathfrak{S}_n \cong \mathbb{I},$$

the 上面的复合是一个同构，因此第一个映射也必定是单射 .

□

4.1. 归约到 $\mathcal{A}_{X,\,x}$ 和 $\mathcal{B}_{X,\,x}$。 我们的定理 4.2 证明将对 X的基数进行归纳。理想情况下，我们可以通过将 P_n / J_X 用模 $\mathrm{P}_n / J_{X'}$（其中 $|X'| < |X|$）表示来证明归纳步骤。然而，我们无法找到沿着这一思路展开的直接论证。为了组织论证，本小节将引入一些中间模，之后我们将借助这些模构造自由分解。

定义 4.4. 设 $Y \subseteq X \subseteq \{1, \ldots, n\}$，并设 $x \in X$ 和 $y \in Y$。我们定义 P_n 的三个左 P_n-子模如下:

- A_x 是所有满足 x 为单元素块的图的张成。
- $B_{X,\,x}$ 是所有满足 x 与 X中的某个其他元素位于同一块的图的张成。
- M_Y 是所有满足 Y 中的元素位于同一块的图的张成。

我们按如下方式定义这些对象的商:

$$\mathcal{A}_{X,x} = \frac{A_x}{A_x \cap J_{X-\{x\}}}, \qquad \mathcal{B}_{X,x} = \frac{B_{X,x}}{B_{X,x} \cap J_{X-\{x\}}}, \qquad \mathcal{M}_{X,Y} = \frac{M_Y}{M_Y \cap J_{X-Y}}$$

下面的结果在我们验证定理 3.1的第二个条件时会很有用。

引理 4.5。模 $\mathcal{A}_{X,x}$, $\mathcal{B}_{X,x}$ 和 $\mathcal{M}_{X,Y}$ 与 $\mathbb{I}$ 作张量积时具有如下性质。

- 设 $x \in X \subseteq \{1, \ldots, n\}$，并假设 $n \geq 2$。则 $\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{A}_{X,\,x} = 0$。
- 设 $x \in X \subseteq \{1, \ldots, n\}$。则 $\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{B}_{X,\,x} = 0$。
- 设 $Y \subseteq X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 满足 $|Y| \geq 2$。则 $\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{M}_{X,\,Y} = 0$ 且 $\mathcal{M}_{X,\,Y}$是 P_n / J_{X-Y} 的一个直和项。

证明。我们将证明，在相应条件下，以下各项 A_x， $B_{X,\,x}$ 和 M_Y在 $\mathbb{I}^{\otimes_{\mathrm{P}_n}-}$ 下均消失，因此 $\mathcal{A}_{X,\,x}$, $\mathcal{B}_{X,\,x}$ 和 $\mathcal{M}_{X,\,Y}$ 也同样如此。
为证明 $\mathbb{I}\otimes_{\mathrm{P}_n} A_x = 0$，取一个图 α，其中 A_x，使得 x 是 α 中的一个单元素块。令 β 表示由 α 得到的图：将 x 放入与右侧某个其他元素相同的块中。（根据假设 $n \geq 2$，这是可能的。）于是 $\alpha = \beta \cdot T_x$，且 β 在 $\mathbb{I}$ 上的作用为 0，因此

$$1 \otimes \alpha = 1 \otimes \beta \cdot T_x = 1 \cdot \beta \otimes T_x = 0 \otimes T_x = 0,$$

注意到 $T_x \in A_x$。由于 A_x 是这类图 α 的张成空间，证明得证。

另外两个模的论证类似。对于 $\mathbb{I}\otimes_{\mathrm{P}_n} B_{X,\,x}$，取一个图 $\alpha \in B_{X,\,x}$，使得 x 与某个其他元素 $w \in X$ 位于同一个块中，并使用分解 $\alpha = \alpha \cdot V_{wx}$，注意到 $V_{wx} \in B_{X,\,x}$。

对于 M_Y，取一个图 $\alpha \in M_Y$，使得 Y 的所有元素都位于同一个块中，并将其分解为 $\alpha = \alpha \cdot V_Y$，其中 $V_Y \in M_Y$ 是具有块 $-Y \cup Y$ 和 $\{-p, p\}$（对应于 $p \notin Y$）的图；假设 $|Y| \geq 2$ 保证 α 在 $\mathbb{I}$ 上的作用为 0。
对于关于 $\mathcal{M}_{X,\,Y}$ 的最后一个断言，我们利用上面的元素 V_Y 是幂等元，且将 J_{X-Y} 映射到自身这一事实。□

下面的命题将分解 P_n / J_X 的问题，转化为关于 $\mathcal{A}_{X,\,x}$ 和 $\mathcal{B}_{X,\,x}$ 的类似问题。

命题 4.6。设 $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$，设 $x \in X$，并假设 $n \geq 2$。下面的序列是 P_n / J_X 的一个分解，其中所有映射均由包含映射或恒等映射诱导。

$$\ldots \longrightarrow \underset{2}{0} \longrightarrow \underset{1}{\mathcal{A}_{X,x} \oplus \mathcal{B}_{X,x}} \longrightarrow \underset{0}{\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}} \longrightarrow \underset{-1}{\mathrm{P}_n / J_X}$$

此外，将 $\mathbb{I}^{\otimes_{\mathrm{P}_n}-}$ 应用于该序列，可得到 $\mathbb{I}^{\otimes_{\mathrm{P}_n}} \mathrm{P}_n / J_X$ 的一个分解。

证明。映射 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}} \to \mathrm{P}_n / J_X$ 由 P_n 上的恒等映射诱导，且由于 $J_{X-\{x\}} \subset J_X$ 而定义良好。映射 $\mathcal{A}_{X,\,x} \to \mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}$ 由包含映射 $A_x \subset \mathrm{P}_n$ 诱导，且由于 $(A_x \cap J_{X-\{x\}}) \subset J_{X-\{x\}}$ 而定义良好；对于映射 $\mathcal{B}_{X,\,x} \to \mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}$，类似的论证同样成立。

右侧映射的满射性显然成立，因此 -1 次数处正合。
为证明 0 次处的正合性，注意到理想 $J_{X-\{x\}} \subseteq J_X$ 均由某些图张成，因此 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}} \to \mathrm{P}_n / J_X$ 的核由属于 J_X 但不属于 $J_{X-\{x\}}$ 的那些图张成。若一个图属于 J_X，则 X 中必有一个元素是单元素块，或者 X 中有两个元素属于同一块。若它同时不属于 $J_{X-\{x\}}$，则必定只有一个单元素块，即 x，或者只有一对元素属于同一块，其中一个必须是 x。其中，x 是单元素块的图恰好张成 A_x；x 与 X 中某个其他元素属于同一块的图恰好张成 $B_{X,\,x}$，证明由此得证。

为了证明 1 次的正合性，在展开 $\mathcal{A}_{X,x}$ 和 $\mathcal{B}_{X,x}$ 的定义后，只需证明：若有 $a \in A_x$ 和 $b \in B_{X,x}$，且满足 $a + b \in J_{X-\{x\}}$，

则 a，$b \in J_{X-\{x\}}$。这可由以下事实立即推出：A_x 和 $B_{X,x}$ 没有共同的基元素。

为证明第二个断言，我们将说明，应用 $\mathbb{I}^{\otimes \mathrm{P}_n -}$ 后，分解变为

$$\ldots \longrightarrow \underset{2}{0} \longrightarrow \underset{1}{0} \longrightarrow \underset{0}{\mathbb{I}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \underset{-1}{\mathbb{I}}$$

因此该断言可直接得出。最后两项及其间映射的识别依据是 引理 4.3。1 次的项由引理 4.5消失。（这里我们用到了假设 $n \geq 2$。）□

结合定理 3.1，最后一个结果表明，要通过归纳法证明 P_n/J_X 的高阶 Tor 消失，我们必须先对 $\mathcal{A}_{X,\,x}$ 和 $\mathcal{B}_{X,\,x}$ 做同样的证明。在接下来的两个小节中，我们将构造它们的自由分解。

4.2. 解析 $\mathcal{A}_{X,\,x}$。现在我们尝试解析 $\mathcal{A}_{X,\,x}$。结果表明，根据我们采用定理 4.2 中的哪一个假设，需要使用不同的方法：即 δ 可逆，或 $|X| < n$。在第一个假设下，我们有以下结果。

命题 4.7. 假设 $X \subseteq \{1,\ldots,n\}$，且 δ 在 R 中可逆。那么模 $\mathcal{A}_{X,\,x}$ 是 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$ 的一个直和项。

证明。元素 $\delta^{-1}T_x$ 是一个幂等元，这是由计算 $T_x^2 = \delta T_x$得出的。右乘 $\delta^{-1}T_x$ 将 $J_{X-\{x\}}$ 映入自身，因此在 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$上诱导出一个幂等自同态。该自同态的像由 T_x的所有左倍数组成，而这正是 $\mathcal{A}_{X,\,x} = \frac{A_x}{A_x \cap J_{X-\{x\}}}$ 如 引理 4.5证明的第二段所述。□

上述结果表明，若 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$ 的高阶 Tor 均为零，则$\mathcal{A}_{X,\,x}$ 也如此。当 δ 不可逆时，我们需要采用一种更复杂的方法，并使用下面的分解。

定义 4.8（ $C(X,x,y)$的分解）。设 $X \subset \{1,\ldots,n\}$ with$|X| < n$，令 $x \in X$，并令 $y \in \{1,\ldots,n\} - X$。我们定义分解 $C(X,x,y) \to \mathcal{A}_{X,\,x}$如图 5所示。因此，$C(X,x,y)$在每个次数上均由 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$ 给出。所有映射均由所示元素的右乘给出，因此边界映射在$(1 - T_xV_{xy})$与 T_xV_{xy}之间交替，而增广映射 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}} \to \mathcal{A}_{X,\,x}$ 由 T_x给出。这些映射是良定义的，因为 T_xV_{xy} 和 T_x 将 $J_{X-\{x\}}$ 映入其自身；前一种情形可由 $y \notin X$这一事实推出。

要验证连续映射的复合为 0，可利用计算 $T_xV_{xy}T_x = T_x$ 以及由此得到的 T_xV_{xy} 是幂等元这一事实。接下来将证明这确实定义了一个分解。

命题 4.9. 假设 $X \subset \{1,\ldots,n\}$ 满足 $|X| < n$，令 $x \in X$，并令$y \in \{1,\ldots,n\} - X$。假设 $n \geq 2$。那么

$$C(X,x,y) \to \mathcal{A}_{X,x} \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{I}^{\otimes \mathrm{P}_n} C(X,x,y) \to \mathbb{I}^{\otimes \mathrm{P}_n} \mathcal{A}_{X,x}$$

都是自由分解。

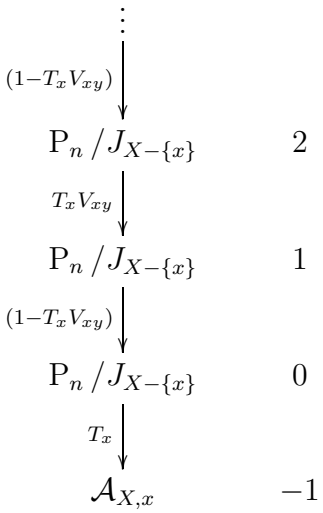
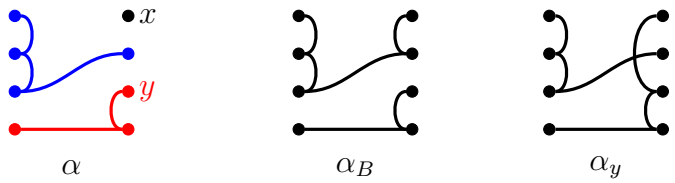


FIGURE 5. 分解 $C(X,x,y)\to\mathcal{A}_{X,\ x}$

证明。首先，我们必须证明 $C(X,x,y)\to\mathcal{A}_{X,\ x}$ 是无环的。在 -1 次时，这显然成立，因为 A_x 由 T_x的所有左倍数组成。在 1 次及以上时，这直接源于 T_xV_{xy} 是一个幂等元这一事实。在 0 次时，我们需要一个更复杂的论证，如下所示。

设 α 是一个图，其中 x 是单元素块。若 B 是 α 中除 $\{x\}$ 之外的一个块，则我们用 α_B 表示将 x 并入 B 后由 α 得到的图。我们用 α_y 表示图 α_{B_y}，其中 B_y 是包含 y 的块。例如，下列图表展示了 α，其中 B_y 用红色绘制，另一个块 B 用蓝色绘制，同时还展示了 α_B 和 α_y。



现在注意到，我们有如下关系

$$\alpha-\delta\alpha_y=\alpha(1-T_xV_{xy}) \tag{4.1}$$

并且，对于 α 中的每个块 B，

$$\alpha_B-\alpha_y=\alpha_B(1-T_xV_{xy}). \tag{4.2}$$

现在考虑一个次数为 0 的元素 $a\in\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$，它位于增广映射 $T_x\colon \mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}\to\mathcal{A}_{X,x}$ 的核中。我们希望证明 a 位于微分的像中。为此，我们将说明如何用微分像中的元素调整 a（这不会改变它位于核中的事实），从而将其化为 0。我们可以将 a 写成 P_n 中不属于 $J_{X-\{x\}}$ 的图的线性组合，而这些图可分为以下几种情况：

(a) α 为单元素块的图。利用形如 (4.1) 的元素，我们可以用微分像中的元素调整 a，将所有这类图 α 替换为形如 α_y 的图。(b) x 与 $X-\{x\}$ 外的某个元素相连的图。这些图都具有 α_B 的形式，其中 α 是由原图将 x 变为单元素块后得到的图，而 B 是 α 中原本包含 x 的块。注意，原图不属于 $J_{X-\{x\}}$ 这一假设意味着 α 也不属于 $J_{X-\{x\}}$。利用形如 (4.2) 的元素，我们可以用微分像中的元素调整 a，将所有这类图 α_B 替换为形如 α_y 的图。(c) β 与 $X-\{x\}$ 中恰好一个元素相连的图，设该元素为 w。于是，在 $\beta T_x V_{xy}$ 中，元素 $w \in X-\{x\}$ 是一个单元素块，因此 $\beta T_x V_{xy} \in J_{X-\{x\}}$。所以 $\beta = \beta\,(1-T_xV_{xy})$ 位于 $\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}$ 中，特别地，β 位于微分的像中。因此，我们可以用微分像中的元素调整 a，消去所有此类图。

按照上面各项中的说明修改 a 后，我们现在可以将其写成线性组合 $a=\sum_\alpha \lambda_\alpha \alpha_y$，其中 α 遍历所有不属于 $J_{X-\{x\}}$且其中 x 是单元素块的图。我们知道 a 属于微分的核，因此 $a\cdot T_x=0$。然而，我们有 $a\cdot T_x=\sum_\alpha \lambda_\alpha\alpha_y\cdot T_x=\sum_\alpha \lambda_\alpha\alpha$，且由于$\alpha$ 是互不相同且不属于 $J_{X-\{x\}}$的图，我们可以得出，对于所有 α，都有 $\lambda_\alpha=0$，换言之，$a=0$。这就完成了 0 次情形的论证，也完成了证明：$C(X,x,y)\to \mathcal{A}_{X,\,x}$ 是一个分解。

我们现在证明$\mathbb{I}\otimes_{\mathrm{P}_n} C(X,\ x,\ y)\to \mathbb{I}\otimes_{\mathrm{P}_n}\mathcal{A}_{X,\,x}$是一个分解。根据引理 4.5，目标项为零；并且$\mathbb{I}\otimes_{\mathrm{P}_n}\mathrm{P}_n/J_{X-\{x\}}=\mathbb{I}$，因为 $J_{X-\{x\}}$ 在$\mathbb{I}$上作用为 0。在后一种识别下，原先由所示元素的右乘给出的边界映射，现在由这些元素对$\mathbb{I}$' 的作用给出，因此在 0 和 1 之间交替。结论得证。□

4.3. $\mathcal{B}_{X,x}$的分解。现在我们转而研究模 $\mathcal{B}_{X,x}$，并为它构造如下分解。

定义 4.10（分解 $D(X,x)\to\mathcal{B}_{X,x}$）。令 $X\subseteq\{1,\dots,n\}$，并令$x\in X$。定义增广复形 $D(X,x)\to\mathcal{B}_{X,x}$ 如下。在次数 $i\geq 0$，$D(X,x)$ 定义为

$$\bigoplus_{(x_0,\dots,x_i)} \mathcal{M}_{X,\{x,x_0,\dots,x_i\}}$$

其中，求和遍历 $X-\{x\}$ 中所有由互不相同元素组成的元组 $(x_0,\dots,x_i)$。对于对应于元组 $(x_0,\dots,x_i)$ 的直和项，映射 δ_i 由映射给出

$$\mathcal{M}_{X,\{x,x_0,\dots,x_i\}}\longrightarrow \mathcal{M}_{X,\{x,x_0,\dots,x_{i-1}\}}$$

由包含映射得到

$$M_{\{x,x_0,\dots,x_i\}}\hookrightarrow M_{\{x,x_0,\dots,x_{i-1}\}}$$
$$J_{X-\{x,x_0,\dots,x_i\}}\hookrightarrow J_{X-\{x,x_0,\dots,x_{i-1}\}}.$$

映射 δ_i 只是这些单独映射的和。简而言之，δ_i 是一个映射，它忽略了 x_i必须与 x 位于同一块中这一条件，x_0，……，x_{i-1}。该复形如 图 6 所示。每个复合映射 $\delta_{i-1}\circ\delta_i$ 都为零，因为其像中的任一元素都是若干图表之和，而每个图表都包含两个元素 x_{i-1}，$x_i\in$

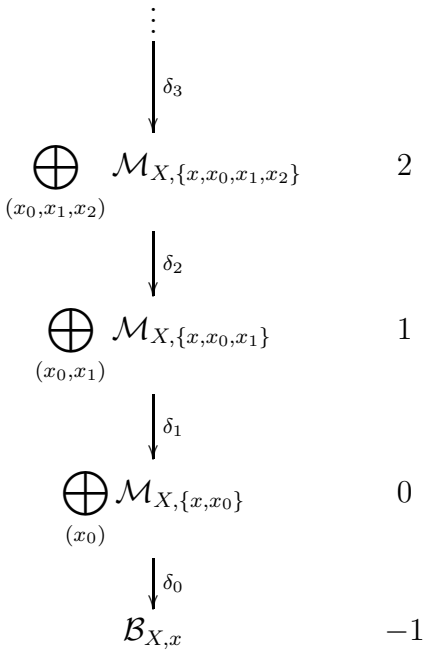


FIGURE 6. 分解 $D(X,x) \to \mathcal{B}_{X,\ x}$。求和遍历 $X-\{x\}$ 中互不相同元素组成的元组。

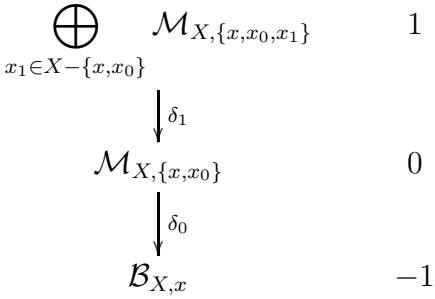
$X-\{x,x_1,\dots,x_{i-2}\}$ 位于同一块中，因此属于 $J_{X-\{x,x_1,\dots,x_{i-2}\}}$。我们在 命题 4.11 中证明，这确实是一个分解。

命题 4.11。 $D(X,\ x) \to \mathcal{B}_{X,\ x}$ 确实是一个分解，$\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} D(X,x) \to \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{B}_{X,\ x}$也同样如此。

证明。我们首先证明 $D(X,x) \to \mathcal{B}_{X,\ x}$ 是无环的。

在次数 -1，我们必须证明 δ_0 是满射的。$B_{X,\ x}$ 中的一个图里，x 与 $X-\{x\}$ 中的另一个元素 x_0 位于同一个块中，因此属于包含映射 $M_{\{x,x_0\}} \hookrightarrow B_{X,\ x}$的像，满射性由此得证。

在 0 次时，我们首先注意到，如果考虑 0 次中的任意两个直和项，那么它们在 δ_0 下的像具有平凡交。事实上，由于若 x_0 和 x_0' 是 $X-\{x\}$ 的不同元素，则 $M_{\{x,x_0\}} \cap M_{\{x,x_0'\}} \subseteq J_{X-\{x\}}$，这一点可立即得到；这是因为 $M_{\{x,x_0\}} \cap M_{\{x,x_0'\}}$ 中的一个图将 x_0 和 x_0' 与 x 置于同一个块中，因而它们彼此也处于同一个块中。因此，要证明 0 次时的正合性，我们只需一次考察一个 x_0 直和项：



要证明该序列在其中项处正合，注意到 δ_0 的核由 $M_{\{x,x_0\}}$ 中属于 $J_{X-\{x\}} - J_{X-\{x,x_0\}}$ 的图张成。取这样一个图。若该图属于 $J_{X-\{x\}}$，则 $X-\{x\}$ 中的两个元素必须处于同一个块中，或者 $X-\{x\}$ 中的一个元素必须是单元素块。若该图不属于 $J_{X-\{x,x_0\}}$，由于 x_0 在 $M_{\{x,x_0\}}$ 中不可能是单元素块，我们可得 x_0 必须与 $X-\{x\}$ 中的某个其他元素处于同一个块中。因此，x_0 与 $x_1 \in X-\{x,x_0\}$ 中的某个元素处于同一个块中；又由于该图属于 $M_{\{x,x_0\}}$，可知 x、x_0、x_1 必须全部处于同一个块中。因此，该图属于 $M_{\{x,x_0,x_1\}}$，从而位于 δ_1 的像中。

为证明 $i \geqslant 1$ 及以上次数的正合性，首先注意到在次数 $i-1, i, i+1$ 中，复形分解为按 $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ 编索引的直和。因此，只需每次考察一个 $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ 直和项。限制到这样的直和项后，接下来以类似于 0 次情形的方式证明正合性，细节留给读者。

分解在施加$\mathbb{I}^{\otimes_{\mathrm{P}_n}-}$后仍然无环，这一事实可由引理 4.5立即得出；该引理表明，事实上分解在此操作下变为零。□

4.4. 定理 4.2 的证明。我们先处理情形 $n = 0, 1$。当 $n = 0$ 时，我们有 $\mathrm{P}_n = R$，结论立即成立。当 $n = 1$ 时，要么有$X = \emptyset$，要么有 $X = \{1\}$，且 δ 可逆。当 $X = \emptyset$ 时，我们有 $J_X = 0$，因此 $\mathrm{P}_n / J_X = \mathrm{P}_n$，结论由此得出。最后，当 $X = \{1\}$ 且 δ 可逆时，J_X 是幂等元 $\delta^{-1}T_1$ 的 R- 张成空间，事实上也是 P_n- 张成空间。因此，J_X 和 P_n / J_X 都是 P_n 的直和项；特别地，后者是投射的，故结论成立。

现在假设 $n \geq 2$，并对 X 的基数使用强归纳法来证明这一断言。当 $X = \emptyset$ 时，我们有 $J_X = 0$，因此 $\mathrm{P}_n / J_X = \mathrm{P}_n$，该断言显然成立。

现在假设 $|X| > 0$ 且该断言对所有 X' 基数更小的情形都成立。根据命题 4.6 和定理 3.1，只需证明这些模

$$\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}} \qquad \mathcal{A}_{X,x} \qquad \mathcal{B}_{X,x}$$

在 $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, -)$ 下均为零，其中 $i > 0$。

对于 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}$ 的情形，根据归纳假设，$\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}) = 0$。

对于 $\mathcal{A}_{X,x}$，我们分为 δ 可逆和 $|X| < n$ 两种情形。当 δ 可逆时，命题 4.7 表明 $\mathcal{A}_{X,x}$ 是 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}$ 的一个直和项；根据归纳假设，它在 $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(1, -)$ 下为零，因此 $\mathcal{A}_{X,x}$ 也如此。当 $|X| < n$ 时，命题 4.9 给出分解 $C(X, x, y) \to \mathcal{A}_{X,x}$ 以及 $\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} C(X, x, y) \to \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{A}_{X,x_0}$ $C(X, x, y)$ 的各项全都是 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x\}}$，根据归纳假设，它们在 $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(1, -)$ 下均为零，因此由定理 3.1 可知 $\mathcal{A}_{X,x}$ 本身也满足这一性质。

对于 $\mathcal{B}_{X,x}$ 4 11 $D(X, x) \to \mathcal{B}_{X,x}$ $\mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n}$，，命题。给出了分解 $D(X, x)$，以及 $D(X, x) \to \mathbb{I} \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathcal{B}_{X,x_0}$ $D(X, x)$ 的各项都是形如 $\mathcal{M}_{X,\{x,x_0,\ldots,x_i\}}$ 的模的直和。每个 $\mathcal{M}_{X,\{x,x_0,\ldots,x_i\}}$ 都是 $\mathrm{P}_n / J_{X-\{x,x_0,\ldots,x_i\}}$ 的直和项

根据 引理 4.5，并且由于 $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, -)$ 在后者上为零，因此在前者上也为零。（注意，这是我们论证中唯一用到强归纳法的地方。）现在我们可以应用定理 3.1 于 $D(X, x)$，从而得到 $\mathcal{B}_{X,\,x}$ 在 $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, -)$ 下为零，如所需。□

5. 替换 Shapiro 引理

本节主要沿用了第 4 节的内容[BHP21]。我们列出了所有陈述，以及在分划代数情形下略有不同的引理证明。定理定理 5.1 的证明与 [BHP21], 中的证明完全相同，只是输入作了相应调整。

与 Brauer 代数的情形一样，我们有包含映射和投影映射

$$R\mathfrak{S}_m \xrightarrow{\iota} \mathrm{P}_m \xrightarrow{\pi} R\mathfrak{S}_m.$$

这些映射与包含映射 $\mathrm{P}_m \to \mathrm{P}_n$ 和 $R\mathfrak{S}_m \to R\mathfrak{S}_n$相容，并且也保持对平凡模的作用。因此，它们诱导出以下 Tor 群映射。

$$\mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I}, R\mathfrak{S}_n \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I}) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I}, R\mathfrak{S}_n \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I})$$

那么，本节的主要结果是以下定理；它取代了同调稳定性的 Quillen 风格证明中针对群的 Shapiro 引理。

定理 5.1。设 $n \geqslant m \geqslant 0$。假设 δ 在 R 中可逆，或者 $m < n$。那么这些映射

$$\iota_*\colon \mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I}, R\mathfrak{S}_n \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I})$$

and

$$\pi_*\colon \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_*^{R\mathfrak{S}_n}(\mathbb{I}, R\mathfrak{S}_n \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I})$$

互为逆同构。

定理 A 可由定理 5.1 取 δ 可逆且 $m = n$，利用同一认定 $R\mathfrak{S}_n \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$ 和 $\mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$，立即得到。

本节余下部分将用于证明定理 5.1，其证明方式与 [BHP21] 中的定理 4.1 完全相同，只需先给出一些准备性的定义和引理。

回顾定义 4.1，$J_m \subseteq \mathrm{P}_n$ 表示由所有满足以下条件的图组成的理想：在右侧标记为 $\{n-m+1, \ldots, n\}$的节点中，至少有一个单元素块，或有一对属于同一块的节点。注意，P_n 是一个右 $R\mathfrak{S}_m$-模，其模结构由包含映射 $R\mathfrak{S}_m \subseteq \mathrm{P}_m \subseteq \mathrm{P}_n$给出，并且该模结构保持 J_m，因为右乘一个将节点置换的图，不会改变此集合中是否存在单元素块或属于同一块的两个节点。因此，P_n / J_m 是一个右 $R\mathfrak{S}_m$-模。

Lemma 5.2. 对于 $m \leq n$，当视为右 $R\mathfrak{S}_m$-模时，P_n / J_m 是自由的 .

证明。P_n / J_m 的基由满足以下条件的图构成：$\{n-m+1, \ldots, n\}$ 中的节点均不属于单元素块，且任意两个节点不在同一块中。这意味着 $\{n-m+1, \ldots, n\}$ 中的每个节点都连接到图中的一个不同块。现在，$\mathfrak{S}_m$ 在这个基上自由作用，因为将这样的图与一个置换相乘

在 $\mathfrak{S}_m$中再次得到一个图，其中 $\{n-m+1,\dots,n\}$中的节点连接到不同的块。在此作用下，任何此类图的稳定子都是平凡的。□

引理 5.3. 对于 $m \le n$，存在一个左 P_n-模同构

$$\mathrm{P}_n/J_m \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I} \cong \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$$

在此同构下，$(b+J_m)\otimes r \in \mathrm{P}_n/J_m \otimes_{R\mathfrak{S}_m} \mathbb{I}$ 对应于 $b\otimes r \in \mathrm{P}^n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$。

证明. 在整个证明过程中，我们将 J_m 视为 P_n中的一个理想，并将相应的理想记为 $J_m \cap \mathrm{P}_m$，其中 m。

我们来证明这些映射

$$(b+J_m)\otimes r \longmapsto b\otimes r$$

and

$$b\otimes r \longmapsto (b+J_m)\otimes r$$

是良定义的。由此立即可知它们互为逆映射，因而是同构。

对于第一个映射，我们需要证明，对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$， $b\sigma\otimes r = b\otimes r$，并且如果 $j\in J_m$，那么$j\otimes r \in \mathrm{P}^n \otimes_{\mathrm{P}_m} \mathbb{I}$ 为零。第一个等式由$\sigma \in \mathfrak{S}_m \subset \mathrm{P}_m$ 在$\mathbb{I}$上起恒等映射的作用立即得出。第二个条件成立，因为如果 $j\in J_m$，那么我们可以将 j写成形如 $b\cdot j'$的乘积之和，其中 $b\in \mathrm{P}_n$ 且$j'\in J_m\cap \mathrm{P}_m$；对于每个这样的直和项，我们都有 $b\cdot j'\otimes r = b\otimes j'\cdot b = b\otimes 0 = 0$。

对于第二个映射，令 $b\in \mathrm{P}_n$、 $b'\in \mathrm{P}_m$且$r \in \mathbb{I}$，并证明 $(bb'+J_m)\otimes r = (b+J_m)\otimes (b'\cdot r)$。只需对 $b'\in R\mathfrak{S}_m$ 和 $b'\in J_m\cap \mathrm{P}_m$ 证明这一点，因为 $\mathrm{P}_m = R\mathfrak{S}_m \oplus (J_m\cap \mathrm{P}_m)$。对于 $b'\in R\mathfrak{S}_m$，我们直接根据张量积的定义得到该等式。对于 $b'\in J_m\cap \mathrm{P}_m$，注意到 $bb'\in J_m = P_n\cdot J_m$，因此 $(bb'+J_m)\otimes r$ 为零；同样，$(b+J_m)\otimes (b'\cdot r)$也为零，因为 $b'\cdot r = 0$。□

现在回顾定理 4.2 中的结论：在满足定理 5.1的假设时，

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathrm{P}_n}(\mathbb{I}, \mathrm{P}_n/J_m) = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{if } * = 0 \\ 0 & \text{if } * > 0 \end{cases}.$$

定理 5.1 的证明。定理 5.1 的证明 现在完全按照 [BHP21中定理 4 的证明进行，1], 将 Br 的出现处$_n$ 替换为 P_n，并在适当之处应用引理 5.3 和定理 4.2 。□

6. High connectivity

我们构造一个与 [Hep22] 和 [BHP21]中的类似的复形。

定义 6.1. 对于 n 一个非负整数，我们定义 P_n-模的链复形 $C_n = (C_n)_*$ 如下。次数 p 部分 $(C_n)_p$ 在次数$-1\le p\le n-1$时非零，其定义为

$$(C_n)_p = \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_{n-(p+1)}} \mathbb{I}.$$

因此，在次数 -1 中，有 $(C_n)_{-1} = \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_n} \mathbb{I} \cong \mathbb{I}$。对于 $0 \leq p \leq n-1$ 次数 p 微分 ∂^p 由交错和给出

$$\partial^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_i^p \colon (C_n)_p \longrightarrow (C_n)_{p-1}.$$

其中，在代数上，映射 d_i^p 对 $1 \leq i \leq p$ 的定义为

$$\begin{array}{rccl} d_i^p \colon & \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_{n-(p+1)}} \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_{n-p}} \mathbb{I} \\ & x \otimes r & \mapsto & (x \cdot S_{n-p+i-1} \dots S_{n-p}) \otimes r \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rccl} d_0^p \colon & \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_{n-(p+1)}} \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathrm{P}_n \otimes_{\mathrm{P}_{n-p}} \mathbb{I} \\ & x \otimes r & \longmapsto & x \otimes r. \end{array}$$

换句话说，当 $i = 0$ 时，乘积 $S_{n-p+i-1} \dots S_{n-p}$ 取为空乘积，即单位元。

用图表来表示，次数 p 中的元素可以描述为顶端右侧有一个 $(n-(p+1))$-方框的图，如 命题 2.4 及其后面的段落所示。如果将 $(n-(p+1))$-方框下方的节点从上到下标记为 0、……、p，那么 d_i^p 会将节点 i向上提起并插入方框中。

现在我们对 C_n进行过滤。注意，在 [BHP21] 中，我们首先根据左侧不相交块的数量对 C_n 进行了分解；这里也可以这样做。不过，证明并不需要这样做。

定义 6.2。我们定义一个滤过

$$F_0 C_n \subseteq F_1 C_n \subseteq \cdots \subseteq F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n = C_n$$

C_n 如下。第 j 层 $F_j C_n$ 由至多包含 j 个块的图生成，这些块至少有 2 个正（右侧）节点，且不与方框相连。注意，这确实是一个滤过，因为边界映射只能减少右侧未与方框相连的块的数量。

我们简要回顾带分隔符的单射词复形的定义 s.

定义 6.3（带分隔符的单射词）。设 X 是一个有限集，且 $k \geqslant 0$。带有 k 个分隔符的 X 上的单射词，是一个由集合 $X \sqcup \{|\}$ 中的元素组成的词，该集合由 X 和分隔符 $|$构成；其中每个来自 X 的字母至多出现一次，分隔符恰好出现 k 次。当 $k = 0$ 时，这些就是 X 上的单射词。

定义 6.4（带分隔符的单射词复形）。设 X 是一个有限集，设 $s \geqslant 0$，并设 R 是一个交换环。带 s 个分隔符的单射词复形是 R-链复形 $W_{(s)X}$，集中在次数 $-1 \leq p \leq |X|-1$，定义如下。在次数 p，$(W_X^{(s)})_p$ 的基由 X 上含 s 个分隔符、且有 $(p+1)$ 个字母来自 X 的单射词构成。因此，这样一个词 $\mathsf{a} \in (W_{(s)X})_p$ 的长度为 $s+p+1$。设 $r = s+p$，且设 $\mathsf{a} = a_0 a_1 \dots a_r$。边界算子$\partial^p \colon (W_X^{(s)})_p \to (W_{(s)X})_{p-1}$ 定义如下：

$$\partial^p(a_0 a_1 \dots a_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 \dots \widehat{a_i} \dots a_r$$

但须满足以下条件：若被省略的字母是分隔符，则相应项也省略（或视为 0）。换言之，边界是删除来自 X 的字母而不删除任何分隔符所得到的词的带符号和；符号由被删除字母在包括分隔符在内的所有字母中的位置决定：

$$\partial^p(a_0a_1\dots a_r)=\sum_{a_i\in X}(-1)^i a_0\dots\widehat{a_i}\dots a_r$$

我们将尝试把滤过商 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$ 识别为带分隔符的单射词复形若干移位副本的直和，如[BHP21]中所示。（请注意，在 [BHP21] 中，关于 Brauer 代数的论证要简单一些，因此读者或许希望先阅读 Brauer 代数的证明。）

为了完成这一识别，我们展示图与数据元组之间的一一对应关系。这种对应关系较为复杂，因此我们先从一个简单的例子入手：与没有方框且右侧块不受限制的图相对应的元组。回想一下，图是表示集合 $\{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$ 的一种图示方式，该集合的分拆为 $\{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$。

一个图 D 由元组（L，R，ϕ）唯一确定，反之亦然，该元组由以下部分组成：

- 对 $\{-1,\dots,-n\}$ 的一个分拆 L。
- 一个 R 分拆 $\{1,\dots,n\}$。
- 一个标记 ϕ：$R\to\{\emptyset\}\cup L$ 满足以下性质：仅当$r=r'$ 时，$\phi(r)=\phi(r')$，或者 $\phi(r)=\phi(r')=\emptyset$。

该对应将一个图 D 映射到元组（L，R，ϕ），其中：

- L 是左侧节点 -1，…，$-n$上的诱导分拆。
- R 是右侧节点 $1,\dots,n$上的诱导分拆。
- ϕ 用与右侧某块相连的左侧块（若有，则该块必然唯一）为其标记；若无，则将其标记为 $\emptyset$。

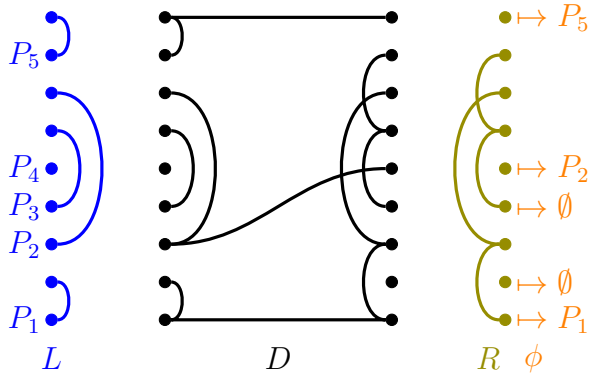


FIGURE 7. 该图展示了从图 D 中提取元组 (L,R,ϕ) 的过程。L中的块以及 R 的标记均标示在其最下方的节点处。

示例如图7所示。在这里，将分拆限制在图的左侧和右侧，相当于舍弃所有从左到右的

连接。这些从左到右的连接则记录在标记 ϕ 中。要看出 ϕ 满足上面的第三个性质，请注意，如果不满足，那么图中右侧会有两个不同的块 r、r'，它们连接到左侧的同一个块。这将导致矛盾，因为那样一来，r 和 r' 实际上就会是同一个。

现在我们注意到，滤过商 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$ 在次数 p上的基由以下图组成：图的右侧有一个 $(n-(p+1))$-方框，且恰有 j个块，其右侧有 ≥ 2 个未与方框连接的节点。此处，方框的大小由次数决定，见 定义 6.1；而对 j 个块的条件则源自 定义 6.2中给出的滤过定义。示例见 图 8。在下一个定义中，我们将说明这些基

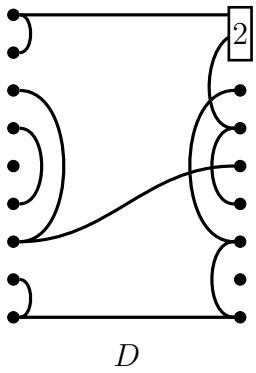


FIGURE 8. 图 D 的一个示例，其中 $n=9$、$j=1$ 和 $p=6$。

图表以类似于上文讨论的方式确定一个数据元组。从图表中去除这些数据后，剩下的就是所需的信息：一个带分隔符的单射词。在这个单射词中，字母表示从左到右的连接，其中右侧的块只有一个元素；分隔符则对应于右侧方框下方的所有其他节点。这些分隔符至少有 $2j$ 个，因为右侧恰有 j 个块含有两个或更多右侧节点，且未与方框连接。稍后，在引理 6.8 中，我们将说明如何反过来从带分隔符的单射词和数据元组出发，重建该图。

定义 6.5。$(F_jC_n/F_{j-1}C_n)^p$ 的基中的一个图确定了一个元组

$$(P, X, s, Y, f)$$

由以下数据组成：

- 一个 $\{-1,\dots,-n\}$的分拆 P。
- P的块的一个子集 X。
- 一个数 $2j \leq s \leq n-|X|$。
- 一个 $\{1,\dots,s\}$的分拆 Y，其中 $\geq j$ 个块的大小为 ≥ 2。
- 满足以下性质的标记 $f\colon Y \to (\{\emptyset\} \cup P \setminus X) \times \{\square, \neg\square\}$（其中符号 $\square, \neg\square$ 分别表示“方框”和“非方框”）：– 单元素块具有第一个标记 $\emptyset$– Y 中的任意两个块，其第一个标记均不相同 $P \setminus X$– 恰有 j 个大小为 ≥ 2 的块具有第二个标记 $\neg\square$

– 恰好 $n-s-|X|$ 个块具有第二标签 $\square$。

该图 D 按如下方式确定元组（示例如图 9所示）：

- P 是将 D 的块限制到负元素（即图左侧的节点）后得到的 $\{-1,\dots,-n\}$ 的分拆。
- X 是 P 中这样一组块：在 D 中观察时，每个块恰好与右侧的一个对象相连（可以连接到方框，也可以连接到单个节点）。
- 数量 s 等于 D 右侧未与 X中的块相连的节点数。这些节点恰好是单元素块，或与右侧的另一个元素、或与方框相连的节点。因此，j 个 D 中具有至少 2 个正（右侧）节点且未与方框相连的块中的每个节点（如定义 6.2所示）都被计入，因此 $s\geq 2j$。此外，与 X 中的块相连的节点均未被计入，因此 $s\leq n-|X|$。由此可知，$n-|X|-s$ 等于与方框以及右侧至少一个节点相连的块数。
- Y是通过将 D 限制在右侧未与 X 的块相连的 s 个节点上得到的分拆（我们按顺序将这些节点重新标记为 $1,\dots,s$）。
- $\emptyset\cup P\setminus X$中标记 f的第一个条目表示 Y 的块是否与 D 的其余部分断开连接（此时标签为 $\emptyset$），还是与左侧相连（此时标签为 $P\setminus X$中与之相连的块）。Y 中的单元素块不能与左侧相连，否则它们就会与左侧 X 中的某个块相连。因此，它们的第一个标签必须是 $\emptyset$。Y 中的两个块不能连接到 $P\setminus X$中的同一个块，因此只有当两个第一个标签都为 $\emptyset$时，它们才可能相同。

  如果 Y 中的块与 D 中的方框相连，标记 f 的第二个条目为 $\square$；如果没有相连，则为 $\neg\square$。恰有 j个大小为 ≥ 2 且第二个标签为 $\neg\square$ 的块这一条件，说明该图属于滤过商 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$。恰有$n-s-|X|$ 个第二个标签为 $\square$ 的块这一条件，则由上述观察可知：这就是与该方框相连且至少包含一个右侧节点的块的数量。

图中剩余的数据确定了一个含有 s 个分隔符 a 的单射词，其长度为 $p+1-s$，定义在集合 X 上，具体如下：如果右侧从上往下数第 i 个节点连接到 X 中的一个块，那么 a 的第 i 个字母就是 X 中对应的元素。否则，a 的第 i 个字母就是一个分隔符，而此类分隔符恰有 s 个。

定义 6.6. 根据上述讨论，我们可以定义一个映射

$$\Phi_*: F_jC_n/F_{j-1}C_n\to \bigoplus_{P,X,s,Y,f} W_X^{(s)}[-s].$$

直和取遍所有满足定义 6.5 开头所列性质的五元组 (P,X,s,Y,f)。图 D in $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)_p$ 由 Φ_p 映射为带分隔符的单射词 a，它位于与 (P,X,s,Y,f) 相对应的直和项中、次数为 p 的部分；其中 (P,X,s,Y,f) 和 a 按照定义 6.5 的方式得到。

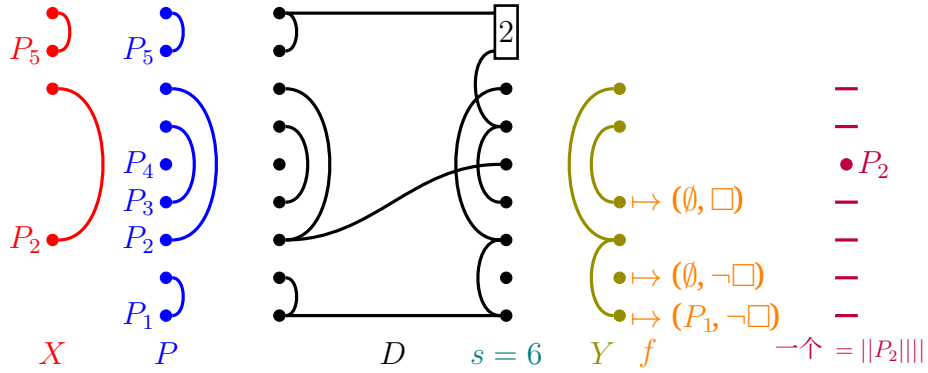


FIGURE 9. 此图展示了从图示中提取的过程 D 在 图 8 元组 (P, X, s, Y, f) 和单射词 a，其定义见 定义 6.5。块 P以及标记 f 属于 Y 均标示在其最下方的节点处。

现在我们证明 Φ_* 是链映射且为同构。这使我们能够借助带分隔符的单射词复形（[BHP21，命题 5。14]）的高连通性，通过滤过得出关于 C_n的高连通性结论。

引理 6.7. Φ_* 是一个链映射。

证明. 首先，我们断言，与基图表 D 相关联的五元组 (P, X, s, Y, f)（通过 Φ_*）在 $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)_p$ 中出现在 D 的边界中的所有图表里都保持不变。回顾定义 6.1，边界映射 ∂^p 将一个图映射为如下得到的图表的交错和：依次处理图右侧的节点，并在每种情况下将该节点移入方框。显然，这不会改变图的左端，因此边界中的所有图表都具有相同的 X，并且与它们相关联的 P 也相同。如果移入方框的节点是单元素块，或属于一个与方框相连的块，那么这些节点会计入 s；但将其移入方框后，所得图表要么在方框中有一个单元素块，要么在方框处有一个环，因此仍然为零。计入 s 的其他节点属于这样的块：该块在右侧有 ≥ 2 个元素，且不与方框相连。这样的块恰好有 j 个，因此将其中任一节点移入方框，在商 $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)_p$ 中都等于零。因此，唯一可以移入方框而不使结果为零的节点，是那些不计入 s 的节点，即 s 在边界映射下保持不变。由此可知，Y 和 f 保持不变，因为 Y 将这些 s 个节点分拆成块，并为其标记 f。

上面的段落表明，$F_jC_n/F_{j-1}C_n$ 分解为以五元组（P, X, s, Y, f）为指标的直和。现在只需证明，将具有固定（P, X, s, Y, f）的图映射到相应的带分隔符 a 的单射词这一对应关系与边界映射相容。这一点显然成立：将一个与 X 中的块相连的节点移入方框，恰好对应于删除 a 中一个非分隔符字母。□

引理 6.8. Φ_* 是一个同构。

证明。我们将通过说明 Φ_* 是由 $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)$ 的基与 $\bigoplus_{X,\ P,\ s,\ Y,\ f} W_X^{(s)}[-s]$ 的基之间的一个双射得到的，来证明 Φ_* 是一个同构。前者由图给出，后者由带分隔符的单射词给出。为此，我们将说明如何根据一个元组 (P, X, s, Y, f) 和一个带分隔符的单射词 a，在 $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)$ 中（重新）构造一个图。

我们在直和项 $W_X^{(s)}[-s]$ 中考察次数 $s+k-1$，该直和项对应于五元组 (P, X, s, Y, f)。因此，我们取一个长度为 k、含有 s 个分隔符的单射词 a，并据此构造一个属于 $(F_jC_n/F_{j-1}C_n)_{s+k-1}$ 的图。首先，构造一个右侧有 $s+k$ 个节点、方框大小为 $n-s-k$ 的空图；这是可行的，因为 $s+k \le s+|X| \le n$，后一个不等式是五元组的条件之一。接着，我们用 P 构造左侧的所有块，并从 X 中的块向右画出半边（暂时不要将这些边连接到任何东西）。将带有分隔符的单射词竖直放置，使其紧靠右侧的 $s+k$ 个节点；该词表示将其中 k 个节点与来自 X 的半边连接起来。我们将来自 X 的剩余半边连接到方框。分隔符指示 s 个节点 $\{1, \dots, s\}$ 的位置，这些节点随后按 Y 分拆，并标记为 f。Y 的首标签指示哪些块与 $P \setminus X$ 左侧的块相连。最后，如果 Y 中一个块的第二标签是 $\square$，我们就将该块连接到方框。注意，X 中有 $|X|-k$ 个块连接到方框，而 Y 中有 $n-s-|X|$ 个块连接到方框；后一性质是五元组的另一个条件。这意味着恰好有 $n-s-k$ 个不同的块连接到方框；由于这正是方框的大小，该图在 $(C_n)_{s+k}$ 中非零。该图属于 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$，因为按照五元组的条件，Y 中大小为 ≥ 2 的块里，恰好有 j 个块的第二标签为 $\neg\square$，因此未与方框相连。

上一段说明了如何从一个元组（P、X、s、Y、f）和一个单射词 a $\in W_X^{(s)}[-s]_{s+k-1}$ 得到（$F_jC_n/F_{j-1}C_n$）$_{s+k-1}$的基中的一个图。现在很容易验证，这正是 Φ_* 对基的作用的逆映射，证明至此完成。$\square$

命题 6.9. 对所有 $0 \le j \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，滤过商 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$ 满足H_i（$F_jC_n/F_{j-1}C_n$）$=0$，其中 $i \le \frac{n-3}{2}$。

证明。我们首先考虑以下情形：$n=0$，此时唯一的可能是 $j=0$，因此 $F_0C_0 = C_0$。于是要证明的是 H_i（C_0）$=0$，对于 $i \le -3/2$；但由于 C_0在次数 $\mathbb{I}$中仅由一个副本组成，因此结论显然成立。-1

现在考虑 $n>0$ 的情形。根据引理 6.8，这等价于证明对于每个满足定义 6.5 条件的五元组 (P, X, s, Y, f)，$W(X^{s}[-s])$ 的同调在所需范围内消失。由 [BHP21, 命题 5.14.], $H_i(W_X^{(s)}) = 0$ 对于 $i \trianglelefteq |X|-2$，因此 $H_i(W_X^{(s)}[-s]) = 0$ 对于 $i \le |X|+s-2$。因此，只需证明 $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \le |X|+s-2$，或者等价地：

$$\begin{cases} n \le 2|X|+2s & \text{if } n \text{ even} \\ n \le 2|X|+2s-1 & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

我们先证明总有 $n \le 2|X|+2s$。关于 5 元组 (P, X, s, Y, f) 的条件意味着，$n-s-|X|$ 是 Y 中第二个标签为

f-的块数 □，因此特别有 $n - s - |X| \leq |Y|$。由于 Y是$\{1, \ldots, s\}$ 的一个分拆，我们有 $|Y| \leq s$。结合最后两个不等式并整理，得到 $n \leq |X| + 2s$。因为 $|X| \geq 0$，所以有 $n \leq 2|X| + 2s$。特别地，当 n 为偶数时，这就证明了该命题。若 n 为奇数，它显然不可能等于偶数 $2|X| + 2s$ 。因此它最多只小 1：$n \leq 2|X| + 2s - 1$。□

定理 6.10. $H_i(C_n) = 0$ 对于 $i \leq \frac{n-3}{2}$。

证明。 根据 命题 6.9，滤过商 $F_jC_n/F_{j-1}C_n$在以下次数上同调消失：$i \leq \frac{n-3}{2}$ 对所有 j。考虑与短正合列 C_n 相关联的长正合列，可得 $0 \to F_{j-1}C_n \to F_jC_n \to F_jC_n/F_{j-1}C_n \to 0$本身也具有同样的性质。 □

7. Proof of Theorem B

定理 定理 B 的证明直接仿照 [BHP21，定理 B], 的证明，只需作如下替换：

- •所有出现的 Brauer 代数都应替换为分划代数。
- 映射 ι 和 π 的[BHP21] 应替换为本文中同名的映射。复形 C_*也应作类似替换。
- BHP [的21] 定理 5.4 应替换为定理 6.10。
- BHP[的21] 定理 4.1 应替换为定理 5.1。

我们注意到，在 [BHP21定理 6 的证明3], 第二段中有一处错误，应将“奇数”和“偶数”互换。

References

[BDM22] Chris Bowman、Stephen Doty 和 Stuart Martin。分划代数的整 Schur-Weyl 对偶。《代数组合》，5(2):371–399，2022。2[BH20] Rachael Boyd 和 Richard Hepworth。Temperley-Lieb 代数的同调稳定性，2020。即将发表于 Geometry & Topology。arXiv:2006.04256。1, 3, 6, 7[BHP21] Rachael Boyd、Richard Hepworth 和 Peter Patzt。Brauer 代数的同调。《数学精选》，27(5):第 85 号论文，31 页，2021。1, 3, 6, 7, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23[Boy22] Guy Boyde。图表代数中的幂等元与同调，2022。arXiv:2212.01826。1[BP72] Michael Barratt 和 Stewart Priddy。非连通幺半群及其关联群的同调。《瑞士数学评论》，47:1–14，1972。3[FM94] Eric M. Friedlander 和 Barry Mazur。代数簇同调上的滤过。《美国数学会回忆录》，110(529):x+110，1994。附录由 Daniel Quillen 撰写。3[Gal11] Søren Galatius。自由群自同构群的稳定同调。《数学年刊》(第 2 辑)，173(2):705–768，2011。3[Hep22] Richard Hepworth。Iwahori-Hecke 代数的同调稳定性。《拓扑学杂志》，15(4):2174–2215，2022。1, 16[HR05] Tom Halverson 和 Arun Ram。分划代数。《欧洲组合学杂志》，26(6):869–921，2005。1[Jon94] Vaughan F. R. Jones。Potts 模型与对称群。载于《子因子》（Kyuzeso，1993），第 259–267 页。World Sci. Publ.，River Edge，NJ，1994。1, 4[Mar94] Paul Martin。非平面统计力学中的 Temperley-Lieb 代数——分割代数构造。《J. Knot Theory Ramifications》，3(1):51–82，1994。1, 4

[Mar96] Paul Martin。分划代数的结构。《代数学杂志》，183(2):319–358，1996。4[Mos22] Isaac Moselle。 B型 Iwahori-Hecke 代数的同调稳定性，2022。arXiv:2211.06230。1[Nak60] Minoru Nakaoka。对称群同调群的分解定理。《数学年刊》(第 2 辑)，71:16–42，1960。3[Pat20] Peter Patzt。图表代数的表示稳定性，2020。arXiv:2009.06346。5[Sro22] Robin Sroka。奇数条股线上的 Temperley-Lieb 代数的同调，2022。即将发表于《代数与几何拓扑》。1[Wei94] Charles A. Weibel。《同调代数导论》，剑桥高等数学研究丛书第 38 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994。6

School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow
电子邮箱地址：rachael.boyd@glasgow.ac.uk

Institute of Mathematics, University of Aberdeen
电子邮箱地址：r.hepworth@abdn.ac.uk

Department of Mathematics, University of Oklahoma
电子邮箱地址：ppatzt@ou.edu