arXiv:2303.08094v1 [math.AP] 14 Mar 2023

Robin 问题的 Pleijel 节点域定理

ASMA HASSANNEZHAD 和 DAVID SHER

Abstract. 我们证明了罗宾特征值问题的一个改进版 Pleijel 节点域定理。特别地，我们取消了以往工作中对 Robin 参数必须非负的限制。此外，我们还改进了 Pleijel 定理中的上界。对于欧几里得球这一具体例子，我们计算出一般常数 Robin 参数对应的 Pleijel 常数的显式值，并证明该值等于欧几里得球上 Dirichlet 拉普拉斯算子的 Pleijel 常数。

1. 引言

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个开、有界且连通的区域，其边界为 $C^{1,1}$，并设 $h \in L^\infty(\Omega)$。我们考虑 Robin 拉普拉斯算子的特征值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \mu u & \text{in } \Omega \\ \partial_n u + hu = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

其中 $\Delta = -\text{div grad}$ 是正拉普拉斯算子，n 是沿着 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。其谱由一列离散的实数构成，这些实数有下界，且每个特征值的重数有限。我们将其特征值记为 $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$。令$\{u_k\}_{k=1}^\infty$ 为相应的一列特征函数，它们构成 $L^2(\Omega)$ 的正交归一基。最后，令 N_k 表示 u_k的节点域数，即 $\Omega \setminus u_k^{-1}(0)$ 的连通分支数。我们用记号 $\Delta^{R,h}_\Omega$ 表示式 (1) 中的 Robin 拉普拉斯算子。根据 Courant 节点域定理，我们知道，对于任意 $k \geq 1$，都有$N_k \leq k$。

1956年，Pleijel [Ple56] 研究了平面区域内狄利克雷特征函数的节点域数量的渐近行为。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开、有界、连通且 Jordan 可测的区域。设 N_k^D表示 Ω 上拉普拉斯算子的特征函数对应于第 k个 Dirichlet 特征值（计入重数）时的节点域数量。Pleijel 节点域定理指出

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N_k^D}{k} \leq \gamma(2) = \frac{4}{j_0^2}.$$

Peetre[Pee57] 将该定理推广到了二维流形情形，B´erard 和 Meyer [BM82], 则将其推广到了任意维度，其中常数 $\gamma(2)$ 被替换为

$$\gamma(d) = \frac{2^{d-2} d^2 \Gamma(d/2)^2}{j_{(d-2)/2}^d},$$

其中 $j_{(d-2)/2}$ 是贝塞尔函数 $J_{(d-2)/2}$的最小正零点。注意，对于 $d \geq 2$ [BM82]，$\gamma(d) < 1$。近年来，Bourgain [Bou15], Donnelly [Don14],

而 Steinerberger [Ste14] 证明了 $\gamma(d)$ 并非最优上界。他们的结果给出了普莱耶尔定理的一个改进版本，即

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N_k^D}{k} \leq \gamma(d) - \epsilon(d), \tag{2}$$

其中 $\epsilon(d)$ 是一个仅依赖于 d 的正数。这些结果对 Dirichlet 拉普拉斯算子以及闭流形上的拉普拉斯算子均成立。

将普莱耶尔定理推广到其他边界条件的首项成果归功于 I. Polterovich [Pol09], ，他将普莱耶尔定理推广到了具有解析边界的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的 Neumann 拉普拉斯算子。L´ena [L´en19] 则采用不同的方法，将普莱耶尔定理推广到了任意维数下有界且 $C^{1,1}$ 区域 Ω 上带非负参数的 Robin 问题（其中包括 Neumann 问题）。

本文的目标有两个。首先，我们证明 Robin 问题 (1) 的一个改进的普莱耶尔定理，且不对 h 的符号作任何假设。我们的结果从两个方面拓展了 L´ena 的结果：一是去除了 h 非负的假设；二是表明 Robin 问题的普莱耶尔节点域定理中的常数可以进一步改进。

其次，我们计算了欧几里得单位球上 Robin 问题的精确 Pleijel 常数，其中 h 为常数（可正可负），并证明对于一般的 h，该常数与同一欧几里得单位球上 Dirichlet 问题的 Pleijel 常数相同。

我们的第一个主要结果如下。

定理 1.1. 存在一个正常数 $\epsilon(d)$，它仅依赖于 d，使得对于任意具有 $C^{1,1}$ 边界的开、有界、连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，我们有

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N_k}{k} \leq \gamma(d) - \epsilon(d), \tag{3}$$

其中 $\gamma(d)$ 与式 (2) 中的定义相同。

注 1.2. 定理 1.1 的结论对于完备黎曼流形中的开、有界、连通区域 Ω 也成立，只要其边界为 $C^{1,1}$，见下文定理 2.5。

定理 1.1 的证明紧随 L´ena [L´en19], 关于正参数 Robin 问题的普莱耶尔节点域定理的证明，并结合了 Bourgain [Bou15], 、Donnelly [Don14] 和 Steinerberger [Ste14] 对改进的普莱耶尔定理的证明。具体而言，后三位作者的方法应用于一部分节点域，L´ena 将其称为内部区域。这些节点域对应的特征函数的 L^2-范数集中在远离边界之处。

证明要求边界具有 $C^{1,1}$ 正则性，而在较弱的正则性假设下普莱耶尔定理是否成立仍未解决。例如，正方形不是 $C^{1,1}$ 区域，因此正方形上的 Robin 拉普拉斯算子的普莱耶尔定理仍是一个开放问题。在这种情形下，唯一可用的结果是对库朗尖锐罗宾特征值个数上界的研究。若某个罗宾特征值对应的特征函数恰有 k 个节点域，则称该特征值为库朗尖锐；注意， $C^{1,1}$ 区域上的普莱耶尔定理直接推出库朗尖锐罗宾特征值的个数有限。Gittins 和 Helffer [GH19, GH21]

研究了 Robin 参数 h 为常数时，正方形上的 Robin 问题的库朗尖锐特征值个数上界。特别是，他们证明了参数 h 为常数的正方形上的 Robin 拉普拉斯算子只有有限个库朗尖锐特征值。

我们还注意到，Gittins 和 L´ena [GL20] 对具有 C^2 边界的区域上的非负参数罗宾问题，得到了 Courant 锐特征值数量的一个上界。他们利用了罗宾、狄利克雷和 Neumann 特征值之间的单调性结果，而这些结果仅在 Robin 参数非负时成立。

本文第二部分讨论如何计算圆盘上 Robin 特征值问题的 Pleijel 常数，其中 $\sigma \in \mathbb{R}$ 为常数。我们将给定区域 Ω 上 $\limsup_{k\to\infty} \frac{N_k}{k}$ 的精确值称为 Pleijel 常数，并记为 $\mathrm{Pl}(\Delta^{R,\ h}\ \Omega)$。对于狄利克雷和 Neumann 拉普拉斯算子，我们将 Pleijel 常数分别记为 $\mathrm{Pl}(\Delta_\Omega^D)$ 和 $\mathrm{Pl}(\Delta_\Omega^N)$。I. Polterovich [Pol09] 猜想

$$\sup_\Omega \mathrm{Pl}(\Delta_\Omega^D) = \sup_\Omega \mathrm{Pl}(\Delta_\Omega^N) = \frac{2}{\pi} = 0.636\cdots,$$

其中，上确界取遍所有具有正则边界（例如 Lipschitz 边界）的平面区域。若该猜想成立，则此不等式是尖锐的，因为 Polterovich 已证明，对于矩形 [Pol09]，上界可以达到。

给定区域的 Pleijel 常数值通常是未知的。Bobkov[Bob18] 计算了一些简单区域的 $\mathrm{Pl}(\Delta_\Omega^D)$，其中包括文献 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得圆盘。当 $\Omega = \mathbb{B}$ 是文献 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得圆盘时，他证明了 $\mathrm{Pl}(\Delta_{\mathbb{B}}^D) = 0.461\cdots$

我们证明，在单位圆盘这一例子中，当 Robin 参数$h = \sigma$为常数时，Pleijel 常数的值通常与边界条件无关。更确切地说，我们对 σ 引入以下条件：

假设 1.3。方程的正根

$$\frac{zJ'_{m+d/2-1}(z)}{J_{m+d/2-1}(z)} = \frac{d}{2} + 1 - \sigma,$$

where $J_\nu(z)$ 是贝塞尔函数，不同 $m \in \mathbb{N}_0$ 值对应的根互不相同 .

应将这一条件视为 Bourget 猜想的一种变体 [Wat44，第 485 页]。它在如下意义上是泛型的：对于至多可数个 $\sigma \in \mathbb{R}$，该条件可能不成立，我们将在命题 3.2 中证明这一点。在此假设下，我们能够证明，Robin 问题的 Pleijel 常数与 Dirichlet 问题的相同。

定理 1.4. 设 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个欧几里得球。假设 $h = \sigma$，且假设 1.3 对 σ 成立。那么 $\mathrm{Pl}(\Delta^{R,\ \sigma}_{\mathbb{B}}) = \mathrm{Pl}(\Delta_{\mathbb{B}}^D)$。特别地，对于 $d = 2$，我们有 $\mathrm{Pl}(\Delta^{R,\ \sigma}_{\mathbb{B}}) = \mathrm{Pl}(\Delta_{\mathbb{B}}^D) = 0.461\cdots$。

证明首先利用变量分离写出罗宾谱。假设 1.3 表明，不会发生导致不同特征空间中的球谐函数混合的偶然重合，因此每个罗宾特征函数都是角变量中的球谐函数与径向变量中的贝塞尔函数的乘积。我们利用贝塞尔函数渐近性质证明，对于每个罗宾特征函数，都存在一个具有相同节点数的狄利克雷特征函数，且其特征值与罗宾特征值充分接近，

这足以证明该定理。

研究 Pleijel 常数是否独立于边界条件，是一个颇有意思的问题。更确切地说，

开放问题 1.5. 对于任意具有足够规则边界（例如 Lipschitz 边界或 $C^{1,1}$ 边界）的有界连通区域 Ω，我们能否证明 $\mathrm{Pl}(\Delta^{R,h}_{\Omega}) = \mathrm{Pl}(\Delta^{D}_{\Omega})$?

2. Proof of Theorem 1.1

定理 1.1 的证明分为两部分：第一部分依据 L´ena[L´en19], 关于非负参数 Robin 问题的普莱耶尔定理证明，第二部分则依据 Bour- gain [Bou15], Donnelly [Don14] 和 Steinerberger [Ste14]对改进的普莱耶尔定理的证明。我们先回顾以往工作的主要思路。

Dirichlet 拉普拉斯算子的普莱耶尔定理的经典证明只用到了法贝尔–克拉恩不等式（对所有节点域）和魏尔定律。然而，对于 Neumann 和 Robin 特征值问题，与边界相邻的节点域并不满足法贝尔–克拉恩不等式。对于具有解析边界的有界平面区域，I. Polterovich 利用 Toth 和 Zelditch [TZ09] 给出的估计，证明了普莱耶尔节点域定理：与边界相邻的节点域数量的增长速度小于指标 k。L´ena 则以完全不同的方法，将普莱耶尔定理推广到了具有 $C^{1,1}$ 边界的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负参数 Robin 问题。

由于我们的证明依赖于 L´ena 的证明，我们简要说明其主要思路。L´ena 考虑了两类节点域，分别称为内部节点域和边界节点域。若特征函数在 D 上的 L^2-范数集中于 Ω 的边界之外，则称相应的节点域 D 为内部节点域；若特征函数在 D 上的 L^2-范数在 Ω 的边界附近具有显著的质量，则称相应的节点域为边界节点域。随后，他证明边界节点域的数量增长速度低于 k。因此，当 $k \to \infty$ 时，边界节点域不会对比例 N_k/k 的极限产生贡献。我们采用同样的方法将节点域分为内部节点域和边界节点域，并在不对 Robin 参数 h 施加任何限制的情况下推广 L´ena 的结果。粗略地说，我们证明，来自 $h^- = \max\{-h, 0\}$ 的贡献会影响低阶项，但在极限中除以 k 后便会消失。

要得到拉普拉斯算子普莱耶尔定理的改进版本，主要思路（如 [Bou15, Don14, Ste14]）是沿用普莱耶尔定理的原始证明，但使用法贝尔–克拉恩不等式的定量版本，并证明这能改进普莱耶尔定理中的上界。我们将这一思路应用于罗宾特征值问题，只对内部区域使用法贝尔–克拉恩不等式的定量版本。

我们首先采用与 [L´en19] 中概述的相同总体方法。首先，我们给出两个关于特征函数的关键命题。第一个涉及边界正则性，是对 [L´en19，命题 1.6] 的推广。在本节中，我们主要使用与 [L´en19] 中相同的记号。

命题 2.1. 任意特征函数 u of $\Delta^{R,h}_{,}$ Ω 都是 C^1(Ω) 的一个元素。 —

证明。该结论可由一些椭圆正则性论证得出。Decio[Dec22], 采用了同样的论证思路，证明了 Steklov 特征函数也满足同一结论；L´ena [L´en19]则证明了具有正参数的 Robin 特征函数满足该结论。

具体而言，设 u 是 $\Delta^{R,h}_{,}$ Ω的一个特征函数，对应特征值为 μ。那么 $u \in H^1$(Ω)（参见例如 [Dan09]），且其迹属于 $H^{1/2}$(Ω)。根据 [Gri85，命题 2.5.2，若 v是下式的弱解:

$$\begin{cases} \Delta v + v = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n v = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $f \in L^2$(Ω) 且 $g \in W^{1-1/p,p}$(Ω)，那么 $v \in W^{2,p}$(Ω)。取 $p = 2$、 $v = u$、$f = (1+\mu)u$和 $g = -hu$，可得 $u \in W^{2,2}$(Ω)。通过迭代提升论证，我们得到对所有 $p < \infty$ 都有 $u \in W^{2,p}$(Ω)，进而由 Sobolev 嵌入定理得出 $u \in C^1$(¯Ω)。详细证明请参见 [Dec22，命题 2] 的证明。□

第二个是对 Green 公式的替代，将 [L´en19 的命题 1.7 和 4.3] 推广了。

命题 2.2. 设 $H = \|h^-\|_\infty$，其中 $h^-(x) = \max\{-h(x), 0\}$。存在一个仅依赖于 Ω 的常数 C，使得若 u 是 $\Delta^{R,h}_{,}$ Ω 的任意特征函数，其特征值为 μ，且 D 是 u 的任意节点域，则

$$\int_D |\nabla u|^2 \, dx \le (\sqrt{\mu} + CH + \sqrt{CH})^2 \int_D u^2 \, dx.$$

证明. 估计式 (4) 的证明与 [L´en19 的命题 1.7 和 4.3] 相同。设 $\tilde{u} : U \to \mathbb{R}$ 是将 u 延拓到 U （ ¯Ω 的一个开邻域）的 C^1-延拓。由于根据命题 2.1 有 $u \in C^1$ (¯Ω)，这样的延拓存在。设 $\tilde{D}$ 是包含 D 的 $\tilde{u}$ 的节点域。对于 $\alpha > 0$，记

$$D_\alpha = D \cap \{u(x) > \alpha\}, \qquad \tilde{D}_\alpha := D \cap \{\tilde{u}(x) > \alpha\},$$
$$\Gamma_\alpha := \tilde{D}_\alpha \cap \partial\Omega, \quad \Sigma_\alpha := \partial\tilde{D}_\alpha \cap \Omega, \quad \gamma_\alpha := \partial\tilde{D}_\alpha \cap \partial\Omega.$$

令 $\alpha > 0$，使得 α 同时是 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}|_{\partial\Omega}$ 的正则值。这保证了 $\partial D_\alpha = \Gamma_\alpha \cup \Sigma_\alpha \cup \gamma_\alpha$ 是 Lipschitz 的，且 γ_α 是 ∂D_α 的一个 $(n-2)$– 维子流形 ˜ （详情见 [L´en19] ）。注意，由 Sard 定理可知，存在一个趋于零的此类正则值的无限序列。现在我们可以对 D_α 中的函数 $u_\alpha = u - \alpha$ 应用 Green 定理，得到

$$\int_{D_\alpha} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{D_\alpha} \Delta u_\alpha u_\alpha - \int_{\Gamma_\alpha} u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \, ds.$$

代入已知信息,

$$\int_{D_\alpha} |\nabla u|^2 \, dx = \mu \int_{D_\alpha} u u_\alpha \, dx - \int_{\Gamma_\alpha} h u u_\alpha \, ds.$$

由于 u 和 u_α 在 Γ_α 上以及在 D_α 上均为正，因此我们得出

$$\int_{D_\alpha} |\nabla u|^2 \, dx \le \mu \int_{D_\alpha} u^2 \, dx + H \int_{\Gamma_\alpha} u^2 \, ds. \tag{4}$$

步骤 2。下面用 u 和 ∇u 的 L^2 范数来估计不等式（4）右端的第二项。设 $\rho(x)$ 是 Ω 上的一个函数，在边界 ∇uΩ 的某个邻域内与 dist(L^2, u Ω) 一致

。根据下面的引理 2.3，在 $\partial\Omega$ 的某个邻域内，$\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ 为 $C^{1,\,1}$。因此，可以假设 $\rho \in C^{1,\,1}(\Omega)$。于是，根据 Green 定理，

$$\int_{\Gamma_\alpha} u^2\,ds = \int_{\partial D_\alpha} u^2 \partial_\nu \rho\,ds = \int_{D_\alpha} \nabla(u^2)\cdot\nabla\rho\,dx - \int_{D_\alpha} u^2\Delta\rho\,dx,$$

因此

$$\int_{\Gamma_\alpha} u^2\,ds \le \int_{D_\alpha} u^2|\Delta\rho|\,dx + \int_{D_\alpha} 2|u|\,|\nabla u|\,|\nabla\rho|\,dx.$$

由于 ρ 仅取决于 Ω，且属于 $C^{1,\,1}(\Omega)$，因此存在一个常数 C，使得

$$\int_{\Gamma_\alpha} u^2\,ds \le C\int_{D_\alpha} u^2\,dx + C\int_{D_\alpha} |u|\,|\nabla u|\,dx.$$

由柯西–施瓦茨不等式，

$$\int_{\Gamma_\alpha} u^2\,ds \le C\int_{D_\alpha} u^2\,dx + C\left(\int_{D_\alpha} u^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{D_\alpha} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

将其代入 (4)，并两边除以 $\int_{D_\alpha} u^2\,dx$，得到

$$\frac{\int_{D_\alpha}|\nabla u|^2\,dx}{\int_{D_\alpha} u^2\,dx} \le \mu + CH + CH\Big(\frac{\int_{D_\alpha}|\nabla u|^2\,dx}{\int_{D_\alpha} u^2\,dx}\Big)^{1/2}.$$

记

$$w := \frac{\int_{D_\alpha}|\nabla u|^2\,dx}{\int_{D_\alpha} u^2\,dx}.$$

容易看出，$w \le A + B\sqrt{w}$ 蕴含

$$w \le \left(\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + A}\right)^2 \le \left(B + \sqrt{A}\right)^2.$$

这里，$A = \mu + CH$ 和 $B = CH$，因此 $B + \sqrt{A} \le CH + \sqrt{CH} + \sqrt{\mu}$，从而

$$\frac{\int_{D_\alpha}|\nabla u|^2\,dx}{\int_{D_\alpha} u^2\,dx} \le (\sqrt{\mu} + CH + \sqrt{CH})^2.$$

命题 2.2 的结论现可通过沿 Sard 定理保证存在的正则值序列令 α 趋于零并取极限得到。注意，由命题 2.1，u 和 $|\nabla u|$ 在 Ω 上均连续。□

现在我们证明距离函数在 $\partial\Omega$ 的某个邻域上的正则性；上述命题 2.2 证明的第二步会用到这一结果。

我们称 $\partial\Omega$ 具有正 reach，若存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $x \in \partial\Omega_\delta := \{y \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(y,\partial\Omega) < \delta\}$，在 $\partial\Omega$ 中存在唯一的最近点。我们将满足此条件的 δ 的上确界记为 $\operatorname{reach}(\partial\Omega)$。有关具有正 reach 的集合的更多细节，请参阅 [Fed59，第 432] 页。

引理 2.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界连通开区域，其边界为 $C^{1,1}$。那么 $\partial\Omega$ 具有正 reach，且 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 的一个邻域上是 $C^{1,1}$。

在 [KP81], 中，Krantz 和 Parks 证明了，如果 $\partial\Omega$ 是 C^1 且具有正 reach，那么 dist$(x,\partial\Omega)$ 也为 C^1。注意，假设 $\partial\Omega$ 是 C^1 并不足以推出它具有正 reach，见 [KP81，例 4]。引理 2.3 的证明沿用了 [KP81，定理 2] 的证明思路，并结合了 [Fed59，第 4] 节的结果。

引理 2.3 的证明。reach$(\partial\Omega) > 0$is 这一事实是 [Fed59, 定理 4.12] 的推论。关于距离函数的正则性，我们重复 [KP81, 定理 2] 的证明中的相同论证。具体而言，对于任意 $p \in \partial\Omega$，我们选取一个坐标系，使 p 位于原点，并且在 $p = \mathbf{0}$ 的一个邻域 U 中有

$$U \cap \partial\Omega = \left\{(\boldsymbol{t}, f(\boldsymbol{t})) : \boldsymbol{t} \in B_r^{n-1}(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{n-1}, f \in C^{1,1}(B_r^{n-1}(\mathbf{0}))\right\}$$

满足 $f(0) = 0$ 且 $\nabla f(0) = 0$。令 $\delta \in (0, \text{reach}(\partial\Omega))$ 足够小，使得对于每个 $(\boldsymbol{x}, y) \in B_\delta^n(0)$，都存在唯一的最近点 $(\boldsymbol{t}, f(\boldsymbol{t})) \in \partial\Omega$，且满足 $\boldsymbol{t} \in B_r^{n-1}(0)$。由于 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, y)$ 是 $|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}|^2 + |f(\boldsymbol{t}) - y|^2$ 的极值。我们有

$$(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{t}) - y))\nabla f(\boldsymbol{t}) = 0. \tag{5}$$

令 $d(\boldsymbol{x}, y) := \text{dist}((\boldsymbol{x}, y)\ \partial\Omega) = \left(|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}|^2 + |f(\boldsymbol{t}) - y|^2\right)^{1/2}$。根据 [Fed59, Theorem 4.8(5)]，d 在 $B_\delta^n(0) \setminus \partial\Omega$ 上可微，且

$$\nabla d = \frac{1}{d}(\boldsymbol{x} - t, f(\boldsymbol{t}) - y), \qquad (\boldsymbol{x}, y) \in B_\delta^n(\mathbf{0}) \setminus \partial\Omega. \tag{6}$$

利用 (5)，我们可以写成 $d(\boldsymbol{x}, y) = |f(\boldsymbol{t}) - y)|(1 + |\nabla f(\boldsymbol{t})|^2)^{1/2}$. 将此式代入 (6)，并利用 (5)，得到

$$\nabla d = \frac{|(1 + |\nabla f(\boldsymbol{t})|^2)^{-1/2}}{|y - f(\boldsymbol{t})|}((f(\boldsymbol{t}) - y)\nabla f(\boldsymbol{t}), f(\boldsymbol{t}) - y), \qquad (\boldsymbol{x}, y) \in B_\delta^n(0) \setminus \partial\Omega. \tag{7}$$

(7) 右边为 $C^{0,1}$。因此，根据 [Fed59, Theorem 4.7]，我们得出上述恒等式在 $B_\delta^n(0)$ 上成立，进而 d 在 $B_\delta^n(0)$ 上为 $C^{1,1}$。由于 $\partial\Omega$ 是紧的，取一个有限开覆盖即可得到结论。□

注 2.4. 尽管命题 3.2 和 2.2 是在欧几里得情形下陈述的，但它们对于完备黎曼流形中的有界 $C^1,\ 1$ 区域仍然成立。事实上，命题 2.1 中证明特征函数正则性的论证，以及命题 2.2 的证明中使用的 Green 公式，显然都可以推广到黎曼情形。此外，如果 $\partial\Omega$ 具有正 reach，则 ρ 的正则性证明与引理 2.3 的证明完全相同；而这一点可通过对 $\partial\Omega$ 取有限覆盖，由 [Fed59, 定理 4.12] 得出。

为继续证明定理 1.1，我们需要回顾 [L´en19] 中关于内部节点域和边界节点域的定义。令 $\partial\Omega_\delta$ 表示 Ω 中 Ω 的 δ-邻域，

$$\partial\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

于是根据 [L´en19, 引理 2.1], , 对于任意充分小的 $\delta > 0$，存在常数$0 < c < C$ 和函数 $\phi_0^\delta, \phi_1^\delta \in C^{1,\ 1}(\Omega)$，使得 supp$(\phi_0^\delta) \subset \Omega \setminus \partial\Omega_{c\delta}$，supp$(\phi_1^\delta) \subset \partial\Omega_{C\delta}$，且 $(\phi_0^\delta)^2 + (\phi_1^\delta)^2 \equiv 1$。

设 u 是 $\Delta^{R,\ h}\ \Omega$的一个特征函数，且 D 是 u的一个节点域。我们考虑两个函数 $u_0 := \phi_0^\delta u$ 和 $u_1 := \phi_1^\delta u$。对于给定的 $\epsilon > 0$，若称 D 为一个

ϵ-内部节点域，当

$$\int_D u_0^2 \,\mathrm{d}x \geq (1-\epsilon)\int_D u^2 \mathrm{d}x, \tag{8}$$

并且，如果 D，则它是一个 ϵ-边界节点域

$$\int_D u_1^2 \,\mathrm{d}x > \epsilon \int_D u^2 \mathrm{d}x.$$

定理 1.1 的证明。设 u 是特征值为 μ_k 的特征函数，并设 $u_0 = \phi_0^\delta u$ 和 $u_1 = \phi_1^\delta u$，其中 $\delta = \mu_k^{-\frac{1}{4}}$。取充分小的 $\epsilon > 0$，并令 $\{D_j\}^{N_B(k,\epsilon)}{}_{j=1}$ 为 u 的 ϵ-内部节点域族，令 $\{D_j^b\}^{N_b(k,\epsilon)}{}_{j=1}$ 为 u 的 ϵ-边界节点域族。设 B_k 是一个第一 Dirichlet 特征值为 $\lambda_1^D(B_k) = \mu_k$ 的球。对于给定的 ϵ_1、$\epsilon_2 > 0$（稍后确定），我们按照 Don14、Bou15] 将节点域划分为三个互不相交的集合。

I. $|D_j| \geq |B_k|(1+\epsilon_1)$; II. $|D_j| \leq |B_k|(1+\epsilon_1)$ 和 $A(D_j) \geq \epsilon_2$; III. $|D_j| \leq |B_k|(1+\epsilon_1)$ 和 $A(D_j) < \epsilon_2$,

其中，$A(D)$ 是 Fraenkel 非对称性，$|\cdot|$ 表示该集合的 $n-$体积。关于 ϵ_1 和 ϵ_2 的取值，参见下文断言 2 的证明。至关重要的是，我们强调它们的取值与 ϵ无关。回想一下，

$$A(D) = \inf\left\{\frac{|D\Delta B|}{|B|} : \ B \text{ is a ball with } |B| = |D|\right\}.$$

设 $N_\star$ 为满足条件 $\star =$ I、II 或 II 的 ϵ-内部节点域的数量。注意，$N_B(k,\epsilon) = N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}} + N_{\mathrm{III}}$。

对于任意 ϵ-内部节点域 D，我们有以下关于 $\lambda_1^D(D)$ 的上界，该上界计算于 [L´en19，第 291]页：

$$\lambda_1^D(D_j) \leq \frac{\int_{D_j}|\nabla u_0|^2}{\int_{D_j} u_0^2} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\frac{\int_{D_j}|\nabla u|^2}{\int_{D_j} u^2} + C_0\frac{1+\frac{1}{\epsilon}}{1-\epsilon}\sqrt{\mu_k},$$

其中 C_0 是一个与 μ_k 无关的常数。应用命题 2.2，得到

$$\lambda_1^D(D_j) \leq \frac{\int_{D_j}|\nabla u_0|^2}{\int_{D_j} u_0^2} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\mu_k + C_1\sqrt{\mu_k} + C_2, \tag{9}$$

其中 $C_1 = 2(CH + \sqrt{CH}) + C_0\frac{1+\frac{1}{\epsilon}}{1-\epsilon}$ 且 $C_2 = (CH + \sqrt{CH})^2$。

我们首先估计 I、II、III 各类中的 ϵ 个内部节点域的数量。

情形 I。对于任意一个 I 型的 ϵ 个内部节点域 D_j，显然有

$$\omega_n j_{\frac{n-2}{2}}^n(1+\epsilon_1) = \lambda_1^D(B_k)^{n/2}|B_k|(1+\epsilon_1) \leq \mu_k^{n/2}|D_j|. \tag{10}$$

对所有 ϵ 个 I 型内部节点域求和并重新整理不等式 (10)，得到

$$N_I \leq \mu_k^{\frac{n}{2}}\frac{|\Omega_I|}{\omega_n j_{\frac{n-2}{2}}^n(1+\epsilon_1)}, \tag{11}$$

其中 Ω_I 是所有 ϵ 个 I 型内部节点域的并集。

情形 II。对于任意一个属于 II 型的 ϵ-内部节点域 D_j，我们使用定量法贝尔–克拉恩不等式 [BDPV15]，得到

$$\lambda_1^D(B_k)^{n/2}|B_k|(1+\epsilon_3) \le \lambda_1^D(B_k)^{n/2}|B_k|(1+c(n)A(D_j)^2) \le \lambda_1^D(D_j)^{n/2}|D_j|, \quad (12)$$

其中 $\epsilon_3 = c(n)\epsilon_2^2$。我们使用不等式 (9)，并对所有 II 型 ϵ-内部节点域求和，得到

$$N_{\mathrm{II}} \le \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\mu_k + C_1\sqrt{\mu_k} + C_2\right)^{\frac{n}{2}} \frac{|\Omega_{\mathrm{II}}|}{\omega_n j_{\frac{n-2}{2}}^n (1+\epsilon_3)}, \quad (13)$$

其中 Ω_{II} 是 II 型 ϵ-内部节点域的并集。

情形 III。对于任意一个属于 III 型的 ϵ-内部节点域 D_j，法贝尔–克拉恩不等式表明

$$\lambda_1^D(B_k)^{n/2}|B_k| \le \lambda_1^D(D_j)^{n/2}|D_j|,$$

我们使用不等式 (9)，并对所有 III 型 ϵ-内部节点域求和，得到

$$N_{\mathrm{III}} \le \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\mu_k + C_1\sqrt{\mu_k} + C_2\right)^{\frac{n}{2}} \frac{|\Omega_{\mathrm{III}}|}{\omega_n j_{\frac{n-2}{2}}^n}, \quad (14)$$

其中 Ω_{III} 是 III 型内部节点域的并集 ϵ。

现在回顾 Robin 问题的韦尔渐近公式（参见例如 [BS80、FG12]）：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k^{\frac{n}{2}}|\Omega|}{k} = \frac{(2\pi)^n}{\omega_n}, \quad (15)$$

以及 $\gamma(n)$ 的定义，

$$\gamma(n) := \frac{(2\pi)^n}{\omega_n^2 j_{\frac{n-2}{2}}^n}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \frac{N_B(k,\epsilon)}{k} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}} + N_{\mathrm{III}}}{k} \\ &\le \gamma(n)\left(\frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{1+\epsilon_1} + \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}}{1+\epsilon_3} + \alpha_{\mathrm{III}}\right)\right), \end{aligned}$$

其中 $\alpha_\star = |\Omega_\star|$，$\star =$ I 型、II 型、III 型。

为完成证明，我们需要证明以下陈述。

断言 1. 对于 ϵ-边界节点域，我们有

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N_b(k,\epsilon)}{k} = 0.$$

断言 1 的证明。证明可由 [L´en19，第 2 节4] 推出，我们不再重复计算细节。主要思路是通过反射将 u_1 延拓为函数 v，使其定义在每个 ϵ-边界节点域的邻域上，然后应用

法贝尔–克拉恩不等式于 v支撑内部的每个连通分支。这里需要用到命题 2.1 中讨论的特征函数正则性。于是我们可以得到 $N_b(k,\epsilon)$的一个估计：

$$N_b(k,\epsilon) \leq C_1 \alpha_k^{-\frac{1}{4}} \epsilon^{-\frac{n}{2}} \left(\alpha_k + C_2 \alpha_k^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{16}$$

其中 $\alpha_k = (\sqrt{\mu_k} + CH + \sqrt{CH})^2$。对于任意固定的 $\epsilon > 0$，由于魏尔定律 (15)，(16) 右侧的首项在 $k \to \infty$ 时趋于零，从而完成断言 1 的证明。□

断言 2. 存在适当的 ϵ_0、ϵ_1 和 ϵ_2 的取值，使得对于任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$，对应于 μ_k、$k \geq k(\epsilon)$ 的 ϵ-内部 I 型节点域占比不能为 1，即 $\alpha_{\mathrm{III}} := \frac{|\Omega^{\mathrm{III}}|}{|\Omega|} \leq c(n) < 1$。

断言 2 的证明。通过调整 [Don14 第 59] 页给出的论证，即可得到该断言的证明。回顾一下，对于任意 I 型节点域 D，我们有

$$|D| \leq (1+\epsilon_1)|B_k|, \quad \text{and} \quad A(D) < \epsilon_2. \tag{17}$$

第二个不等式意味着存在一个近似球 B，使得$|D| = |B|$ 且 $|D \Delta B| < \epsilon_2 |B|$。

现在，我们证明近似球 B 和一对 I 型节点域相同，若将 ϵ、ϵ_1和 ϵ_2 取得足够小，则它们的重叠可以任意小。

由法贝尔–克拉恩不等式可得

$$|B_k| \leq \left(\frac{\lambda_1^D(D)}{\lambda_1^D(B_k)}\right)^{\frac{n}{2}} |D| = \left(\frac{\lambda_1^D(D)}{\mu_k}\right)^{\frac{n}{2}} |D|. \tag{18}$$

For 对于任意固定的 ϵ，我们使用（9）中的估计。这意味着对于 $k \geq k(\epsilon)$，我们可以有 e

$$\frac{\lambda_1^D(D)}{\mu_k} \leq \frac{1+2\epsilon}{1-\epsilon}.$$

结合（17）和（18），可得

$$\left(\frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}} |B_k| \leq |D| \leq (1+\epsilon_1)|B_k| \tag{19}$$

因此，

$$\left(\frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}} (1+\epsilon_1)^{-1} \leq \frac{|\tilde{D}|}{|D|} = \frac{|\tilde{B}|}{|B|} \leq (1+\epsilon_1)\left(\frac{1+2\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

因此，如果我们将 $\epsilon, \epsilon_1 > 0$ 选得足够小，就能保证这些近似球˜ ˜ ˜的半径几乎相同。此外，我们有 $|B \cap B| \leq |D \Delta B| + |D \Delta B| <$ $\epsilon_2(|B| + |B|) = \epsilon_2(|D| + |D|)$，通过将 ϵ_2 选得足够小，可以使它们的重叠很小。注意，ϵ_1 和 ϵ_2 可以选取得与 ϵ无关。

我们只需证明 III 型节点域所覆盖的 Ω 的比例一致地小于 1，即可完成论证。根据 Rogers[Rog58]，的结果，在 $\mathbb{R}^n$ 中，半径相同的球的堆积密度 $\rho(n)$ 严格小于 1。粗略地说，只要稍微缩小球的尺寸，就能在区域 Ω 中得到一个堆积。于是，III 型节点域的体积与总体积之比 α_{III} 近似等于 $(1+o(1))\rho(n)$。详见 [Don14，第

59] 。 □

因此，

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\frac{N_k}{k} &= \limsup_{k\to\infty}\frac{N_B(k,\epsilon)}{k}\\ &\le \gamma(n)\left(\frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{1+\epsilon_1}+\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}}{1+\epsilon_3}+\alpha_{\mathrm{III}}\right)\right).\end{aligned}$$

根据断言 2，我们有 $\alpha_{\mathrm{III}} \le c(n) < 1$。注意， ϵ_3 不依赖于 ϵ。取 $\epsilon \to 0$即可得到定理 1.1 的结论。□

定理 2.5. 对于完备黎曼流形中边界为 $C^{1,\,1}$ 的有界开域 Ω，定理 1.1 的结论成立。

证明。只需说明，欧几里得情形下证明所需的关键要素可以推广到黎曼情形。由注 2.4 可知，命题 2.1 和 2.2 在黎曼情形下成立。我们按照 (8) 中的定义，将节点域分解为 ϵ 个内部节点域和 ϵ 个边界节点域，并按照 [Don14 第 3] 节第 8–9 页的论证进行推广。主要思路是使用较弱版本的法贝尔–克拉恩不等式及其定量版本；它们仅适用于体积小于给定阈值的 ϵ 个内部节点域。体积大于该阈值的 ϵ 个内部节点域的数量有界，且该界与 k 无关，因此它们不会影响极限。由此，我们可以重复定理 1.1 证明中的相同论证。更多细节请参阅 [Don14 第 3] 节。

□

3. Pleijel constant for the Robin problem on a Euclidean ball

本节中，我们将讨论 $\mathbb{R}^d$,$d \ge 2$ 中单位球上的 Robin 问题。始终假设 $h = \sigma$ 为常数，因此我们的边界条件为

$$\partial_n u + \sigma u = 0.$$

注意， $\sigma \ge 0$ 给出的谱非负，但我们不必作此假设。

我们先写出任意 $\sigma \in \mathbb{R}$ 下该问题的谱。首先，考虑 $\mathbb{R}^d$ 中球的狄利克雷谱。众所周知，它由贝塞尔函数零点的平方构成，具体为

$$\lambda_{m,k} = j_{\nu,k}^2, \quad m \ge 0, k \in \mathbb{N}$$

其中 $\nu = m + d/2 - 1$ 且 $j_{\nu,\,k}$ 是 $J_\nu(z)$ 的第 k 个正零点。这些特征值的重数为 $\kappa_{m,\,d}$，其中

$$\kappa_{0,d} = 1, \quad \text{otherwise } \kappa_{m,d} = \binom{m+d-1}{d-1} - \binom{m+d-3}{d-1}.$$

注意，当 $d = 2$ 时，对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $\kappa_{m,\,d} = 2$。重数 $\kappa_{m,\,d}$ 正是特征值为 $m(m+d-2)$ 的球谐函数空间的重数。

现在考虑 $\sigma \ge 0$ 时的罗宾谱。在这种情况下，特征值全都非负。它们为

$$\mu_{m,k} = x_{m+d/2-1,k}^2, \quad m \ge 0,\ k \in \mathbb{N}$$

同样，其重数为 $\kappa_{m,\ d}$。不过，数值 $x_{\nu,\ k}$ 不仅是贝塞尔函数零点，而且还是方程的第 k 个非负根

$$\frac{zJ'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = \frac{d}{2} - 1 - \sigma.$$

每对根之间恰好有一个这样的$x_{\nu,k}$，见 $J_\nu(k)$ [Wat44，第 480-481] 页。此外，$x_{\nu,1} < j_{\nu,1}$。

对于 $\sigma < 0$，负罗宾特征值只有有限多个。无论 σ 的符号如何，所有这些值 $x^2_{\nu,k}$ 仍然是特征值。对于 $m \geq -\sigma$，我们仍有$0 \leq x_{\nu,1} < j_{\nu,1}$。然而，当 $m < -\sigma$ 时，这一结论不再成立，而是有$x_{\nu,1} > j_{\nu,1}$。原因在于此时出现了一个负特征值，具体为 $-(x_{\nu,0})^2$, ，其中$x_{\nu,0}$ 是方程的唯一正根

$$\frac{zI'_\nu(z)}{I_\nu(z)} = \frac{d}{2} - 1 - \sigma,$$

其中 $I_\nu(z)$ 是修正贝塞尔函数。与之前一样，该特征值的重数为 $\kappa_{m,d}$ 。因此，负罗宾特征值的数量（按重数计）为

$$N_\sigma := \sum_{m=0}^{\lceil -\sigma \rceil} \kappa_{m,d}.$$

总而言之，对于 $m \geq -\sigma$，每个 $x^2_{\nu,\ k}$ 都是一个特征值，并且

$$0 < x_{\nu,1} < j_{\nu,1} < \cdots < x_{\nu,k} < j_{\nu,k} < x_{\nu,k+1} < \dots \tag{20}$$

然而，对于 $m < -\sigma$，每个 $x^2_{\nu,\ k}$ 都是一个特征值，但还存在一个对应的负特征值 $-x^2_{\nu,\ 0}$，因此我们得到的是

$$0 < j_{\nu,1} < x_{\nu,1} < \cdots < x_{\nu,k} < j_{\nu,k+1} < x_{\nu,k+1} < \dots \tag{21}$$

对狄利克雷谱和罗宾谱进行排序时，我们必须按顺序排列特征值。现在就来进行这一步。定义指标函数 $\iota(m,k)$，使其等于罗宾特征值 $\mu_{m,\ k} = x^2_{m,\ k}$可能具有的最小指标； $\iota_D(m,k)$也类似定义。之所以需要“可能具有的最小”这一说法，是因为这些特征值具有重数，但即使对每一对 (m,k) 都作出不同选择，后续工作也不会有任何变化。

下面这个技术引理是定理 1.4 证明的关键。

引理 3.1. 设 (m_i,k_i) 是 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$ 中的一个序列。那么

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\iota(m_i,k_i)}{\iota_D(m_i,k_i)} = 1.$$

证明暂且搁置，我们先利用引理 3.1 证明定理 1.4 .

定理 1.4 的证明。根据假设 1.3，所有罗宾特征函数都具有如下形式

$$f_m(\theta)J(x_{\nu,k}r)$$

对于某一对 (m,k)，其中 $f_m(\theta)$ 是一个球谐函数（属于 $Y_m(S^{d-1})$）。将 $x_{\nu,k}$ 替换为 $j_{\nu,k}$ 后，狄利克雷特征函数也有相同结论。考虑一列罗宾特征函数 u_i，其对应的特征值为 μ_{ℓ_i}，满足

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N(u_i)}{\ell_i} = \alpha.$$

根据上一段，存在一列 (m_i, k_i) 以及一列元素$f_{m_i} \in Y_{m_i}(S^{d-1})$，满足

$$u_i(\theta, r) = f_{m_i}(\theta) J(x_{\nu_i,k_i} r).$$

采用这一记号，$\ell_i = \iota(m_i, k_i)$。现在考虑相应的狄利克雷特征函数序列

$$w_i(\theta, r) := f_{m_i}(\theta) J(j_{\nu_i,k_i} r).$$

我们知道，对每个 i，$N(u_i) = N(w_i)$，因为二者都等于 $f_{m_i}(\theta)$ 的节点域数乘以 k_i。而 u_i 作为狄利克雷特征函数的指标恰为 $\iota_D(m_i, k_i)$。根据引理 3.1，

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N(w_i)}{\iota_D(m_i,k_i)} = \lim_{j\to\infty} \frac{N(u_i)}{\iota(m_i,k_i)} \frac{\iota(m_i,k_i)}{\iota_D(m_i,k_i)} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

因此，罗宾结点商的任一极限点也是狄利克雷结点商的极限点。逐字重复上述论证可知，反过来结论也成立。因此，两者的极限点集合及其上确界相同，证明完毕。□

3.1. 引理 3.1 的证明。我们先给出一些预备观察。根据狄利克雷特征值的韦尔定律，存在一个非零常数 c_d，使得当 $j_{m,\ k} \to \infty$ 时，

$$i_D(m, k) \sim c_d (j_{\nu,k})^d. \tag{22}$$

此外，重数系数 $\kappa_{m,d}$ 是关于 m 的 $d-2$ 次多项式。因此存在一个非零常数 $\tilde{c}_d$，使得当 $N \to \infty$ 时，

$$\sum_{m=1}^{N} \kappa_{m,d} = \tilde{c}_d N^{d-1} + O(N^{d-2}). \tag{23}$$

结合 (20) 和 (21)，可知对于每个 $k > 1$，

$$j_{\nu,k-1} < x_{\nu,k} < j_{\nu,k+1}. \tag{24}$$

当 $k = 1$ 时，我们有如下界 [Gra73, p. 335]

$$\max\{0, \sqrt{m^2 - \sigma^2}\} \le x_{\nu,1} < j_{\nu,2}. \tag{25}$$

最后，我们需要一些关于贝塞尔函数零点间距的结果。这些众所周知的界可直接由例如 [Hor17, Theorem 2] 得出。对于所有 $\nu \ge 1/2$ 和所有k，

$$j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k} \le j_{\nu,2} - j_{\nu,1}, \tag{26}$$

而当 $\nu < 1/2$ 时，

$$j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k} \le \pi. \tag{27}$$

现在我们证明引理 3.1。

引理 3.1 的证明。考虑 $\iota(m, k)$。我们将求出它的上界和下界。先从上界开始。令 $\eta = \ell + d/2 - 1$，并利用 (24)，可得

$$\iota(m,k) = N_\sigma + \sum_{(\ell,j):x_{\eta,j}\le x_{\nu,k}} \kappa_{\ell,d} \quad \le \quad N_\sigma + \sum_{(\ell,j):x_{\eta,j}\le j_{\nu,k+1}} \kappa_{\ell,d}.$$

分别考虑 $j=1$ 和 $j>1$ 项，

$$\iota(m,k) \le N_\sigma + \sum_{\substack{\ell \\ x_{\eta,1}\le j_{\nu,k+1}}} \kappa_{\ell,d} + \sum_{\substack{(\ell,j) \\ j\ge 2,\ x_{\eta,j}\le j_{\nu,k+1}}} \kappa_{\ell,d}.$$

对中间项使用 (25)，对最后一项使用 (24)，

$$\iota(m,k) \le N_\sigma + \sum_{\substack{\ell \\ \sqrt{\ell^2-\sigma^2}\le j_{\nu,k+1}}} \kappa_{\ell,d} + \sum_{\substack{(\ell,j) \\ j\ge 2,\ j_{\eta,j-1}\le j_{\nu,k+1}}} \kappa_{\ell,d}.$$

重写中间项，并在最后一项中将 $j-1$ 重新标记为 j，得到上界

$$\iota(m,k) \le N_\sigma + \sum_{\ell\le\sqrt{j_{\nu,k+1}^2+\sigma^2}} \kappa_{\ell,d} + \iota_D(m,k+1). \tag{28}$$

现在除以 $\iota_D(m,k)$，并考虑 $x_{m,k}$ 趋于无穷大时的极限（这等价于 $j_{m,k}$ 趋于无穷大，对任意由互不相同的 (m,k) 构成的无限子列都成立）。将 (28) 右侧第一项除以 $\iota_D(m,k)$ 后趋于零。根据 (23)，(28) 右侧第二项为

$$\tilde{c}_d j_{\nu,k+1}^{d-1} + O(j_{\nu,k+1})^{d-2}.$$

因此，除法后得到

$$\frac{\iota(m,k)}{\iota_D(m,k)} \le \frac{j_{\nu,k+1}^d}{j_{\nu,k}^d} + \frac{\tilde{c}_d j_{\nu,k+1}^{d-1}}{c_d j_{\nu,k}^d} + o(1). \tag{29}$$

我们断言 $j_{\nu,k+1}/j_{\nu,k} \to 1$，这将表明 (29) 右侧为 $1+o(1)$。事实上，这等价于证明下式趋于零:

$$\frac{j_{\nu,k+1}-j_{\nu,k}}{j_{\nu,k}}.$$

对于任何满足 $\nu < 1/2$ 的子序列，由于分子由 π 根据 (27) 有界，而分母趋于无穷，因此该式趋于零。对于所有其他此类子序列，(26) 给出

$$\frac{j_{\nu,k+1}-j_{\nu,k}}{j_{\nu,k}} \le \frac{j_{\nu,2}-j_{\nu,1}}{j_{\nu,1}+(k-1)\pi}.$$

但贝塞尔零点的渐近性质，再加上 $j_{\nu,\ 1} > \nu$ [ODL+20，(10.21.3)] 这一事实，给出

$$\frac{j_{\nu,k+1}-j_{\nu,k}}{j_{\nu,k}} \le \frac{C\nu^{1/3}}{\nu+(k-1)\pi},$$

当 $x_{\nu,\ k}$ 趋于无穷时，该式趋于零，从而证明了这一断言。将此断言应用于 (29)，得到

$$\frac{\iota(m,k)}{\iota_D(m,k)} \le 1+o(1). \tag{30}$$

现在我们要为 $\iota(m,k)$ 求一个下界。利用 (24) 以及 N_σ 非负这一事实，可得

$$\iota(m,k) \ge \sum_{(\ell,j):j_{\mu,j+1}\le x_{\nu,k}} \kappa_{\ell,d}.$$

现在我们必须分别考虑 $k > 1$ 和 $k = 1$ 两种情况。假设 $k > 1$。由 (24) 可得，

$$\iota(m,k) \geq \sum_{(\ell,j):j_{\mu,j+1}\leq j_{\nu,k-1}} \kappa_{\ell,d} \geq i_D(m,k-1) - \sum_{\ell:j_{\mu,1}\leq j_{\nu,k-1}} \kappa_{\ell,d}.$$

两边除以 $\iota_D(m,k)$。根据与上界情形相同的论证，右侧第一项趋于 1。右侧第二项趋于 0，因为分子为 $O(j_{\nu\,k-1,}^{d-1})$，而分母为 $c_d j_{\nu,k}^d$。因此得到

$$\frac{\iota(m,k)}{\iota_D(m,k)} \geq 1 - o(1). \tag{31}$$

另一方面，若 $k = 1$，则利用另一种下界 (25) 可得 s

$$\iota(m,1) \geq \sum_{(\ell,j):j_{\mu,j+1}\leq\sqrt{m^2-\sigma^2}} \kappa_{\ell,d} \geq \sum_{(\ell,j):j_{\mu,j}\leq\sqrt{m^2-\sigma^2}} \kappa_{\ell,d} - \sum_{\ell:j_{\mu,1}\leq\sqrt{m^2-\sigma^2}} \kappa_{\ell,d}.$$

由于 $m \to \infty$，右侧第一项为 $c_d m^d + o(m^d)$，第二项为$O(m^{d-1})$。因此再次除以 $\iota_D(m,1)$，得到 $1 + o(1)$，这也说明了此情形下的 (31)。由 (30) 和 (31) 即可得出引理 3.1。□

现在证明假设 1.3 是泛性的。

命题 3.2. 对至多可数个 $\sigma \in \mathbb{R}$，假设 1.3 不成立 .

证明。考虑这些函数

$$f_m(z) := \frac{zJ'_{m+d/2-1}(z)}{J_{m+d/2-1}(z)} - \frac{d}{2} - 1.$$

这些函数是实解析的，并且在每个区间上单调递减

$$(j_{m+d/2-1,k}, j_{m+d/2-1,k+1}),$$

并且在端点处（相应贝塞尔函数的零点）趋近于 $\pm\infty$。反设存在 m_1、k_1、m_2 和 k_2，使得对于不可数多个 σ，有 $x_{m_1k_1} = x_{m_2k_2}$。那么，在给定的一个有界开区间内（即各个函数对应区间的交集），存在不可数多个值 z，使得 $f_{m_1}(z) - f_{m_2}(z) = 0$。因此，这个零点集合必有一个聚点。数值 $m_j + d/2 - 1$ 要么都是整数，要么都是半整数，而这些阶数的贝塞尔函数的零点不会重合（见 Wat44，第 484–485], 页），所以在区间两端，$f_{m_1}(z) - f_{m_2}(z)$ 趋近于 $\pm\infty$。因此，聚点必在内部。但 $f_{m_1}(z) - f_{m_2}(z)$ 是解析的。所以在整个区间上必有 $f_{m_1}(z) - f_{m_2}(z) = 0$。然而这就产生了矛盾，因为贝塞尔零点同样不会重合。因此，$x_{m_1、\,k_1} = x_{m_2、\,k_2}$ 至多只会对可数多个 σ 成立。对所有可能的 m_1、k_1、m_2 和 k_2 取并集，即得该命题。□

注 3.3。请注意，即使不作假设 1.3，在欧几里得球上也存在一组由分离变量解构成的罗宾特征函数基。对于这组基，本节中的证明表明，Pleijel 定理成立，且其常数与狄利克雷球的情形相同。

Acknowledgment

作者感谢 Katie Gittins 提供的宝贵意见。A. H. 的部分研究经费来自英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/T030577/1。D. S. 的部分研究经费来自德保罗大学的 URC 资助。

References

[BDPV15] Lorenzo Brasco、Guido De Philippis 和 Bozhidar Velichkov。锐定量形式的法贝尔-克拉恩不等式。*Duke Math. J.*，164(9):1777–1831，2015年。[BM82] P. B

Ann. Sci. École érard 和 D. Meyer。

Norm. Sup. (4) 15 3 513 541, 1982

等周不等式及其应用。，( ): –。[Bob18] Vladimir Bobkov。关于某些区域的精确普莱耶尔常数。

Doc. Math. 23 799 813, , : –。[Bou15] J.

2018

Bourgain。关于 Pleijel 节点域定理。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(6):1601–1612，2015年。[BS80] M. ˇS. Birman 和 M. Z. Solomjak。 *Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory* 114 *American Mathematical Society*，卷，。美国数学会，

Translations Series 2

普罗维登斯，罗得岛州，。由 F. A. Cezus 从俄文译出。[Dan09] Daniel Daners。利普希茨区域上一般罗宾问题的逆正性。*Math. (Basel)* 92 1 57 69, 2009

1980

Arch.

，( ): –。[

Dec22] Stefano Decio。边界附近的 Steklov 特征函数节点集：内半径估计。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(21):16709–16729，2022年。[Don14] H. Donnelly。在黎曼流形上计数节点域。

Ann. Global Anal. Geom. 46 1 57 61, 2014

，( ): –。[Fed59]

Herbert Federer。曲率测度。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，93:418–491，1959年。[FG12] Rupert L. Frank 和 Leander Geisinger。具有罗宾边界条件的拉普拉斯算子的半经典分析。 *Bull. Math. Sci.*，2(2):281–319，2012年。[GH19] Katie Gittins 和 Bernard Helffer。正方形及其他平面区域的库朗尖锐罗宾特征值。 *Port. Math.*，76(1):57–100，2019年。[GH21] K. Gittins 和 B. Helffer。正方形的库朗尖锐罗宾特征值：负罗宾参数的情形。 *Asymptot. Anal.*，124(1-2):69–107，2021年。[GL20] Katie Gittins 和 Corentin L´ena。库朗尖锐诺伊曼和罗宾特征值的上界。 *Bull. Soc. Math. France*，148(1):99–132，2020年。[Gra73] Keith D Graham。rn 中单位球波动方程特征值的分离。*Studies in Applied Mathematics*，52(4):329–343，1973年。[Gri85] P. Grisvard。 *Elliptic problems in nonsmooth domains* 24 *Monographs and*，

Studies in Mathematics

卷。Pitman（Advanced Publishing Program），波士顿，马萨诸塞州，。[Hor17] David E Horsley。贝塞尔相位函数：计算与应用。

1985

Numerische Mathematik 136 3 679 702, 2017

，( ): –。[KP81]

Steven G. Krantz 和 Harold R. Parks。到

C^k *J. Differential* 超曲面的距离。，( ): –。

Equations 40 1 116 120, 1981

[L´en19] Corentin L´ena。诺伊曼和罗宾特征函数的普莱耶尔节点域定理。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，69(1):283–301，2019年。[ODL+20] F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. V. Saunders、B. R. Mille、H. S. Cohl 和编者 M. A. McClain。NIST数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2020年3月15日发布的1.0.26版，2020年。[Pee57] Jaak Peetre。库朗节点域定理的推广。 *Math. Scand.*，5:15–20，1957年。[Ple56] ˚A. Pleijel。关于库朗节点线定理的评述。 *Comm. Pure Appl. Math.*，9:543–550，1956年。[Pol09] Iosif Polterovich。自由膜的 Pleijel 节点域定理。

Proc. Amer. Math. Soc. 137 3 1021 1024, 2009

，( ): –。[Rog58] C.

A. Rogers。等球堆积。

Proc. London Math. Soc. (3) 8 609 620, , : –。

1958

[Ste14] S. Steinerberger。几何不确定性原理及其在普莱耶尔估计中的应用。 *Ann. Henri Poincaré*, 15(12):2299–2319，2014年。[TZ09] John A. Toth 和 Steve Zelditch。计数接触解析域边界的结点线。 *J. Differential Geom.*，81(3):649–686，2009年。[Wat44] George Neville Watson。 *A treatise on the theory of Bessel functions*， *2nd edition*。剑桥大学出版社，1944年。

University of Bristol School of Mathematics Fry Building Woodland Road Bris- , , , , „ tol BS8 1UG U.K.
Email address: asma.hassannezhad@布里斯托.ac.uk

DePaul University, Department of Mathematical Sciences,
2320 N Kenmore Ave.,Chicago, IL, 60614, U.S.A.*Email address*: dsher@depaul.edu