arXiv:2303.07984v2 [cs.DS] 7 Jan 2024

列子集选择问题的交错多项式方法

Jian-Feng Cai、Zhiqiang Xu 和 Zili Xu

摘要

本文研究列子集选择问题的谱范数版本。给定矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和一个满足 $k \leq \text{rank}(\mathbf{A})$ 的正整数，目标是恰好选取 $\mathbf{A}$ 的 k 列，使得将 $\mathbf{A}$ 投影到所选列张成的空间后，残差矩阵的谱范数最小。我们采用 Marcus-Spielman-Srivastava 提出的交错多项式方法，推导出最小近似误差的一个新上界。当矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 服从谱幂律衰减时，这一新上界在渐近意义下是紧的。相关的期望特征多项式可以写成受限可逆性问题中期望多项式的一种扩展形式，其中包含两个额外的变量代换算子。最后，我们提出一种确定性多项式时间算法，其达到的误差界与该上界相差至多一个计算误差。

1 引言

1.1 列子集选择问题

列子集选择近年来因其在机器学习中的广泛应用而受到广泛关注 [26, 9]，科学计算 [16, 20]，和信号处理 [5]。该问题涉及从数据矩阵中选取有限数量的列来近似该矩阵。具体而言，可将其表述如下：

问题 1.1。（列子集选择问题）给定一个秩为 $t \leq \min\{n, d\}$ 的矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和一个正整数 $k \leq t$，求一个大小为 k 的子集 $S \subset [d] := \{1, \ldots, d\}$，使得以下残差

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}\|_\xi = \min_{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{k\times d}} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{X}\|_\xi$$

在所有可能的子集 S 选择方案中取最小值。这里，$\mathbf{A}_S \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 表示由索引属于集合 S 的列组成的 $\mathbf{A}$ 的列子矩阵，$\mathbf{A}_S^\dagger \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 表示 $\mathbf{A}_S$ 的摩尔-彭若斯伪逆，而 $\xi = 2$ 或 F 表示谱范数或弗罗贝尼乌斯范数。

*Jian-Feng Cai 的工作部分得到了香港研究资助局一般研究基金的资助，资助项目编号为 16310620 和 16306821；部分得到了香港创新及科技基金 MHP/009/20 的资助。Zhiqiang Xu 的工作得到了国家杰出青年科学基金（12025108）和国家自然科学基金委员会（12021001，12288201）的资助。

问题 1.1 旨在构造输入矩阵$\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}$ 的最佳低秩近似$\mathbf{A}$ ，方法是将$\mathbf{A}$ 投影到由$\mathbf{A}$中少数经过精心选择的列张成的空间上。请注意，$\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}$ 的列是$\mathbf{A}_S$的列的线性组合。因此，与截断奇异值分解等其他低秩近似方法相比，列子集选择能够利用输入矩阵的稀疏性，并生成易于结合输入矩阵进行解释的结果。人们已提出多种算法来解决这一问题[25, 19, 18, 9]。

1.2 我们的贡献

本文从理论角度研究列子集选择问题，尤其关注谱范数，即 $\xi = 2$。问题 1.1 的主要结果由以下定理给出。

定理 1.1. 设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d] \in \mathbb{R}^{n\times d}$是一个秩为 $t \le \min\{d, n\}$的矩阵。对于每个 $1 \le i \le t$，令 λ_i 为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 的第 i大特征值。假设 $\lambda_t < \lambda_1$。令 α 和 β 为两个实数，使得

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^{-1} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{\lambda_t^{-1} - \alpha^{-1}}{\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}} \in (0, 1).$$

那么，对于任意满足 $\beta \cdot t \le k < t$的正整数 k s，存在一个大小为 k 的子集 $S \subset [d]$，使得 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) = k$ 且

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}\|_2^2 \le \frac{1}{1 + (\|\mathbf{A}\|_2^2 \cdot \alpha^{-1} - 1)\cdot\gamma_{\mathbf{A},k}} \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2, \tag{1}$$

where $\gamma_{\mathbf{A},k} := \left(\sqrt{\frac{k}{t}} - \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}\cdot(1-\frac{k}{t})}\right)^2 \in [0, 1).$

(1) 右侧可以表示为 $\|\mathbf{A}\|_2^2$ 与 α的加权调和平均数，即$1/(^{1-\gamma_{\mathbf{A},}\|}{}^{k}\mathbf{A}\|_2^2 + {}^{\gamma_{\mathbf{A}}}{}_{,\alpha}{}^{k})$。容易看出，随着~~$k$~~从 $\beta\cdot t$~~增~~至 t，$\gamma_{\mathbf{A},k}$ 从 0 逐渐增至 1。因此，随着 k 从 $\beta \cdot t$ 增至 t，(1) 中的界从 $\|\mathbf{A}\|_2^2$ 逐渐降至 α。在命题 3.1 中，我们将证明，α 是 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}\|_2^2$在 $[d]$的 $(t-1)$-子集上的体积抽样分布下的期望值。这意味着，对于 $|S| = t-1$，α是最小残差 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}\|_2^2$的紧上界，因此，当 k接近 $t-1$时，定理 1.1 所得到的近似误差有良好的上界。

为了理解定理 1.1 中给出的界，我们来考察以下两种常见情形。第一种是一个具有确定性挑战的问题，该问题构造于 [8]。另一种情形则是处理奇异值呈幂律衰减的真实世界数据矩阵。

(i) 考虑矩阵

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 + \delta\cdot\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_1 + \delta\cdot\mathbf{e}_{d+1}] \in \mathbb{R}^{(d+1)\times d}, \tag{2}$$

其中 $\delta > 0$ 是一个常数，$\mathbf{e}_1$、……、$\mathbf{e}_{d+1}$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$中的标准基向量。该矩阵在[8] 中构造为一个示例，用以说明列子集

选择问题的误差下界。简单计算可知，A 的秩为 d，且 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \delta^2 \cdot \mathrm{I}_d + \mathrm{J}_d$，其中 I_d 是单位矩阵，J_d 是大小为 d的全 1 方阵。此外，我们有

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \lambda_1 = d + \delta^2, \lambda_2 = \cdots = \lambda_d = \delta^2, \alpha = \frac{\delta^2(d+\delta^2)}{d-1+\delta^2}, \ \beta = \frac{1}{d}.$$

那么，对于任意整数 $1 \le k < d$，我们可以将（1）改写为

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_S^{\dagger} \mathbf{A}\|_2^2 \le \frac{1}{1 + \frac{1}{\delta^2} \cdot \left(\sqrt{k - \frac{k}{d}} - \sqrt{1 - \frac{k}{d}}\right)^2} \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2. \tag{3}$$

另一方面，如 [8, 定理 91], 所述，对于任意大小为 $S \subset [d]$ 的子集 $k < d$，有

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_S^{\dagger} \mathbf{A}\|_2^2 \ge \frac{\delta^2}{k + \delta^2} \cdot (d + \delta^2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\delta^2} \cdot k} \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2. \tag{4}$$

由此可见，当$d \to \infty$时，（3）中的上界在渐近意义上与（4）中的下界相匹配，这表明定理 1.1 对于（$\mathbf{A}$ 在（2）中定义的矩阵）是渐近紧的。

(ii) 考虑矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 具有谱幂律衰减的情形，即$\frac{c_1}{i^s} \le \lambda_i \le \frac{c_2}{i^s}$，$i = 1, \ldots\ldots, t$，其中 c_1，c_2是两个正常数，且 $s > 1$是衰减率指数。我们感兴趣的真实世界数据集在很大范围内都一致地表现出谱幂律衰减[4, 17]。假设$1 < \frac{c_2}{c_1} < 1 + \frac{1}{s+1}$。我们使用$\sum_{i=1}^{t} i^s = \frac{t^{s+1}}{s+1} + o(t^{s+1})$ [35] 得到 $c_2 \frac{t^s}{(s+1)} + o(t^s) \le \alpha^{-1} \le c_1 \frac{t^s}{(s+1)} + o(t^s)$。因此，当 $t \to \infty$时，有

$$\beta = \frac{\lambda_t^{-1} - \alpha^{-1}}{\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}} \le \frac{\frac{t^s}{c_1} - \left(\frac{t^s}{c_2(s+1)} + o(t^s)\right)}{\frac{t^s}{c_2} - c_1} \le \frac{c_2}{c_1} - \frac{1}{s+1} + \varepsilon =: \beta_1,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个足够小的常数。令 $k = l \cdot t$ 其中 $l \in (\beta_1, 1)$ 是一个常数。则$\gamma_{\mathbf{A},k}$ 当 $t \to \infty$时，可将其视为常数，因此式（1) 中给出的界可简化为$O(\overset{\alpha}{\gamma_{\mathbf{A}}}_{,k})$。需要注意的是，在谱范数下，A 的最佳秩 k 近似为 $\mathrm{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} \mathrm{u}_i \mathrm{v}_i^{\mathrm{T}}$，其中 u_i 和 v_i 是对应于奇异值 $\sqrt{\lambda_i}$的左右奇异向量。简单计算可得，当 $t \to \infty$ 时，

$$\left(\frac{c_1}{c_2(s+1)l^s} + o(1)\right) \alpha \le \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2 = \lambda_{k+1} \le \left(\frac{c_2}{c_1(s+1)l^s} + o(1)\right) \alpha.$$

这表明，当 $t \to \infty$时，上界 $O(\frac{\alpha}{\gamma_{\mathbf{A}}}_{,k})$ 渐近地达到下界 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2$，二者相差一个常数因子。鉴于真实世界数据的谱通常衰减迅速，[4, 17], 定理 1.1 为列子集选择及其各种应用提供了一种很有前景的方法。

定理 1.1 的证明基于交错多项式方法，该方法由 Marcus、Spielman 和 Srivastava 提出。他们运用这一方法，为 Kadison-Singer 问题[31], 这一著名的 C^* 代数问题提供了肯定的解答。该问题由 Richard Kadison 和

Isadore Singer 于 [28]提出。众所周知，许多组合问题都等价于 Kadison-Singer 问题，其中包括 Anderson 铺砌猜想 [1, 2, 3], Weaver 的 KS_r 猜想 [44],以及 Bourgain–Tzafriri 限制可逆性猜想 [10, 15]。

受定理 1.1证明的启发，我们提出一种确定性多项式时间算法来求解问题 1.1，如第 3.4 节的算法 1 所示。下述定理说明，算法 1 的输出能够达到定理 1.1 的界，误差不超过一定的计算误差。

定理 1.2。 设$\mathbf{A}$ 是一个矩阵，属于 $\mathbb{R}^{n\times d}$，并设 t、 α、 β 和 $\gamma_{\mathbf{A},\,k}$ 定义如定理*1.1*中所述。对于满足 k 的每个整数 $\beta\cdot t \le k < t$，算法 *1* 可以输出一个子集 $S=\{j_1,\dots,j_k\}\subset[d]$，使得

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 \;\le\; 2k\varepsilon+\frac{\|\mathbf{A}\|_2^2}{1+(\|\mathbf{A}\|_2^2\cdot\alpha^{-1}-1)\cdot\gamma_{\mathbf{A},k}}. \tag{5}$$

若 $d<n$，则算法 *1* 的时间复杂度为 $O(kdn^2+kd^{w+1}\log(d\vee\varepsilon^{-1}))$。否则，若$d\ge n$，时间复杂度为 $O(kdn^w\log(n\vee\varepsilon^{-1}))$。这里， $a\vee b:=\max\{a,b\}$ 表示两个实数a、 b，而 $w\in(2,\ 2.373)$ 是矩阵乘法复杂度指数。

1.3 与相关工作的比较

1.3.1 列子集选择问题

设 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个秩为 $t\le\min\{n,d\}$的矩阵。假设 $\mathbf{A}$ 的奇异值分解为 $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{t}\sqrt{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}$，其中 $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_t>0$ 是 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$的正特征值，$\mathbf{u}_i\in\mathbb{R}^n$和 $\mathbf{v}_i\in\mathbb{R}^d$ 分别是对应的左右奇异向量。对于问题 1.1的谱范数版本，先前的工作主要着眼于寻找一个大小为 $S\subset[d]$ 的子集 $k<t$，使其满足以下乘法界：

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2\le p(k,d)\cdot\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2^2=p(k,d)\cdot\lambda_{k+1},$$

其中 $p(k,\ d)$ 是定义在 k 和 d上的函数，且 $\mathbf{A}_k$ 是 k 秩近似下 $\mathbf{A}$ 在谱范数意义下的最佳秩 $\mathbf{A}_k=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}$。早期关于列子集选择问题的研究主要集中于秩揭示分解 [24, 25]。实践中，基于秩揭示 QR（RRQR）分解的算法 [25, 27] 可提供一种具有乘法界的高效确定性算法

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2\le(1+c^2k(d-k))\cdot\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2^2,$$

其运行时间为 $O(ndk\log_c d)$，其中 $c>1$ 是常数。基于 RRQR 分解的算法的全面总结可参见 [9] 中的表 2。

此外，还提出了一类用于列子集选择问题的随机化方法 [23,9, 19, 40, 18, 7]。这些方法从输入矩阵 A 的列上的某些分布中采样，以选择列。[9], 中给出了一种两阶段算法，将基于RRQR的算法与 k-杠杆分数采样相结合。具体而言，A 的第 i 列被选中的概率与其 k-杠杆分数成正比 $l_i^{(k)}:=\sum_{j=1}^{k}v_{j,\ i}^2$，$i$ 其中 $v_{j,\ i}$ 是向量 $\mathbf{v}_j\in\mathbb{R}^d$ 的第 i 个分量。他们的算法以至少 0.7 的概率生成一个大小为 k 的子集 $S\subset[d]$，并保证满足以下乘法界：

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2\le O(k^{\frac{3}{2}}(d-k)^{\frac{1}{2}}\log k)\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2^2.$$

Deshpande、Rademacher、Vempala 和 Wang [19] 通过体积采样提出了列子集选择的另一种方法，即以与 $\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]$成正比的概率选取一个子集 $S \subset [d]$ 。由此，他们证明了

$$\mathbb{E}_S \ \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 \leq (d-k)(k+1) \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2,$$

其中， S 是从 $[d]$的所有 k-子集中通过体积采样选出的。Deshpande 和 Rademacher [18]随后提出了体积采样的多项式时间算法。最近，Belhadji、Bardenet 和 Chainais [7] 提出从投影行列式点过程中进行采样，并得到了更优的乘法界：

$$\mathbb{E}_S \ \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 \leq (1 + k(\tilde{d} - k)) \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2,$$

其中， $\tilde{d} := \#\{i \in [d] : l_i^{(k)} > 0\}$ 是非零 k杠杆分数的数量。关于列子集选择问题现有随机抽样方法的全面综述，请参阅[7]。

从理论角度来看，我们在 (1) 中给出的上界相较于现有乘法界至少有两项优势。首先，对于 $k > \beta \cdot$rank(A)，我们的界严格小于 $\|\mathbf{A}\|_2^2$ ；而当 λ_{k+1} 足够大时，现有乘法界可能大于 $\|\mathbf{A}\|_2^2$ 。其次，我们在 (1) 中给出的界通常比现有乘法界紧得多。例如，考虑按 (2) 定义的 A，并令 k、 d 趋于无穷，同时保持比值 k/d 固定。请注意，此时有 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2 = \delta^2$。上述乘法界变为 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 \leq O(k(d-k)) \cdot \delta^2$，而简单计算表明，我们在 (3) 中给出的界渐近收敛于 (4) 中提出的下界 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 \geq \frac{d+\delta^2}{k+\delta^2} \cdot \delta^2 = O(1) \cdot \delta^2$。

值得注意的是，在某些情况下，现有的乘法界可能优于我们的界。具体而言，当两个维度 d 和 t 趋于无穷大，且最小非零特征值 λ_t 趋于零的速度快于其他任何非零特征值 λ_i时， β 的值趋于 1。因此，在这种情况下，我们的界（1）对大多数 $k <$rank$(\mathbf{A})$ 均不适用。

大量论文致力于选择一个子集 $S \subset [d]$，使得子矩阵 $\mathbf{A}_S$ 满足以下相对误差界之一：

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_\xi \leq (1+\varepsilon) \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_\xi,$$
$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_\xi \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_\xi + \varepsilon\|\mathbf{A}\|_\xi,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是给定的误差参数，且 $\xi \in \{\mathrm{F}\ 2\}$ [19, 40, 20, 8, 43]。为了达到该相对误差界， S 的大小通常需要大于 k ，并且取决于误差参数ε。本文主要致力于在 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2$的大小给定时，推导残差 S 的上界。因此，相对误差界的讨论超出了本文的范围。

1.3.2 通过列选择近似矩阵

Friedland 和 Youssef 研究了通过列选择的一种变体来近似矩阵的问题 [22]。我们回顾一下，矩阵 B 的稳定秩定义为 srank(B) $:= \|\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2/\|\mathrm{B}\|_2^2$。基于 Marcus-Spielman-Srivastava 对 Kadison-Singer 问题的解答，Friedland 和

Youssef [22, 定理 1。1] 证明，对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$，存在一个非负对角矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 其非零项至多为 $\mathrm{srank}(\mathbf{A})/c\varepsilon^2$，使得

$$\|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{A}\|_2 \leq \varepsilon\|\mathbf{A}\|_2^2.$$

这意味着 $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 的谱与 A 的谱接近（另见 [6]）。

定理 1.1 与 [22, 定理 1.1] 的相似之处在于，它们都会生成输入矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 的一个草图矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$，使得近似误差 $\|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{A}}\|_2$ 可以被常数倍的 $\|\mathbf{A}\|_2^2$很好地上界，即

$$\|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{A}}\|_2 \leq \varepsilon_{\mathbf{A},k} \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2, \tag{6}$$

其中 $\varepsilon_{\mathbf{A},\ k} < 1$ 是一个取决于矩阵 $\mathbf{A}$ 和采样规模 k的常数。具体而言，定理 1.1 通过将 $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}$投影到由 A 中少数几列张成的空间上，生成一个草图矩阵 A。注意

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 = \|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - (\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})\|_2,$$

因此，定理 1.1 生成的草图矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}$ 满足界 (6)，其中 $\varepsilon_{\mathbf{A},k} = 1/(1 + (\|\mathbf{A}\|_2^2 \cdot \alpha^{-1} - 1) \cdot \gamma_{\mathbf{A},k})$。另一方面，[22, 定理 1.1] 通过选取 A 中少量经过重新缩放的行，生成草图矩阵$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}$；该草图矩阵满足界 (6)，其中 $\varepsilon_{\mathbf{A},k} = O(\sqrt{\mathrm{srank}(\mathbf{A})/k})$。由于定理 1.1 和 [22, 定理 1.1] 所使用的采样方法不同，因此无法直接将式 (1) 中的界与 Friedland-Youssef 的工作中的界进行比较。

1.3.3 受限可逆性原理

数值线性代数和计算机科学领域研究了列子集选择的许多变体。其中一项结果是 Bourgain-Tzafriri 受限可逆性原理 [10]，它与以下子集选择问题相关。

问题 1.2。（受限可逆性问题）给定一个矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和一个正整数 $l \leq \mathrm{rank}(\mathbf{B})$，求一个大小为 l 的子集 $R \subset [d]$，使得 $\mathbf{B}_R$ 的最小奇异值（记为 $\sigma_{\min}(\mathbf{B}_R)$）在所有可能的子集 R选择中最大。

粗略地说，问题 1.2 旨在选出 l 列，使它们尽可能“线性无关”。Bourgain-Tzafriri 受限可逆性原理表明，存在普适常数 $c_1, c_2 \in (0,1)$，使得对于任意具有归一化列的可逆矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，都可以找到一个子集 $R \subset [d]$，其大小至少为 $c_1 \cdot \mathrm{srank}(\mathbf{B})$，且 $\sigma_{\min}(\mathbf{B}_R) \geq c_2$。此结果后来又被以下学者的研究进一步加强 [42, 47, 41, 36, 32, 37]。

在第 2.4 节中，我们将展示问题 1.2 与问题 1.1的一个特定实例之间的直接联系。更具体地说，我们证明，若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个秩为 d 的矩阵，其奇异值分解为 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$，那么对于每个子集 $S \subset [d]$，我们都有

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2 = \frac{1}{\sigma_{\min}^2(\mathbf{B}_{S^C})},$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times d}$。这意味着，最小化残差 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2$ 等价于最大化 $\sigma_{\min}^2(\mathbf{B}_{S^C})$，其中子集 S 遍历所有 k-子集 $[d]$。因此，当 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = d$时，问题 1.1 可改写为问题 1.2，其中 $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$且 $l = d - k$。

1.4 技术概述

设 A 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$中的一个矩阵。对于每个子集 $S\subset[d]$，我们令 $\mathrm{Q}_S:=\mathrm{I}_n-\mathrm{A}_S\mathrm{A}_S^{\dagger}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，它是矩阵 A_S的列空间的正交补的投影矩阵。对于每个子集 $S\subset[d]$，我们定义次数为 d 的多项式

$$p_S(x):=\det[x\cdot\mathbf{I}_d-(\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})]=\det[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]. \tag{7}$$

由此立即可知

$$\text{maxroot } p_S(x)=\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2. \tag{8}$$

We 采用交错多项式方法证明以下定理。

定理 1.3。设 A 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个矩阵。那么，对于每个正整数 $k\le$rank(A)，都存在一个大小为 k 的子集 $S\subset[d]$，使得 rank(A_S) $=k$ 且

$$\text{maxroot } p_S(x)\le\text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^k\ \det[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}].$$

我们将证明，定理 $x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^k$ 行列式$[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$ 中的多项式具有两个重要性质。首先，当 $k\le\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ 时，该多项式是一个次数为 d 的多项式，且其根均为非负实数；其最大根随 k 的增大而不增（见第 2.3 节）。其次，该多项式是对 $p_S(x)$）关于k个 $[d]$子集进行体积采样所得多项式的期望，差一个常数因子，即（见命题 3.1）

$$k!\sum_{S\subset[d],|S|=k}\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot p_S(x)=(x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^k\ \det[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]. \tag{9}$$

因此，定理 1.3 基本上表明，期望多项式$x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^k$ 行列式$[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$ 的最大根，为 p_S (x 的最小最大根提供了一个上界，其中 S 遍历所有 k个 $[d]$子集。

为了完成定理1.1的证明，我们采用[6, 41, 32, 33] 中引入的单变量屏障方法来估计期望多项式 $(x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^k$ 迹$[x\cdot\mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$的最大根。

1.5 组织结构

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们介绍若干基本的线性代数和分析学事实。在第3节中，我们证明定理1.1、1.2 和1.3。

2 预备知识

2.1 记号

我们首先介绍一些记号。对于正整数 d，我们用 $[d]$ 表示集合 $\{1,2,\ldots,d\}$。对于满足条件 $k<d$ 的任意两个整数 k 和 d，我们用 $[k,d]$ 表示集合 $\{k,k+1,\ldots,d\}$。对于子集 $T\subset[d]$，我们用 $|T|$ 表示 T 的大小，并称 T 是 $[d]$ 的 k-子集，当且仅当 $|T|=k$。

对于正整数 d，我们用 I_d 表示大小为 d 的单位矩阵。对于矩阵 A $\in\mathbb{R}^{d\times d}$，我们用 Tr[A]，表示 A 的迹，即 $\mathrm{Tr}[\mathrm{A}]=\sum_{i=1}^{d}\mathrm{A}(i,i)$。我们用欧几里得范数表示

向量 x 的欧几里得范数记为 $\|\mathbf{x}\|$。对于矩阵 A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和一个 k 元子集 $S \subset [d]$，我们用 A $_S \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 表示从 A 中提取由 S 索引的列所构成的子矩阵。对于方阵 B $\in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和一个 k 元子集 $S \subset [d]$，我们用 B(S) $\in \mathbb{R}^{k\times k}$ 表示从 B 中提取由 S 索引的行和列所构成的子矩阵。对于矩阵 A，我们分别用 $\sigma_{\min}$(A) 和 $\sigma_{\max}$(A) 表示 A 的最小和最大奇异值。若 A 是方阵，则分别用 $\lambda_{\min}$(A) 和 $\lambda_{\max}$(A) 表示 A 的最小和最大特征值。我们将给定矩阵 A 的值域（或列空间）记作 Ran(A)。

我们用 $\mathbb{P}^+(d)$表示次数恰为 d、首项系数为正且所有根均为非负根的实根单变量多项式族。我们用 $\mathbb{R}[x]$ 表示实系数单变量多项式族。令 $z_1, \ldots, z_d$ 为变量。我们用$\mathbb{R}[z_1, \ldots, z_d]$ 表示仅含实系数的多变量多项式族。我们用∂_{z_i} 表示偏微分 ∂/∂_{z_i}。对于每个子集 $S \subset [d]$，我们用 z^S 表示多仿射多项式 $\prod_{i\in S} z_i$。

设 $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x^i \in \mathbb{R}[x]$ 是次数至多为 d的一元多项式，其中 $a_0, \ldots, a_d$为常数。我们定义翻转算子$\mathcal{R}^+_{x,\ d} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ 如下：

$$\mathcal{R}^+_{x,d}\ p(x) := x^d \cdot p(1/x) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x^{d-i}. \tag{10}$$

在本文中，我们始终假设多项式$\mathcal{R}^+_{x,\ d}\ p(x)$在 $x = 0$处有定义；也就是说，若 $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x^i$，则$(\mathcal{R}^+_{x,\ d}\ p)(0) = a_d$。接下来，我们将$\mathcal{R}^+_{x,\ d}$ 的定义推广到多变量情形。设 $r_1, \ldots, r_d$为一组非负整数，并设 $f(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_d]$ 为关于z_j, $j = 1, \ldots, d$的次数至多为r_j的多变量多项式。对于每个 $i \in [d]$，我们定义翻转算子$\mathcal{R}^+_{z_i,\ r_i} : \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_d] \to \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_d]$ 如下：

$$\mathcal{R}^+_{z_i,r_i}\ f := z_i^{r_i} \cdot f(z_1, \ldots, z_i^{-1}, \ldots, z_d). \tag{11}$$

注意，$\mathcal{R}^+_{z_i,\ r_i}\ f$是一个关于$z_j$, $j = 1, \ldots, d$的次数至多为r_j的多变量多项式。

2.2 摩尔-彭若斯伪逆

对于矩阵 A $\in \mathbb{R}^{n\times d}$，我们用 A$^\dagger \in \mathbb{R}^{d\times n}$ 表示 A 的摩尔-彭若斯伪逆。假设 rank(A) $= t$，且 A 的薄奇异值分解为：A $= \mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}$，其中$\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{t\times t}$，U $\in \mathbb{R}^{n\times t}$，V $\in \mathbb{R}^{d\times t}$ 满足 $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I}_t$。那么我们有 A$^\dagger = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$，且矩阵 AA$^\dagger = \mathbf{UU}^{\mathrm{T}}$ 是列空间 Ran(A) 的投影矩阵。对于子集 $S \subset [d]$，我们用 A$^\dagger_S$ 表示 A$_S$的摩尔-彭若斯伪逆，即 A$^\dagger_S$:= (A$_S$)†。

以下引理与摩尔-彭若斯伪逆有关，后续将会用到。第一个引理给出了投影矩阵的秩一更新公式。

引理 2.1. 假设 $n \geq d > 1$。令 B $\in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和 b $\in \mathbb{R}^n$ 满足 b $\notin$ Ran(B)。设 M := [B, b] $\in \mathbb{R}^{n\times(d+1)}$。则有

$$\mathbf{MM}^\dagger = \mathbf{BB}^\dagger + \frac{(\mathbf{Qb})(\mathbf{Qb})^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{Qb}\|^2},$$

其中 Q $= \mathbf{I}_n - \mathbf{BB}^\dagger$ 是 Ran(B) 的正交补的投影矩阵。

证明。 注意，$\mathbf{MM}^{\dagger}$ 和$\mathbf{BB}^{\dagger}$ 分别是 Ran(M) 和 Ran(B的投影矩阵。因此，结论由 [46, 定理 45]得出。

□

以下引理是 [18, Lemma 12]，的重述，说明一个行列式可以分解为两个行列式的乘积。

引理 2.2。[18, 引理 12] 设 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$。令 $\mathbf{M} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}] \in \mathbb{R}^{n\times(d+m)}$，$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n - \mathbf{BB}^{\dagger}$。则有

$$\det[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}] = \det[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}] \cdot \det[\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}].$$

2.3 微分算子 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)$

本小节简要介绍微分算子 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)$，该算子在定理 1.3 中提出。该微分算子与次数为 d 的多项式在 0 处的极导数有关，其定义为 $(d - x \cdot \partial_x) \cdot p(x)$，其中多项式的次数为 d，多项式为 $p(x)$ [34, p。44]。此外，微分算子 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)$ 与多项式对称乘法卷积的降次公式密切相关，详见 [33, 引理 4。9]。

下面的命题给出了微分算子 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)$ 的一些基本性质。回顾一下，若单变量多项式 $p(x)$ 的所有系数和根都是实数，则称其为实根多项式。

命题 2.1. (i) 假设 $p(x)$ 是一个次数至多为 d 的多项式。那么，对于任意非负整数 k，有

$$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \; p(x) = (-1)^k \cdot \mathcal{R}^{+}_{x,d} \cdot \partial_x^k \cdot \mathcal{R}^{+}_{x,d} \; p(x). \tag{12}$$

(ii) 假设 $p(x)$ 是一个次数为 d 、恰有 t 个非零根的实根多项式。那么，$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \; p(x) \equiv 0$ 当且仅当 $k \geq t+1$。当 $k = t$ 时，$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \; p(x)$ 是 x^d 的倍数。

(iii) 假设 $p(x)$ 是关于 $\mathbb{P}^{+}(d)$ 的一个恰有 $t \geq 1$ 个正根的多项式。那么有

$$\operatorname{maxroot} \; (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \; p(x) = \frac{1}{\operatorname{minroot} \; \partial_x^k \cdot \mathcal{R}^{+}_{x,d} \; p(x)}, \quad \textit{for} \quad k < t. \tag{13}$$

此外，对于任意满足 $k \leq t$ 的非负整数 k，多项式 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \; p(x)$ 属于 $\mathbb{P}^{+}(d)$，且其最大根随 k 的增大而不增。

证明。(i) 通过简单计算可得

$$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \; p(x) = -\mathcal{R}^{+}_{x,d} \cdot \partial_x \cdot \mathcal{R}^{+}_{x,d} \; p(x), \tag{14a}$$

$$\mathcal{R}^{+}_{x,d} \cdot \mathcal{R}^{+}_{x,d} \; p(x) = p(x). \tag{14b}$$

反复使用（14a）和（14b），我们得到（12）。

（ii）我们将 $p(x)$ 写作 $= x^{d-t} \cdot q(x)$，其中 $q(x)$ 是一个次数为 t 、具有 t 个非零实根的多项式。根据（12），$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x) \equiv 0$ 当且仅当 $\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x) \equiv 0$。注意到 $\mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x) = x^d \cdot p(1/x) = x^t \cdot q(1/x)$ 的次数为 t，我们得到 $\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x) \equiv 0$ 当且仅当 $k \geq t+1$。当 $k = t$ 时，注意到 $\partial_x^t \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x)$ 是一个常数，因此（12）意味着 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x)$ 是 x^d 的倍数。

(iii) 记 $p(x) = \lambda_0 \cdot x^{d-t} \cdot \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i)$，其中 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_t > 0$ 均为正实数。于是，$\mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x) = x^d \cdot p(1/x) = (-1)^t \cdot \prod_{i=0}^t \lambda_i \cdot \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i^{-1})$ 是一个次数为 t 、仅有正根的实根多项式。根据罗尔定理，当 $k < t$ 时，多项式 $\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x)$ 仅有正根。因此，由 (12) 可立即得到 (13)。

接下来假设 $k \leq t$。根据罗尔定理，$\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x)$ 的最小根关于 k 单调不减。回顾一下，当 $k < t$ 时，$\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x)$ 仅有正根；当 $k = t$ 时，$\partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d}\ p(x)$ 是常数。于是，(12) 表明 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x)$ 仅有非负根，而 (13) 表明 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x)$ 的最大根关于 k 单调不增。最后，根据 (12) 可计算得出，$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x)$ 的首项系数为 $k! \cdot \lambda_0 \cdot \sum_{S \subset [t], |S| = k} \prod_{i \in S} \lambda_i$ 对每个 $k \leq t$ 均成立。因此，我们可以得出结论：对于每个 $k \leq t$，$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x)$ 都属于 $\mathbb{P}^+(d)$，且其最大根关于 k 单调不增。

□

注 2.1。恒等式 (12) 可以推广到多变量情形。设 $r_1, \ldots, r_d$ 是一组非负整数，并设 $f(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_d]$ 是一个次数至多为 r_i 的 z_i, $i = 1, \ldots, d$ 上的多变量多项式。那么，类似的计算表明，对于每个 $i \in [d]$ 以及每个整数 $k \geq 0$,

$$(z_i^2 \partial_{z_i} - r_i \cdot z_i)^k \cdot f(z_1, \ldots, z_d) = (-1)^k \cdot \mathcal{R}_{z_i, r_i}^+ \cdot \partial_{z_i}^k \cdot \mathcal{R}_{z_i, r_i}^+\ f(z_1, \ldots, z_d), \tag{15}$$

其中算子 $\mathcal{R}_{z_i, r_i}^+$ 定义于 (11)中。上述恒等式将在第 *2.4*节中使用。

注 2.2。设 A 是 $\mathbb{R}^{n \times d}$ 中的一个矩阵。那么，命题 2.1 (iii) 表明，当 $k \leq$rank(A) 时，期望多项式只有非负实根，并且其最大根随着 k 的增加而不增。此外，命题 2.1 (i) 表明，期望多项式 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \det[x \cdot \mathrm{I}_d - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}]$ 可以写成 $(-1)^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d} \cdot \partial_x^k \cdot \mathcal{R}_x^+{}_{,d} \det[x \cdot \mathrm{I}_d - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}]$。值得注意的是，Marcus-Spielman-Srivastava 和 Ravichandran 此前曾使用交错多项式方法研究受限可逆性问题 *[37, 32]*。在从给定矩阵 A $\in \mathbb{R}^{n \times d}$ 中选取 $d - k$ 列的情形下，相关的期望多项式为 $\partial_x^k \det[x \cdot \mathrm{I}_d - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}]$。因此，通过加入两个额外的变量代换算子 $\mathcal{R}_x^+{}_{,d}$，我们的期望多项式可以视为对他们的期望多项式的扩展。

2.4 多项式 $p_S(x)$ 的其他表达式

令 Z := diag($z_1, \ldots, z_d$)，其中 $z_1, \ldots, z_d$ 是变量。对于任意矩阵 B $\in \mathbb{R}^{d \times d}$，有（参见[38,推论 3]）

$$\det[\mathbf{Z} - \mathbf{B}] = \sum_{R \subset [d]} (-1)^{d - |R|} \det[\mathbf{B}(R^C)] \cdot z^R. \tag{16}$$

这里 $z^R := \prod_{j\in R} z_j$ 对于每个子集 $R \subset [d]$。对于任意子集 $S \subset [d]$，对（16）两边关于z_j 当 $j \in S$求导，可得以下恒等式（另见 [38, 引理 1]）：

$$\det[(\mathbf{Z}-\mathbf{B})(S^C)] = \left(\prod_{j\in S}\partial_{z_j}\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{B}]. \tag{17}$$

这表明，主子矩阵 $\mathbf{B}(S^C)$ 的特征多项式可以用多仿射多项式 $\det[\mathbf{Z}-\mathbf{B}]$ 表示为：

$$\det[x\cdot\mathbf{I}_{d-|S|}-\mathbf{B}(S^C)] = \left(\prod_{j\in S}\partial_{z_j}\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{B}]\Big|_{z_j=x,\ \forall j\in[d]}.$$

在本小节中，我们为多项式 $p_S(x) = \det[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]$（定义见等式（7））提供一个类似的结果，其中 $\mathbf{Q}_S = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}$。

命题 2.2. 设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d]$ 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个矩阵。设 $\mathbf{Z} = \mathbf{diag}(z_1, \ldots, z_d)$，其中 $z_1, \ldots, z_d$ 为变量。

（i）对于每个子集 $S \subset [d]$，有

$$\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}] = \left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] \tag{18}$$

and

$$\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot p_S(x) = \left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\Big|_{z_j=x,\forall j\in[d]}. \tag{19}$$

（ii）设 $\mathbf{A}$ 的秩为 d。令 $\widehat{\mathbf{A}} := (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$。则对于每个子集 $S \subset [d]$，有

$$p_S(x) = (-1)^{|S|+d}\cdot\frac{\det[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]}{\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]}\cdot\mathcal{R}_{x,d}^{+}\ \det[x\cdot\mathbf{I}_{d-|S|}-\widehat{\mathbf{A}}(S^C)]. \tag{20}$$

证明。（i）我们首先证明等式（18）。对于任意多仿射多项式 $f(z_1, \ldots, z_d)$ 以及任意$j \in [d]$，有

$$(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\ f(z_1,\ldots,z_d) = f(z_1,\ldots,z_d)\Big|_{z_j=0}\times(-z_j).$$

此外，根据（16），我们可以将行列式展开为$[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$ 形式

$$\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] = \sum_{W\subset[d]}(-1)^{|W|}\cdot\det[\mathbf{A}_W^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_W]\cdot z^{W^C}.$$

然后，我们可以将（18）的右侧改写为

$$\begin{aligned}\left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] &= (-1)^{|S|}\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\Big|_{z_j=0,\forall j\in S}\cdot z^S\\ &= (-1)^{|S|}\cdot z^S\cdot\sum_{W:S\subset W\subset[d]}(-1)^{|W|}\cdot\det[\mathbf{A}_W^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_W]\cdot z^{W^C}\\ &= \sum_{R\subset[d]\setminus S}(-1)^{|R|}\cdot\det[\mathbf{A}_{R\cup S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{R\cup S}]\cdot z^{R^C}.\end{aligned} \tag{21}$$

现在我们推导（18）。根据（16），我们可以将（18）的左侧改写为

$$\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]=\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\sum_{R\subset[d]}(-1)^{|R|}\cdot\det[\mathbf{A}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}_R]\cdot z^{R^C}. \tag{22}$$

$\mathbf{Q}_S\mathbf{A}_R$ 中由 $R\cap S$ 索引的列都等于 $\mathbf{0}_{n\times 1}$，因此我们有行列式$[\mathbf{A}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}_R]=0$ 若$R\cap S\neq\emptyset$。这意味着我们可以将等式（22）改写为

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]&=\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\sum_{R\subset[d]\backslash S}(-1)^{|R|}\cdot\det[\mathbf{A}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}_R]\cdot z^{R^C}\\&\overset{(a)}{=}\sum_{R\subset[d]\backslash S}(-1)^{|R|}\cdot\det[\mathbf{A}_{R\cup S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{R\cup S}]\cdot z^{R^C}\\&=\left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}].\end{aligned}$$

这里，最后一个等式由（21）得出，而等式（a）由以下内容得出：

$$\det[\mathbf{A}_{R\cup S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{R\cup S}]=\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot\det[\mathbf{A}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}_R],\quad\forall\ R\subset[d]\backslash S,$$

该式通过在引理 2.2中取 $\mathrm{B}=\mathbf{A}_S$ 和 $\mathbf{C}=\mathbf{A}_R$ 得到。因此，我们得到（18）。在等式（18）中对每个 $j\in[d]$ 取$z_j=x$，即可立即得到等式（19）。

(ii) 一个简单的观察是，对于任意多仿射多项式 $f(z_1,\ \ldots\ldots,\ z_d)$ 以及任意 $j\in[d]$，都有 $\mathcal{R}_{z_j,\ 1}^{+}\cdot\mathcal{R}_{z_j,\ 1}^{+}f=f$。结合（15），可得

$$\begin{aligned}\left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]&=\left(\prod_{j\notin S}\mathcal{R}_{z_j,1}^{+}\cdot\mathcal{R}_{z_j,1}^{+}\right)\cdot\left(\prod_{j\in S}-\mathcal{R}_{z_j,1}^{+}\cdot\partial_{z_j}\cdot\mathcal{R}_{z_j,1}^{+}\right)\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\\&=(-1)^{|S|}\cdot\mathcal{R}\cdot\left(\prod_{j\in S}\partial_{z_j}\right)\cdot\mathcal{R}\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}],\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\mathcal{R}:=\prod_{j=1}^{d}\mathcal{R}_{z_j,\ 1}^{+}$，最后一个等式是因为算子 $\mathcal{R}_{z_j,\ 1}^{+}$ 可以与算子 $\mathcal{R}_{z_i,\ 1}^{+}$ 和 ∂_{z_i} 互换，对任意 $i\neq j$ 均成立。注意，

$$\mathcal{R}\cdot\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]=\det[\mathbf{Z}]\cdot\det[\mathrm{diag}({z_1}^{-1},\ldots,{z_d}^{-1})-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]=(-1)^d\cdot\det[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\cdot\det[\mathbf{Z}-\widehat{\mathbf{A}}]. \tag{24}$$

然后结合（19）、（23）和（24），可得

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]\cdot p_S(x)&=\left(\prod_{j\in S}(z_j^2\partial_{z_j}-z_j)\right)\det[\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\ \Big|_{z_j=x,\forall j}\\&=(-1)^{|S|+d}\cdot\det[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\cdot\mathcal{R}\cdot\left(\prod_{j\in S}\partial_{z_j}\right)\det[\mathbf{Z}-\widehat{\mathbf{A}}]\ \Big|_{z_j=x,\forall j}\\&\overset{(a)}{=}(-1)^{|S|+d}\cdot\det[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\cdot\mathcal{R}\cdot\det[(\mathbf{Z}-\widehat{\mathbf{A}})(S^C)]\ \Big|_{z_j=x,\forall j}\\&=(-1)^{|S|+d}\cdot\det[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\cdot\mathcal{R}_{x,d}^{+}\ \det[x\cdot\mathbf{I}_{d-|S|}-\widehat{\mathbf{A}}(S^C)],\end{aligned}$$

其中 (a) 由 (17) 得出。考察 $\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]>0$，我们得出结论。

□

注 2.3. 考虑 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个秩为d 的矩阵的情形。利用 (20)，我们可以证明问题 1.1 与问题 1.2 之间的联系。具体而言，我们定义 $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^\dagger)^{\mathrm{T}}$。于是，我们有 $\widehat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$。由于对于每个 $S \subset [d]$，多项式 $p_S(x)$ 恰有 $d - |S|$ 个正根，等式 (20) 表明

$$\operatorname{maxroot}\ p_S(x) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\widehat{\mathbf{A}}(S^C))} = \frac{1}{\sigma^2_{\min}(\mathbf{B}_{S^C})}. \tag{25}$$

结合等式 (8)，我们可以看出，最小化残差 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^\dagger\mathbf{A}\|_2^2$这一任务等价于最大化 $\sigma_{\min}(\mathbf{B}(S^C))$，其中 S 遍历所有 k-子集 $[d]$。因此，当 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = d$时，通过选择 $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^\dagger)^{\mathrm{T}}$ and$l = d - k$，问题 1.1 可以转化为问题 1.2。值得一提的是，在一般情况下，当矩阵 A 不具有满列秩时，可能无法找到一个矩阵 A，使其对每个子集 S都满足等式 (20)。因此，当 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < d$时，我们无法依靠此前关于受限可逆性的结果来得到定理 1.1 中所述的界 (1)。

2.5 实根性、交错与实稳定性

这里我们介绍共同交错的定义。

定义 2.1。设 $f(x) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{d-1}(x - a_i)$ 和 $p(x) = b_0 \cdot \prod_{i=1}^{d}(x - b_i)$ 是两个实根多项式。若 $f(x)$ 交错于 $p(x)$，则称

$$b_1 \le a_1 \le b_2 \le a_2 \le \cdots \le a_{d-1} \le b_d.$$

我们称实根多项式 $p_1(x) \ldots, p_m(x)$ 具有共同交错，如果存在一个多项式 $f(x)$，使得对每个 $i \in [m]$， $f(x)$ 都与 $p_i(x)$ 交错。

根据定义 2.1，要证明多项式 $p_1(x) \ldots, p_m(x)$ 具有共同交错，只需证明其中任意两个都具有共同交错。根据 Fell 的结果 [21,定理 2],，这等价于证明多项式 $\mu \cdot p_i(x) + (1-\mu) \cdot p_j(x)$ 对任意 $i, j \in [m]$ 以及任意 $\mu \in [0, 1]$ 都是实根多项式。

以下引理给出了一个充分条件，在该条件下，一组多项式具有共同交错。

引理 2.3. [32, 断言 2.9] 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是一个对称矩阵，并设 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$是 $\mathbb{R}^d$中的向量。那么多项式

$$p_i(x) = \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A} + \mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}], \quad i = 1, \ldots, m$$

具有共同交错。

Marcus-Spielman-Srivastava 证明，当一组多项式具有共同交错时，其中一个多项式的最大根不超过该组所有多项式之和的最大根：

引理 2.4. [30, 引理 4.2] 假设 $p_1(x) \ldots, p_m(x)$ 是次数相同且首项系数为正的实根多项式。若 $p_1(x) \ldots, p_m(x)$ 具有共同交错，则存在一个整数 $i \in [m]$ 使得

$$\operatorname{maxroot}\ p_i(x) \le \operatorname{maxroot} \sum_{i=1}^{m} p_i(x).$$

定理1.1 的证明及确定性多项式时间算法

3.1 交错多项式方法：定理1.3的证明

设 $A = [a_1, \ldots, a_d]$ 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个矩阵。对于每个子集 $S \subset [d]$，我们用 Q_S 表示 Ran(A_S) ≡ 张成空间 $\{a_i, i \in S\}$ 的正交补的投影矩阵，即 $Q_S := I_n - A_S A_S^{\dagger}$。由于 Q_S 是投影矩阵，因此有 $Q_S = Q_S^{\mathrm{T}} = Q_S^2$。对于每个子集 $S \subset [d]$，我们定义次数为 d 的多项式

$$p_S(x) := \det[x \cdot \mathbf{I}_d - (\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A})] = \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]. \tag{26}$$

由于 $A^{\mathrm{T}}Q_SA$ 是一个对称半正定矩阵，因此对于每个 $S \subset [d]$，多项式 $p_S(x)$ 都属于 $\mathbb{P}^+(d)$。一个简单的观察是：

$$\text{maxroot } p_S(x) = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2.$$

注意到对于每个 $a_j \in \text{span}\{a_i : i \in S\}$，$Q_Sa_j = 0_n$，我们有 rank($Q_SA$) = rank(A) − rank($A_S$)，这意味着多项式 $p_S(x)$ 恰有 rank(A) − rank(A_S) 个正根。特别地，如果 $S = \emptyset$，那么 $p_S(x) = \det[x \cdot I_d - A^{\mathrm{T}}A]$。如果 rank($A_S$) = rank(A)，其中 S 是 $[d]$ 的一个子集，那么 $p_S(x) = x^d$。

为证明定理 1.3，我们引入一些引理。第一个引理表明，多项式 $(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)\ p_S(x)$ 是所有 $i \notin S$ 对应的多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)$ 的加权和，且系数非负。

引理 3 .1. 设 $A = [a_1, \ldots, a_d]$ 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个矩阵。对于每个子集 $S \subset [d]$，我们有 e

$$\sum_{i\notin S} \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x) = (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)\ p_S(x),$$

其中 $Q_S = I_n - A_SA_S^{\dagger}$，且 $p_S(x) = \det[x \cdot I_d - A^{\mathrm{T}}Q_SA]$。

证明。由于 Q_S 是由 $\{a_j, j \in S\}^{\perp}$ 张成空间的投影矩阵，只需证明 t

$$\sum_{i:\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|>0} \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x) = (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)\ p_S(x). \tag{27}$$

当 $\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\| > 0$，即 $\mathbf{a}_i \notin$ 张成空间$\{a_j,\ j \in S\}$，引理 2.1 蕴含

$$\mathbf{Q}_{S\cup\{i\}} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{S\cup\{i\}}\mathbf{A}_{S\cup\{i\}}^{\dagger} = \mathbf{I}_n - \left(\mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger} + \frac{\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S}{\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2}\right) = \mathbf{Q}_S - \frac{\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S}{\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2}.$$

因此，我们可以将$p_{S\cup\{i\}}(x)$写为

$$p_{S\cup\{i\}}(x) = \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{S\cup\{i\}}\mathbf{A}] = \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S}{\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2}\mathbf{A}]. \tag{28}$$

我们声称，对于任意矩阵 $B = [b_1, \ldots, b_d] \in \mathbb{R}^{n\times d}$，

$$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}] = \sum_{i:\|\mathbf{b}_i\|>0} \|\mathbf{b}_i\|^2 \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{b}_i\|^2})\mathbf{B}]. \tag{29}$$

由于 $\mathbf{Q}_S = \mathbf{Q}_S^2 = \mathbf{Q}_S^{\mathrm{T}}$，我们有 $(\mathbf{Q}_S\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}$。在 (29) 中取 $\mathbf{B} = \mathbf{Q}_S\mathbf{A} = [\mathbf{Q}_S\mathbf{a}1, \ldots, \mathbf{Q}_S\mathbf{a}_d]$，可得

$$
\begin{aligned}
(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}] &= \sum_{i:\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|>0} \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S}{\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2}\mathbf{A}] \\
&= \sum_{i:\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|>0} \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x).
\end{aligned}
$$

由于 $p_S(x) = $行列式$[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]$,，我们得到（27）。

还需证明（29）。根据莱布尼茨公式，对于每个多仿射多项式 $f(z_1, \ldots, z_d)$，有如下代数恒等式：

$$
(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \cdot f(x, \ldots, x) = \sum_{i=1}^{d} (z_i^2 \cdot \partial_{z_i} - z_i) \cdot f(z_1, \ldots, z_d) \Big|_{z_i=x, \forall i}.
$$

将 $f(z_1, \ldots, z_d) =$行列式$[\mathbf{Z} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}]$ 替换为 $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_d)$ 代入上述恒等式，可得

$$
\begin{aligned}
(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}] &= \sum_{i=1}^{d} (z_i^2 \cdot \partial_{z_i} - z_i) \cdot \det[\mathbf{Z} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}] \Big|_{z_i=x, \forall i} \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{d} \|\mathbf{b}_i\|^2 \cdot \det[\mathbf{Z} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_n - \mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\dagger})\mathbf{B}] \Big|_{z_i=x, \forall i} \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{i:\|\mathbf{b}_i\|>0} \|\mathbf{b}_i\|^2 \cdot \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{b}_i\|^2})\mathbf{B}],
\end{aligned}
$$

其中，（a）由命题 2.2 (i) 得出，（b）则由以下事实得出：$\mathbf{b}^{\dagger} = \frac{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{b}\|^2}$ 对任意非零向量 $\mathbf{b}$均成立。因此我们得到（29）。 □

接下来，我们将运用交错多项式方法证明以下引理。

引理 3.2。设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d]$ 是 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的一个矩阵，并设 $S \subset [d]$ 使得集合$R := \{i : \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\| > 0\}$ 非空。对于任意非负整数 $l \le \mathrm{rank}(\mathbf{A}) - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) - 1$，存在一个整数 $j \in R$，使得

$$
\mathrm{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^l \cdot p_{S\cup\{j\}}(x) \le \mathrm{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^{l+1} \cdot p_S(x).
$$

证明。我们令

$$
g_{S\cup\{i\}}^{(l)}(x) := (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^l \cdot \Big(\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x)\Big) = (-1)^l \cdot \mathcal{R}_{x,d}^{+} \cdot \partial_x^l \cdot \mathcal{R}_{x,d}^{+} \cdot \Big(\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x)\Big), \tag{30}
$$

其中 $i \in R$和 $l \in [0, \mathrm{rank}(\mathbf{A}) - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) - 1] \cap \mathbb{Z}$。一个简单的观察是，对于 $i \in R$，$\mathrm{rank}(\mathbf{Q}^{S\cup\{i\}}\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) - 1$，因此多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)$ 恰有 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) - 1$个非零根。根据命题 2.1 中的 (iii)，对于每个$l \le \mathrm{rank}(\mathbf{A}) - \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S) - 1$ 和每个 $i \in R$，多项式 $g_{S\cup\{i\}}^{(l)}(x)$ 都属于 $\mathbb{P}^{+}(d)$。

对于任意非负整数 $l \leq \text{rank}(\mathbf{A}) - \text{rank}(\mathbf{A}_S) - 1$，我们声称多项式$\{g^{(l)}_{S\cup\{i\}}(x)$ 具有共同交错。然后，根据引理 2.4，存在一个整数 $j \in R$使得

$$\text{maxroot } g^{(l)}_{S\cup\{j\}}(x) \leq \text{maxroot } \sum_{i\in R} g^{(l)}_{S\cup\{i\}}(x). \tag{31}$$

根据（30），我们有

$$\text{maxroot } g^{(l)}_{S\cup\{j\}}(x) = \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^l \cdot p_{S\cup\{j\}}(x) \tag{32}$$

and

$$\sum_{i\in R} g^{(l)}_{S\cup\{i\}}(x) = (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^l \sum_{i\in R} \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x) = (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{l+1}\ p_S(x), \tag{33}$$

其中最后一个等式由引理3.1得出。因此，结合（31）、（32）和（33），我们得到

$$\text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^l \cdot p_{S\cup\{j\}}(x) \leq \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{l+1} \cdot p_S(x).$$

还需证明，对于任意非负整数 $l \leq \text{rank}(\mathbf{A})-\text{rank}(\mathbf{A}_S)-1$，多项式$\{g^{(l)}_{S\cup\{i\}}(x)\colon\ i\in R\}$ 具有共同交错。根据（28），我们得到

$$p_{S\cup\{i\}}(x) = \det[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A} + \frac{1}{\|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2}\cdot(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i)(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i)^{\mathrm{T}}], \quad \forall\ i\in R.$$

于是引理 2.3 表明，多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)$ 对于 $i\in R$ 具有共同交错。注意，对于每个 $i\in R$，多项式 $g^{(0)}_{S\cup\{i\}}(x)$ 和$p_{S\cup\{i\}}(x)$ 的根相同，因此多项式$g^{(0)}_{S\cup\{i\}}(x)$ 对于 $i\in R$ 具有共同交错。注意，算子 ∂_x 和 $\mathcal{R}^+_x$，d 对于具有相同非零根数的次数为 d 的实根多项式，均保持交错性。因此，对于每个正整数 $l \leq \text{rank(A)} - \text{rank(A}_S) - 1$，多项式 $g^{(l)}_{S\cup\{i\}}(x)$ 对于 $i\in R$ 具有共同交错。

□

我们已经具备证明定理 1.3所需的全部材料。

定理 *1.3*的证明。我们从 $S=\emptyset$ 开始。注意，$p_\emptyset(x) = $行列式$[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$。由引理 3.2，存在一个 $i_1\in[d]$，使得 $\|\mathbf{a}_{i_1}\|>0$ 且

$$\text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{k-1}\cdot p_{\{i_1\}}(x) \leq \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k \cdot \det[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]. \tag{34}$$

现在我们令 $S=\{i_1\}$。再次使用引理 3.2，我们得到存在一个 $i_2\in[d]\backslash\{i_1\}$，使得 $\|\mathbf{Q}^{\{i_1\}}\mathbf{a}_{i_2}\|>0$ 且

$$\text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{k-2}\cdot p_{\{i_1,i_2\}}(x) \leq \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{k-1}\cdot p_{\{i_1\}}(x). \tag{35}$$

结合（34）和（35，我们得到

$$\begin{aligned}\text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{k-2}\cdot p_{\{i_1,i_2\}}(x) &\leq \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^{k-1}\ p_{\{i_1\}}(x)\\ &\leq \text{maxroot } (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\ \det[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}].\end{aligned}$$

接着我们令 $S = \{i_1, i_2\}$。重复相同的论证 $k-2$ 次后，可以得到一个k子集 $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [d]$，使得秩$(\mathbf{A}_S) = k$，并且

$$\text{maxroot}\, p_S(x) \le \text{maxroot}\, (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)\, p_{\{i_1,\ldots,i_{k-1}\}}(x) \le \cdots \le \text{maxroot}\, (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\, \det[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}].$$

□

3.2 估计期望多项式的最大根。

借助定理 1.3，为了完成定理 1.1的证明，我们还需要估计多项式 $(x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k$ 行列式$[x\cdot\mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$的最大根。本小节的主要结果是下面的定理，它给出了多项式 $(x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\ p(x)$ 的最大根上界，其中多项式 $p(x) \in \mathbb{P}^+(d)$。我们将在本小节末尾给出其证明。

定理 3.1。假设 $p(x) = x^{d-t}\prod_{i=1}^t (x-\lambda_i)$ 是一个次数为 d 的实根多项式，其中 $t \le d$ 是正整数，且 λ_1、……、λ_t 是满足 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_t > 0$ 和 $\lambda_1 > \lambda_t$ 的正数。令 $\alpha := t/\sum_{i=1}^t \lambda_i^{-1}$，且 $\beta := \frac{\lambda_t^{-1}-\alpha^{-1}}{\lambda_t^{-1}-\lambda_1^{-1}} \le 1$。那么，对于每个满足$\beta\cdot t \le k < t$的整数 k，我们有

$$\text{maxroot}\, (x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\ p(x) \le \frac{\lambda_1}{1 + (\frac{\lambda_1}{\alpha} - 1)\cdot\left(\sqrt{\frac{k}{t}} - \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}\cdot(1-\frac{k}{t})}\right)^2}. \tag{36}$$

注 3.1. 当 k 从 $\beta\cdot t$ 增加到 t 时，(36) 中的上界从 λ_1 减小到 α。定理 3.1 要求 $p(x)$ 至少有两个不同的非零根，即 $\lambda_1 > \lambda_t$。对于 $\lambda_1 = \lambda_t = \lambda > 0$ 的情形，我们可以将 $p(x)$ 写成 $p(x) = x^{d-t}\cdot(x-\lambda)^t$ 的形式。然后我们使用 (12) 得到

$$(x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\ p(x) = \frac{t!}{(t-k)!}\cdot\lambda^k\cdot x^{d+k-t}\cdot(x-\lambda)^{t-k}, \quad \forall\ k \le t, \tag{37}$$

这意味着对于每个 $k < t$，λ 总是 $(x^2\cdot\partial_x - d\cdot x)^k\ p(x)$ 的最大根。

为证明定理 3.1，我们需要以下引理，它说明对单变量多项式求导后，其最大根如何变化。引理 3.3 是使用 Batson-Spielman-Srivastava 在 [6] 中引入的障碍方法证明的。有关障碍方法及其应用的更多细节，请参阅 [32, 33, 11, 37, 12, 39, 14, 45]。

引理 3.3。[37, 定理 4。2] 假设 $p(x) = \prod_{i=1}^t (x-\lambda_i)$ 是一个次数为 t 的实根多项式，其中 $\lambda_i \in [0,1]$ 对每个 $i \in [t]$ 均成立。设 $\gamma = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^t \lambda_i$。那么，对每个 $k \ge \gamma\cdot t$，

$$\text{maxroot}\, \partial_x^k\ p(x) \le \left(\sqrt{\gamma\cdot\frac{k}{t}} + \sqrt{(1-\gamma)\cdot\left(1-\frac{k}{t}\right)}\right)^2.$$

现在我们可以给出定理 3.1 的证明。

定理 *3.1* 的证明。我们定义多项式

$$q(x) := \mathcal{R}^{+}_{x,d}\, p(x) \quad \text{and} \quad h(x) := q\Big(\lambda_t^{-1} - (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cdot x\Big) = \lambda_1 \cdots \lambda_t \cdot (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1})^t \cdot \prod_{i=1}^{t} (x - b_i),$$

其中，对于每个 $i \in [t]$，$b_i := \frac{\lambda_t^{-1} - \lambda_i^{-1}}{\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}} \in [0,1]$。根据微分链式法则，我们有

$$\text{minroot}\ \partial_x^k\ q(x) = \lambda_t^{-1} - (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cdot \text{maxroot}\ \partial_x^k\ h(x). \tag{38}$$

结合（38）和命题2.1 (iii)，对于每个 $k < t$，我们有

$$\text{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x) = \frac{1}{\text{minroot}\ \partial_x^k\ q(x)} = \frac{1}{\lambda_t^{-1} - (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cdot \text{maxroot}\ \partial_x^k\ h(x)}. \tag{39}$$

注意，$h(x)$ 的所有根都介于 0 和 1 之间。结合（39）和引理3.3，对于每个$k \geq \sum_{i=1}^{t} b_i = \beta \cdot t$，我们有

$$\begin{aligned}
\text{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ p(x) &\leq \frac{1}{\lambda_t^{-1} - (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cdot \left(\sqrt{\beta \cdot \frac{k}{t}} + \sqrt{(1-\beta) \cdot (1 - \frac{k}{t})}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\lambda_1^{-1} + (\lambda_t^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cdot \left(\sqrt{(1-\beta) \cdot \frac{k}{t}} - \sqrt{\beta \cdot (1 - \frac{k}{t})}\right)^2} \\
&= \frac{\lambda_1}{1 + (\frac{\lambda_1}{\alpha} - 1) \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{t}} - \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta} \cdot (1 - \frac{k}{t})}\right)^2}.
\end{aligned}$$

□

3.3 定理1.1的证明

定理1.1 的证明将在本小节中给出。

定理*1.1*的证明。对于每个子集 $S \subset [d]$，我们按照（d 26 p_S）定义次数为x的多项式（26）。根据定理1.3，存在一个大小为 $S \subset [d]$ 的子集 k，使得 $\text{rank}(\mathbf{A}_S) = k$ 并且

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_S^{\dagger} \mathbf{A}\|_2^2 = \text{maxroot}\ p_S(x) \leq \text{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}]. \tag{40}$$

根据定理 3.1，对于每个满足 k 条件 $\beta \cdot t \leq k < t$，我们有

$$\text{maxroot}\ (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k\ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}] \leq \frac{\lambda_1}{1 + (\frac{\lambda_1}{\alpha} - 1) \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{t}} - \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta} \cdot (1 - \frac{k}{t})}\right)^2}. \tag{41}$$

将 (41) 与 (40) 结合，并注意到 $\lambda_1 = \|\mathbf{A}\|_2^2$，即可得出结论。

□

在本小节余下部分，我们给出两个有用的公式，即 (42) 和 (43)。具体而言，(43) 揭示了常数 α 的重要性，该常数在定理 1.1 中引入。为方便起见，给定一个矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 和一个正整数 $k \leq \mathrm{rank}(\mathbf{A})$，我们将 $c_k(\mathbf{A})$ 定义为

$$c_k(\mathbf{A}) := \sum_{S\subset[d],|S|=k} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S].$$

一个简单的观察是，对于每个 $k \leq$rank(A)， c_k(A) 都是正的。

命题 3.1。设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是秩为 $t \leq \min\{n, d\}$ 的矩阵。那么，对于每个 $k \leq t$，我们有

$$k! \sum_{S\subset[d],|S|=k} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot p_S(x) = (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]. \tag{42}$$

此外，令 $\alpha := t/\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^{-1}$，其中 λ_1、……、λ_t 是 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 的正特征值，我们有

$$\alpha = \sum_{S\subset[d],|S|=t-1} \frac{\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]}{c_{t-1}(\mathbf{A})} \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2. \tag{43}$$

证明。 我们首先对 k 采用归纳法证明 (42)。当 $k = 1$ 时，取 3.1，由引理 $S = \emptyset$ 可立即得到 (42)。假设 ($i \leq k-1$ 对每个整数都成立。于是，由归纳法可得

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] &= (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x) \cdot (k-1)! \cdot \sum_{S\subset[d],|S|=k-1} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot p_S(x) \\ &= (k-1)! \cdot \sum_{S\subset[d],|S|=k-1} \sum_{i\notin S} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 \cdot p_{S\cup\{i\}}(x),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 3.1 得出。对于每个 $S \subset [d]$ 和每个 $i \notin S$，应用引理2.2，取 $\mathbf{B} = \mathbf{A}_S$，以及 $\mathbf{C} = \mathbf{a}_i$，我们得到 $\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot \|\mathbf{Q}_S\mathbf{a}_i\|^2 = \det[\mathbf{A}_{S\cup\{i\}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{S\cup\{i\}}]$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] &= (k-1)! \cdot \sum_{S\subset[d],|S|=k-1} \sum_{i\notin S} \det[\mathbf{A}_{S\cup\{i\}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{S\cup\{i\}}] \cdot p_{S\cup\{i\}}(x) \\ &= k! \sum_{R\subset[d],|R|=k} \det[\mathbf{A}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_R] \cdot p_R(x).\end{aligned}$$

至此，式（42）的证明完成。

仍需证明 (43)。对于 $k = t-1$ 的情形，我们使用 (42)。如果 S 是 $[d]$的一个 $(t-1)$-子集，且 rank(A_S) $< t-1$，那么有 $\det[\mathrm{A}_S^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_S] = 0$，这意味着 $\det[\mathrm{A}_S^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_S] \cdot p_S(x) \equiv 0$；否则，有 $\det[\mathrm{A}_S^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_S] > 0$，并且多项式 p_S(x) 只有一个正根，恰好是 $\|\mathrm{A} - \mathrm{A}_S\mathrm{A}_S^{\dagger}\mathrm{A}\|_2^2$。因此，(42) 的左侧可表示如下：

$$(t-1)! \sum_{S\subset[d],|S|=t-1} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot p_S(x) = (t-1)! \cdot \sum_{\substack{S\subset[d],|S|=t-1,\\ \mathrm{rank}(\mathbf{A}_S)=t-1}} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot x^{d-1} \cdot \left(x - \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_2^2\right). \tag{44}$$

此外，利用 (12)，我们可以将 (42) 的右侧改写为

$$(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^{t-1} \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] = t! \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_t \cdot x^{d-1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (x - \alpha). \tag{45}$$

比较 42、44 和 45，我们得到 43。

□

注释 3.2. 根据 (42)，多项式 $\frac{1}{k \cdot c_k}! (\mathbf{A}) \cdot (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]$ 是关于 $[d]$ 的 k-子集上的体积抽样分布下，多项式 $p_S(x)$ 的期望。此外，等式 (42) 还意味着 $(k+1) \cdot c_{k+1}(\mathbf{A})/c_k(\mathbf{A})$ 是关于 $[d]$ 的 k-子集上的体积抽样分布下 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}^2$ 的期望，即

$$\sum_{S \subset [d], |S|=k} \frac{\det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S]}{c_k(\mathbf{A})} \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}^2 = \frac{(k+1) \cdot c_{k+1}(\mathbf{A})}{c_k(\mathbf{A})}. \tag{46}$$

具体地，对每个 (12)，利用 $k \le t$，我们可以将 (42) 的右边改写为

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^k \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}] &= (-1)^k \cdot \mathcal{R}_{x,d}^{+} \cdot \partial_x^k \cdot \mathcal{R}_{x,d}^{+} \left(x^{d-t} \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i) \right) \\ &= \sum_{i=k}^{t} \frac{(-1)^{i-k} \cdot i!}{(i-k)!} \cdot x^{d-i+k} \cdot \sum_{S \subset [t], |S|=i} \prod_{j \in S} \lambda_j.\end{aligned}$$

然后，比较 x^d 和 x^{d-1} 在 (42)$k < t$ 两边的系数可得，对于每个

$$c_k(\mathbf{A}) = \sum_{S \subset [t], |S|=k} \prod_{j \in S} \lambda_j$$

and

$$\sum_{S \subset [d], |S|=k} \det[\mathbf{A}_S^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_S] \cdot \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}^2 = (k+1) \sum_{S \subset [t], |S|=k+1} \prod_{j \in S} \lambda_j = (k+1) \cdot c_{k+1}(\mathbf{A}),$$

这立即推出公式 (46)。这里，我们利用了以下事实： $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_S\mathbf{A}_S^{\dagger}\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}^2$ 等于 迹$[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]$，它是 $p_S(x)$ 中 x^{d-1} 的系数的绝对值。公式 (46) 恢复了 [19, 等式 (3.4)]，中找到的第一个等式，该等式在他们以弗罗贝尼乌斯范数为例分析问题 1.1 时发挥了重要作用。

3.4 确定性多项式时间算法及定理 1.2 的证明

为方便起见，在本小节中，我们用 $\lambda_{\max}^{\varepsilon}(p) \in \mathbb{R}$ 表示实根多项式 $p(x)$ 的最大根的 ε-近似，即，

$$|\lambda_{\max}^{\varepsilon}(p) - \text{maxroot } p| \le \varepsilon. \tag{47}$$

回顾一下，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 是一个秩为 t 的矩阵，并令 $k \in [\beta \cdot t, t)$ 为抽样参数，其中β 在定理 1.1中定义。为简化记号，我们定义次数为d 的多项式 $\widehat{p}_S(x)$，对每个子集 $S \subset [d]$ 定义如下：

$$\widehat{p}_S(x) := (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^{k-|S|} \ p_S(x) = (x^2 \cdot \partial_x - d \cdot x)^{k-|S|} \ \det[x \cdot \mathbf{I}_d - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_S\mathbf{A}]. \tag{48}$$

基于定理 1.3的证明，我们提出一种贪心算法，以迭代方式从矩阵 $\mathbf{A}$ 中选取列。假设我们在第（ $S \subset [d]$ ）$l-1$次迭代中确定了一个子集。那么，在第 l次迭代中，我们的算法将确定一个索引 $i \in [d] \backslash S$，使 $\widehat{p}_{S \cup i}(x)$ 的最大根最小。这可以通过对每个 ε，计算 $\widehat{p}_{S \cup i}(x)$ 的最大根的近似值来实现。我们的确定性贪心选择算法见算法 1。为缩短运行时间，我们在每次迭代时存储矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_S \mathbf{A}$ ，并使用秩一更新公式计算 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}^{S \cup\{i\}} \mathbf{A}$，即:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{S \cup\{i\}} \mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_S-\frac{\mathbf{Q}_S \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_S}{\left\|\mathbf{Q}_S \mathbf{a}_i\right\|^2}\right) \mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_S \mathbf{A}-\frac{\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_S \mathbf{a}_i\right)\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_S \mathbf{a}_i\right)^{\mathrm{T}}}{\left\|\mathbf{Q}_S \mathbf{a}_i\right\|^2}.$$

此外，为了降低计算 $p_{S \cup\{i\}}(x)$ 的时间复杂度，当 $d \geq n$ 时，我们使用 $n \times n$矩阵 $\mathrm{Q}^{S \cup\{i\}} \mathrm{AA}^{\mathrm{T}}$ ，并通过以下公式计算 $p_{S \cup\{i\}}(x)$:

$$p_{S \cup\{i\}}(x)=\det\left[x \cdot \mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{S \cup\{i\}} \mathbf{A}\right]=x^{d-n} \cdot \det\left[x \cdot \mathbf{I}_n-\mathbf{Q}_{S \cup\{i\}} \mathbf{A} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right].$$

下面我们给出定理1.2的证明，说明算法1 能够达到定理1.1 中的界，误差不超过一定的计算误差。

定理*1.2*的证明。我们先证明（5）。在第 l次迭代时，令

$$i_l:=\underset{i:\left\|\mathbf{Q} \mathbf{a}_i\right\| \neq 0}{\operatorname{argmin}} \operatorname{maxroot} \widehat{p}_{S \cup\{i\}}(x).$$

然后，根据我们在算法 j_l 第 14 行中的选择1，可得

$$\operatorname{maxroot} \widehat{p}_{S \cup\{j_l\}} \overset{(a)}{\leq} \lambda_{\max }^{\varepsilon}\left(\widehat{p}_{S \cup\{j_l\}}\right)+\varepsilon \leq \lambda_{\max }^{\varepsilon}\left(\widehat{p}_{S \cup\{i_l\}}\right)+\varepsilon \overset{(b)}{\leq} \operatorname{maxroot} \widehat{p}_{S \cup\{i_l\}}+2 \varepsilon \overset{(c)}{\leq} \operatorname{maxroot} \widehat{p}_S+2 \varepsilon, \tag{49}$$

其中，(a) 和 (b) 由（47）得出，而 (c) 由引理3.2得出。通过对$l=1$，2，……，k反复使用（49），可得

$$\operatorname{maxroot} p_{\{j_1, \ldots, j_k\}}(x) \leq 2 k \varepsilon+\operatorname{maxroot}\left(x^2 \cdot \partial_x-d \cdot x\right)^k \det\left[x \cdot \mathbf{I}_d-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\right]. \tag{50}$$

结合（50）、（8）和定理3.1，即可得到（5）。

接下来，我们将 分析算法1 的时间复杂度，并将证明分为两种情况 .

- 情况 1: $d<n$。我们需要计算算法1第 1 行中的矩阵 B^T A，时间复杂度为1，其时间复杂度为 $O(nd^2)$。我们声称，在每次$\lambda^{\varepsilon}{ }_{\max }\left(\widehat{p}_{S \cup\{i\}}\right)$ $i \in [d] \setminus S$迭代中，计算所有 $O(dn^2+d^{w+1}$ $\log (d \vee \varepsilon^{-1}))$ 的时间复杂度为。于是，由于 $d<n$，算法1 的总运行时间为

$$O(nd^2)+O(k(dn^2+d^{w+1} \log (d \vee \varepsilon^{-1})))=O(kdn^2+kd^{w+1} \log (d \vee \varepsilon^{-1})).$$

接下来需要证明，每次迭代的时间复杂度为 $O(dn^2+d^{w+1} \log (d \vee \varepsilon^{-1}))$。在第 l 次迭代中，给定一个整数 $i \in [d] \setminus S$，我们需要 $O(n^2)$ 的时间来计算算法 1 第 3 行中的 Qa_i 和 $\mathrm{Q}_{S \cup i}$ 。得到 Qa_i后，我们可以在 $O(nd)$的时间内计算 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{Qa}_i$ ，并在 $O(d^2)$ 的时间内计算 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}^{S \cup\{i\}} \mathrm{A}$。随后，计算算法 1 [29, 13] 第 6 行中 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}^{S \cup\{i\}} \mathrm{A}$ 的特征多项式需要 $O(d^w \log d)$ 的时间。利用 (12)，时间

算法 1 列子集选择的确定性贪心算法

输入：秩为 t 的 $=[\mathrm{a}_1,\ldots,\mathrm{a}_d]\in\mathbb{R}^{n\times d}$；抽样参数 $k\in[\beta\cdot t,t)$；$\varepsilon>$ $0.$

输出：一个子集 $S\subset[d]$，其基数为 k，且满足（5）中的界。1：令 $S=\emptyset$。令 $\mathrm{Q}=\mathrm{I}_n$，并在 $d<n$ $\mathrm{QAA}^{\mathrm{T}}$ 时令 $\mathrm{B}=\begin{cases}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{QA}\text{。}2\text{：对于 }l=1,2,\ldots,k,\end{cases}$

执行以下操作。3：计算 $\mathrm{Qa}_i\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ 和 $\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}=\mathrm{Q}-\mathrm{Qa}_{i\cdot}{}_i{}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Qa})\,\mathrm{Qa}_i\|^2\in\mathbb{R}^{n\times n}$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。4：如果 $d<n$，则 5：计算 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Qa}_i\in\mathbb{R}^{d\times 1}$ 和 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{A}=\mathrm{B}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Qa}_{i\cdot}{}^{\mathrm{T}}{}_i{}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\,\mathrm{Qa})\,\mathrm{Qa}_i\|^2\in\mathbb{R}^{d\times d}$，对每个$i\in[d]\backslash S$ 均如此。6：计算多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)=\det[x\cdot\mathrm{I}_d-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{A}]$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。7：否则 8：计算 $\mathrm{a}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}-\mathrm{Qa}_i\cdot\mathrm{a}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\|\mathrm{Qa}_i\|^2\in\mathbb{R}^{n\times n}$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。9：计算特征多项式 $\det[x\cdot\mathrm{I}_n-\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}]$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。10：计算多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)=\det[x\cdot\mathrm{I}_d-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{A}]$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。11：结束条件判断。12：计算多项式 $\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)=(x^2\cdot\partial_x-d\cdot x)^{k-l}\,p_{S\cup\{i\}}(x)$，对每个 $i\in[d]\backslash S$ 均如此。13：使用斯图姆序列进行二分搜索的标准方法，计算每个 $i\in[d]\backslash S$ 对应的 $\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)$ 的最大根的 ε-近似值 $\lambda^{\varepsilon}_{\max}(\widehat{p}_{S\cup\{i\}})$。14：求出

$$j_l=\operatorname*{argmin}_{i\in[d]\backslash S}\lambda^{\varepsilon}_{\max}(\widehat{p}_{S\cup\{i\}}).$$

15: 设置 $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}^{S\cup\{j_l\}}$ 并令 $\mathrm{B}=\begin{cases}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}^{S\cup\{j_l\}}\mathrm{A}\text{ if }d<n\ \mathrm{Q}\end{cases}$

$^{S\cup\{j_l\}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}$ if $d\geq n$.16: $S\leftarrow S\cup\{j_l\}$.17: 结束循环18: 返回 $S=\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$。

计算多项式 $\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)$ 系数的复杂度为 $O(1)$。注意，$\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)$ 至多有 d 个非零根，因此，求得其最大根的 ε-近似的时间复杂度为 $O(d^2\log\varepsilon^{-1})$（见 [32, 第 4 节1]）。回想一下，$d<n$，因此，对于每个$i\in[d]\backslash S$，求得 $\lambda^{\varepsilon}_{\max}(\widehat{p}_{S\cup\{i\}})$ 的时间复杂度为

$$O(n^2)+O(nd)+O(d^2)+O(d^w\log d)+O(1)+O(d^2\log\varepsilon^{-1})=O(n^2+d^w\log(d\vee\varepsilon^{-1})).$$

因此，每次迭代的总运行时间为 $O(dn^2+d^{w+1}\log(d\vee\varepsilon^{-1}))$。

- 情况 2：$d\geq n$。在这种情况下，在第 1 行计算矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的时间复杂度为 $O(dn^2)$。我们声称，每次迭代计算所有 $\lambda^{\varepsilon}_{\max}(\widehat{p}_{S\cup\{i\}})$ $i\in[d]\setminus S$、的时间复杂度为 $O(dn^w\log(n\vee\varepsilon^{-1}))$。于是，由于 $d\geq n$，算法1 的总运行时间为

$$O(dn^2)+O(kdn^w\log(n\vee\varepsilon^{-1}))=O(kdn^w\log(n\vee\varepsilon^{-1})).$$

接下来需要证明每次迭代的时间复杂度为 $O(dn^w\log(n\vee\varepsilon^{-1}))$。首先，我们

需要 $O(n^2)$ 的时间来计算算法 1 第 3 行和第 8 行中的矩阵 Qa_i、$\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}$、$\mathrm{a}_i^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ 和 $\mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}$。接下来，我们需要 $O(n^w \log n)$ 的时间来计算第 9 行中的特征多项式 $\det[x \cdot \mathrm{I}_n - \mathrm{Q}^{S\cup\{i\}}\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}]$。然后，计算多项式 $p_{S\cup\{i\}}(x)$ 和 $\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)$ 需要 $O(1)$ 的时间。对于 $d \geq n$，多项式 $\widehat{p}_{S\cup\{i\}}(x)$ 至多有 n 个非零根。求得其最大根的一个 ε-近似的时间复杂度为 $O(n^2 \log \varepsilon^{-1})$。综合以上各项，对于每个 $i \in [d]\backslash S$，求得 $\lambda_{\max}^{\varepsilon}(\widehat{p}_{S\cup\{i\}})$ 的时间复杂度为 $O(n^2) + O(n^w \log n) + O(1) + O(n^2 \log \frac{1}{\varepsilon}) = O(n^w \log(n \vee \varepsilon^{-1}))$。因此，每次迭代的总运行时间为 $O(dn^w \log(n \vee \varepsilon^{-1}))$。

□

参考文献

[1] Anderson, J.《状态在 C^*-代数上的扩张、限制与表示》。美国数学会汇刊 249，第 2 期（1979）：303-329。[2] Anderson, J.《$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上正线性映射集合中的极端点》。《泛函分析杂志》31，第 2 期（1979）：195-217。[3] Anderson, J.《关于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的纯态的一个猜想及相关定理》。载于《现代算子理论专题：第五届算子理论国际会议》，罗马尼亚蒂米什瓦拉和赫库兰，1980年6月2日至12日，第27-43页。巴塞尔：Birkhäuser Basel，1981年。[4] Anderson, D., S. Du, M. Mahoney, C. Melgaard, K. Wu, and M. Gu.《改进 CUR 矩阵分解及 $Nyström$ 方法的谱隙误差界》。载于《人工智能与统计》（2015），第19-27页。PMLR。[5] Balzano, L., B. Recht, and R. Nowak.《数据缺失时的高维匹配子空间检测》。载于《2010年IEEE国际信息论研讨会》（2010），第1638-1642页。[6] Batson, J., D. A. Spielman, and N. Srivastava.《双重拉马努金稀疏化器》。《SIAM计算杂志》41，第6期（2012）：1704-1721。[7] Belhadji, A., R. Bardenet, and P. Chainais.《用于列子集选择的行列式点过程》。《机器学习研究杂志》21，第1期（2020）：8083-8144。[8] Boutsidis, C., P. Drineas, and M. Magdon-Ismail.《近乎最优的基于列的矩阵重构》。《SIAM计算杂志》43，第2期（2014）：687-717。[9] Boutsidis, C., M. W. Mahoney, and P. Drineas.《列子集选择问题的改进近似算法》。载于《第二十届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》（2019），第968-977页。工业与应用数学学会。[10] Bourgain, J. and L. Tzafriri.《矩阵的受限可逆性及其应用》。载于《厄巴纳分析》，第II卷，第61-107页。1989年。

[11] Bownik, M., P. Casazza, A. Marcus, and D. Speelge.《Weaver 猜想和 Feichtinger 猜想的改进界》。《纯粹与应用数学杂志》2019，第749期（2019）：267-293。[12] Br¨and´en, P.《双曲多项式与 Kadison-Singer 问题》（2018）：预印本 arXiv:1809.03255。[13] B¨urgisser, P., M. Clausen, and M. A. Shokrollahi.《代数复杂性理论》。第315卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[14] Cohen, M.《高秩矩阵求和的改进谱稀疏化与 Kadison-Singer 问题》。班夫数学创新与发现国际研究站（2016）。[15] Casazza P. G. and J. C. Tremain.《数学与工程中的 Kadison-Singer 问题》。《美国国家科学院院刊》103，第7期（2006）：2032-2039。[16] Chan, T. F. and P. C. Hansen.《秩揭示 QR 分解的一些应用》。《SIAM 科学与统计计算杂志》13，第3期（1992）：727-741。[17] Derezinski, M., R. Khanna, and M. W. Mahoney.《列子集选择与 $Nyström$ 方法的改进保证及多重下降曲线》。《神经信息处理系统进展》33（2020）：4953-4964。[18] Deshpande, A. and L. Rademacher.《用于行/列子集选择的高效体积采样》。载于《2010年IEEE第51届计算机科学基础年会论文集》，第329-338页。IEEE，2010年。[19] Deshpande, A., L. Rademacher, S. Vempala, and G. Wang.《通过体积采样进行矩阵近似与投影聚类》。《计算理论》2，第1期（2006）：225-247。[20] Drineas, P., M. W. Mahoney, and S. Muthukrishnan.《相对误差 CUR 矩阵分解》。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》30，第2期（2008）：844-881。[21] Fell, H. J.《多项式凸组合的零点》。《太平洋数学杂志》89，第1期（1980）：43-50。[22] Friedland, O. and P. Youssef.《矩阵与凸体的近似》。《国际数学研究通知》2019，第8期（2019）：2519-2537。[23] Frieze, A., R. Kannan, and S. Vempala.《寻找低秩近似的快速蒙特卡洛算法》。《美国计算机协会杂志》51，第6期（2004）：1025-1041。[24] Golub, G. H.《求解线性最小二乘问题的数值方法》。《数值数学》7（1965）：206-216。[25] Gu M. and S. C. Eisenstat.《计算强秩揭示 QR 分解的高效算法》。《SIAM科学计算杂志》17，第4期（1996）：848-869。[26] Guyon I. and A. Elisseeff.《变量选择与特征选择简介》。《机器学习研究杂志》3，3月号（2003）：1157-1182。

[27] Hong Y. P. 和 C. T. Pan. “秩揭示 QR 分解与奇异值分解。” 数学计算 58, 第197期（1992）：213-232.[28] Kadison R. V. 和 I. M. Singer. “纯态的扩张。” 美国数学杂志 81, 第2期（1959）：383-400.[29] Keller-Gehrig, W. “特征多项式的快速算法。” 理论计算机科学 36（1985）：309-317.[30] Marcus, A. W., D. A. Spielman 和 N. Srivastava. “交错族 I：任意次数的二部拉马努金图。” 数学年刊 (2) 182（2015）：307-325.[31] Marcus, A. W., D. A. Spielman 和 N. Srivastava. “交错族 II：混合特征多项式与 Kadison-Singer 问题。” 数学年刊 (2) 182（2015）：327-350.[32] Marcus, A. W., D. A. Spielman 和 N. Srivastava. “交错族 III：更精细的受限可逆性估计。” 以色列数学杂志 247（2022）：519-546.[33] Marcus, A. W., D. A. Spielman 和 N. Srivastava. “多项式的有限自由卷积。” 概率论及相关领域 182, 第3-4期（2022）：807-848.[34] Marden, M. 多项式几何。第3卷。美国数学学会，1949年.[35] McGown, K. J. 和 H. R. Parks. “Faulhaber公式向非整数次幂求和的推广。” 数学分析与应用杂志 330, 第1期（2007）：571-575.[36] Naor, A. 和 P. Youssef. “重新审视受限可逆性。” 载于《离散数学之旅》，657-691。施普林格，2017年[37] Ravichandran, M. “主子矩阵、受限可逆性与定量 Gauss-Lucas 定理。” 国际数学研究通知 2020, 第15期（2020）：4809-4832.[38] Ravichandran, M. 和 J. Leake. “混合行列式与 Kadison-Singer 问题。” 数学年刊 377, 第1-2期（2020）：511-541.[39] Ravichandran, M. 和 N. Srivastava. “渐近最优多重铺砌。” 国际数学研究通知 2021, 第14期（2021）：10908-10940.[40] Rudelson, M. 和 R. Vershynin. “大型矩阵采样：一种基于几何泛函分析的方法。” 美国计算机协会杂志 54, 第4期（2007）：21-es.[41] Spielman, D. A. 和 N. Srivastava. “受限可逆性定理的初等证明。” 以色列数学杂志 190, 第1期（2012）：83-91.[42] Vershynin, R. “John分解：选取一个大部分。” 以色列数学杂志 122（2001）：253-277.[43] Wang, Y. 和 A. Singh. “利用选择性采样数据实现矩阵列子集选择的可证明正确算法。” 《机器学习研究杂志》18, 第1期（2017）：5699-5740。

[44] Weaver, N. “差异理论中的 Kadison-Singer 问题。” 离散数学。278, 第1-3期（2004）：227-239.[45] Xu, Z., Z. Xu 和 Z. Zhu. “高秩半正定矩阵的 Weaver KSr 猜想的改进界。” 《泛函分析杂志》285, 第4期（2023）：109978[46] Yanai, H., K. Takeuchi 和 Y. Takane. 投影矩阵、广义逆矩阵与奇异值分解。《社会与行为科学统计学》, Springer New York，2011年。[47] Youssef, P. “受限可逆性与立方体的 Banach-Mazur距离。”Mathematika, 60, 第1期（2014）：201-218。Jian-Feng Cai, Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology,Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong SAR, China*E-mail address*, Jian-Feng Cai：jfcai@ust.hk Zhiqiang Xu, LSEC, Inst. Comp. Math., Academy of Mathematics and System Science, ChineseAcademy of Sciences, Beijing, 100091, ChinaSchool of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*E-mail address*, Zhiqiang Xu：xuzq@lsec.cc.ac.cn Zili Xu, Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology, ClearWater Bay, Kowloon, Hong Kong SAR, China*E-mail address*, Zili Xu：xuzili@ust.hk