组合环面长度谱算法

VincentDelecroix[1], Matthijs Ebbens[2],
Francis Lazarus [*3]，以及 Ivan Yakovlev[1]

[1]波尔多大学、法国国家科学研究中心、波尔多国立综合理工学院、波尔多计算机科学实验室，UMR 5800，法国塔朗斯 F-33400[2]傅里叶研究所、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔-阿尔卑斯大学´，法国[3]G-SCOP/傅里叶研究所、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔-阿尔卑斯大学´，法国

2023年3月15日

arXiv:2303.08036v1 [cs.CG] 14 Mar 2023

摘要

考虑一个胞腔嵌入在拓扑曲面上的带权无向图。将每个闭曲线自由同伦类映射到该同伦类中最短环的长度的函数称为标记长度谱。只需按升序列出标记长度谱中的长度值，即可得到（未标记的）长度谱。

本文介绍了计算嵌入环面上的图的（带标记或无标记）长度谱的算法。具体而言，我们对一个复杂度为 n 的加权图进行预处理，耗时 $O(n^2 \log\log n)$，从而对于一条含有 ℓ 条边、表示某个自由同伦类的闭路，可以在 $O(\ell + \log n)$ 时间内计算与之同伦的最短闭路的长度。此外，给定任意正整数 k，可以在 $O(k \log n)$ 时间内计算其无标记长度谱的前 k 个值。

我们的算法基于环面上的加权图与多面体范数之间的对应关系。特别地，我们给出了这类范数的单位球复杂度的一个与权重无关的上界。由此可立即推出，可以在多项式时间内判定两个嵌入的加权图是否具有相同的标记谱。我们还研究了比较无标记谱的问题，并针对无权情形给出一个多项式时间算法，针对其他情形则给出一个随机多项式时间算法。

1 引言

组合曲面在计算拓扑学中已有深入研究，通常表示为胞腔嵌入在拓扑曲面上的图。给定一个组合

*该作者部分受法国国家研究署项目 MINMAX（ANR-19-CE40-0014）和 PERSYVAL-Lab 卓越实验室（ANR-11-LABX-0025-01）的资助；后者由法国未来投资计划资助。

曲面 S 及其底层图 G，已有许多算法被提出，用于计算其最短非平凡同伦闭游走 [Tho90, EHP04, Kut06, CM07, CdVL12, Eri12, CCE13] 的长度。如果边带有权重，游走的长度就是其各边权重之和；否则，长度就是边数。然而，关于如何计算第二短的非平凡闭游走、第三短的游走，依此类推，目前所知甚少。更准确地说，对于 G 中的每个闭游走 c，我们都可以计算与 c 在 S 上自由同伦的最短闭合游走的长度。根据定义，这一长度仅取决于 c 的自由同伦类。所有闭游走自由同伦类对应长度按序排列形成的序列，称为 S 关于其（带权）图 G 的长度谱；而曲线的自由同伦类与其长度之间的对应关系，则称为标记长度谱。因此，标记长度谱记录了序列中的每个长度所属的自由同伦类。这些概念在双曲曲面或黎曼曲面领域已有深入研究 [Ota90, Bus92, Par18]。这方面一个引人注目的结果是，非正曲率曲面的标记长度谱完全决定了该曲面的几何 [Ota90]。换言之，仅观察曲线的长度，就可以了解曲面的几何性质。然而，即使在常曲率情形下，无标记长度谱也不能决定曲面 [Vig80]。

类似地，Schrijver [Sch92，定理 1] 证明了：在具有相同标记长度谱的图中，按 minor-minimal 意义极小的嵌入图（他称之为核）由其标记长度谱唯一确定，至多相差一些简单变换，即取对偶图并施行一系列所谓的 ΔY 变换。

在随后的一篇论文中 [Sch93] Schrijver 将研究范围限定为嵌入环面的无权图，并指出标记长度谱可扩展为 $\mathbb{R}^2$ 上的整数范数，即在整数向量处取整数值的范数。此外，其对偶单位球是一个顶点具有整数坐标的有限多边形（另见 [de 16，San20]）。这使他能够为每个整数范数重构一个图，使其标记长度谱由该范数给出。

本文的目标有三方面。首先，我们将 Schrijver [Sch93] 的结果推广到环面上的加权图。研究环面有充分理由。例如，嵌入环面的图之标记长度谱是一个范数，这是因为同伦与同调等价；而在高亏格曲面上，这一等价关系并不成立。对于加权图，标记长度谱函数仍可扩展为 $\mathbb{R}^2$ 上的范数，我们将其记作 $N_{G,\,w}$，但它不一定是整数范数。不过，我们证明，无论权重如何取值，它都是多面体范数。换言之，单位球 $B_{G,\,w} := \{\alpha \in \mathbb{R}^2 \mid N_{G,\,w}(\alpha) \leq 1\}$ 总是一个多边形。我们还证明，该多边形的极端点数量受图 G 的顶点数量的线性函数所界定，且此界与权重 w 无关。

定理 1. 设 (G, w) 是一个有 $|V|$ 个顶点、胞腔嵌入在环面上的加权图。那么 $N_{G,w}$ 是多面体范数。此外，其单位球 $B_{G,w}$ 是一个多边形，极端点不超过 $4|V| + 5$ 个，且每个极端点的坐标之比都是有理数。

我们还将 Schrijver 从整数范数 [Sch93]重构环面图的方法，推广到非整数多面体范数的加权情形。参见第 7 节中的定理 3。

我们的第二个目标是提供算法来计算单位球 $B_{G,\,w}$ 并计算长度谱。我们所有的复杂度估计都假设采用标准 RAM 模型

进行计算，或者采用支持常数时间算术运算、适用于非整数权重的标准实 RAM 模型。我们用 n 表示 G 的复杂度，即其边和顶点的总数。

定理 2. 单位球 $B_{G,\,w}$ 可以在 $O(n^2 \log\log n)$ 时间内计算；若 G为无权图，则可以在 $O(n^2)$ 时间内计算。

经过此预处理步骤后，我们可以在 $O(\ell + \log n)$ 时间内，计算与输入的、含有 ℓ 条边的闭游走自由同伦的最短闭合游走的长度。原则上，依据其同伦类对长度谱中的值进行排序并非显而易见。然而，通过将单位球分解为幺模扇区（即由幺模矩阵的列生成的扇区），我们能够高效地计算长度谱中最小的 k 个值。

定理 3. 设 (G, w) 是一个复杂度为 n 、胞腔嵌入在环面上的加权图，且 k 为正整数。经过 $O(n^2 \log\log n)$ 时间的预处理后，可以在 $O(k \log\, n)$ 时间内计算 (G, w) 的长度谱中最小的k 个值。若 G 为无权图，则预处理时间中的 $\log\log n$ 因子可以省去。

最近，两位共同作者 [EL22]利用环面万有覆盖中的最短路径计算来确定长度谱。通过这种方式，他们能够在时间 k 内计算出长度谱的前 $O(kn^2\log(kn))$个值。这与本文中的 $O(k\log n)$相比。

最后，作为定理2的推论，我们给出算法，用于检验两个加权图是否具有相同的带标记或无标记长度谱。在无权情形下，它具有以下简单形式。

定理 4。对于嵌入环面上的两个无权图 G和 G'，可以分别在时间 $O(n^2)$ 和 $O(n^3)$内检验它们的带标记谱和无标记谱是否相同。

我们的带标记长度谱算法在加权情形下同样是多项式时间的（定理19）。然而，为了计算无标记长度谱，我们将长度谱相等性问题归约为多项式恒等式检验（PIT）；已知该问题属于 co-RP 复杂度类，即其否定可由随机化的多项式时间算法解决 [Sch80]。参见定理20。如上文定理4 所述，在无权情形下，该算法可达到确定性多项式时间。

虽然标记长度谱相等意味着核之间存在某种结构等价， [Sch92], 我们给出了一个等谱环面图的例子，其对应的单位球无法通过任何线性变换相互关联。特别是，即使对环面施加同胚，它们也不可能具有相同的标记长度谱。

论文结构 我们先在第 2 节讨论一些预备知识。接着，我们在第 1 节证明定理 3。定理 2 将在第 4 节和第5 节讨论，而定理 3 将在第 6 节证明。最后，我们将在第 7 节讨论长度谱相等的问题。

2 预备知识

设 $G = (V, E)$ 是一个顶点集为 V、边集为 E 的无向图。我们允许 G 有自环和重边。我们用 $n := |V| + |E|$ 表示图 G 的复杂度。图 G 的权函数是一个映射 $w : E \to \mathbb{R}_+$。正值 $w(e)$ 是边 $e \in E$ 的权重（或长度）。我们用 (G, w) 表示带有权函数 w 的图 G。游走是由顶点和有向边交替组成的有限序列，以顶点开始并以顶点结束，且序列中每个顶点都是前一条边的终点（后一条边的起点）。我们也将路径用作游走的同义词。游走 c 的长度 $w(c)$ 是其边的权重之和，按重数计。首尾顶点重合的游走称为闭游走。这个顶点是闭游走的基点。顶点不重复的闭游走也称为简单圈。

本文中，我们用 S 表示拓扑曲面，用 T 表示亏格为 1 的拓扑可定向曲面，即环面。本文假设 G在 上胞腔嵌入于 S，这意味着其补集 $S \setminus G$ 是由开圆盘组成的集合。该嵌入可用标准表示法之一表示，例如旗标关联图 [Epp03] 或旋转系统 [MT01]。由曲面与加权图的胞腔嵌入构成的对象称为组合曲面。

下面回顾一些曲面拓扑中的定义。关于代数拓扑的基本概念，请参阅 Stillwell [Sti 93] 。

同伦 若两条来自 G 的游走作为 S中的曲线同伦，则称它们同伦；也就是说，在保持端点固定的情况下，可以在 S 上将一条连续变形为另一条。同样，若两条闭合游走作为 S中的曲线自由同伦，则称它们自由同伦。这里，同伦过程中不要求基点保持固定。与约化为一个顶点的游走（自由）同伦的闭合游走称为平凡的。同伦在游走之间定义了一个等价关系。具有固定基点 v的闭合游走的同伦类集合在连接运算下构成一个群，称为 S 的基本群，记作 $\pi_1(S, v)$。

环面的基本群是阿贝尔群，且同构于 $\mathbb{Z}^2$。例如，参见 [Sti93]。$\pi_1(T, v)$ 因此与其共轭类集合一一对应，进而与自由同伦类集合一一对应。

如果一个闭游走在其自由同伦类中长度最短，则称其为紧闭游走。注意，一个同伦类中可能包含多个紧闭游走。令$\mathcal{C}$ 表示 S 的自由同伦类集合。映射$\mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ 将每个自由同伦类映射到该类中紧闭游走的长度，这就是标记长度谱，对应于 S，其中参数为 (G, w)。无标记长度谱是一个列表，按递增顺序列出 G 的非平凡自由同伦类的长度，并计入重数：如果两个同伦类的长度相同，那么该长度会在列表中出现两次。请注意，长度谱的第一个元素通常称为闭合测地线长度。

同调基本群并不是唯一一个可以与曲面联系起来的有趣群。同调群的定义略为抽象，但实际上更容易计算和处理。令 F 为 G 在 S 中的胞腔嵌入的面集。我们也将面、边或顶点分别称为 $k = 2$、1、0-胞腔。C_2 这一2-链群，是由面构成的形式线性组合群

其系数为整数，群运算为显然的加法。 C_2 中的典型元素具有形式 $\Sigma_{f\in F} n_f f$，其中 $n_f \in \mathbb{Z}$。同样，1-链群 C_1 和 0-链群 C_0 分别是由边和顶点构成的形式线性组合群。假定胞腔均带有定向，胞腔乘以 -1 表示同一胞腔但定向相反。

对于 $k = 1$，2，边界算子 $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ 是如下映射的线性扩张：将一个 k-胞腔映射为其边界面的形式和；若某个面在和中的定向由该 k-胞腔的定向诱导，则其系数为 1； -1否则。 ∂_k 的核是 C_k 的一个子群，记为 Z_k。其元素称为k-圈，不要与图论意义上的圈混淆。 ∂_k的像是 k-边界的子群，记为 B_{k-1}。 C_{k-1} 的第一同调群（系数为 $\mathbb{Z}$）是群 $H_1(S;\mathbb{Z}) := \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2$，即 1-圈模去 2-边界群所得的群。根据同调理论，我们知道， $H_1(S;\mathbb{Z})$不依赖于由 G的胞腔嵌入所诱导的具体胞腔分解。类似地，我们可以定义实数系数下的第一同调群 $H_1(S;\mathbb{R})$。由于 1-链仅取决于图 G，我们也将 1- 圈群记作 $Z_1(G;\mathbb{Z})$。赫 urewicz 定理指出，映射 $\pi_1(S, v) \to H_1(S;\mathbb{Z})$ 将一个闭游走的（同伦类）映射为其有向边形式和的（同调类），该映射是满射，且其核为 $\pi_1(S, v)$的交换子子群。对于环面， $\pi_1(T, v)$是交换的，因此上述映射实际上是一个同构。从现在起，我们将环面上的同伦类与第一同调类视为相同。我们用同一个字母表示 G 上的闭游走，以及 $Z_1(G;\mathbb{Z})$中由其各有向边之和构成的对应 1-圈。闭游走或 1-圈 c 的同伦类或同调类均记作 $[c]$。

交数 给定两条闭有向曲线 c， d 位于 S 上（并赋予定向），且它们相交横截，我们可以根据交点处 c 和 d 的切向量是否构成正向基，为每个交点赋予一个符号。所有交点的符号之和称为代数交数。这是一个经典结果：该数仅取决于同调类 $[c]$ 和 $[d]$，并且它在 $H_1(S;\mathbb{Z})$ 上定义了一个反对称、非退化的双线性形式，记作配对 $\langle [c], [d] \rangle$。当然， c 和 d 的交点总数至少为$|\langle [c], [d] \rangle|$。

环面的万有覆盖 我们可以通过粘合正方形的相对两边来构造一个环面。等价地，我们可以将环面看作平面 $\mathbb{R}^2$在由 (1, 0) 和 (0, 1) 生成的平移群作用下的商空间，并将该平移群与格 $\mathbb{Z}^2$等同。因此，我们可以将 T 与 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 等同，并得到商映射q：$\mathbb{R}^2 \to T$。平面 $\mathbb{R}^2$连同映射 q，称为 T的万有覆盖。给定一条曲线 c，其源点 v 位于 T上，以及一点 $\tilde{v} \in q^{-1}(v)$，存在唯一一条平面中的曲线 $\tilde{c}$，其起点为 $\tilde{v}$，且投影后为 c，也就是说，满足 $q(\tilde{c}) = c$。曲线 $\tilde{c}$ 称为 c的提升。如果 c 是一条闭曲线，那么 $\tilde{c}$ 的起点与终点之间的向量具有整数坐标，且只取决于 $[c]$。因此，每个同伦类都可以与一个格平移相对应。这类平移称为覆盖变换（或平移）。可以证明，一条曲线与一条简单曲线自由同伦，当且仅当相应覆盖变换的坐标互素 [Sti93，第 6.2 节。2]。由

根据 $\mathbb{Z}^2$, $\pi_1(T, v)$ 与 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 之间的对应关系，任何一对 (α, β) 同调类，只要它们生成 $H_1(T;\mathbb{Z})$，就必定对应于一个可逆整数变换，因而对应于一个幺模矩阵。等价地，(α, β) 的代数交数等于 ± 1。当 $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ 时，它是一个**正向基**。

Inte格与交范数令 $N : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足范数公理：

- $N(\alpha + \beta) \leq N(\alpha) + N(\beta)$（次可加性）
- $N(k\alpha) = |k|N(\alpha)$（绝对齐次性）
- $N(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$（分离性）

随后，N 利用齐次性扩展到有理数空间 $\mathbb{Q}^d$，并可进一步扩展到 $\mathbb{R}^d$，使其连续。可以证明，这确实在 $\mathbb{R}^d$ [Thu86]上定义了一个良定义的范数。这样的函数 N或其在实数上的扩展，若是整数范数，当且仅当$N(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$。可以证明，整数范数是多面体的，即其单位球是一个中心对称多面体，而其对偶单位球是一个顶点为整数的中心对称多面体 [Thu86、Sch93、de 16]。另见 [Cos18，第 6.0 节。4]。

整数范数自然地作为定义在曲面上曲线同调类上的长度函数出现。对于嵌入曲面 S 上的图 G，定义曲线及其长度有几种方式。可以考虑 S 上的连续曲线，并将其长度定义为与 G 的交叉点数。Schrijver [Sch93] 在 S 为环面时应用了这一框架，并证明这确实定义了一个范数。他还考虑了另一种框架，其中曲线相对于 G 处于一般位置，从而避开其顶点，并且要求 G 的所有顶点的度数均为 4。在 [Sch92] 中，Schrijver 通过考虑 G 的中图证明，第一种框架可化归为第二种框架。反过来，在面为四边形且边无权重这一特殊情形下，第二种框架可通过对偶性化归为我们的框架。Kane [San20], 也使用第二种框架，并将其中的范数称为交范数。容易看出，无权重 4-正则图的交范数等于 G 的对偶图上的标记长度谱。在 [San20], 中，给出了这样的中心对称多面体实例：它们具有整数顶点，却不是任何交范数的对偶球。这与 G 嵌入环面的特殊情形形成对比；对于该情形，Schrijver [Sch93，定理 4] 证明，$\mathbb{R}^2$ 上的每个整数范数都是某个无权重 4-正则图的交范数的一半。

3 同调上的长度谱与多面体范数

本节中，给定一个嵌入在环面 G 上的加权图（w，T），我们在环面的第一同调群上引入一种范数，本文将始终使用该范数。环面上的图与多面体范数之间的对应关系早已为人所知 [Sch93]。但据我们所知，这种对应关系仅在无权情形下得到研究，而且从未从计算角度进行分析。

对于 $\alpha \in H_1(T;\ \mathbb{Z})$，令

$$N_{G,w}(\alpha) := \inf\left\{ \sum_{e\in E(G)} |x_e| w(e) : \sum_{e\in E(G)} x_e e \in Z_1(G;\mathbb{Z}) \text{ and } [\sum_{e\in E(G)} x_e e] = \alpha \right\}. \qquad (1)$$

注意到，(1) 中的下确界可以取到，因为当某个 x_e 趋于无穷时，$\sum_{e\in E(G)} |x_e| w(e)$ 也趋于无穷，因此，我们的最小化问题实际上可以限制在一个有限集合上。

在下文定理 1 的证明中，我们将证明如此定义的 $N_{G,w}$ 满足范数公理。因此，正如第2节“整数范数与交数范数”小节中所述，$N_{G,w}$ 可扩展为 $H_1(T;\ \mathbb{R})$ 上的一个范数（因为 $H_1(T;\ \mathbb{Z})$ 自然是 $H_1(T;\ \mathbb{R})$ 中的一个格）。

但首先，我们来证明，按式（1）定义的 $,_w$ 确实是 T 关于（G, w）的标记长度谱。

引理 5。 对于每个 $\alpha \in H_1(T;\mathbb{Z})$，都有

$$N_{G,w}(\alpha) = \inf\left\{ \sum_{i\in I} x_i \cdot w(c_i) : [\sum_{i\in I} x_i \cdot c_i] = \alpha \ \textit{and}\ x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \textit{for}\ i \in I \right\}, \qquad (2)$$

其中 $\{c_i\}_{i\in I}$ 是 G中所有简单圈构成的（有限）集合。式（2）中的下确界可以取到。此外，对于每个 $\alpha \in H_1(T;\mathbb{Z})$，$N_{G,w}(\alpha)$ 是 G 中满足 $[c] = \alpha$ 的、经过 c 的最短闭合游走的长度。换言之，$N_{G,w}$ 是 T 关于(G, w)的标记长度谱。

证明。用 $N'_{G,w}(\alpha)$ 表示式 (2) 的右侧。令 $\{x_i\}_{i\in I}$ 满足 $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且 $[\sum_{i\in I} x_i \cdot c_i] = \alpha$。若 $\sum_{i\in I} x_i \cdot c_i = \sum_{e\in E(G)} x_e e$，则对每个 $e \in E(G)$，我们有$|x_e| = |\sum_{i\in I, e\in c_i} \pm x_i| \leq \sum_{i\in I, e\in c_i} x_i$，因此 $\sum_{e\in E(G)} |x_e| w(e) \leq \sum_{i\in I} x_i w(c_i)$。于是$N_{G,w}(\alpha) \leq N'_{G,w}(\alpha)$。

现在我们来证明反向不等式。固定 $c = \sum_{e\in E(G)} x_e e \in Z_1(G;\mathbb{Z})$。我们声称存在 $\{x_i\}_{i\in I}$，使得 $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{i\in I} x_i \cdot c_i = c$ 且 $\sum_{i\in I} x_i w(c_i) = \sum_{e\in E(G)} |x_e| w(e)$。为证明这一断言，我们可以假设对所有 $e \in E(G)$ 都有 $x_e \geq 0$ （必要时改变边的定向）。根据 $Z_1(G;\mathbb{Z})$ 的定义， G 的每个顶点处， c 中其入边的系数之和等于 c 中其出边的系数之和。选取 $e_1 \in E(G)$，使其 $x_{e_1} \neq 0$ 最小。假设我们已经选取了互不相同的边 $e_1, \ldots, e_i$。当 e_i 的终点不等于 e_1 的起点时，我们从以 e_i 的终点为起点的边中任意选取下一条边 e_{i+1}；该边在 c 中的系数非零，且尚未被选取。上文所述的 $Z_1(G;\mathbb{Z})$ 的性质保证至少存在这样一条边。假设这一过程在第 k 阶段终止。那么边 $e_1, \ldots, e_k$ 在 G 中构成一个简单圈 d_1。现在用 $c - x_{e_1} d_1$ 替换 c。这个 $Z_1(G;\mathbb{Z})$ 的新元素仍具有非负系数，且正系数的个数至少减少 1。重复这一过程，我们就得到所需的表示 $c = x_{e_1} d_1 + \ldots$。

上述结论尤其适用于满足 $N_{G,w}(\alpha) = \sum_{e\in E(G)} |x_e| w(e)$ 的极小表示 $[\sum_{e\in E(G)} x_e e] = \alpha$。因此，$N_{G,w}(\alpha) \geq N'_{G,w}(\alpha)$，从而得到（2）。这也给出了一个满足 $N_{G,w}(\alpha) = \sum_{i\in I} x_i w(c_i)$ 的极小表示 $[\sum_{i\in I} x_i c_i] = \alpha$，因此（2）中的下确界确实可以取到。

最后，假设表示 α 的 $\sum_{i\in I} x_i c_i$ 满足 $N_{G,\ w}(\alpha) = \sum_{i\in I} x_i w(c_i)$。我们可以假设所有同调类 $[c_i]$各不相同（否则用其中任意一个替换对应于同一类的简单圈

c_i，且不改变总权重）。此外，$[c_i]$ 两两不共线。事实上，如果 $[c_i] = -[c_j]$，我们可以将 $x_i c_i + x_j c_j$ 替换为 $(x_i - x_j)c_i$ 或 $(x_j - x_i)c_j$，从而降低总权重。若 $[c_i] = \pm p/q \cdot [c_j]$，其中 p、$q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 互素，且 $(p, q) \neq (1, 1)$，那么向量 $[c_i]$、$[c_j] \in H_1(T; \mathbb{Z})$ 中至少有一个不是本原的（即它是 $H_1(T; \mathbb{Z})$ 中另一同调类的整数倍），因此（如第 2 节所述），不可能存在具有该同调类的简单闭曲线，这就产生了矛盾。

由于环面上任意两个不共线的同调类都会相交，因此，α 的极小表示中的任意两个简单圈 c_i 和 c_j 都会相交，故它们可以首尾相接，在 G 上形成一个同调为 α、长度为 $N_{G,\,w}(\alpha)$ 的闭游走。 □

在定理 1 的证明中，我们证明了单位球 $B_{G,\,w} = \{\alpha \in H_1(T; \mathbb{R}) \mid N_{G,\,w}(\alpha) \leq 1\}$ 的极值点 $N_{G,\,w}$ 对应于可由 G 中的简单圈表示的同调类。以下引理给出了此类同调类数量的上界。

对于实向量空间的子集 X，用 $\mathrm{conv}(X)$ 表示 X 的凸包。注意，$H_1(T; \mathbb{Z})$ 自然是实向量空间 $H_1(T; \mathbb{R})$ 的子集。

引理 6。设 G 是一个有 $|V|$ 个顶点、胞腔嵌入在环面 T 上的图，且 $\mathcal{SC}_G \subset H_1(T; \mathbb{Z})$ 是可由 G 中的简单圈表示的曲线同调类的集合。那么在 $H_1(T; \mathbb{R})$ 中有 $|\mathrm{conv}(\mathcal{SC}_G) \cap H_1(T; \mathbb{Z})| \leq 4|V| + 5$。

证明。通过任意一个正向基，将 $H_1(T; \mathbb{Z})$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 视为同一对象。于是，$H_1(T; \mathbb{R})$ 被视为 $\mathbb{R}^2$，而代数交数配对由 $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xy' - x'y$ 给出。注意，该配对的绝对值就是由这些向量张成的平行四边形的欧几里得面积。

设 $\alpha, \beta \in \mathcal{SC}_G$ 由 G 中的简单圈 c_α, c_β 表示。一方面，c_α 与 c_β 的交点数不超过 $|V|$，因为每个交点都对应于 G 的至少一个顶点，且这些顶点必须各不相同。另一方面，该交点数不小于代数交数 $|\langle \alpha, \beta \rangle|$。因此，$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |V|$。

用 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得范数，用 $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ 表示欧几里得距离，并考虑满足 $|\mathbf{h}\alpha, \beta\mathbf{i}|$ 最大的 $\alpha, \beta \in \mathrm{SC}_G$。那么，对于任意 $\gamma \in \mathrm{SC}_G$，有 $|\mathbf{h}\gamma, \alpha\mathbf{i}| \leq |\mathbf{h}\alpha, \beta\mathbf{i}|$，且 $|\mathbf{h}\gamma, \beta\mathbf{i}| \leq |\mathbf{h}\alpha, \beta\mathbf{i}|$。注意，由于这些数值是相应平行四边形的面积，$|\mathbf{h}\gamma, \alpha\mathbf{i}| = \mathbf{k}\alpha\mathbf{k} \cdot \mathrm{dist}(\gamma, \mathbb{R}\alpha)$，$|\mathbf{h}\gamma, \beta\mathbf{i}| = \mathbf{k}\beta\mathbf{k} \cdot \mathrm{dist}(\gamma, \mathbb{R}\beta)$，且 $|\mathbf{h}\alpha, \beta\mathbf{i}| = \mathbf{k}\alpha\mathbf{k} \cdot \mathrm{dist}(\beta, \mathbb{R}\alpha) = \mathbf{k}\beta\mathbf{k} \cdot \mathrm{dist}(\alpha, \mathbb{R}\beta)$，其中 $\mathbb{R}\alpha, \mathbb{R}\beta$ 分别表示由 α, β 生成的一维 $\mathbb{R}$-子空间。因此，$\mathrm{dist}(\gamma, \mathbb{R}\alpha) \leq \mathrm{dist}(\beta, \mathbb{R}\alpha)$ 且 $\mathrm{dist}(\gamma, \mathbb{R}\beta) \leq \mathrm{dist}(\alpha, \mathbb{R}\beta)$，从而 SC_G 包含于顶点为 $\pm\alpha \pm \beta$ 的平行四边形 P 中，见图 1。

显然，$A(P)$ 的面积为 $4|\langle \alpha, \beta \rangle|$。同时，根据皮克定理 $A(P) = I + B/2 - 1$，其中 I 是严格位于 P 内部的整点数，B 是位于其边界上的整点数。由于 α 和 β 是由简单圈表示的同调类，它们在 $\mathbb{Z}^2$ 中对应的向量具有互素坐标，也就是说，向量 α 和 β 上唯一的整点是它们的端点。因此，P 的边界上唯一的整点是 $\pm\alpha$，$\pm\beta$，$\pm\alpha \pm \beta$，所以 $B = 8$。

最后，由于 $\mathcal{SC}_G \subset P$，我们也有凸包 $(\mathcal{SC}_G) \subset P$，因此

$$|\mathrm{conv}(\mathcal{SC}_G) \cap \mathbb{Z}^2| \leq I + B = A(P) + B/2 + 1 = 4|\langle \alpha, \beta \rangle| + 5 \leq 4|V| + 5.$$

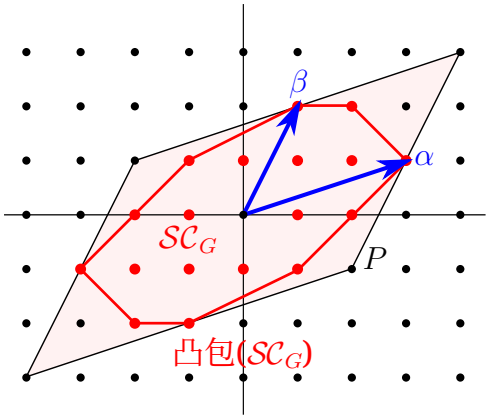

图 1：$\mathcal{SC}_G$ 中的元素包含在一个面积至多为 $4|V|$ 的平行四边形 P 中。

□

注意，引理 6 中界的线性形式是最优的。事实上，存在嵌入在环面上的图G，其顶点数为 $|V|$，并满足 $|\mathsf{SC}_G| = \Theta(|V|)$。例如，可以在环面上绘制曲线 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ $(\mathbb{R} \times \{1/2\})$ 和 $q(\mathbb{R} \cdot (1, k))$，其中 $q\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 是万有覆盖映射，然后在这些曲线的交点处放置顶点，从而得到一个图。图 2 给出了 $k = 4$的一个示例。所得的图 G 有 k 个顶点，且 $\mathsf{SC}_G = \{\pm(0, 1)\ \pm(1, 0)\ \pm(1, 1)\ \pm(1, 2) \ldots, \pm(1, k)\}$，其中$|\mathsf{SC}_G| = 2k + 4$。

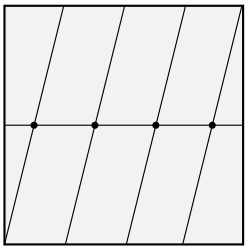

图 2：一个含有 $k = 4$ 个顶点和 $|\mathcal{SC}_G| = 2k + 4$的图 G 示例 .

现在我们转而证明1定理。在无权情形下，范数的多面体性是整数性的结果，见 [Sch93]。然而，这一论证不适用于加权情形。

定理 1 的证明。由定义显然可知，对于所有 $\alpha, \beta \in H_1(T; \mathbb{Z})$，都有 $N_{G,w}(\alpha + \beta) \leq N_{G,w}(\alpha) + N_{G,w}(\beta)$，并且 $N_{G,w}(\alpha) = 0$ 蕴含 $\alpha = 0$。为证明绝对齐次性，我们使用引理 5 中证明的刻画：$N_{G,w}$ 是相对于 (G, w) 的 T 的标记长度谱。首先注意，若 c 是 G 中满足 $[c] = \alpha$的最短闭游走，那么反向定向的 c 就是 G中同调为 $-\alpha$的最短闭游走。因此，$N_{G,w}(-\alpha) = N_{G,w}(\alpha)$。

现在，我们对 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 进行归纳证明：$N_{G,w}(k\alpha) = k \cdot N_{G,w}(\alpha)$。对于 $k = 1$，这显然成立。对于 $k \geq 2$，类 $k\alpha \in H_1(T; \mathbb{Z})$ 不是本原的，因此，在 G 中表示 $k\alpha$ 的最短闭合游走 c 必然自相交（如第2节所述）。由 [Sti93第 6.2 节中的证明可轻易推出，2]自相交点

可以选取得当，使其分解为 c 两个闭合游走 c_1 和 c_2，且$[c_1] = k_1\alpha, [c_2] = k_2\alpha$，$k_1 + k_2 = k$。如果 $k_1 = 0$ 或 $k_2 = 0$，那么可以从 c 中删去其中一个游走，既不改变同调，又能缩短长度，这不可能。因此 $k_1, k_2 > 0$ 并且 $N_{G,w}(k\alpha) = w(c) \geq N_{G,w}(k_1\alpha) + N_{G,w}(k_2\alpha) = kN_{G,w}(\alpha)$，由归纳假设可得。反向不等式由三角不等式推出。

因此 $N_{G,\ w}$ 满足范数公理。因此，正如第 2 节“整数范数与交数范数”小节中所解释的，$N_{G,\ w}$ 可扩展为 $H_1(T;\ \mathbb{R})$ 上的一个范数。为证明该范数具有多面体性，我们证明

$$B_{G,w} = \operatorname{conv}\left(\left\{\frac{[c_i]}{w(c_i)} \mid i \in I\right\}\right), \tag{3}$$

其中 c_i 是 G中所有定向简单圈组成的（有限）集合，见引理 5。

将（3）式右边记为 $B'_{G,\ w}$。显然，对于每个 $i \in I$，都有 $N_{G,\ w}([c_i]) \leq w(c_i)$，因此 $B'_{G,\ w} \subset B_{G,\ w}$。反过来，任取一个同调类 $\alpha \in H_1(T;\ \mathbb{Z})$。由引理 5，可知存在某个 $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $N_{G,\ w}(\alpha) = \sum_{i\in I} x_i \cdot w(c_i)$，且 $\alpha = [\sum_{i\in I} x_i \cdot c_i]$。于是

$$\frac{\alpha}{N_{G,w}(\alpha)} = \frac{\sum_{i\in I} x_i \cdot [c_i]}{\sum_{i\in I} x_i \cdot w(c_i)} = \sum_{i\in I} \frac{x_i w(c_i)}{\sum_{j\in I} x_j \cdot w(c_j)} \cdot \frac{[c_i]}{w(c_i)}$$

是 $\overset{\alpha}{N_{G\ w,\ }(\alpha)}$ 表示为 $\overset{[c_i]}{w}$ ~~$(c_i)\ i \in I$~~的凸组合。因此 $B_{G,\ w} \subset B'_{G,\ w}$，从而得到（3）。

根据定义，同调类 $[c_i]$、$i \in I$ 可以表示为 G 中的简单圈。根据引理 6，其数量至多为 $4|V| + 5$，因此 $B_{G,\ w}$ 的极值点数量也至多为 $4|V| + 5$。$[c_i]/w(c_i)$ 的斜率是有理数，因为 $[c_i]$ 属于 $H_1(T;\ \mathbb{Z})$。 □

最后，我们展示如何从 $\mathbb{R}^2$上的多面体范数重构嵌入在环面T 上的加权图（G，w）。关于整数范数和无权图的情形，[Sch93]已有论述。我们的方法有所不同，且无法像 [Sch93]那样给出最优构造（按顶点数量计）。加权情形下的这个最小化问题可能很难。

定理 7。设 $N:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个多面体范数，其所有极值点的斜率均为有理数。设 $\{\pm(p_i, q_i)\}_{i=1,\ \ldots,\ n}$ 为从原点出发、沿单位球 $\{v \in \mathbb{R}^2:\ N(v) \leq 1\}$ 的极值点方向的射线上，距离原点最近的非零整向量集合。则存在一个嵌入环面 T 上的加权四价图 (G, w)，其有 $\sum_{1\leq i<j\leq n} |p_iq_j - p_jq_i|$ 个顶点，使得 $N_{(G,w)} = N$。

证明。令 D_i 为线段 $[(x_i,\ y_i), (x_i + p_i,\ y_i + q_i)]$ 在环面 $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上的投影，其中 $(x_i,\ y_i) \in \mathbb{R}^2$ 的选取使得每个点 T 至多有两条曲线 D_i 经过。曲线 D_i 的并集 G 是嵌入在 T 中的图，具有 $\sum_{1\leq i<j\leq n} |p_iq_j - p_jq_i|$ 四价顶点，每个交点对应 D_i 与 D_j 的一次交点。对 G 的每条边 e，我们关联权重 $w(e) = N(v_e)$，其中 v_e 是 $\mathbb{R}^2$ 中连接 e 的一个提升到 $\mathbb{R}^2$ 后两个端点的向量。

由构造可知 $N_{G,\ w}((p_i,\ q_i)) \leq N((p_i,\ q_i))$，因为类 $(p_i,\ q_i)$ 由与 D_i 的投影相对应的路径实现，其权重为 $N((p_i,\ q_i))$。对于任意两个

相邻的极值点 v 和 v'（它们属于 N 的单位球），因此有 $N(tv+(1-t)v') = tN(v) + (1-t)N(v')$，于是 $N_{G,w}(tv+(1-t)v') \le tN_{G,w}(v) + (1-t)N_{G,w}(v') \le tN(v) + (1-t)N(v') = N(tv+(1-t)v')$。因此 $N_{G,w} \le N$。

我们的目标现在是证明 $N_{G,w} \ge N$。只需证明它对整点成立，也就是对 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 中的元素成立。设 $\alpha = \sum_{e\in E(G)} x_e e \in Z_1(G;\mathbb{Z})$ 满足 $N_{G,w}([\alpha]) = w(\alpha)$。那么 $N_{G,w}([\alpha]) = \sum |x_e| w(e) = \sum |x_e| N(v_e)$，其中最后一个等式来自我们对权重的选择。根据构造，向量 $\sum_{e\in E(G)} x_e v_e \in \mathbb{R}^2$ 等于 $[\alpha]$，若将 $H_1(T;\mathbb{R})$ 与 $\mathbb{R}^2$ 视为相同。因此 $N_{G,w}([\alpha]) = \sum |x_e| N(v_e) \ge N(\sum x_e v_e) = N([\alpha])$，其中该不等式是关于 N 的三角不等式。因此 $N_{G,w} \ge N$，所以范数 $N_{G,w}$ 和 N 相等。 □

4 良好短基

我们对长度谱及其单位球的计算，依赖于首先计算一个**良短基**。我们所说的**短基** 是指一对紧简单圈 (a,b)，它们位于 G 中，且满足 a 是最短的非平凡闭游走，而 b 是满足 $\langle [a],[b]\rangle = 1$ 的最短非平凡闭游走。如果 (a,b) 是 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 的正向基，且 a 与 b 沿一条连通路径相交（该路径也可以退化为一个顶点），则称 (a,b) 为**良好基**。

引理 8. 设 (G,w) 是一个复杂度为 n、胞腔嵌入在环面上的加权图。可以在 $O(n\log n)$ 时间内计算出一个良短基。

证明。 首先，我们按照 Kutz，在 $O(n\log n)$ 时间内计算一条最短的非平凡闭游走 [Kut06，定理 1]。这条闭游走必定是一条紧的简单圈，否则就可以将其分解为更短的非平凡闭游走。我们将一条 a-**直线** 定义为 a 在万有覆盖中的提升的任意双向无限拼接 $q:\mathbb{R}^2 \to T$。由于 a 是紧的，每条 a-直线都是测地线，也就是说，它在提升图 $q^{-1}(G)$ 中任意一对顶点之间都包含一条最短路径。

我们声称，在所有满足 $\mathbf{h}[a],[b]\mathbf{i} = 1$ 的最短非平凡闭游走 b 中，存在一条与 a 沿一条连通路径相交的游走。事实上，设 b' 是一条满足 $\mathbf{h}[a],[b']\mathbf{i} = 1$ 的最短非平凡闭游走。取 $b' \cap a$ 中的一个顶点 v，并令 $\tilde{v} \in q^{-1}(v)$。记 $\tilde{w}$ 为 b' 从万有覆盖中的 $\tilde{v}$ 出发的提升 b' 的终点顶点。由于 a 与 b' 的代数交数为一，顶点 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 连接了两个相邻的 a-直线，记为 L 和 $L+\tau_{b'}$，其中 $\tau_{b'}$ 是与 b' 相关联的覆盖变换。参见图 3。

考虑最后一个交点 $\tilde{v}_1$ 的 b' 与 L。我们将 b' 中 $\tilde{v}$ 与 $\tilde{v}_1$ 之间的子路径替换为沿着 L 的一条不更长的路径。接着，将所得路径中 $\tilde{w}$ 与 $L+\tau_{b'}$ 的第一个交点之间的子路径替换为沿着 $L+\tau_{b'}$ 的一条路径。这样便得到一条~~~~路径 b，使得 $b := q(b)$ 满足该断言。

沿 a 切开 T，得到一个环带 A，其边界分支分别是 a' 和 a''，它们是 a 的两个副本。根据上述结论，b 与 A 相交于一条最短路径，该路径连接 a' 和 a'' 上分别属于同一顶点的两个副本。为了找到这条最短路径，我们首先使用 Klein 的多源最短路径算法，该算法适用于起点位于平面图外面上的情形；参见 [Kle05] 和 [CCE13，定理 3.8]。该算法在 $O(n\log n)$ 时间内构建一种数据结构，使我们能够在 $O(\log n)$ 时间内查询 a' 上任意顶点与 A 上任意其他顶点之间的距离。我们需要查询 $O(n)$ 对副本之间的距离

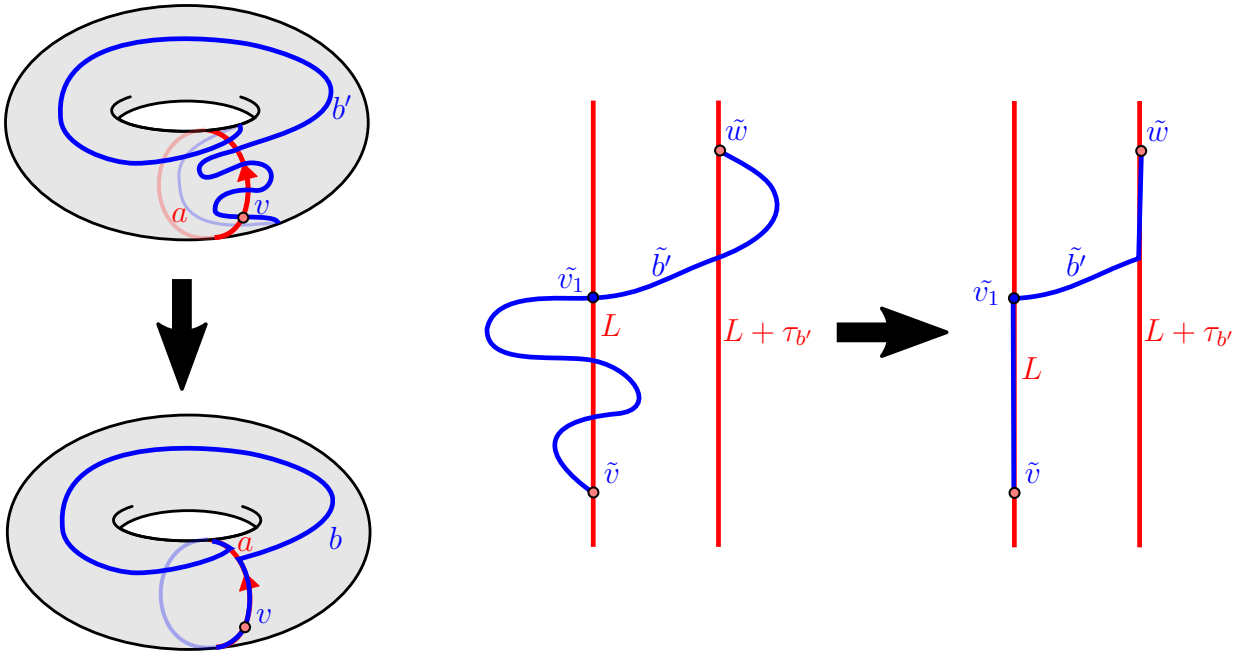

图 3：左：修改 b'，使其与 a 相交于一条连通路径。右：可以强制b' 的提升位于两条相邻的 a直线之间。

a 的顶点副本，并保留一对使距离最小的副本 (u', u'')。为了找到 b 的一个明确代表，我们可以在第二步中以 u' 为起点，在 A 中运行 Dijkstra 算法。最后，为确保 b 沿一条连通路径与 a 相交，我们可以将 u' 与 a' 上某个顶点最后一次出现的位置之间的子路径，替换为 a' 中长度相同的一条子路径，并对 a'' 作类似处理。总运行时间为 $O(n\log\ n)$。将 a 的两个副本重新粘合起来，即得到 b。注意，所得的闭游走必定是简单的。事实上，由于 b 是根据 A 中的一条最短路径计算得到的，可能重复出现的顶点只能是 a' 和 a'' 上同一顶点的副本。然而，这会导出一条连接相应顶点的更短路径，与 (u', u'') 的最小化性质矛盾。 □

我们始终用基（a, b）表示同调类，并将该类视为 $\mathbb{Z}^2$中的一个向量。因此，a和 b的同调类分别对应于（1，0）和（0，1）。

5 计算单位球

这里，我们给出一种算法，用于计算与加权图（G, w）对应的范数$N_{G,\ w}$的单位球$B_{G,\ w}$。令$\mathcal{TSC}_{G,\ w} \subset H_1(T;\ \mathbb{Z})$为在 G中存在紧且简单代表的同调类集合。显然，$\mathcal{TSC}_{G,\ w} \subseteq \mathcal{SC}_G$，并且第4 节中计算得到的 a 和 b 的同调类按构造均属于$\mathcal{TSC}_{G,\ w}$。

在第 3 节中，我们证明了 $B_{G,w}$ 是一个集合 $\{\alpha/N_{G,w}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{SC}_G}$的凸包，该集合包含 $O(|V|)$ 个类。我们将计算 T SC 的一个子集 $H\mathcal{TSC}_{G,w}$，其归一化

向量 $\{\alpha/N_{G,w}(\alpha)\}_{\alpha\in H}$包含 $B_{G,w}$的所有极端点。由于 T SC$_{G,w}$ 中每个元素的坐标必须互素，由 T SC$_{G,w}$ 中的元素定义的方向两两不同，并且按角度自然排序。我们通过二分法结合简单的剪枝策略，遍历整个方向集合来搜索 H 。假设需要探索角扇区 $\angle(\alpha,\beta)$，其中 (α,β) 构成 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 的一组基。二分法将该扇区分成扇区 $\angle(\alpha,\gamma)$ 和 $\angle(\gamma,\beta)$，其中 $\gamma := \alpha+\beta$。注意，(α,γ) 和 (γ,β) 也分别是 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 的基。特别地，γ的坐标互素[1]。由于对于任意非零 $\eta\in H_1(T;\mathbb{Z})$，归一化向量 $\eta/N_{G,w}(\eta)$ 都位于单位球的边界上，因此由 $B_{G,w}$ 的凸性可知，只要$\gamma/N_{G,w}(\gamma)$ 位于线段$[\alpha/N_{G,w}(\alpha)\ \ \beta/N_{G,w}(\beta)]$ 上，该线段就是 $B_{G,w}$ 的一条支撑直线的子集。这个条件有一个简单的判定证书。

命题 9. $\gamma/N_{G,w}(\gamma)$ 位于线段$[\alpha/N_{G,w}(\alpha)\ \ \beta/N_{G,w}(\beta)]$上，当且仅当$N_{G,w}(\alpha+\beta)=N_{G,w}(\alpha)+N_{G,w}(\beta)$。

证明。 若 $N_{G,w}(\alpha+\beta)=N_{G,w}(\alpha)+N_{G,w}(\beta)$，则

$$\frac{\gamma}{N_{G,w}(\gamma)}=\frac{\alpha}{N_{G,w}(\alpha+\beta)}+\frac{\beta}{N_{G,w}(\alpha+\beta)}=\frac{N_{G,w}(\alpha)}{N_{G,w}(\alpha+\beta)}\frac{\alpha}{N_{G,w}(\alpha)}+\frac{N_{G,w}(\beta)}{N_{G,w}(\alpha+\beta)}\frac{\beta}{N_{G,w}(\beta)},$$

并且 $\alpha/N_{G,w}(\alpha)$ 和 $\beta/N_{G,w}(\beta)$ 前面的两个正系数之和为一。反过来，若对某个 $t\in(0,1)$，有 $\gamma/N_{G,w}(\gamma)=t\,\alpha/N_{G,w}(\alpha)+(1-t)\,\beta/N_{G,w}(\beta)$，则同调类在 (α,β) 基下分解的唯一性意味着 $t=N_{G,w}(\alpha)/N_{G,w}(\alpha+\beta)$ 且 $1-t=N_{G,w}(\beta)/N_{G,w}(\alpha+\beta)$，因此 $N_{G,w}(\alpha+\beta)=N_{G,w}(\alpha)+N_{G,w}(\beta)$。 □

根据前面的讨论可知，若 $N_{G,w}(\alpha+\beta)=N_{G,w}(\alpha)+N_{G,w}(\beta)$，则扇区 $\angle(\alpha,\beta)$ 的内部不可能包含任何极值点，因此我们可以在搜索中剪去整个扇区。这便得到了用于计算 1 的伪代码算法 H。下文中，如果 G 中的一对闭合游走均为简单紧圈，它们的同调类构成 $H_1(T;\mathbb{Z})$ 的一组基，且二者还沿一条连通路径相交（该路径也可能退化为一个顶点），我们就称这对闭合游走是**良好的**。

根据范数的次可加性，算法 1 第 1 12 行的检验只有在以下情况下才可能失败：$N_{G,w}([c''])=N_{G,w}([c])+N_{G,w}([c'])$。由命题 9 以及前文关于剪枝策略的讨论可知，在第 14 行添加同调类时，我们不会遗漏上半平面中极值点的任何方向。此外，第 18 行以及单位球中心对称这一事实，保证上述算法确实计算出一组同调类，其归一化向量包含 $B_{G,w}$ 中的极值点。还需说明如何执行第 11 行的计算，并分析算法 1 的复杂度。

引理 10。 设(α,β) 是一个同调基，其中 α 和 β 分别具有代表元 c_α 和 c_β，且它们构成一个良好对。我们可以在 $O(n$对数的对数 $n)$ 时间内计算出 $\alpha+\beta$ 的一个紧代表 $c_{\alpha+\beta}$。在无权情形下，这可简化为 $O(n)$。

证明。 根据假设， c_α 与 c_β 沿着一条连通路径 $p_{\alpha\beta}$相交。根据 $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的方向是否相同，需要考虑两种情况。注意， $p_{\alpha\beta}$ 可以约化为一个顶点。

[1] γ 对应于 α,β 的中项，它出现在法雷数列中。

算法 1 计算 H

要求：一个胞腔嵌入在环面上的加权图（G, w） 确保：一个短基（a, b）以及一个排序列表 $H = [((x_i, y_i)\ c_i, w(c_i))]$，其中 c_i 是 G中的简单紧圈，$(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$ 表示其同调类 $[c_i] = x_i[a] + y_i[b]$，并且$w(c_i) = N_{G,w}([c_i])$。此外，$B_{G,w}$ 的极端点包含在向量集合$\{[c_i]/w(c_i) : i \in \{0, \ldots, size(H) - 1\}\}$ 中。1：按第 4 节所述，计算一个良短基（ a, b ） 2：$h_1 := ((1, 0)\ a, w(a))$ {注意，$N_{G,w}([a]) = w(a)$} 3：$h_2 := ((0, 1)\ b, w(b))$ {并且$N_{G,w}([b]) = w(b)$。} 4：$h_1 := ((-1, 0)\ a, w(a))$ 5：$H := \{h_1, h_2\}$ {初始化 H。} 6：$S := \{\angle(h_1, h_2)\ \angle(h_2, h_1)\}$ {用两个上半象限初始化待探索的扇区集合。} 7：当 $S \neq \emptyset$ 时 8：从 S 中提取并移除一个扇区 $\angle(h, h')$ 9：$(x, \overline{y})\ c, \ell := h$ {注意，$N_{G,w}([c]) = \ell$。} 10：$(x', y')\ c', \ell' := h'$ {类似地，$N_{G,w}([c']) = \ell'$。} 要求：(c, c')是一个良好对 11：计算 γ''的一个紧代表 $c'' := [c] + [c']$，其范数为 $\ell'' := N_{G,w}(\gamma'') = w(c'')$ 12：如果 $\ell'' < \ell + \ell'$ 则 13：$h'' := ((x + x', y + y')\ c'', \ell'')$ 14：将 h'' 插入 H 中，位置在 h 与 h'之间 15：$S := S \cup \{\angle(h, h'')\ \angle(h'', h')\}$ 16：结束如果 17：结束循环 18：$H := H \cup H$ {添加 H 关于原点的对称点。}

—

• 假设 $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的定向相同。因此，我们可以将 $c_\alpha = p_\alpha \cdot p_{\alpha\beta}$和 $c_\beta = p_\beta \cdot p_{\alpha\beta}$ 分别写成 G中的某些路径 p_α, p_β。我们沿着并集 $c_\alpha \cup c_\beta$切开 T，并将其视为 G的一个子图。由此得到一个六边形平面区域 D，其边 p_β,$p_{\alpha\beta}$, p_α, p_β, $p_{\alpha\beta}$, p_α 按顺时针顺序排列在 D 的边界上。见图 4。 T 的万有覆盖由 D 的平移副本铺砌而成，这些副本沿其

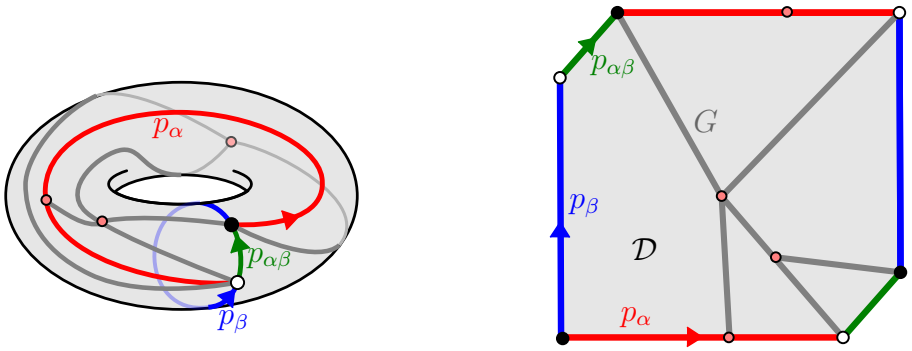

图 4：沿 $c_\alpha \cup c_\beta$切开 T。

各边，使一个区域的边 p 与相邻区域的边 p 粘合。见图5。

与之前一样，令 $\gamma = \alpha + \beta$。由于 (α, γ) 是正向定向的同调基，我们知道 $\mathrm{h}\alpha, \gamma\mathrm{i} = 1$。因此， γ 的任何代表都必须与 c_α相交。令 c_γ 为 γ 的一个紧代表，其在万有覆盖中的提升 $\tilde{c}_\gamma$ 从区域 D_0 的边 p_α 或 $p_{\alpha\beta}$ 上的顶点$\tilde{v}$ 出发，并终止于顶点 $\tilde{w} := \tilde{v} + \tau_\alpha + \tau_\beta$，其中 τ_α 和 τ_β 分别是对应于 α 和 β 的覆盖变换。根据 $\tilde{v}$ 位于 D_0的边 p_α 还是 $p_{\alpha\beta}$ 上，分为两种情况。见图6。

– 如果 $\tilde{v}$ 位于 D_0 的 p_α 侧，那么 $\tilde{w}$ 就属于 D_1 的 p_α 侧：$\equiv \mathrm{D}_0 + \tau_\alpha$。我们声称 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$ 是凸的，即 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$ 中的任意两个顶点都可以通过一条完全包含在 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$中的最短路径连接起来。事实上，由于 c_α 是紧的，其提升的任意双无限拼接都是 T的万有覆盖中 G的加权提升内的一条测地线。同样，c_β 的提升的任意双无限拼接也是一条测地线，因此界定了两个凸半平面。参见图6中的点线和虚线。由此可知，$\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$ 是四个半平面的交集，因此是凸的。因此，我们可以假设 c_γ 在 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$中有一个提升，其端点 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 位于 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$的边界上。我们先介绍一种方法，该方法依赖于 Klein 针对平面图外面上的起点所提出的多源最短路径算法（参见 [Kle05] 和 [CCE13，定理 3.8]），如引理 8 的证明中所述。该算法在 $O(n\log\, n)$ 时间内构建一个数据结构，使得可以在 $O(\log n)$ 时间内查询边界上任意顶点与任意其他顶点之间的距离。我们需要查询 $O(n)$ 对形如 $(\tilde{v}, \tilde{v} + \tau_\alpha + \tau_\beta)$ 的点对，并保留使距离最小的一对 $(\tilde{v}, \tilde{w})$。为了找到 $\tilde{c}_\gamma$ 的一个显式代表，我们可以在第二步中以 $\tilde{v}$ 为起点，在 $\mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$中运行 Dijkstra 算法。这样便得到一个用时 $O(n\log\, n)$ 的算法来计算 $\tilde{c}_\gamma$。或者，我们可以将 D_0 的 p_α 侧与 D_1 的 p_α 侧粘合起来，并搜索所得

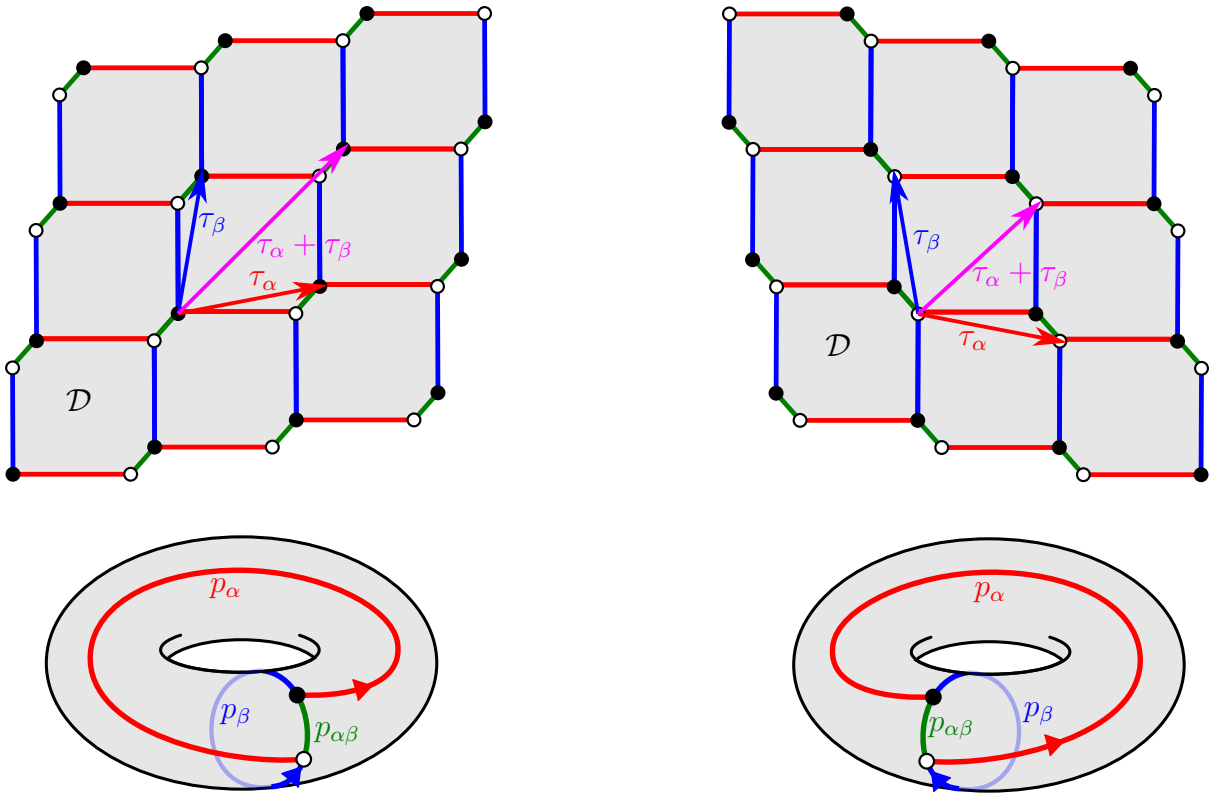

图 5： T的万有覆盖。左： $p_{\alpha\beta}$ 与 c_α 和 c_β的定向一致。右： $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的定向相反。

环带 in $O(n\log n)$ 时间内，如 [DVE10，命题2.7(e)], 所述；或者更高效地，如 $O(n\log\log n)$ 时间内，如 [INSWN11，定理 7]所述。在无权情形下，最短生成圈对应于平面图中的一个最小 (s,t)-割；根据对偶性，它也对应于一个最大 (s,t)-流，可在线性时间内计算 [Wei97，EK13]。

– 如果 $\tilde{v}$ 位于 D_0，的 $p_{\alpha\beta}$ 侧，请注意，该侧与 D_1 相邻，而 $\tilde{w}$位于平移后的 $p_{\alpha\beta}+\tau_\alpha+\tau_\beta$上，后者也与 D_1 相邻。并集$p_{\alpha\beta}\cup\mathsf{D}_1\cup(p_{\alpha\beta}+\tau_\alpha+\tau_\beta)$是凸集，因为它是 D_1 的四个支撑半平面的交集。参见图6左下角。因此，我们可以假设 $\tilde{c}_\gamma$ 经过 D_1 中（ p_α 和 p_β 的提升）的公共原点 $\tilde{v}_0$ 。接着，我们可以将 $\tilde{c}_\gamma$ 的原点改为 $\tilde{v}_0$ ，使得 $\tilde{c}_\gamma$ 由 D_1 中 $\tilde{v}_0$ 与 $\tilde{w}_0$ 之间的一条最短路径和 $p_{\alpha\beta}$的一条提升拼接而成，其中 $\tilde{w}_0$ 是 D_1 中 p_α 和 p_β 的公共终点。这条最短路径可以用 Dijkstra 算法在$O(n\log n)$时间内计算，也可以用 Henziger等人的算法 [HKRS97]在线性时间内计算。

- 现在考虑 $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 中的方向与 c_β不同的情形。因此，我们可以像图 $c_\alpha = p_\alpha\cdot p_{\alpha\beta}$和 $c_\beta = p_\beta\cdot p_{\alpha\beta}$所示那样写出5右图。与前一种情形一样，$c_\gamma$ 必须与 c_α 相交，并且必须有一个提升 $\tilde{c}_\gamma$ ，它从区域 p_α 或$p_{\alpha\beta}$ 的边上的一个顶点出发，其中该区域为$\mathcal{D}_0$。这又产生了图7所示的两种情形。我们可以

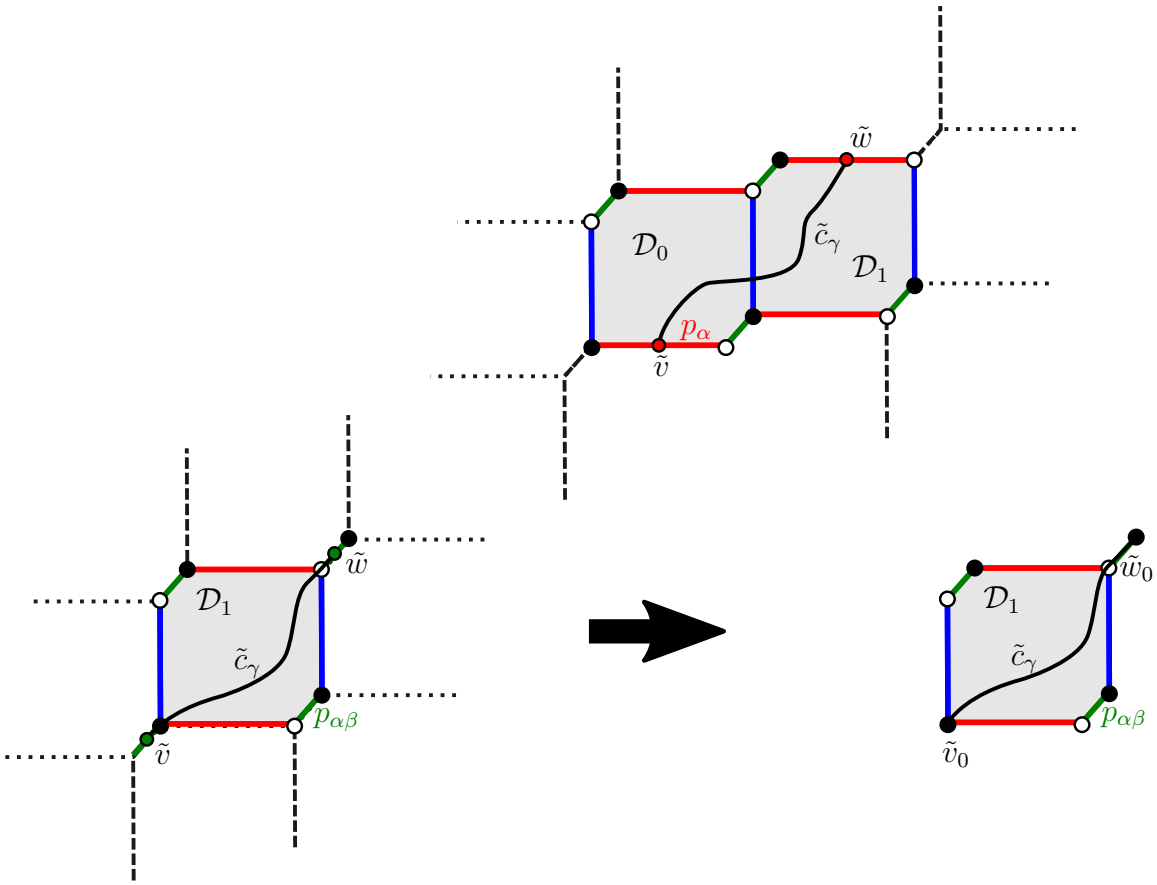

图6：上：如果 c_γ 与 p_α 相交，那么 c_γ 在 $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ 中有一个提升。点线和虚线是所考虑区域的支撑测地线。下：当 c_γ 与 $p_{\alpha\beta}$ 相交时，它有一个提升包含在 $\mathcal{D}_1$ 与 $p_{\alpha\beta}$ 的两个提升的并集中。我们可以将该提升的原点移至 $\tilde{v}_0$。

像之前一样，在 $O(n \log\log n)$ 时间内计算 γ 的一个紧代表；在无权情形下，则可在线性时间内完成。

在所有情形下，我们都可以在 $O(n \log\log n)$ 时间内计算出 γ 的一个紧代表；在无权情形下，则可在线性时间内完成。 □

如引理 10 中所述，令 (α, β) 为一个同调基，使得 α 和 β 分别有代表元 c_α 和 c_β，且它们构成一个良好对。我们将 **直线** 定义为在 T 的万有覆盖中，由 c_α 或 c_β 的提升双向无限拼接而成的任意曲线。

引理11。 *在引理 $c_{\alpha+\beta}$ 10 中计算出的紧代表 可以在$O(n)$ 时间内作出修改，以满足以下附加性质（P）：在万有覆盖中，$c_{\alpha+\beta}$ 的任意提升与任意直线的交集要么为空，要么是一个连通子路径。*

证明。 像之前一样，将 $\gamma = \alpha + \beta$ 写作。由于 c_α 和 c_β 都是紧的，每条直线都必须是测地线。我们考虑用于计算引理 $\tilde{c}_\gamma$ 中的凸区域所相交的至多五条直线，见 10。依次对每条直线，求出 $\tilde{c}_\gamma$ 与该直线

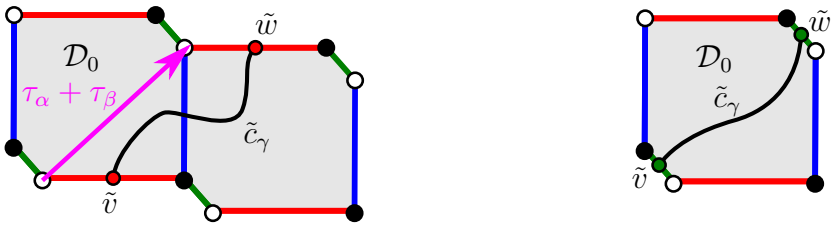

图7：左图，$\tilde{c}_\gamma$ 的源顶点位于区域 $\mathcal{D}_0$ 的边 p_α 上。因此，其终点顶点位于 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 + \tau_\alpha$ 的边界上。由于 $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ 是凸的，它包含 γ 的某个紧代表的提升。右图，$\tilde{c}_\gamma$ 的源顶点位于区域 $\mathcal{D}_0$ 的边 $p_{\alpha\beta}$ 上。

的第一个和最后一个交点，并将 $\tilde{c}_\gamma$ 中这两个交点之间的子路径替换为该直线上连接相同顶点的子路径。这不会改变 c_γ的长度。我们仍将c_γ 得到的闭游走记作此符号。见图 8。当 $\tilde{v}$ 的源点 $\tilde{c}_\gamma$ 位于 p_α上时，如

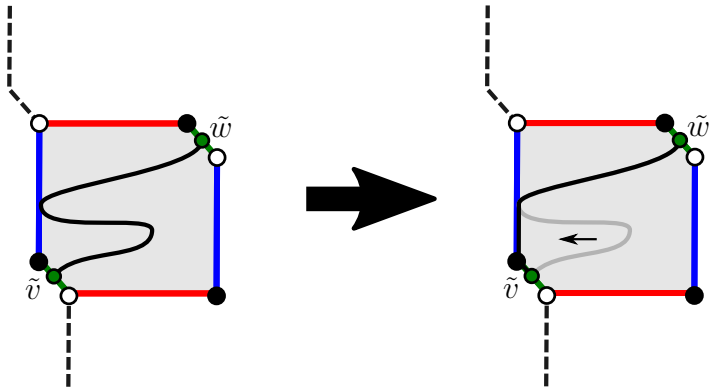

图8：移除直线与 c_γ 的提升之间的双边形。

在图 6上方和图 7左侧，仍有可能出现另一条 c_γ 的提升与分隔 $\mathcal{D}_0$ 和 $\mathcal{D}_1$ 的直线相交于两个连通分支的情况。图 9 给出了一个例子，其中画出了 c_γ 的两条连续提升。这表明可以选择 c_γ 的源顶点，使其位于 $p_{\alpha\beta}$ 上，于是我们又回到了图 6下方和图7右侧所示的情况。

或者，我们可以按照图 9 进行最后一次子路径替换，从而得到一个满足 c_γ 的代表 P。这些 $O(1)$ 次子路径替换需要线性时间。

请注意，在处理 $\tilde{c}_\gamma$ 与一条新直线 l的交点时，我们不会破坏它与任何先前处理过的直线 l'的交点的连通性。事实上，设 d'为一条连通路径 $\tilde{c}_\gamma \cap l'$，并设 d 为 $\tilde{c}_\gamma$ 上位于 $\tilde{c}_\gamma$ 与 l 的第一个和最后一个交点之间的子路径。如果 l 与 l' 不相交，那么 d' 要么位于d内部，要么位于其外部。处理直线 l后，前一种情况下，$\tilde{c}_\gamma \cap l'$ 变为空集；后一种情况下，这个交点则保持不变。

如果 l 与 l' 相交，它们的交集 $l \cap l'$ 是一条连通路径，也可能退化为一个顶点。根据路径 d' 与 d的相对位置，需要考虑以下几种情况：

- 图 10，左上：如果 d' 位于 d之外，那么 $\tilde{c}_\gamma \cap l'$ 不会因将直线 l纳入考虑而受到影响；

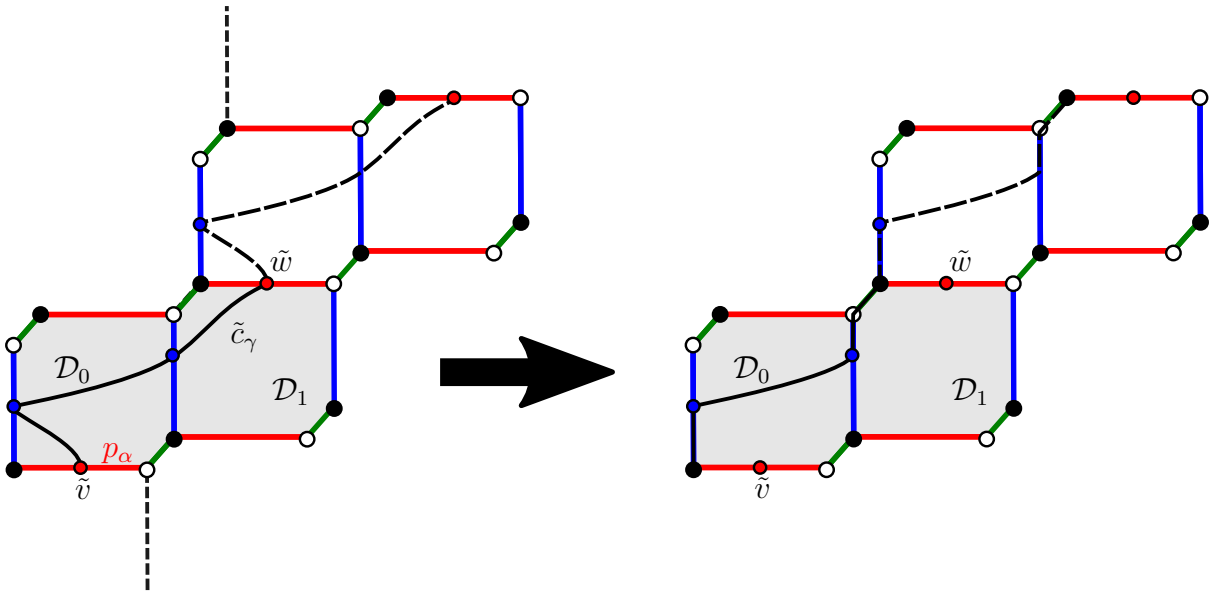

图9：直线与 c_γ 的提升之间的双边形，该双边形仅在移动源顶点时才会出现。

- 图 10，右上：如果 d' 包含 d，那么 d 的端点属于 $l \cap l'$，因此d 本身就是 $l \cap l'$ 的子路径，无需进行任何更改；
- 若 d' 包含于 d，则有两种子情况：– 图 10，左下：若 d 的端点位于直线 $l \cap l'$ 的一侧，则直线 l上的交点 $\tilde{c}_\gamma \cap l'$ 将变为空集；– 图 10，右下：若 d 的端点位于 $l \cap l'$的不同侧，则 $\tilde{c}_\gamma \cap l'$ 将变为 $l \cap l'$；

- 图 10，最右侧：若 d' 的一个端点包含于 d，而另一个不包含于其中，则位于内部的端点属于 $l \cap l'$，因此 $\tilde{c}_\gamma \cap l'$ 将变为 $d' \setminus d$ 与 $l \cap l'$的一个子路径的拼接。

□

引理*12*。设 (α, β) 是一个同调基，使得 α 和 β 分别有代表元 c_α 和 c_β，且它们构成一个良好对。若 $N_{G,w}(\alpha+\beta) < N_{G,w}(\alpha) + N_{G,w}(\beta)$，则引理*11*中计算得到的紧代表 $c_{\alpha+\beta}$ 满足 $(c_\alpha, c_{\alpha+\beta})$ 和 $(c_{\alpha+\beta}, c_\beta)$ 均为良好对。

证明。我们首先证明 c_γ 是简单的，其中通常 $\gamma = \alpha + \beta$。反设不然。于是，引理11中考虑的 c_γ 的提升 $\tilde{c}_\gamma$ 必定包含两个顶点 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}'$，它们在 G 中投影到同一个顶点 u，并且满足 $\{\tilde{u}, \tilde{u}'\} \neq \{\tilde{v}, \tilde{w}\}$，其中 $\tilde{v}$和 $\tilde{w}$分别是 $\tilde{c}_\gamma$的起点顶点和终点顶点。特别地，对某个覆盖变换 τ，有 $\tilde{u}' = \tilde{u} + \tau$。因此，我们有分解 $\tilde{c}_\gamma = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$，其中$p_1$ 是从 $\tilde{v}$ 到 $\tilde{u}$的路径，p_2 是从 $\tilde{u}$ 到 $\tilde{u}'$的路径，p_3 是从 $\tilde{u}'$ 到 $\tilde{w}$的路径，并且这些路径中至多有一条约化为一个顶点。根据引理 10 的证明，需要考虑四种情形，分别对应图6的上、下两种情况，以及图7的左、右两种情况。

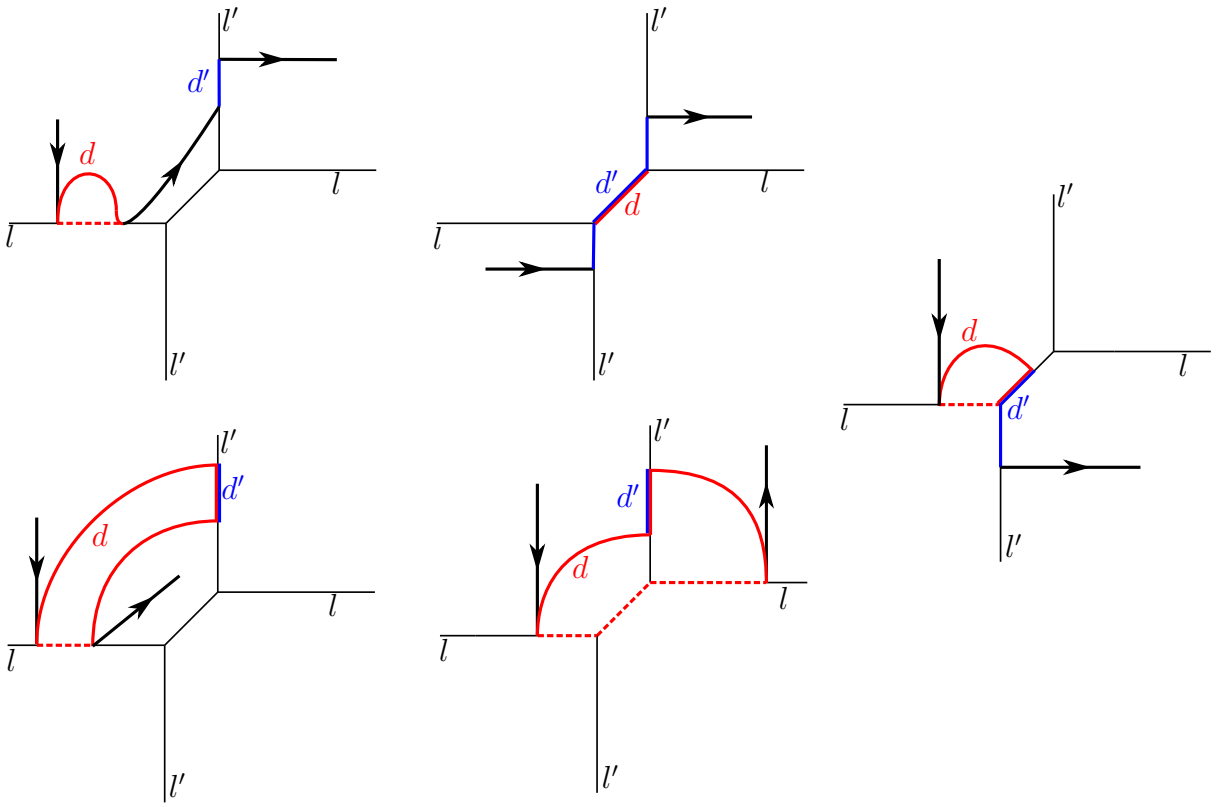

图10： l 和 l' 沿一条连通路径相交。路径 $\tilde{c_\gamma}$ 以粗体显示。处理直线 l后， d 被红色虚线路径替代。

- 在图 6的下方情形以及图 7的右侧情形中，我们只能有 $\tau = \tau_\lambda$ 对于$\lambda \in \{0, \pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm(\alpha - \beta)\}$ 否则，包含 $\tilde{c_\gamma}$的区域将与其经 τ平移后的区域不相交。下面证明，这些 τ 取值中的每一个都会导致矛盾。

  – 不能有 $\tau = 0$，因为这将意味着 $\tilde{u} = \tilde{u}'$ ，这与最短路径 $\tilde{c_\gamma}$的简单性相矛盾。– 如果 $\tau = \pm\tau_\gamma$，那么 p_2 或 p_2 与 γ 同调，但比 $\tilde{c_\gamma}$ 更短，这与假设 c_γ 是紧的相矛盾。– 如果 $\tau = \overline{\tau_\alpha}$，那么令 $p = p_1 \cdot (p_3 - \tau)$，我们有 $q(p_2)$与c_α 同调，且 $q(p)$与 c_β同调。（回想一下， $q: \mathbb{R}^2 \to T$ 是环面上的万有覆盖投影。）由此可推得 $w(p_2) \geq N_{G,w}(\alpha)$，且 $w(p) \geq N_{G,w}(\beta)$。于是，由 c_γ 的紧性可知

$$N_{G,w}(\gamma) = w(c_\gamma) = w(p_2) + w(p) \geq N_{G,w}(\alpha) + N_{G,w}(\beta).$$

  然而，这与引理中的假设矛盾。

  – 可以用类似的方法排除 $\tau = \tau_\beta$ 这种情况。

  – 若 $\tau = -\tau_\alpha$ 那么我们必须有 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}'$ 分别位于包含 $\tilde{c_\gamma}$一侧和 p_β一侧的区域。见图 11。由此可知， $p_1 \cdot p_2$ 有其

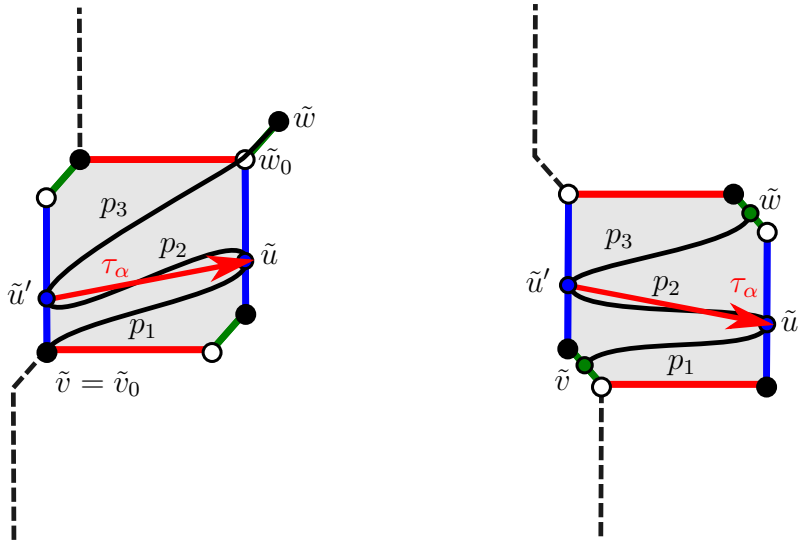

图11： $\tau = -\tau_\alpha$的情形。左： $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的定向相同。右： $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的定向相反。

端点 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{u}'$ 位于同一直线上，而中间顶点 $\tilde{u}$不在这条直线上。这与引理11的性质（P）相矛盾。情形 $\tau = -\tau_\beta$同样会导致矛盾。– 最后，若 $\tau = \tau_{\alpha-\beta}$ 或 $\tau = \tau_{\beta-\alpha}$，则只能出现图6下方的情形，因为在图7右侧的情形中，D_0与 $D_0+\tau$不相交。在前一种情形中，$\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}'$ 必须位于区域的边 $p_{\alpha\beta}$ 或 $p_{\alpha\beta}$ 上。将源点 $\tilde{v}$ 平移到 $\tilde{u}$的一个平移像后，我们有：要么 $[q(p_1)] = \alpha$ 且 $[q(p_2 \cdot p_3)] = \beta$，要么 $[q(p_1)] = \beta$ 且 $[q(p_2 \cdot p_3)] = \alpha$。在这两种情形下，我们都可以像处理 $\tau = \tau_\alpha$那样论证，这与假设 $N_{G,w}(\alpha+\beta) < N_{G,w}(\alpha) + N_{G,w}(\beta)$相矛盾。

- 在图 6上方和图 7左侧的情形中，我们可能只有 $\tau = \tau_\lambda$ for$\lambda \in \{0, \pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm(\alpha-\beta)\ \pm 2\alpha, \pm(2\alpha-\beta)\ \pm(2\alpha+\beta)\}$，否则包含 $\tilde{c}_\gamma$ 的区域$\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ 与其平移 τ后所得区域不相交。我们再次证明， λ 的每个可能取值都会导致矛盾。

– 对于 $\lambda \in \{0, \pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$ 的情况 $\tau = \tau_\lambda$，可以用与上述相同的论证排除。我们也可以用与 $\tau = \tau_{-\alpha}$ 类似的论证排除 $\tau = \tau_{-2\alpha}$。 – 对于情况 $\tau = \tau_{2\alpha}$，简单应用若尔当曲线定理可知，p_2 和 $p_2 + \tau_\alpha$ 必相交，设交点为顶点 $\tilde{x}'$。于是 $\tilde{x} := \tilde{x}' - \tau_\alpha$ 属于 $(p_2 + \tau_\alpha) - \tau_\alpha = p_2$。因此，通过将 $\tilde{u}$、$\tilde{u}'$ 替换为 $\tilde{x}$、$\tilde{x}'$，我们可以归结为情况 $\tau = \tau_\alpha$ 或 $\tau = -\tau_\alpha$（取决于 $\tilde{x}$、$\tilde{x}'$ 中哪一个沿 $\tilde{c}_\gamma$ 先出现）。见图12。 – 若 $\tau = \tau_{\alpha-\beta}$，则 $\tilde{u}'$ 必须与 $\tilde{v}$ 位于同一条 a 直线上，而 $\tilde{u}$ 位于经过 $\tilde{w}$ 的另一条 a 直线上。因此， $p_1 \cdot p_2$ 的端点位于同一直线上，但有一个中间顶点位于另一条直线上，这与引理11的性质 P 矛盾。图13展示了图6上方的情形，其中 $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β 中的方向相同。

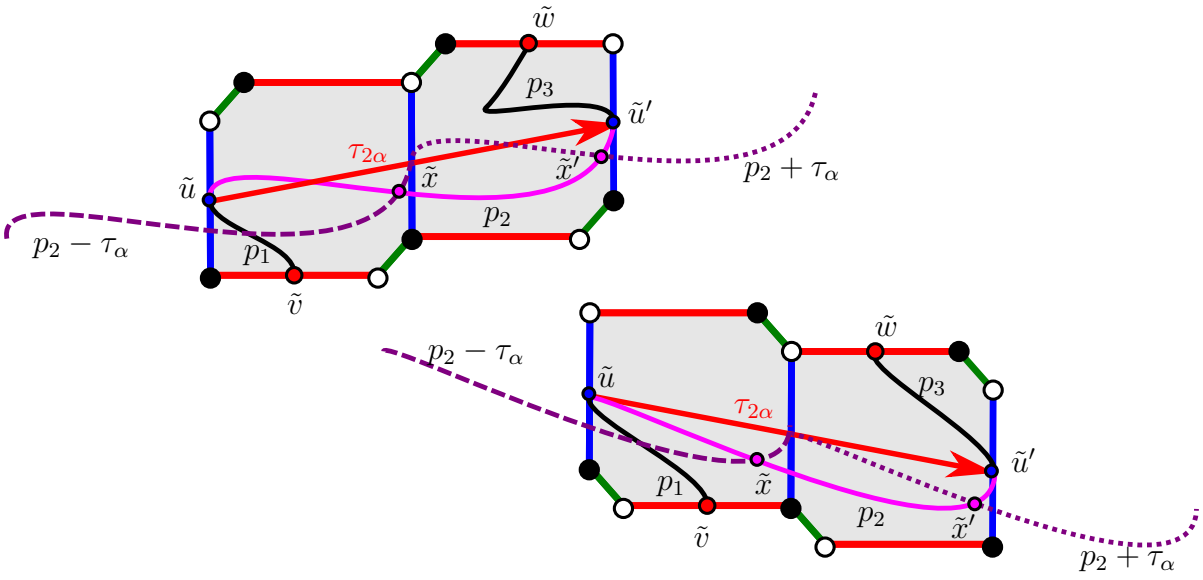

图12：情形 $\tau = \tau_{2\alpha}$。左： $p_{\alpha\beta}$ 在 c_α 和 c_β中的定向相同。右： $p_{\alpha\beta}$在 c_α 和 c_β中的定向相反。

– 若 $\tau = \tau_{\beta-\alpha}$，则 $\tilde{u}$ 必须与 $\tilde{v}$ 位于同一条 a 直线上，且 $\tilde{u}$ 与 $\tilde{w}$ 位于同一条 a 直线上。性质（P）迫使 p_1 （以及 p_3）与边 $p_{\alpha\beta}$ 相交。因此，我们回到先前讨论过的图6下方和图7右侧的情形。– 若 $\tau = \pm\tau_{2\alpha-\beta}$，则只能出现图6下方的情形，因为在图7右侧的情形中，$D_0 \cup D_1$ 与 $D_0 \cup D_1 + \tau$ 不相交。于是，对于 τ 的两种取值， $\tilde{c}_\gamma$ （的提升）都必须经过 $p_{\alpha\beta}$ ，我们又回到了图6下方的情形。– 最后， $\tau = \pm\tau_{2\alpha+\beta}$ 只能出现在图7左侧的情形中；与前一种情况类似， $\tilde{c}_\gamma$ 必须经过 $p_{\alpha\beta}$ ，我们又回到了图7右侧的情形。

因此我们证明了 c_γ 是一个简单圈。还需检查它与 c_α 和 c_β 各自沿一条连通路径相交。包含 $\tilde{c}_\gamma$ 的凸区域由一个或两个区域组成，在图 6 和 7所示的每种情形中，它都恰好与两条水平线相交。根据性质（P）， $\tilde{c}_\gamma$ 与这两条线的交集各自连通，且它们的投影共享同一个顶点 v，即 c_γ的源顶点。因此， $c_\gamma \cap c_\alpha$ 是连通的。对于图 6下方以及图 7右侧的情形，我们也可以类似地论证 $c_\gamma \cap c_\beta$ 是连通的。在剩下的两种情形中，如图 6上方以及图 7左侧所示，如果 $\tilde{c}_\gamma$ 与两条垂直线相交，那么考虑 $\tilde{c}_\gamma$ 的两个相邻提升，如图 9 所示，我们会得到它与中间垂直线的交集不连通。然而，这与性质（P）矛盾。

□

由于在算法 1 中，我们仅在 $\alpha + \beta$ 加入到 H 的第 14 行，且此时 α、β 已在 H中，并且具有 $N_{G,\,w}(\alpha + \beta)$、$< N_{G,\,w}(\alpha) + N_{G,\,w}(\beta)$，引理 12 立即可得

推论13。 $H \subset TSC_{G,\,w} \subset SC_G$

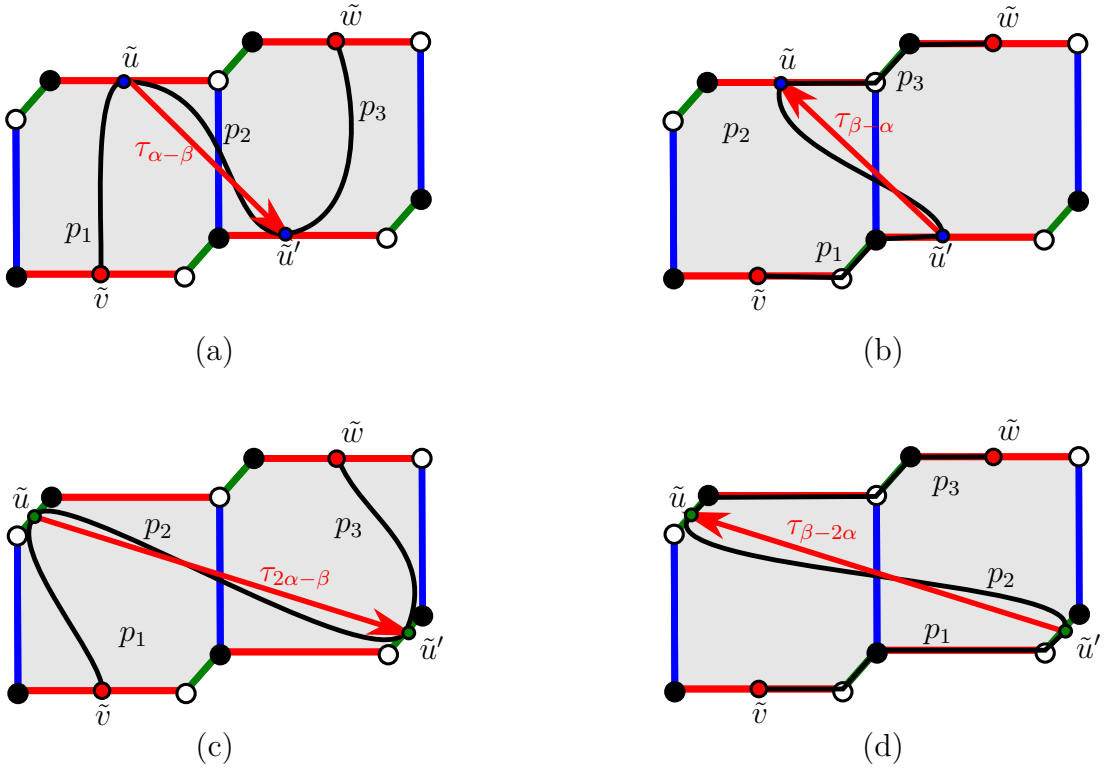

图13：上方图的情形6 中 $\tau = \tau_{\alpha-\beta}$ (a)， $\tau = \tau_{\alpha-\beta}$ (b)， $\tau = \tau_{2\alpha-\beta}$ (c)，以及$\tau = \tau_{\beta-2\alpha}$ (d)。

推论14。算法*1*中从第 *7*行到第 *17*行的 *while* 循环迭代次数至多为 $TSC_{G,\ w}$大小的两倍。

证明。 while 循环的迭代次数 N 受限于第8行中扇区从 S 移除的次数。该次数至多为两次（S的初始大小），再加上第15行中插入 S 的扇区数。后一个数量本身是第14行插入 H 的三元组数量的两倍（不计第5行最初放入 H 的两个类）。注意，插入的三元组两两不同。由推论13 可得 $N \le 2 + 2(|H| - 2) \le 2|\mathcal{TSC}_{G,\ w}|$。

□

命题 15。算法*1* 的运行时间为 $O(n^2 \log\log n)$。在无权图的情形下，运行时间可降至 $O(n^2)$。

证明。从推论14可知，算法 1 在第 7 行和第 17 行之间进入 while 循环的次数至多为 $2|\mathrm{TSC}_{G,w}|$ 。根据引理 6，这对应于 $O(n)$ 次迭代。根据引理 10 和引理 11，每次迭代执行第 11 行需要 $O(n\log\log\ n)$ 时间；在无权图的情形下则需要线性时间。引理12保证第 15 行只存储良好对，因此执行第 11 行的要求始终得到满足。此外，第 18 行需要 $O(|H|) = O(n)$ 时间。由于其他每一行的执行时间均为常数，算法 1 的总运行时间为 $O(n\cdot\ n\log\log\ n + n) = O(n^2\log\log\ n)$。在无权情形下，运行时间可降至 $O(n^2)$。

□

We a现在我们可以证明，单位球 $B_{G,\ w}$可以在 $O(n^2\log\log n$)

时间内计算出来。与之前一样，在无权情形下可以省略 $\log\log n$ 因子。此后我们将不再提及这一点。

定理 *2* 的证明。 命题 15 指出，我们可以在 $O(n^2 \log\log n)$ 时间内计算一个包含 $O(n)$ 个向量及其范数的列表 H，其中包含单位球 $B_{G,w}$ 极值点的方向。将这些向量归一化后，我们可以使用任意经典凸包算法，在 $O(n\log\ n)$ 时间内计算它们的凸包。（事实上，我们可以轻松维护 H 中元素的角度排序，从而在线性时间内计算其归一化向量的凸包。）总之，这就得到了一种用 $O(n^2 \log\log n)$ 时间计算 $B_{G,w}$ 的算法。

□

为了便于后续引用，我们证明 H 中元素的有序集合具有一项有用性质。具体而言， H 中任意两个相邻的圈定义了一个幺模 锥。

引理 16. 由算法 $H = [((x_i, y_i)\ c_i, w(c_i))]$ ***1*** 计算得到的排序列表 中的射线 $\mathbb{R}_{\geq 0} c_i$ 按角度循环排序，并且 $\langle [c_i], [c_{i+1}] \rangle = 1$ 对所有 i均成立。特别地，半开锥 $C_i = \mathbb{Z}_{\geq 0}[c_i] + \mathbb{Z}_{>0}[c_{i+1}]$ 构成了 $H_1(T; \mathbb{Z})$ 的一个划分。

证明。 射线按角度排序，这可由归纳法以及在h'' 和 h 之间插入 h' 于直线 14得到。事实上，对应于 h'' 的射线位于对应于 h 和 h'的射线之间。此外，引理 12保证相应的同调类对 $([c], [c''])$ 和 $([c''], [c'])$ 都是良好的，因而构成同调基。当然，相应锥中的所有格点坐标均为非负。

□

6 计算长度谱

现在我们给出定理 3 的证明。

证明。 首先，如第 4 节和第 5节所述，我们用时 $O(n^2 \log\log n)$ 计算出一个短基 (a, b) 和一个三元组列表 H，其中每个三元组的形式为 $((x_i, y_i)\ c_i, w(c_i))$，这里 c_i 是 G 中的一个简单紧圈，$(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$ 表示其同调类 $[c_i] = x_i[a] + y_i[b]$，而 $w(c_i) = N_{G,w}([c_i])$。由引理 16，这给出了 $H_1(T; \mathbb{Z})$ 的一个半开锥划分 $C_i = \mathbb{Z}_{\geq 0}[c_i] + \mathbb{Z}_{>0}[c_{i+1}]$。注意，根据构造，$N_{G,w}$ 在每个 C_i 上都是线性的。

接下来，我们按递增顺序迭代地计算长度谱中的值，并将它们存入列表 Λ，该列表最初为空。直观地说，该算法的做法是通过增大 λ-球 $\lambda B_{G,\ w}$ 的半径，从 $\lambda = 0$ 开始扫描$H_1(T; \mathbb{Z})$。每扫描到一个格点，就将其范数 λ 加入 Λ。实际上，我们会并行扫描这些锥 C_i。

根据引理 16，半开锥 C_i 将球 $\lambda B_{G,w}$ 分解为扇区 $C_i^\lambda := \lambda B_{G,w} \cap C_i$。对于每个扫描值 λ 和每个 i，我们将 C_i^λ的两个有序子集分别存入双端队列（双端队列） F_i^h和 F_i^v，它们分别对应水平扫描前沿和垂直扫描前沿。形式化地， $F_i^h = ((x_1^h, y_1^h) \ldots, (x_{i_h}^h, y_{i_h}^h))$，其中每个 $(x_j^h, y_j^h) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{>0}$满足 $x_j^h[c_i] + y_j^h[c_{i+1}] \in C_i^\lambda$，且 $(x_j^h + 1)[c_i] + y_j^h[c_{i+1}] \notin \lambda B_{G,w}$。此外， F_i^h中的同调类按其范数递增排序。类似地， $F_i^v = ((x_1^v, y_1^v) \ldots, (x_{i_v}^v, y_{i_v}^v))$包含列表（按范数递增排序），其中列出 $\lambda B_{G,w}$ 中所含同调类的坐标，但这些类经$[c_{i+1}]$ 平移后的范数大于 λ。初始时， F_i^h是空双端队列，而 F_i^v包含零类的坐标 $(0, 0)$。见图 14

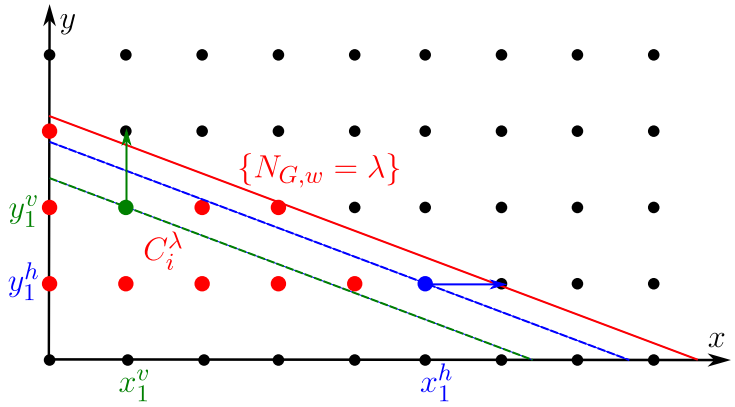

图 14：图中，我们用坐标为（x，y）的点表示同调类 $x[c_i]+y[c_{i+1}]$。红色实线表示范数为 λ 的点。虚线对应于点（x_1^h，y_1^h）和（x_1^v，y_1^v）的范数。

断言17. 范数最小的同调类在 $C_i \setminus C_i^\lambda$ 中的$([c_i], [c_{i+1}])$ 基坐标要么是 $(x_1^h + 1, y_1^h)$，要么是 $(x_1^v, y_1^v + 1)$。

断言的证明。设 α 是 $C_i \setminus C_i^\lambda$ 中范数最小的同调类。若 $\alpha - [c_{i+1}] \in C_i$，则根据范数在 C_i 中的线性性，我们有

$$N_{G,w}(\alpha - [c_{i+1}]) = N_{G,w}(\alpha) - N_{G,w}([c_{i+1}]) < N_{G,w}(\alpha).$$

由 α 的范数的最小性可知 $\alpha - [c_{i+1}] \in C_i^\lambda$。若 $\alpha - [c_{i+1}] \notin C_i$，则必有 $\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}[c_i] + [c_{i+1}]$。由此可得 $\alpha - [c_i] \in C_i$，并且

$$N_{G,w}(\alpha - [c_i]) = N_{G,w}(\alpha) - N_{G,w}(([c_i]) < N_{G,w}(\alpha),$$

这意味着 $\alpha - [c_i] \in C_i^\lambda$。因此，$\alpha$ 的形式为 $\beta + [c_i]$ 或 $\beta + [c_{i+1}]$，其中 $\beta \in C_i^\lambda$。换言之，α 的坐标要么具有形式（$x+1$，y），其中（x，y）$\in F_i^h$；要么具有形式（x，$y+1$），其中（x，y）$\in F_i^v$。当然，由于 α 在 $C_i \setminus C_i^\lambda$ 中范数最小，因此在前一种情况下必有（x，y）$=$（x_1^h，y_1^h），而在后一种情况下必有（x，y）$=$（x_1^v，y_1^v）。 □

现在我们可以描述扫描算法了。我们将扇区 C_i^λ 的索引 i 存储在一棵（平衡）二叉搜索树 $\mathcal{S}$ 中，该树支持对数时间内的最小值提取、删除和插入。用于树中比较的扇区 C_i^λ 的键，是 $C_i \setminus C_i^\lambda$ 中同调类的最小范数。根据前面的断言，可以通过 F_i^h 和 F_i^v 在常数时间内计算出该值，具体如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{key}[i] &= \min(N_{G,w}([(x_1^h+1)c_i + y_1^h c_{i+1}]), N_{G,w}([x_1^v c_i + (y_1^v+1)c_{i+1}])) \\ &= \min((x_1^h+1)w(c_i) + y_1^h w(c_{i+1}), x_1^v w(c_i) + (y_1^v+1)w(c_{i+1}))\end{aligned}$$

假设我们已经计算出长度谱的前 m 个值，即 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m)$，现在要计算 λ_{m+1}。我们从 $\mathcal{S}$ 中提取并移除扇区 $C_i^{\lambda_m}$，其$i = \mathcal{S}$。min() 最小，也就是说，其中包含范数最小的非扫描同调类。因此，我们有$\lambda_{m+1} = \mathsf{key}[i]$。我们按如下方式更新 F_i^h和 F_i^v。如果 $\alpha = (x_1^h + 1)[c_i] + y_1^h[c_{i+1}]$，那么我们

从 F_i^h底部移除 (x_1^h, y_1^h)，并将 $(x_1^h + 1, y_1^h)$ 推入其顶部。同样，如果$\alpha = x_1^v[c_i] + (y_1^v + 1)[c_{i+1}]$，我们就从 F_i^v底部移除 (x_1^v, y_1^v)，并将 $(x_1^v, y_1^v + 1)$ 推入其顶部。如果 $\alpha = (x_1^h + 1)[c_i] + y_1^h[c_{i+1}] = x_1^v[c_i] + (y_1^v + 1)[c_{i+1}]$，则两者都执行。显然，更新后的双端队列包含相对于扫描值 $\lambda = \lambda_{m+1}$所需的格点。随后，我们将 i 及其由 F_i^h和 F_i^v的更新所产生的新键插入 S，以更新 S。最后，我们将 λ_{m+1}添加到 Λ。注意，长度谱中的某些值的重数可能大于一。在这种情况下，更新扫描前沿时，λ 会在若干次迭代中保持不变（直至达到更大的长度谱值）。根据推论13和定理 1，S 包含 $O(n)$个项。因此，一个扫描步骤的运行时间为 $O(\log n)$，用于与 S 交互，另加更新 F_i^h、F_i^v和 Λ的常数时间。由此，我们可以在 $O(n^2 \log\log n + k \log\ n)$ 时间内计算长度谱的前 k 个值。

□

注 18. 请注意，定理 *3* 证明中描述的算法不仅可以计算长度谱的前 k 个值，还可以额外计算出它们的同调类，无需增加任何成本。

7 判定长度谱是否相等

现在，我们将算法 1 应用于以下判定问题：给定嵌入在环面上的两个加权图（G，w）和（G'，w'），它们的长度谱是否相同？这个问题实际上涵盖两个问题：标记长度谱是否相等，以及无标记长度谱是否相等。正如我们将要说明的，前者可归约为多面体范数的线性等价问题，该问题有一个直接的平方时间解法。相比之下，后者可归约为多项式恒等式检验问题，而目前已知该问题仅属于 co-RP 复杂度类。特别是，这个问题属于 co-NP。不过，对于无权图而言，其复杂度是确定性多项式时间。

我们首先旨在比较作为从 $H_1(T; \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ 映射的长度谱。给定嵌入在环面 T 和 T' 上的两个加权图（G，w）和（G'，w'）。如果存在一个同胚ϕ：$T \to T'$，使得对所有 $\gamma \in H_1(T; \mathbb{Z})$，都有 $N_{G',\ w'}(\phi_*(\gamma)) = N_{G,\ w}$，那么我们称（$G$，$w$）和（$G'$，$w'$）具有相同的标记谱，其中 $\phi_*(\gamma)$ 表示类 $[\phi(c)]$，而 c 是 γ 的曲线代表元。

定理 19。 设(G, w) 和(G', w') 是胞腔嵌入在环面上的两个加权图T 和 T'，且其复杂度均不超过 n。那么存在一种算法，能够在 $O(n^2 \log\log\ n)$时间内判断(G, w) 和(G', w') 是否具有相同的标记谱。

证明。 根据定理2，可以在 $O(n^2 \log\log n)$ 时间内计算单位球 $B_{G,w}$ 和 $B_{G',w'}$ 。同胚 ϕ：$T \to T'$会诱导出一个可逆线性同构 ϕ_*：$H_1(T; \mathbb{Z}) \to H_1(T'; \mathbb{Z})$；反过来，给定一个线性同构 $H_1(T; \mathbb{Z}) \to H_1(T'; \mathbb{Z})$，则存在一个诱导出该同构的同胚。因此，利用短基 (a, b) 和 (a', b')，将 $B_{G,w}$ 和 $B_{G',w'}$ 视为 $\mathbb{R}^2$ 的子集后，我们只需解决以下问题：寻找一个矩阵 $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，使得 $M \cdot B_{G,w} = B_{G',w'}$。

首先注意，线性映射会保留凸集的极值点。特别地，如果带标记谱相同，那么 $B_{G、w}$ 和 $B_{G'、w'}$的极值点数目必定相同。因此，根据定理 $B_{G、w}$ 和 $B_{G'、w'}$ 有 $t = O(n$ 个顶点这一点，我们可以假设 1。

现在，固定 $B_{G、w}$上的两个相邻顶点 v_0、 v_1 。对于 $B_{G'、w'}$ 上的每一对相邻顶点（按顺时针或逆时针顺序） v'_0、 v'_1 ，计算满足 $Mv_0 = v'_0$ 和 $Mv_1 = v'_1$ 的矩阵 M 。如果该矩阵的行列式为 ± 1 ，且 $M \cdot B_{G、w} = B_{G'、w'}$（这可以通过映射 t 个顶点来检查），那么我们就找到了一个线性等价映射。否则，如果没有任何一对 $(v'_0、v'_1)$ 符合条件，则这些球不线性等价，且带标记谱不同。由于该算法需要分析 $2t$ 对，额外的总体开销为 $O(t^2) = O(n^2)$。 □

现在我们考虑一个更微妙的问题：如何比较无标记长度谱。也就是说，我们想判定数值列表$\{N_{G,\ w}(\alpha)$： $\alpha \in H_1(T;\ \mathbb{Z})\}$ 和$\{N_{G',\ w'}(\alpha')$： $\alpha' \in H_1(T';\ \mathbb{Z})\}$ 是否相同，其中每个数值的重数由实现该长度的同调类的数量决定。无标记长度谱的相等性总是可判定的，我们证明它属于 co-RP 复杂度类；也就是说，我们的算法可以在随机多项式时间内检测出 $(G,\ w)$ 和 $(G',\ w')$ 的无标记谱是否不同。

对于这一特定检验，我们需要能够同时访问权重之间的所有整数线性关系。也就是说，我们的算法需要能够访问 $\mathbb{Q}$-向量空间$\{(x_e)_{e\in E(G)} \in \mathbb{Q}^{E(G)}$： $\sum_e x_e w_e = 0\}$。我们假设权重按以下形式给出：给定 r 个实数 $o = (o_1,\ o_2,\ \ldots,\ o_r)$，它们不满足任何整数线性关系；对于每条边 $e \in E(G)$，其权重均表示为这些实数与整数系数 $w_e = w_{e,\ 1}o_1 + \ldots + w_{e,\ r}o_r$的线性组合。我们将这些权重的复杂度定义为总和$\|w\|_o := \sum_{e\in E(G)} \sum_{i=1}^{r} |w_{e,\ i}|$。注意，这一复杂度取决于数值 $o_1,\ \ldots,\ o_r$ 的选取，而不仅仅取决于 w_e 作为实数时的取值。

定理 20。 设 (G, w) 和 (G', w') 是胞腔嵌入在环面 T 和 T' 上的两个加权图，每个图的复杂度均不超过 n，其中每个权重均指定为 $w_e = w_{e,1}o_1 + \ldots + w_{e,r}o_r$，且 $w_{e,i} \in \mathbb{Z}$ 和 $o_1, \ldots, o_r$ 是 r 个给定实数。存在一种算法，可在总输入规模为 $n + \log(kwk_o + kw'k_o)$ 时以随机多项式时间判定 (G, w) 和 (G', w') 是否具有不同的（无标记）谱。此外，对于固定的 r，存在一种确定性算法，其运行时间为 $O(n^2 \cdot (kwk_o + kw'k_o)^r)$。

我们先说明如何由定理 4 和定理 19 及定理 20 推出定理 20 。需要强调的是，定理 20 只能让我们在无权情形下推出确定性多项式时间算法。即使权重为有理数，我们也不知道存在确定性多项式时间算法。

定理 4 的证明。 设 G 和 G' 是总规模为 n 的无权图。

标记谱的情形只是定理 19 的一个特例，其中我们利用了在无权情形下可以在平方时间内计算单位球这一事实。

对于未标记谱的相等性，我们有 $r = 1$ 和 $o_1 = 1$。因此，定理 20 的第二部分给出了在 $O(n^2 \cdot (\sum_{e\in E(G \cup E\ G'} =)()1))()$ $O\ n^3$ 中的确定性多项式时间。 □

定理的证明 20 使用长度谱的生成函数。在我们的情形下，这些函数最终是（多变量）有理函数。在处理多面体中的整点时，这类生成函数的出现是常见的，参见例如 [Bar08]。不过，从算法的角度来看，此前似乎尚未研究过这些生成函数是否相等的问题。

证明。我们的思路是用一个生成级数来编码长度谱，而它最终是一个有理函数。因此，无标记长度谱是否相等的问题可以归结为生成级数是否相等。然而，这个问题并不像看起来那么简单，因为我们的有理函数可以用一种简短的表示形式（大小为 $O(n)$）表示，但并非 表示为两个多项式之比。

现在我们来说明如何用生成级数对加权图 $(G,\ w)$ 的无标记长度谱进行编码。我们令 $\Lambda_{G,\ w}$ 表示带重数的长度谱（作为 $\mathbb{R}$ 的子多重集），并定义

$$f_{G,w}(s) := \sum_{\lambda \in \Lambda_{G,w}} e^{-s\lambda}.$$

这种级数称为狄利克雷级数，在数论中经常出现（例如黎曼 ζ 函数 $\zeta(s) = \sum \exp(-\log(n)s)$），参见例如 [HR15]。由于 $\Lambda_{G,w}$ 至多呈二次增长（即，对于某个 $c > 0$，$\#\{\lambda \in \Lambda_{G,w} : \lambda < R\} \leq cR^2$），$f_{G,w}(s)$ 在半平面 $D = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$ 上定义一个绝对收敛级数。根据 [HR15，定理 13]，，对于所有 $s \in D$，$f_{G,w}(s) = f_{G',w'}(s)$，当且仅当 (G, w) 和 (G', w') 具有相同的长度谱。

回忆一下，算法 1 可在 $O(n^2 \log\log n)$ 时间内生成紧简单圈列表$\{c_i\}_{i=1,\dots,t}$，使得 $\langle c_i, c_{i+1}\rangle = 1$ 和 $\{[c_i]/w(c_i) \mid i = 1, \dots, t\}$ 包含 $B_{G,w}$ 的极值点。关于第一个性质，请参阅引理 16 。我们考虑半开锥 $C_i = \mathbb{Z}_{\geq 0}[c_i] + \mathbb{Z}_{>0}[c_{i+1}] \subset H_1(T; \mathbb{Z})$。接着，如定理 3 的证明中那样，利用 $N_{G,w}$ 关于 C_i 呈线性这一点，以及这些锥是幺模的这一事实，可知 C_i 中各类的长度谱具有相当简单的生成级数

$$\sum_{\alpha \in C_i} e^{-sN_G(\alpha)} = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{>0}} e^{-s(N_G(x[c_i]+y[c_{i+1}])} = \frac{e^{-s\lambda_{i+1}}}{(1-e^{-s\lambda_i})(1-e^{-s\lambda_{i+1}})}.$$

其中 $\lambda_i = w(c_i)$。由于这些半开锥构成了 $H_1(T; \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ 的一个划分，我们得到

$$f_{G,w}(s) = \sum_{i=1}^{t} \frac{e^{-s\lambda_{i+1}}}{(1-e^{-s\lambda_i})(1-e^{-s\lambda_{i+1}})} \tag{4}$$

注意，式（4）中的加数个数为 $O(n)$。现在剩下的问题是比较$f_{G,w}(s)$ 和 $f_{G',w'}(s)$。此时，处理包含指数函数的表达式变得非常不便。因此，我们改为处理 $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_r)$ 中的有理函数。回忆一下，G和 G'的权重都是 $o_1, \dots, o_r$ 的整数线性组合。因此，作为简单圈权重的 λ_i 也同样如此，即对于某些 $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$，有 $\lambda_i = \lambda_{i,1}o_1 + \dots + \lambda_{i,r}o_{r_o}$。为方便起见，我们记 $z^{\lambda_i} = z_1^{\lambda_i} z^{\lambda_{i,22}} \cdots z_r^{\lambda_i}$。我们定义

$$F_{G,w}(z_1, \dots, z_r) := \sum_{i=1}^{t} \frac{z^{\lambda_{i+1}}}{(1-z^{\lambda_i})(1-z^{\lambda_{i+1}})} \tag{5}$$

使得 $f_{G,w}(s) = F_{G,w}(e^{-so_1}, e^{-so_2}, \dots, e^{-so_r})$。由于函数 $s \mapsto e^{-so_i}$ 在代数上独立（因为 o_i 线性独立），我们有：对于 $s \in D$，$f_{G,w}(s) = f_{G',w'}(s)$ 当且仅当 $F_{G,w}(z_1, \dots, z_r) = F_{G',w'}(z_1, \dots, z_r)$ 作为有理函数相等。回想一下，$\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$，因此表达式（5）中可能出现负幂。我们可以分解 $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$，使得 $z^{\lambda_i} = z^{\lambda_i^+} z^{-\lambda_i^-}$，并且 $z^{\lambda_i^+}$ 和 $z^{\lambda_i^-}$ 均为非负

指数。现在我们将分母化为公分母，并消去负项，同时保留因式分解形式（5）

$$F_{G,w}(z_1,\dots,z_r)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{t} z^{\lambda_{i+1}^{+}} z^{\lambda_i^{-}} \prod_{j\notin\{i,i+1\}} (z^{\lambda_j^{-}}-z^{\lambda_j^{+}})}{\displaystyle\prod_{i=1}^{t}(z^{\lambda_i^{-}}-z^{\lambda_i^{+}})} \tag{6}$$

注意，分子和分母的总次数有上界 $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}|\lambda_{i,j}|$。由于每个 c_i 都是图 G中的简单圈，因此每个权重在其中至多出现一次，所以 $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}|\lambda_{i,j}|\le t\cdot\|w\|_{o}$。

现在我们考虑比较 $F_{G,w}$ 和 $F_{G',w'}$的问题。最重要的一点是， $\mathbb{Z}[z_1,\dots,z_r]$ 中总次数至多为 d的单项式数量等于二项式 $\binom{d+r}{r}$。我们对多项式采用稠密数据结构，因此访问和更新的时间为 $O(1)$。

对有理函数$F_{G,w}$ 和 $F_{G',w'}$ 进行交叉相乘时，我们得到由 $t+t'$ 项组成的和，每项的形式为 $z^{a}\prod_i(z^{b_i}-z^{c_i})$，其中乘积中的因子数量至多为 $t+t'$，且每个因子的总次数为 $\max(|b_i|,|c_i|)\le\max(\|w\|_o,\|w'\|_o)$。为展开该乘积，我们根据 P_{k-1}计算 $P_k=\prod_{i=1,\dots,k}(z^{\lambda_i^{-}}-z^{\lambda_i^{+}})$。一次乘法的成本为 $O\big(\binom{\max(\|w\|_o,\|w'\|_o)+r}{r}\big)$。总成本为 $O\big((t+t')\binom{\max(\|w\|_o,\|w'\|_o)+r}{r}\big)$。由于这样的项有 $t+t'=O(n)$ 个，通过展开进行比较的总成本为$O\big(n^2\cdot\binom{\max(\|w\|_o,\|w'\|_o)+r}{r}\big)$。对于固定的 r，其成本为 $O(n^2\cdot\max(\|w\|_o,\|w'\|_o)^r)$，由此证明了定理的最后一个结论。

现在，有一种广为人知的概率方法，可以通过在随机点处求值来比较因式分解形式：DeMillo-Lipton-Schwartz–Zippel 引理 [DL78], [Sch80]and [Zip79]。回顾一下，我们要检验两个生成级数（其因式分解形式见（5））之差 $F-F'$ 是否为零。正如我们已经提到的，这相当于检验某个多项式 P 是否为零；该多项式有 $O(n)$ 项，总次数为 $d=O((t+t')\cdot(\|w\|_o+\|w'\|_o))$。我们强调，后者相对于输入规模是指数级的。一般思路是在随机整点处对多项式 P 求值。如果我们找到一个整数向量 $(v_1,\dots,v_r)$，使得 $P(v_1,\dots,v_r)\neq 0$，那么我们就得到了一个见证，证明 P 非零。计算 $P(v_1,\dots,v_r)$ 的开销为 $O(n\times r\times\log(d))$，这里使用快速幂（并忽略整数加法和乘法的算术运算开销）。DeMillo-Lipton-Schwartz–Zippel 引理指出，如果 P 非零，那么随机选取一个分量取自 S^r 的整数向量，使得 $S\subset\mathbb{Z}$ 满足 $P(v)=0$ 的概率至多为 $d/|S|$。换言之，我们以至少 $1-\frac{d}{|S|}$ 的概率找到一个见证。如果选择 $S=\{-d+1,\dots,d\}$，使得 $|S|=2d$，那么这个概率为 $>1/2$。从集合 S 中随机选取一个元素需要 $O(\log d)$ 位，这与输入规模呈线性关系。我们需要选取 r 个这样的元素，因此这项开销相对于输入规模是二次的。总体而言，随机生成和求值的开销是多项式级的。 □

我们在图15 中给出了两个环面图。它们的单位球见图16：它们并非线性等价，但具有相同的无标记长度谱。这一构造可视为一种离散类比，对应于文献 [Vig80]中构造的非等距但等谱的双曲曲面。

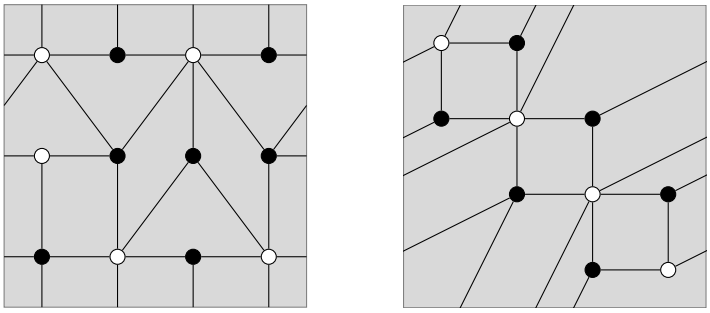

图 15：两个图（G，w）（左图）和（G'，w'）（右图）的所有权重均为 $1/2$。由于这些图是二分图，它们的范数是整数范数。

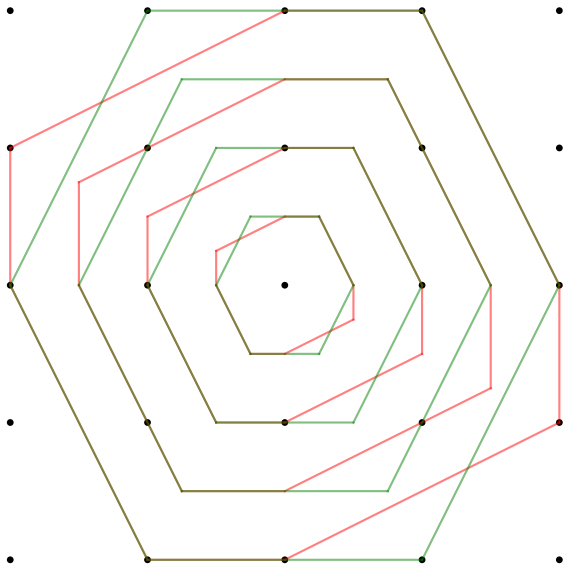

图16：图 G，w 和 G'，w' 中单位球的前四个膨胀体，分别以绿色和橙色显示，见图 15。黑点表示整数格。这两个球并非线性等价：$B_{G,\,w}$ 是六边形，而 $B_{G',\,w'}$ 是八边形。不过，它们具有相同的无标记长度谱，等价地说，具有相同的埃尔哈特级数 $\frac{z^6+3z^4+4z^3+3z^2+1}{(1-z)^2\,(1+z)^2\,(1+z^2)} = 1 + 4z^2 + 4z^3 + 8z^4 + O\left(z^5\right)$。

致谢

我们想感谢 Marcos Cossarini，他建议从范数视角进行考察；也感谢 Bruno Grenet，他向我们介绍了多项式恒等式测试问题。我们还要感谢 SoCG 2023 的审稿人提出的宝贵意见，尤其是他们建议在无权图的情形下改进复杂度。

参考文献

[Bar08] Alexander Barvinok. 多面体中的整数点. Zur. Lect. Adv. Math. Z¨urich：欧洲数学会 (EMS)，2008.

[Bus92] Peter Buser. 紧黎曼曲面的几何与谱. Birkh¨auser，1992.[CCE13] Sergio Cabello、Erin W. Chambers 和 Jeff Erickson. 嵌入图中的多源最短路径. SIAM计算杂志，42(4):1542–1571，2013.[CdVL12] Sergio Cabello、 ´Eric Colin de Verdi` ere 和 Francis Lazarus. 嵌入图的边宽度算法. 计算几何，45(5-6):215– 224，2012.[CM07] Sergio Cabello和Bojan Mohar. 求拓扑嵌入图中的最短非分离圈和非可缩圈. 离散与计算几何，37(2):213–235，2007.[Cos18] Marcos Cossarini. 具有长度和面积的离散曲面以及圆的最小填充. 博士论文，Instituto de Matem´atica Pura e Aplicada (IMPA)，2018.[de16] Mikael de la Salle. 关于在整数格上取整数值的范数. Comptes Rendus Math ´ematique，354(6):611–613，2016.[DL78] Richard A. DeMillo 和 Richard J. Lipton. 关于代数程序测试的一则概率性评论. Inf. Process. Lett.，7:193–195，1978.[DVE10] ´Eric Colin De Verdi`ere 和 Jeff Erickson. 收紧曲面上的非简单路径与圈. SIAM计算杂志，39(8):3784–3813，2010.[EHP04] Jeff Erickson 和 Sariel Har-Peled. 将曲面最优地切割成圆盘. 离散与计算几何，31(1):37–59，2004.[EK13] David Eisenstat 和 Philip N Klein. 单位权平面图中最大流和多源最短路径的线性时间算法. 载于第45届ACM理论计算研讨会论文集，第735–744页，2013.[EL22] Matthijs Ebbens 和 Francis Lazarus. 计算环面上组合图的长度谱. 第38届国际计算几何研讨会：青年研究人员论坛，2022.[Epp03] David Eppstein. 拓扑嵌入图的动态生成集. 载于第14届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第599–608页，2003.[Eri12] Jeff Erickson. 圈与基的组合优化. 载于 Afra Zomoro- dian 编，应用与计算拓扑进展，应用数学研讨会论文集，2012.[HKRS97] M. Henzinger、P. Klein、S. Rao 和 S. Subramanian. 平面图的更快最短路径算法. J. of Computer and System Sciences，55(1, part 1):3–23，1997.

[HR15] G. H. Hardy 和 M. Riesz。《狄利克雷级数的一般理论》，《剑桥数学与数理物理丛书》第 18 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1915 年。[INSWN11] Giuseppe F. Italiano、Yahav Nussbaum、Piotr Sankowski 和 Christian Wulff-Nilsen。无向平面图中最小割和最大流的改进算法。载于第四十三届 ACM理论计算研讨会论文集，STOC '11，第 313–322 页，美国纽约，2011 年。计算机协会。[Kle05] Philip N Klein。平面图中的多源最短路径。载于第十六届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第 146–155 页，2005 年。[Kut06] Martin Kutz。以近线性时间计算有界亏格可定向曲面上的最短非平凡环。载于第二十二届 ACM计算几何研讨会，第 430–437 页，2006 年。[MT01] Bojan Mohar 和 Carsten Thomassen。《曲面上的图》，第 10 卷。约翰斯·霍普金斯大学出版社，2001 年。[Ota90] Jean-Pierre Otal。《负曲率曲面的标记长度谱》。《数学年刊》，131(1):151–162，1990 年。[Par18] Hugo Parlier。探究曲面长度谱并量化等谱性。《数学年刊》，370(3):1759–1787，2018 年。[San20] Abdoul Karim Sane。交数范数与单面集合。《数学报告》，358(8):941–956，2020 年。[Sch80] Jacob T. Schwartz。用于验证多项式恒等式的快速概率算法。《计算机协会杂志》，27:701–717，1980 年。[Sch92] Alexander Schrijver。论核的唯一性。《组合理论杂志》B辑，55(1):146–160，1992 年。[Sch93] Alexander Schrijver。环面上的图与数的几何。《组合理论杂志》B辑，58(1):147–158，1993 年。[Sti93] John Stillwell。《经典拓扑学与组合群论》，第 72 卷。施普林格科学与商业媒体，1993 年。[Tho90] Carsten Thomassen。没有短不可缩环的图嵌入。《组合理论杂志》B辑，48(2):155–177，1990 年。[Thu86] William P. Thurston。三维流形同调的一个范数。载于《美国数学会回忆录》，第 339 卷，第 99–130 页。美国数学会，1986 年。[Vig80] Marie-France Vign´eras。等谱且非等距的黎曼流形。《数学年刊》（第 2 辑），112:21–32，1980 年。

[Wei97] Karsten Weihe。无向平面图中的边不相交 (s, t) 路径的线性时间算法。算法杂志，23(1):121–138，1997 年。

[Zip79] Richard Zippel。稀疏多项式的概率算法。符号与代数计算，EUROSAM '79，国际研讨会，马赛，1979，计算机科学讲义第72卷，216–226页（1979）。, 1979。