arXiv:2303.08041v2 [math.PR] 7 Sep 2023

关于任意滤过下取值于鞅 SL^∞ 空间的乘子

安东·采利谢夫

Abstract. 本文研究以下问题：给定滤过概率空间上的有界正函数 f，能否找到另一个函数（乘子） m, $0 \le m \le 1$，使得函数 mf 不会“太小”，但其平方函数有界？我们明确展示了如何为通常的鞅平方函数和所谓的条件平方函数构造这类乘子。此外，我们还表明，对于通常的平方函数，通过应用 S. V. Kislyakov 提出的非构造性抽象修正定理，可以得到更一般的结论。

1. Introduction

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个（标准）概率空间，并在其上固定一个由 σ-代数构成的滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$。为简便起见，我们始终假设 $\bigcup_{n\ge 0}\mathcal{F}_n$ 生成 $\mathcal{F}$，且 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$。记 $\mathbb{E}_n$ 为关于 $\mathcal{F}_n$ 的条件期望算子，记 Δ_n 为鞅差：$\Delta_n = \mathbb{E}_n - \mathbb{E}_{n-1}$, $n \ge 1$。于是，平方函数算子定义如下，例如，对于 Ω 上的 L^2 函数 g：

$$S(g) = \Big(\sum_{n\ge 1} |\Delta_n g|^2\Big)^{1/2}. \tag{1.1}$$

我们还将关注由以下公式定义的条件平方函数算子：

$$\sigma(g) = \Big(\sum_{n\ge 1} \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g|^2\Big)^{1/2}. \tag{1.2}$$

概率空间上最简单且研究最为充分的滤过实例之一是二进滤过。在这种情况下，每个σ代数 $\mathcal{F}_n$ 都由有限个原子生成，而 $\mathcal{F}_n$ 中的每个原子都会在 $\mathcal{F}_{n+1}$中分裂成两个质量相等的原子。不难看出，在这种情况下，算子 S 和 σ是相同的。二进情形下的鞅平方函数算子的性质已得到广泛研究，且众所周知；关于该算子及二进调和分析其他问题的系统论述，可参见 [15, 第 1]章。

然而，在一般滤过概率空间的情形下，情况要复杂得多。平方函数等许多标准分析概念，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 60G42, 60G46, 46B10.*Key words and phrases.* 鞅平方函数、修正定理、条件平方函数。本研究得到波兰国家科学中心以及奥地利科学基金会 FWF 联合 CEUS计划的资助。波兰国家科学中心项目编号：2020/02/Y/ST1/00072；FWF 项目编号：I5231 和 P344114。

极大函数、Hardy 空间和 BMO空间、原子分解、Muckenhoupt权重等，在这一一般框架下都有相应的鞅对应物，但处理起来要复杂得多（例如参见书籍 [3]）。例如，对于任意 $1 < p < \infty$，平方函数算子 S 在 L^p 上有界。然而，众所周知，一般而言，算子 σ 在 L^p 上有界，当且仅当 $p \geq 2$ （参见[18, 定理 2.11 和例 2.17]）。关于一般滤过概率空间中上述概念的系统论述，可参见书籍 [13]; 连续时间滤过的情形另见书籍 [17] 。

众所周知，如果 f 是有界函数，那么函数 $S(f)$ 和 $\sigma(f)$ 不一定有界。文献 [15, 第 67–68] 页给出了一个明确而简单的例子：在区间 $[0,1]$ 上的二进滤过这一特定情形下，存在有界函数 f，使得 $S(f)$ 无界。值得注意的是，一般而言，条件 “$S(f) \in L^\infty$”限制性很强（例如参见 [2]）。满足这一条件的函数空间 $f \in L^2$ 通常记作 SL^∞。该空间中函数的一些性质（在二进情形下）可见 [15, 第 1.3] 节。

关于二进滤过，巴拿赫空间 SL^∞ 的性质已在论文 [11] 和 [12] 中得到研究。然而，我们想指出，近期专著 [14, 第 86] 页提到，与一般滤过概率空间 $(\Omega, (\mathcal{F}_n)$ $\mathbb{P})$ 相关的空间 SL^∞ 的巴拿赫空间性质仍鲜有研究。鉴于此，本文可视为对任意滤过下空间 SL^∞ 的研究的一次开端。

对于二进滤过，已知对每个正函数 f，只要满足 $f \leq 1$，就存在一个乘子函数 m，使得 $0 \leq m \leq 1$, $\|S(mf)\|_\infty \leq C$，且 mf 的均值不太小： $\int mf \geq c \int f$。这里， C 和 c 是一些绝对常数。文献 [6] 中显式构造了这样的函数 m （另见文献 [15, 中对这一构造的介绍，定理1.3。8]）。运用类似的思路，文献 [6] 也针对布朗运动构造了这样的乘子，用于 Littlewood–Paley 平方函数算子（此时假设 f 是定义在单位圆 $\mathbb{T}$ 上的函数）。这些研究的动机，源于 [5] 中提出的一个关于 Lipschitz曲线上 Cauchy积分的类似问题（这一问题至今仍未解决）。

鉴于上述讨论，一个自然的问题随之而来：能否将上述结果推广到任意（离散）滤过的一般情形？以下两个定理回答了这一问题。

首先考虑由公式 (1.2) 定义的条件平方函数算子 σ。我们将证明关于它的以下结论。

定理1. 设 $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ 是一个滤过概率空间，并设 f 是 Ω 上的正函数，满足 $f \leq 1$。那么存在一个函数 $m : \Omega \to [0,1]$，使得

$$\mathbb{E}(mf) \geq e^{-\|f\|_\infty} \mathbb{E} f \tag{1.3}$$

且函数 $\sigma(mf)$ 一致有界：

$$\sigma(mf)^2 \leq 18. \tag{1.4}$$

此外，在该定理的证明中，我们将明确构造这样的函数m；详情请见下一节。这一构造是以下内容的自然推广

[6] 中针对二进滤过的构造。然而，在我们任意滤过概率空间的一般设定下，会出现一些额外困难，因此需要新的补充思路。

现在我们来讨论由公式 (1.1) 定义的平方函数算子算子 S 的情形。对于它，我们有如下类似结论。

定理 2. 设 $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ 是一个滤过概率空间，并设 f 是 Ω 上的正函数，满足 $f \leq 1$。那么存在一个函数 $m : \Omega \to [0, 1]$，使得

$$\mathbb{E}(mf) \geq e^{-\|f\|_\infty} \mathbb{E}f \tag{1.5}$$

且函数 $S(mf)$ 一致有界：

$$S(mf)^2 \leq C. \tag{1.6}$$

这里 C 是一个绝对常数。

我们的目标并非为不等式 (1.4) 和 (1.6) 提供最优常数。这些定理的主要特点是，我们给出了所需乘子的显式构造（不过，尽管定理 2 证明中的构造是对二进情形中构造的另一种推广，但它比定理1的证明更复杂：只有当所有 σ-代数 $\mathcal{F}_n$ 都由有限个原子生成时，我们才能给出所需乘子函数 m 的构造算法；下文第 3.2 小节将讨论这一问题）。

有几点值得说明。在文献 [6] 中，研究了一个类似的问题，涉及二进滤过，它是概率空间上离散滤过的一个最简单例子。文献 [6] 中的证明严重依赖于二进结构，尤其依赖于这样一个事实：在这种情形下，函数 $|\Delta_n(f)|^2$ 是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测的。因此，对于算子 S 和 σ，将结论推广到任意滤过的情形似乎颇令人意外。

在 [6] 中，也有人研究了与布朗运动相关的（连续时间）滤过的类似问题。然而，从某种意义上说，这可以视为另一种“极端情况”，因为相应乘子的构造自然由伊藤公式所决定。正如上文所述，利用这一结果，同一篇论文还构造了环面上 Littlewood–Paley 平方函数情形的乘子。然而，事实证明，这种乘子的构造方式相当困难，因为它需要绕道随机分析领域。我们在本文中证明的任意离散滤过的结果，或许能为前述 Littlewood–Paley 平方函数的乘子带来一种更直接的构造方法，而无需使用布朗运动。

处理此类乘子存在性问题还有另一种方法：更准确地说，这个问题属于“修正定理”的范畴——这一课题主要由 S. V. Kislyakov 在论文 [7, 8, 9, 1, 4, 10] 中研究。广义而言，修正定理是指如下形式的命题：某个“坏”函数可以经过微小修改，使得到的函数具有某些“好”性质。具体来说，在论文 [1, 9] 中证明了若干如下类型的定理：如果 f 是 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的函数，且满足 $\|f\|_\infty \leq 1$，那么我们可以找到一个函数 g，它只在一个测度很小的集合上与 f 不同，并且

$Tg \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$；这里 T 表示一个奇异积分算子（这类算子通常在 $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上不有界）。

此外，文献 [9] 证明了一个一般的抽象修正定理，并由此推导出上述类型的结论。我们将在第4节陈述这一一般定理，并说明它适用于我们的问题。现在，我们只给出算子 S所对应的结果定理。

定理 3. 设 f 是 Ω 上的一个函数，满足 $\|f\|_\infty \le 1$。那么，对于每个$0 < \varepsilon \le 1$，都存在 Ω 上的一个函数 g，满足以下条件：

$$|g| + |f - g| = |f|; \tag{1.7}$$

$$\mathbb{P}\{f \ne g\} \le \varepsilon \|f\|_1; \tag{1.8}$$

$$\|S(g)\|_\infty \le C(1 + \log \varepsilon^{-1}). \tag{1.9}$$

这里 C 是某个绝对常数。

注意，对于正函数 f，条件 (1.7) 意味着 g 是通过乘以某个取值介于 0 和 1 之间的函数 m 从 f 得到的。此外，容易看出，条件 (1.8) 蕴含 $\mathbb{E}g \ge (1 - \varepsilon)\mathbb{E}f$。因此，该定理回答了我们最初关于算子 S 的问题（事实上，它更一般，因为条件 (1.8) 蕴含 $m = 1$ 在一个测度较大的集合上成立）。

然而，该定理有一个缺点：其证明是非构造性的，因为它依赖于论文 [9] 中的基斯利亚科夫的抽象修正定理，而该定理又运用了 Hahn–Banach定理和一种巧妙的对偶论证。鉴于前面的讨论，我们可以说，定理1和定理2的证明表明，在修正定理的背景下，可以避免抽象论证。“构造性”所付出的代价是，所得结论的效力略弱，因为我们无法保证乘子函数 m 在一个大测度集合上等于 1（不过请注意，通过迭代，可以从定理1和定理2推出与 (1.8) 和 (1.9) 类似的对数估计）。另一方面，值得指出的是，我们不知道是否存在一种抽象方法，可用于证明算子 σ的修正定理。

接下来的三节将用于证明上述定理。最后一节将讨论若干开放问题。

2. 证明定理 1：显式构造

2.1. 证明概要。我们对乘子 m 的构造，本质上是对论文 [6]中构造的一种（大幅拓展的）推广。函数 m将具有 $m = e^\varphi$的形式，其中 φ 的公式为

$$\varphi = f - \|f\|_\infty - \sum_{n \ge 1} \alpha_n \mathbb{E}_{n-1} |\Delta_n f|^2 = -\|f\|_\infty + \mathbb{E}f + \sum_{n \ge 1} (\Delta_n f - \alpha_n \mathbb{E}_{n-1} |\Delta_n f|^2).$$

这里， α_n 是某些正的 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测函数。此公式中的级数按几乎处处收敛来理解（在某些点处，其和可能等于 $-\infty$ ）。

我们将选择函数 α_n，使其满足以下条件：

$$\mathbb{E}_{n-1}\left[f \cdot e^{\Delta_n f - \alpha_n \mathbb{E}_{n-1} |\Delta_n f|^2} \right] = \mathbb{E}_{n-1} f; \tag{2.1}$$

$$\alpha_n \ge 1/2 \quad \text{a.e.} \tag{2.2}$$

关于如何选择这类函数 α_n 的细节，我们推迟到下一小节再讨论；目前先假设我们已选取满足这些性质的 α_n。我们需要证明:

$$\sigma(e^\varphi f)^2 = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^\varphi f)|^2 \leq 18 \quad \text{a.e.}$$

固定一个数 $n \geq 1$，并考虑表达式 $\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^\varphi f)|^2$。我们可以为函数 φ写出如下公式:

$$\varphi = -\|f\|_\infty + \mathbb{E}f + v_n + (\Delta_n f - \alpha_n \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2) + z_n,$$

其中

$$v_n = \sum_{m<n} (\Delta_m f - \alpha_m \mathbb{E}_{m-1}|\Delta_m f|^2); \tag{2.3}$$

$$z_n = \sum_{m>n} (\Delta_m f - \alpha_m \mathbb{E}_{m-1}|\Delta_m f|^2). \tag{2.4}$$

显然， v_n 是一个 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测函数。

因此，我们有:

$$\Delta_n(e^\varphi f) = e^{-\|f\|_\infty + \mathbb{E}f + v_n - \alpha_n \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2} \Delta_n(e^{z_n} e^{\Delta_n f} f).$$

我们的下一个目标是去掉鞅差内部的因子 e^{z_n}。为此，我们需要以下引理。

引理2.1。我们有如下恒等式:

$$\mathbb{E}_n(e^{z_n} f) = \mathbb{E}_n f.$$

证明。证明分为两步：首先，假设定义函数 z_n 的公式（2.4）中的和是有限和，并在此假设下证明该引理；然后再取极限。

对每个数 $M > n$，记

$$z_{n,M} = \sum_{m=n+1}^{M} (\Delta_m f - \alpha_m \mathbb{E}_{m-1}|\Delta_m f|^2).$$

函数$z_{n,\ M}$ 是 $\mathcal{F}_M$-可测的。

现在我们可以写出如下（显然的）恒等式:

$$\mathbb{E}_n(e^{z_{n,M} f}) = \mathbb{E}_n \circ \mathbb{E}_{n+1} \circ \ldots \circ \mathbb{E}_{M-1}(e^{z_{n,M}} f).$$

这个恒等式使我们能够在$z_{n,\ M}$ 的公式中“分离出”一项，并应用等式（2.1）。事实上，利用可测性假设和条件期望的基本性质，我们可以写出:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(e^{z_{n,M}} f) &= \mathbb{E}_n \circ \ldots \circ \mathbb{E}_{M-2}\left[e^{z_{n,M-1}} \mathbb{E}_{M-1}(f \cdot e^{\Delta_M f - \alpha_M \mathbb{E}_{M-1}|\Delta_M f|^2})\right] \\ &= \mathbb{E}_n \circ \ldots \circ \mathbb{E}_{M-2}\left[e^{z_{n,M-1}} \mathbb{E}_{M-1} f\right] = \mathbb{E}_n \circ \ldots \circ \mathbb{E}_{M-2} \circ \mathbb{E}_{M-1}(e^{z_{n,M-1}} f) \\ &= \mathbb{E}_n \circ \ldots \circ \mathbb{E}_{M-2}(e^{z_{n,M-1}} f).\end{aligned}$$

利用等式 (2.1)，即可从第一行推导出第二行。

现在可以看出，采用这种论证方式，我们能够证明

$$\mathbb{E}_n(e^{z_{n,M}} f) = \mathbb{E}_n f.$$

只需在 $M \to \infty$ 时取极限即可，这是可行的，因为 $e^{z_n,\ M} \to e^{z_n}$几乎处处成立，因此在 L^1 中也成立（并且 $\mathbb{E}_n$ 是 L^1上的有界线性算子）。□

利用这个引理，我们可以写出：

$$\Delta_n(e^{z_n}e^{\Delta_n f}f) = \Delta_n \circ \mathbb{E}_n(e^{z_n}e^{\Delta_n f}f) = \Delta_n(e^{\Delta_n f}\mathbb{E}_n(e^{z_n}f)) \\ = \Delta_n(e^{\Delta_n f}\mathbb{E}_n f) = \Delta_n(e^{\Delta_n f}f).$$

因此，我们有：

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\varphi}f)|^2 = e^{2(-\|f\|_\infty + \mathbb{E}f + v_n - \alpha_n \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2)}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\Delta_n f}f)|^2. \tag{2.5}$$

回顾公式 (2.3)。显然，我们有

$$-\|f\|_\infty + \mathbb{E}f + \sum_{m<n}\Delta_m f = -\|f\|_\infty + \mathbb{E}_{n-1}f \le 0$$

因此，公式 (2.5) 的右端不大于

$$e^{-2\sum_{m=1}^n \alpha_m \mathbb{E}_{m-1}|\Delta_m f|^2}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\Delta_n f}f)|^2. \tag{2.6}$$

现在我们希望使用下面这个不等式。

引理 2.2。对于任意满足 $0 \le f \le 1$ 的函数 $f \in L^\infty$，我们有

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\Delta_n f}f)|^2 \le 18\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.$$

我们将在第2.3小节证明这个引理。暂且假设它成立。那么，利用该引理以及 $\alpha_n \ge 1/2$ 这一事实，我们最终得到，表达式 (2.6) 有如下上界：

$$18e^{-\sum_{m=1}^n \mathbb{E}_{m-1}|\Delta_m f|^2}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.$$

取定一点 t，并记 $q_n = (\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2)(t)$。于是我们证明了

$$\sigma(e^{\varphi}f)^2(t) \le 18\sum_{n\ge 1} e^{-\sum_{m=1}^n q_m} q_n.$$

这个公式右侧的和可以用适当的积分来估计：

$$18\sum_{n\ge 1} e^{-\sum_{m=1}^n q_m} q_n \le 18\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 18.$$

剩下只需证明 $\mathbb{E}(e^{\varphi}f)$ 不会太小。但像之前一样推理（再次利用公式 (2.1)），我们得到

$$\mathbb{E}(e^{\varphi}f) = e^{-\|f\|_\infty + \mathbb{E}f}\mathbb{E}f \ge e^{-\|f\|_\infty}\mathbb{E}f.$$

如果我们证明可以选取满足条件 (2.1) 和 (2.2) 的函数 α_n，并证明引理 2.2，那么定理1便得证。这些内容将在接下来的两个小节中讨论。

2.2. 函数 α_n 的构造。注意，如果 α_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测函数，那么它由恒等式 (2.1) 唯一确定。事实上，该恒等式等价于以下内容：

$$\mathbb{E}_{n-1}(f\cdot e^{\Delta_n f})=e^{\alpha_n\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2}\mathbb{E}_{n-1}f$$

因此，我们可以写出函数 α_n 的如下显式公式：

$$\alpha_n=\frac{1}{\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2}\log\Big(\frac{\mathbb{E}_{n-1}(f\cdot e^{\Delta_n f})}{\mathbb{E}_{n-1}f}\Big).$$

在 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测集上，若表达式 $\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2$ 和 $\mathbb{E}_{n-1}f$ 中有一个变为零，则 α_n 的值可以任意取。

只需验证 $\alpha_n\geq 1/2$，也就是说，证明以下不等式

$$\mathbb{E}_{n-1}(f\cdot e^{\Delta_n f})\geq e^{\frac{1}{2}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2}\mathbb{E}_{n-1}f. \tag{2.7}$$

这将由以下不等式推出：

$$\mathbb{E}_{n-1}(f\cdot e^{\Delta_n f})\geq(1+\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2)\mathbb{E}_{n-1}f.$$

事实上，这里右侧大于 (2.7) 的右侧，因为 $|\Delta_n f|\leq 1$ 和 $e^x\leq 1+2x$，若 $0\leq x\leq 1/2$。

我们使用指数函数的泰勒展开：

$$e^{\Delta_n f}=1+\Delta_n f+\frac{1}{2}|\Delta_n f|^2+Q_n, \tag{2.8}$$

其中，Q_n 是 $\mathcal{F}_n$-可测函数，满足 $|Q_n|\leq\frac{1}{2}|\Delta_n f|^3$（这是由另一个初等估计得出的结论：$|e^x-1-x-x^2/2|\leq|x|^3/2$，其中 $x\leq 1$）。

现在我们可以将所需的估计改写为：

$$\mathbb{E}_{n-1}[f\cdot(1+\Delta_n f+|\Delta_n f|^2/2+Q_n)]\geq(1+\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2)\mathbb{E}_{n-1}f$$

这等价于不等式

$$\mathbb{E}_{n-1}(f\Delta_n f)+\frac{1}{2}\mathbb{E}_{n-1}(f|\Delta_n f|^2)+\mathbb{E}_{n-1}(fQ_n)\geq\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2\mathbb{E}_{n-1}f.$$

这个估计很容易。事实上，不难验证 $\mathbb{E}_{n-1}(f\Delta_n f)=\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2\geq\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2\mathbb{E}_{n-1}f$，并且由于$Q_n\geq-\frac{1}{2}|\Delta_n f|^3\geq-\frac{1}{2}|\Delta_n f|^2$，我们还可以看出

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_{n-1}(f|\Delta_n f|^2)+\mathbb{E}_{n-1}(fQ_n)\geq 0.$$

2.3. 引理 2.2 的证明。最后，我们只需证明不等式

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\Delta_n f}f)|^2\leq 18\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.$$

我们再次使用泰勒展开：

$$e^{\Delta_n f}=1+\Delta_n f+R_n,$$

其中 R_n 是一个 $\mathcal{F}_n$-可测函数，满足 $|R_n|\leq|\Delta_n f|^2\leq 1$。这是由针对 $x\in[-1,1]$ 的基本不等式 $|e^x-1-x|\leq x^2$ 得出的。

我们按如下方式估计所需不等式的左端：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(e^{\Delta_n f}f)|^2 &= \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n[(1+\Delta_n f+R_n)f]|^2\\ &= \mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n[f+(\mathbb{E}_n f-\mathbb{E}_{n-1}f)f+R_n f]|^2\\ &= \mathbb{E}_{n-1}|(1-\mathbb{E}_{n-1}f)\Delta_n f+\Delta_n(f\cdot\mathbb{E}_n f)+\Delta_n(R_n f)|^2\\ &\le 3\big(\mathbb{E}_{n-1}|(1-\mathbb{E}_{n-1}f)\Delta_n f|^2+\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(f\cdot\mathbb{E}_n f)|^2+\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(R_n f)|^2\big).\end{aligned}$$

我们分别估计这三个加项。首先，显然有

$$\mathbb{E}_{n-1}|(1-\mathbb{E}_{n-1}f)\Delta_n f|^2\le\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.$$

第三个加项的估计也很容易。我们利用对任意（有界）函数 g，都有 $\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g|^2=\mathbb{E}_{n-1}|\mathbb{E}_n g|^2-|\mathbb{E}_{n-1}g|^2\le\mathbb{E}_{n-1}|\mathbb{E}_n g|^2$，并写作：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(R_n f)|^2\le\mathbb{E}_{n-1}|\mathbb{E}_n(R_n f)|^2\le\mathbb{E}_{n-1}(\mathbb{E}_n|R_n f|)^2\le\mathbb{E}_{n-1}(\mathbb{E}_n|R_n f|)\\ =\mathbb{E}_{n-1}|R_n f|\le\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.\end{aligned}$$

现在只剩下证明

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n(f\cdot\mathbb{E}_n f)|^2\le 4\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2.$$

记 $g=\mathbb{E}_n f$。那么 g 是一个取值介于 0 和 1 之间的函数，我们需要证明

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g^2|^2\le 4\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g|^2.$$

当 $n=0$ 或者 $\mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{F}_{n-1}$ 为纯原子时，这个不等式很容易证明。然而，要在一般情形下证明它，还需要做一些工作。首先，最好利用 g 的 $\mathcal{F}_n$-可测性来改写两边：

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g|^2=\mathbb{E}_{n-1}\big[(\mathbb{E}_n g)^2-2\mathbb{E}_n g\cdot\mathbb{E}_{n-1}g+(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\big]=\mathbb{E}_{n-1}g^2-(\mathbb{E}_{n-1}g)^2$$

类似地

$$\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n g^2|^2=\mathbb{E}_{n-1}g^4-(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2.$$

接下来，我们的逐点不等式等价于以下积分不等式：对于任意 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测集 B（其测度为正），我们需要证明

$$\int_B(\mathbb{E}_{n-1}g^4)\,d\mathbb{P}-\int_B(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2\,d\mathbb{P}\le 4\Big[\int_B(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}-\int_B(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\,d\mathbb{P}\Big]. \tag{2.9}$$

任取一个 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测集 A，并写出以下显然的估计：

$$\frac{1}{\mathbb{P}(A)^2}\int_A\int_A(g(x)^2-g(y)^2)^2\,d\mathbb{P}(x)\,d\mathbb{P}(y)\le\frac{4}{\mathbb{P}(A)^2}\int_A\int_A(g(x)-g(y))^2\,d\mathbb{P}(x)\,d\mathbb{P}(y).$$

这是成立的，因为 $|g(x)^2-g(y)^2|=|(g(x)-g(y))(g(x)+g(y))|\le 2|g(x)-g(y)|$。现在可以将右端改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbb{P}(A)^2}\int_A\int_A(g(x)-g(y))^2\,d\mathbb{P}(x)\,d\mathbb{P}(y)&=2\Big[\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A g^2\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A g\,d\mathbb{P}\Big)^2\Big]\\ &=2\Big[\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g)\,d\mathbb{P}\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

以类似的方式改写左端后，我们得到已证明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g^4)\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}\Big)^2\\&\le 4\Big[\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A(\mathbb{E}_{n-1}g)\,d\mathbb{P}\Big)^2\Big].\end{aligned}\tag{2.10}$$

这个不等式不能立即推出 (2.9)。不过，在表达式 $\mathbb{E}_{n-1}g$ 和 $\mathbb{E}_{n-1}g^2$ “波动不大”的集合上，它们几乎相同。更准确地说，取一个较大的数 N，并对 $0\le k$、$l\le N$，令

$$A_{k,l}=\Big\{\frac{k}{N}\le\mathbb{E}_{n-1}g^2<\frac{k+1}{N},\frac{l}{N}\le\mathbb{E}_{n-1}g<\frac{l+1}{N}\Big\}\cap B.$$

这些集合是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测的。其中一些集合的测度为 0（例如，如果$k>l$，那么 $\mathbb{P}(A_{k,\,l})=0$），但最重要的是，它们互不相交，并构成集合 B的一个划分。此外，对于满足 $\mathbb{P}(A_{k,\,l})\neq 0$ 的集合 $A_{k,\,l}$，我们有：

$$\Big|\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)\,d\mathbb{P}\Big)^2-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\,d\mathbb{P}\Big|\le\Big(\frac{l+1}{N}\Big)^2-\Big(\frac{l}{N}\Big)^2\le\frac{3}{N}.$$

类似地，

$$\Big|\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}\Big)^2-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2\,d\mathbb{P}\Big|\le\frac{3}{N}.$$

对每个测度非零的集合 $A_{k,\,l}$，我们应用不等式 (2.10)，而不是对 A应用。对两边分别加上并减去适当的项，可将其写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^4)\,d\mathbb{P}-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2\,d\mathbb{P}\\&\quad+\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}\Big)^2\Big)\\&\quad\le 4\Big[\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\,d\mathbb{P}\\&\qquad+\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\,d\mathbb{P}-\Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)\,d\mathbb{P}\Big)^2\Big)\Big].\end{aligned}$$

正如我们刚才所解释的，这个不等式第二行和第四行的表达式都很小。因此我们看到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^4)\,d\mathbb{P}-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)^2\,d\mathbb{P}\\&\qquad\le 4\Big[\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g^2)\,d\mathbb{P}-\frac{1}{\mathbb{P}(A_{k,l})}\int_{A_{k,l}}(\mathbb{E}_{n-1}g)^2\,d\mathbb{P}\Big]+\frac{15}{N}.\end{aligned}$$

接下来，只需将此不等式两边乘以 $\mathbb{P}(A_{k,\,l})$，并对所有测度非零的集合 $A_{k,\,l}$ 求和。这样便恰好得到不等式 (2.9)，只是右侧多了项$\frac{15}{N}\mathbb{P}(B)$。然而，由于 N 是任意数，这就推出了所需的不等式，定理1的证明也就完成了。

3. Proof of theorem 2: another version of explicit construction

3.1. 证明概要。现在我们来描述满足定理 2 条件的乘子的构造。主要思路与上一节所做的相当相似，不过有些细节需要作较大改动，因为现在我们处理的不是表达式 $\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2$，而是 $|\Delta_n f|^2$，后者不是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测的。对于证明中与前面相似的部分，我们将略去一些细节。

令 $m = e^{\varphi}$，其中这一次

$$\varphi = -\|f\|_\infty + f - \sum_{n\geq 1} \beta_n |\Delta_n f|^2 = -\|f\|_\infty + \mathbb{E} f + \sum_{n\geq 1} (\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2),$$

其中 β_n 是某些正的 $\mathcal{F}_n$-可测函数。此处级数的收敛按几乎处处意义理解。

我们对函数 β_n施加以下条件：

$$\mathbb{E}_{n-1}\left[f \cdot e^{\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2} \right] = \mathbb{E}_{n-1} f; \tag{3.1}$$

$$\frac{2}{5} \leq \beta_n \leq \frac{1}{|\Delta_n f|} \quad \text{a.e.} \tag{3.2}$$

我们将在下一小节证明这类函数确实存在。暂且假设函数 β_n 已经构造出来。我们需要估计以下量

$$S(e^{\varphi} f)^2 = \sum_{n\geq 1} |\Delta_n (e^{\varphi} f)|^2.$$

固定一个数 n。那么 φ 可以写成

$$\varphi = -\|f\|_\infty + \mathbb{E} f + v_n + (\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2) + z_n,$$

其中

$$v_n = \sum_{m<n} (\Delta_m f - \beta_m |\Delta_m f|^2); \tag{3.3}$$

$$z_n = \sum_{m>n} (\Delta_m f - \beta_m |\Delta_m f|^2). \tag{3.4}$$

我们看到，v_n 是一个 $\mathcal{F}_{n-1}$-可测函数，因此有：

$$\Delta_n (e^{\varphi} f) = e^{-\|f\|_\infty + \mathbb{E} f + v_n} \Delta_n (e^{z_n} e^{\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2} f).$$

我们可以消去鞅差中的因子 e^{z_n}，因为如前所述，我们有

$$\mathbb{E}_n (e^{z_n} f) = \mathbb{E}_n f.$$

这个等式可以用与引理2.1完全相同的方法证明。

因此，一个鞅差的公式可以写成

$$\Delta_n (e^{\varphi} f) = e^{-\|f\|_\infty + \mathbb{E} f + v_n} \Delta_n (e^{\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2} f).$$

由于几乎处处成立，鞅差的平方可估计如下：

$$|\Delta_n (e^{\varphi} f)|^2 \leq e^{-2\sum_{m=1}^{n-1} \beta_m |\Delta_m f|^2} |\Delta_n (e^{\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2} f)|^2.$$

现在我们想要证明

$$|\Delta_n (e^{\Delta_n f - \beta_n |\Delta_n f|^2} f)| \leq (4+e) |\Delta_n f|. \tag{3.5}$$

我们将在第3.3小节证明这个不等式。假设它成立，我们得到以下估计：

$$|\Delta_n(e^{\varphi}f)|^2 \le (4+e)^2 e^{-2\sum_{m=1}^{n-1}\beta_m|\Delta_m f|^2}|\Delta_n f|^2 \le (4+e)^2 e^{-\frac{4}{5}\sum_{m=1}^{n-1}|\Delta_m f|^2}|\Delta_n f|^2$$
$$\le (4+e)^2 e^{4/5} e^{-\frac{4}{5}\sum_{m=1}^{n}|\Delta_m f|^2}|\Delta_n f|^2.$$

若固定一点 $t\in\Omega$，并令 $p_n=|(\Delta_n f)(t)|^2$，则可知

$$S(e^{\varphi}f)^2(t) \le (4+e)^2 e^{4/5}\sum_{n\ge 1} e^{-\frac{4}{5}\sum_{m=1}^{n}p_m}p_n.$$

这个和可以用相应的积分来估计：

$$\sum_{n\ge 1} e^{-\frac{4}{5}\sum_{m=1}^{n}p_m}p_n \le \int_0^{+\infty} e^{-4x/5}\,dx = \frac{5}{4}.$$

这给出了定理 2 中平方函数的估计。此外，完全按照前一个定理的证明，我们可得

$$\mathbb{E}(e^{\varphi}f) = e^{-\|f\|_\infty+\mathbb{E}f}\mathbb{E}f \ge e^{-\|f\|_\infty}\mathbb{E}f.$$

接下来的两个小节将展示如何构造函数 β_n，并证明不等式（3.5）。

3.2. 函数 β_n 的构造。现在我们来讨论如何构造满足条件（3.1）和（3.2）的函数 β_n。这不像在前一个定理的证明中处理函数 α_n 那样直接，因为现在方程（3.1）不足以唯一确定 β_n。不过请注意，若令 $\beta_n=\frac{1}{|\Delta_n f|}$，则（3.1）的左端不会大于右端。另一方面，若令 $\beta_n=2/5$，则左端将大于右端：

$$\mathbb{E}_{n-1}\left[f\cdot e^{\Delta_n f-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2}\right] \ge \mathbb{E}_{n-1}f. \tag{3.6}$$

我们稍后将证明这个不等式。现在我们想指出，如果所有 σ-代数 $\mathcal{F}_n$ 都是纯原子的，那么这就足以构造函数 β_n。事实上，我们只需在滤过$\mathcal{F}_{n-1}$的每个原子 I 上构造 β_n，其中该原子被滤过 $\mathcal{F}_n$的原子 I_1、……、I_k 划分。首先考虑所有原子 I_1、……、I_k 上的$\beta_n^{(0)}=2/5$，以及函数 $\beta_n^{(1)}$：它在 I_1 上等于 $1/|\Delta_n f|$，在所有其他原子上等于 $2/5$（如果 $\Delta_n f=0$ 在 I_1上，那么 $\beta_n^{(1)}$的值并不重要；例如，也可以令它等于 $2/5$）。不等式（3.6）意味着函数 $f\cdot e^{\Delta_n f-\beta_n^{(0)}|\Delta_n f|^2}$ 在 I 上的平均值不小于 f的平均值；如果这两个平均值相等，我们就完成了。如果函数 $f\cdot e^{\Delta_n f-\beta_n^{(1)}|\Delta_n f|^2}$ 在 I 上的平均值仍大于 f的平均值，那么我们就继续处理下一个原子：考虑函数 $\beta_n^{(2)}$，它在 $I_1\cup I_2$ 上等于 $1/|\Delta_n f|$，在 I其余部分上等于 $2/5$，依此类推。这个过程会在某个原子 I_l 处终止，此时我们可以令除 I_l 之外的所有原子上的 $\beta_n=\beta_n^{(l)}$取相应值，而 β_n 在 I_l 上的值由恒等式（3.1）唯一确定（可以写出它的精确公式）。

然而，如果我们要考虑任意滤过，就需要下面这个引理。

引理3.1. 设 $(\Omega\ \mathcal{G},\mathbb{P})$ 是一个概率空间。假设 $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$ 是一个可数生成的子 σ-代数。设 F 和 G 是 $L^{\infty}(\Omega\ \mathcal{G},\mathbb{P})$ 中的两个函数，满足 $F\geq G$, $\mathbb{E}(F|\mathcal{H})\ \geq 0$ 且 $\mathbb{E}(G|\mathcal{H})\ \leq 0$（所有不等式几乎处处成立）。那么存在一个函数 H 属于 $L^{\infty}(\Omega\ \mathcal{G},\mathbb{P})$，满足 $F\geq H\geq G$ 且 $\mathbb{E}(H|\mathcal{H})=0$（也几乎处处成立）。

这个引理确实意味着所需函数 β_n 的存在：我们需要将其用于 $\mathcal{G}=\mathcal{F}_n$、$\mathcal{H}=\mathcal{F}_{n-1}$、$F=(e^{\Delta_n f-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2}-1)\mathbb{E}_n f$ 和 $G=(e^{\Delta_n f-|\Delta_n f|}-1)\mathbb{E}_n f$；于是 β_n 的公式如下：

$$\beta_n=\frac{-\log\left(\frac{H+\mathbb{E}_n f}{\mathbb{E}_n f}\right)+\Delta_n f}{|\Delta_n f|^2}.$$

只需指出，不失一般性，我们可以假设所有 σ-代数 $\mathcal{F}_n$ 都是可数生成的，因为由随机变量生成的每个 σ-代数都具有这一性质。

证明。我们来找一个生成 σ-代数 $\mathcal{H}$ 的可数集代数 $\{A_k\}_{k\geq 1}$。固定一个数 n。我们可以找到一个函数 H_n，使得对于 $k=1$、$\dots n$ 和 $F\geq H_k\geq G$，有 $\int_{A_k}H_n\,d\mathbb{P}=0$。事实上，我们可以找到有限个两两不相交的 $\mathcal{H}$-可测集 B_1，.....，B_N，使得对每个 $1\leq k\leq n$，每个 A_k 都是若干个集合 B_j 的并。我们需要在每个集合 B_j 上定义函数 H_n。对于 $0\leq s\leq 1$，在 B_j 上令 $H_n^{(j)}{}_s=sF+(1-s)G$。由于 $\int_{B_j}F\,d\mathbb{P}=\int_{B_j}\mathbb{E}(F|\mathcal{H})\,d\mathbb{P}\geq 0$ 且 $\int_{B_j}G\,d\mathbb{P}=\int_{B_j}\mathbb{E}(G|\mathcal{H})\ \leq 0$，我们可得 $\int_{B_j}H_n^{(j)}{}_0\,d\mathbb{P}\leq 0$ 且 $\int_{B_j}H_n^{(j)}{}_1\,d\mathbb{P}\geq 0$。因此，我们可以找到这样的 s_j，使得 $\int_{B_j}H_n^{(j)}{}_{s_j}\,d\mathbb{P}=0$，并在 B_j 上令 $H_n=H_n^{(j)}{}_{s_j}$。于是对每个 j 都有 $\int_{B_j}H_n\,d\mathbb{P}=0$，进而对于 $k=1$、.....、n，有 $\int_{A_k}H_n\,d\mathbb{P}=0$。

函数 H_n 属于空间 $L^{\infty}(\Omega\ \mathcal{G},\mathbb{P})$ 中的一个球，因此我们可以将H 定义为 H_n的某个子列的弱*极限。于是，我们有 $F\geq H\geq G$ 几乎处处成立，且对每个 k，$\int_{A_k}H\,d\mathbb{P}=\int_{A_k}\mathbb{E}(H|\mathcal{H})\,d\mathbb{P}=0$。这意味着 $\mathbb{E}(H|\mathcal{H})=0$。□

只需证明不等式 (3.6)。我们可以考虑指数函数 (2.8) 的泰勒展开，并使用不等式 $e^{-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2}\geq 1-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2$，从而得到

$$\mathbb{E}_{n-1}\Big[f\cdot e^{\Delta_n f-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2}\Big]\geq\mathbb{E}_{n-1}\Big[f\Big(1-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2\Big)\Big(1+\Delta_n f+\frac{1}{2}|\Delta_n f|^2+Q_n\Big)\Big].$$

展开括号后，不等式可写成如下形式：

$$\mathbb{E}_{n-1}\Big[f\Delta_n f+\Big(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\Big)f|\Delta_n f|^2-\frac{2}{5}f(\Delta_n f)^3-\frac{1}{5}f|\Delta_n f|^4+fQ_n\Big(1-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2\Big)\ \Big]\geq 0.$$

由于 $|Q_n|\leq\frac{1}{2}|\Delta_n f|^3$，我们看到 $\frac{1}{2}f|\Delta_n f|^2\geq\Big|fQ_n\Big(1-\frac{2}{5}|\Delta_n f|^2\Big)\Big|$。此外，我们有 $\mathbb{E}_{n-1}(f\Delta_n f)=\mathbb{E}_{n-1}|\Delta_n f|^2$，因此可以得出，这一项大于表达式中所有其余的负项。

3.3. 不等式（3.5）的证明。现在我们来证明该不等式

$$|\Delta_n(e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}f)|\leq(4+e)|\Delta_n f|.$$

利用公式（3.1），我们将该不等式的左端变形为:

$$\begin{aligned}|\Delta_n(e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}f)| &= \left|e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}\mathbb{E}_n f-\mathbb{E}_{n-1}\left(f\cdot e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}\right)\right| \\ &= \left|e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}\mathbb{E}_n f-\mathbb{E}_{n-1}f\right| \\ &= \left|e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}\Delta_n f+\left(e^{\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2}-1\right)\mathbb{E}_{n-1}f\right|.\end{aligned}$$

第一项的绝对值不超过 $e|\Delta_n f|$。此外，利用对于 $x\le 1$，我们有 $|e^x-1|\le 2|x|$, 可知第二项的绝对值不大于

$$2|\Delta_n f-\beta_n|\Delta_n f|^2|\le 2|\Delta_n f|+2\beta_n|\Delta_n f|^2\le 4|\Delta_n f|,$$

因为 $\beta_n\le\frac{1}{|\Delta_n f|}$。

4. Proof of Theorem 3: application of Kislyakov's correctiontheorem

4.1. 一般修正定理的表述。现在我们将表述 [9] 中修正定理的一个版本，该版本适用于我们的情形。

设 X 是 Ω 上由可积函数构成的巴拿赫空间。对于每个函数 $g\in L^\infty$，我们可以在 X 上定义泛函 Φ_g，其定义为 $\Phi_g(h)=\int_\Omega hg\,d\mathbb{P}$。假设以下两个条件成立。

A1. $X\hookrightarrow L^1$ 的嵌入是连续的，且 X 的单位球是弱紧的 ct
于 L^1中。**A2.** 对每个 $g\in L^\infty$，我们有以下估计:

$$\mathbb{P}\{|g|>t\}\le\frac{c}{t}\|\Phi_g\|_{X^*}.$$

定理。设 f 是 L^∞, $\|f\|_\infty\le 1$中的一个函数。那么对每个 $0<\varepsilon\le 1$，都存在 X 中的一个函数 g，满足以下条件:

$$|g|+|f-g|=|f|; \tag{4.1}$$

$$\mathbb{P}\{f\ne g\}\le\varepsilon\|f\|_1; \tag{4.2}$$

$$\|g\|_X\le C(1+\log\varepsilon^{-1}). \tag{4.3}$$

我们可以取 $X=L^\infty\cap SL^\infty$，也就是说，取有界函数且其平方函数也有界的空间。X 上的范数是自然的: $\|g\|_X=\max\{\|g\|_\infty,\|Sg\|_\infty\}$。

我们定义以下算子，它将例如 L^2 中的函数映射为 ℓ^2值函数:

$$T(f)=(\Delta_n f)_{n\ge 1}.$$

那么 T是一个线性算子，且$\|Sf\|_p=\|Tf\|_{L^p(\ell^2)}$。特别地，$X$ 上的范数可以改写为 $\|g\|_X=\max\{\|g\|_\infty,\|Tg\|_{L^\infty(\ell^2)}\}$。也容易看出，$X$ 是一个巴拿赫空间。

事实证明，如果 X 满足条件 A1，那么它是一个对偶空间。令 Y 为集合 $\{\Phi_g$ 在 X^* 的范数下的闭包: $g\in L^\infty\}$。接下来的引理已在 [9] 中得到证明。

引理 4.1. 假设 X 满足条件 A1。那么， Y 的对偶是 X，且 X 球上的弱*拓扑与 L^1的弱拓扑一致。

只需验证 X的条件 A1 和 A2：这样便证明了定理 3。这可以参照 [9, 引理 2] 的方法来完成。不过，这里我们使用的是算子 T，而非奇异积分算子，因此将简要讨论一些与我们当前情形不同的细节。

4.2. 一般定理条件的验证。对于巴拿赫空间 Y，我们将该空间中的单位球记为 B_Y。

4.2.1. 条件 A1 的验证。嵌入 $X \hookrightarrow L^1$ 的连续性显然成立，因此我们只需证明 B_X 在 L^1中弱紧。设$\|f_n\|_\infty \le 1$、 $\|S(f_n)\|_\infty \le 1$，且 $f_n \to f$ 在 L^1中弱收敛。我们需要验证$\|S(f)\|_\infty \le 1$。注意，在 B_{L^∞} 上， L^1 中的弱收敛与 L^∞ 中的弱*收敛相同。

考虑算子 $U\colon L^2(\ell^2) \to L^2$，它作用于 $v = (v_m)_{m\ge1} \in L^2(\ell^2)$，定义如下：

$$Uv = \sum_{m\ge1} \Delta_m v_m. \tag{4.4}$$

简单的形式验证表明 $U^* = T$。

接下来，我们还可以看到， U 是从 $H^1(\ell^2)$ 到 L^1 的有界算子（关于鞅 Hardy 空间 H^1 的定义及其最重要的性质，包括 H^1 与 BMO 之间的对偶性，可参见例如 [13, 第 2]章；这里我们需要 ℓ^2-值 Hardy 空间，但两者并无区别：平方函数、极大函数等都可以像标量值情形那样定义，并且具有相同的性质。还值得一提的是，关于更一般的 UMD 巴拿赫空间背景下的向量值鞅， [16]一书中有大量相关内容）。事实上，我们有：

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^1(\ell^2)} = \Big\|\Big(\sum_{k\ge1} |\Delta_k v|_{\ell^2}^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 &= \Big\|\Big(\sum_{k\ge1}\sum_{m\ge1} |\Delta_k v_m|^2\Big)^{1.2}\Big\|_1 \\ &\ge \Big\|\Big(\sum_{k\ge1} |\Delta_k v_k|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 = \|S(Uv)\|_1 \gtrsim \|Uv\|_1.\end{aligned}$$

现在我们看到， T 是一个有界且弱*连续的算子，从 L^∞ 到 BMO(ℓ^2) =(H^1(ℓ^2))*。空间 BMO(ℓ^2)由以下半范数定义：

$$\|v\|_{\mathrm{BMO}(\ell^2)} = \sup_{n\ge1} \|\mathbb{E}_n(|v - \mathbb{E}_{n-1}v|_{\ell^2}^2)\|_\infty.$$

因此， $Tf_n \to Tf$在 BMO(ℓ^2) 中弱*收敛。此外， $Tf_n \in B_{L_0^\infty(\ell^2)}$ 其中L_0^∞(ℓ^2)表示由满足 $\mathbb{E}v = 0 \in \ell^2$ 的函数 $v \in L^\infty$(ℓ^2) 构成的空间。不过，这个球在 BMO 的弱*拓扑下是紧的，因为包含映射 L_0^∞(ℓ^2) $\hookrightarrow$BMO(ℓ^2) 是弱*连续的（因为它是包含映射 H_0^1(ℓ^2) $\hookrightarrow L_0^1$(ℓ^2) 的对偶算子，其中下标 0 仍用于表示由均值为 0 的函数构成的子空间）。条件 A1 得到验证。

4.2.2. 条件 A2 的验证。验证条件 A2 的主要要素是算子 U 的弱型 (1, 1) 估计。

引理 4.2. 由 (4.4) 定义的算子 U 是从 L^1(ℓ^2) 到 $L^{1,\infty}$ 的有界算子。

证明. 对任意的 $v \in L^1(\ell^2)$ 和 $t>0$，我们需要证明以下不等式

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{k\ge 1}\Delta_k v_k\Big|>t\Big\}\le \frac{c}{t}\|v\|_{L^1(\ell^2)}. \tag{4.5}$$

该不等式是 (ℓ^2 值)鞅的 Gundy分解 的直接推论。关于 Gundy分解 的证明，参见 [13, 定理 1.3.1.8]；关于向量值版本，另见 [16, 定理 5.15]。

对于任意 $t>0$，我们将 $v\in L^1(\ell^2)$ 分解为 $v=W+Y+Z$，其中

$$\|W\|_{L^2(\ell^2)}^2\le 2t\|v\|_{L^1(\ell^2)}; \tag{4.6}$$

$$\Big\|\sum_{k\ge 1}|\Delta_k Y|_{\ell^2}\Big\|_1\le 4\|v\|_{L^1(\ell^2)}; \tag{4.7}$$

$$|\{\sup_k|\Delta_k Z|_{\ell^2}>0\}|\le\frac{\|v\|_{L^1(\ell^2)}}{t}. \tag{4.8}$$

我们需要估计三个加项中的每一个。对于第一个，有

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{k\ge1}\Delta_k W_k\Big|>t\Big\}\le\frac{\|W\|_{L^2(\ell^2)}^2}{t^2}\le\frac{2\|v\|_{L^1(\ell^2)}}{t}.$$

对于第二个，我们写作：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{k\ge1}\Delta_k Y_k\Big|>t\Big\}&\le\frac{1}{t}\Big\|\sum_{k\ge1}|\Delta_k Y_k|\Big\|_1\\&\le\frac{1}{t}\Big\|\sum_{k\ge1}\Big(\sum_{m\ge1}|\Delta_k Y_m|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1\le\frac{4\|v\|_{L^1(\ell^2)}}{t}.\end{aligned}$$

最后，对于最后一个，有：

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{k\ge1}\Delta_k Z_k\Big|>t\Big\}\le\mathbb{P}\Big\{\Big|\sum_{k\ge1}\Delta_k Z_k\Big|>0\Big\}\le\frac{\|v\|_{L^1(\ell^2)}}{t}.$$

结合这些估计，我们得到不等式 (4.5)（左端用 $3t$ 替代 t）。

□

根据我们对条件 A1 的验证（基本上取自 [9]）和引理 4.1，不难得出自然嵌入

$$X\hookrightarrow(L^\infty\oplus L^\infty(\ell^2))_\infty,\quad f\mapsto(f,Tf)$$

是弱*连续等距映射。对于每个 g，泛函 Φ_g 属于 X 的预对偶，因此我们可以使用 Hahn–Banach定理，将其延拓为 $(L^\infty\oplus L^\infty(\ell^2))_\infty$ 上的弱*连续泛函。这意味着存在函数 $u\in L^1$、$v\in L^1(\ell^2)$，使得

$$\|u\|_1+\|v\|_{L^1(\ell^2)}\le\|\Phi_g\|_{X^*} \tag{4.9}$$

并且对于每个 $f\in X$

$$\int_\Omega fg\,d\mathbb{P}=\langle\Phi_g,f\rangle=\langle f,u\rangle+\langle Tf,v\rangle=\int_\Omega(fu)\,d\mathbb{P}+\int_\Omega\sum_{m\ge1}v_m\Delta_m f\,d\mathbb{P}.$$

我们断言 $g=u+Uv$。事实上，任取 $N>0$。我们可以将上述恒等式应用于任意函数 $f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_N,\mathbb{P})$（显然，该函数属于 X，因为

在该表达式的定义中只有有限个非零加项Sf），由此可得

$$\int_\Omega f\mathbb{E}_N g\,d\mathbb{P} = \int_\Omega f((\mathbb{E}_N u) + U(\mathbb{E}_N v))\,d\mathbb{P}.$$

由此可得 $\mathbb{E}_N g = \mathbb{E}_N u + U(\mathbb{E}_N v)$。接下来只需令 N 趋于无穷大（此时 $\mathbb{E}_N v \to v$ 属于 $L^1(\ell^2)$, 因此由引理 4.2 $U(\mathbb{E}_N v)$ 可知 $\to Uv$ 属于 L^1, ∞），于是我们确实得到 $g = u + Uv$。

若再次应用引理 4.2，则由 (4.9) 可得条件 A2。

5. Open problems

问题 1. 正如我们所见，定理 3 是非构造性的，但比定理 2 稍强。不过，我们不知道是否存在一种符合定理 3 思路、适用于算子 σ 的一般性修正定理。主要障碍在于，应用基斯利亚科夫定理需要线性算子；将算子 S 线性化很容易（我们在上文通过定义算子 T 已经做到了），但不清楚能否对 σ 进行类似处理。因此，若能为条件平方函数算子 σ 得到某种类似于定理 3 的修正定理，将会很有意义。

问题 2。在论文 [6] 中的二进情形下，作者指出，所构造的乘子函数 m 属于（二进）Muckenhoupt 类 A_∞。因此，自然会产生一个问题：我们在定理 3 的证明中使用的抽象方法，能否用于得到一个属于类 A_∞ 的乘子函数 m（即使是在最简单的二进情形下）？对于其他修正定理，例如论文 [9] 中的修正定理，也值得探讨同一问题。

问题 3. 对应于任意滤过概率空间，存在一种鞅 A_∞ 类的概念，参见例如 [13, 第 6] 章。我们没有研究定理1和定理2的证明中所构造的乘子函数的性质，但它们是否属于某个（定义恰当的） A_∞ 类，似乎是一个有趣且非平凡的问题。

致谢。作者谨向 P. F. X. M¨uller 教授致以诚挚谢意，感谢他就本文内容进行的诸多富有成果的讨论并提出宝贵意见。

References

[1] D. S. Anisimov, S. V. Kislyakov, *Double singular integrals: interpolation and correction*, 《代数与分析》16(5), 1–33（2004）; 《圣彼得堡数学杂志》16:5, 749–772（2005）。[2] S.-Y. A. Chang, J. M. Wilson, T. H. Wolff, *Schrödinger operator* **60** 2 217 246 1985 , 《Commentarii Mathematici Helvetici》, （）, –（）。[3] A. Garsia, *Martingale Inequalities: Seminar Notes on Recent Progress*, 《数学讲义丛书》。W. A. Benjamin 公司，雷丁，马萨诸塞州，1973。[4] P. Ivanishvili, S. V. Kislyakov, *Some weighted norm inequalities for the Correction up to a function with sparse spectrum and uniformly convergent Fourier series* **376**, 25 47 2010 , POMI 科学研讨班论文集 –（）。英文译本见《数学科学杂志》（纽约）172:2（2011）, 195–206。[5] P. W. Jones, *Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity and harmonic measure*, 载于《调和分析与偏微分方程》（埃斯科里亚尔, 1987）, 数学讲义第1384卷, 24–68, 施普林格, 柏林（1989）。[6] P. W. Jones, P. F. X. M¨uller, *Conditioned Brownian motion and multipliers into* SL∞, 《几何与泛函分析》14(2), 319–379（2004）。[7] S. V. Kislyakov, *Quantitative aspect of correction theorems* **92**, , 182, 191, 1979 POMI 科学研讨班论文集, –（）。

[8] S. V. Kislyakov, *A new correction theorem*, 苏联科学院通报·数学系列48(2), 305–330（1984）。[9] S. V. Kislyakov, *A sharp correction theorem, I*, 数学研究113, 177–196（1995）。[10] S. V. Kislyakov, P. S. Perstneva, *Indicator functions with uniformly bounded Fourier sums and large gaps in the spectrum* **27** 2 33, 18 2021 ,

《傅里叶分析与应用杂志》, （）, 论文编号 pp.（）。[11] R. Lechner, *Factorization in SL^∞*, 以色列数学杂志226(2), 957–991（2018）。[12] R. Lechner, *Dimension dependence of factorization problems: Hardy spaces and SL_n^∞*, 以色列数学杂志232(2), 677–693（2019）。[13] R. Long, *Martingale Spaces and Inequalities*, 北京大学出版社, 北京, 1993。[14] P. F. X. M ¨ uller, , , , *Hardy martingales — stochastic holomorphy L^1-embeddings and isomor- phic invariants* 43, 新数学专著, 第卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 2022。[15] P. F. X. M¨uller, *Isomorphisms between H^1 spaces*, 波兰科学院数学研究所, 数学专著（新系列）, 第66卷, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2005。[16] G. Pisier, *Martingales in Banach spaces*, 剑桥高等数学研究第155卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 2016。[17] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 第三版, 施普林格, 1999。[18] F. Weisz, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, 数学讲义第1568卷, 施普林格, 柏林, 1994。

Institute of Analysis, Johannes Kepler University Linz, Alternberger Strasse 69, A-4040 Linz, Austria*Email address*: celis-anton@yandex.ru