arXiv:2303.08125v2 [math.RT] 8 Apr 2023

外三角范畴的倾斜子范畴的若干性质

足立崇秀与塚本真由

Abstract. 外三角范畴同时推广了三角范畴和正合范畴。本文研究外三角范畴中的倾斜子范畴。首先，我们证明倾斜子范畴给出外三角范畴 Grothendieck 群的一组基。其次，我们引入倾斜变异的概念，并考察其基本性质。第三，我们探究由有限投射维数对象构成的子范畴中倾斜子范畴的性质。作为应用，我们可以重新得到 Auslander–Reiten 的结果，该结果给出了倾斜模与具有有限投射维数的反变有限预解子范畴之间的一个双射。

1. 引言

Keller 和 Vossieck（[20]）最早引入了 silting 对象的概念，用于研究 Dynkin 箭图表示的有界导出范畴上的 t-结构。这是对倾斜复形和倾斜模的推广。如今，silting 对象在三角范畴的研究中发挥着至关重要的作用。众所周知，silting 对象与三角范畴中的若干重要对象密切相关，例如 t-结构、余-t-结构、单纯心集合等（例如，[1, 9, 11, 21, 25, 29]）。作为三角范畴中 silting 对象的类比，作者（[2]）引入了外三角范畴中 silting 对象的概念；外三角范畴由 Nakaoka 和 Palu（[26]）定义，是对三角范畴和正合范畴的同时推广。倾斜模可实现为模范畴中由有限投射维数的模构成的子范畴内的 silting 对象，而该子范畴构成一个外三角范畴。换言之，外三角范畴中的 silting 对象，是三角范畴中的 silting 对象与有限维代数上的倾斜模的共同推广。

本文研究外三角范畴中 silting 对象/子范畴的性质。首先，我们描述具有 silting 子范畴的外三角范畴的 Grothendieck 群。Grothendieck 群是三角范畴和精确范畴的基本不变量。Aihara 和 Iyama（[5]）证明，silting 子范畴中两两不同构的不可分解对象构成 Krull–Schmidt 三角范畴的 Grothendieck 群的一组基。近期，外三角范畴的 Grothendieck 群在 [16, 30] 中得到了定义。作为 [5, Theorem 2.27]，的外三角版本，我们得到如下结果。

定理 1.1（定理 4.1，推论 4.2）。设 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 外三角范畴。若 $\mathcal{C}$ 存在一个 silting 子范畴 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{C}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{C})$ 是自由阿贝尔群，其基由 $\mathcal{M}$ 中不可分解对象的同构类组成。特别地，所有 silting 对象的非同构不可分解直和项数量都相同。

其次，我们在外三角范畴中引入 silting 变异，作为两种变异的共同推广：Riedtmann 和 Schofield（[28]）提出的有限维代数上的模范畴中的 tilting 变异，以及 Aihara 和 Iyama（[5]）提出的三角范畴中的 silting 变异。设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴，且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴。当 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个良余变有限子范畴时，也就是说，$\mathcal{M}$ 中的每个对象

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18E10, 18G80.*Key words and phrases.* silting子范畴，silting 变异，外三角范畴。

都存在一个左 $\mathcal{D}$-逼近，该逼近是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀（在 $\mathcal{C}$ 中），我们定义相对于 $\mathcal{D}$ 的 $\mathcal{M}$ 的左变异 $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$（见定义 4.10）。以下定理是本文的主要结果之一。

定理 1.2（定理 4.12(3)）。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个良余变有限子范畴。则 $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴。

Happel 和 Unger（[15]）以及 Aihara 和 Iyama（[5]）证明了，tilting 变异和 silt- ing 变异分别与倾斜模和 silting 子范畴上的偏序密切相关。作为他们结果的对应，我们给出了外三角范畴中 silting 变异与 silting 子范畴偏序之间的关系（见定理 4.16）。

利用 silting 变异，我们研究外三角范畴中关于 silting 子范畴的 Bongartz 型引理。Bongartz（[10]）证明，每个投射维数至多为一的预倾斜模，都是某个投射维数至多为一的倾斜模的直和项。然而，众所周知，关于倾斜模的 Bongartz 型引理并非总是成立。Rickard 和 Schofield（[27]）证明，对于有限表示型代数，有限投射维数倾斜模的 Bongartz 型引理成立。另一方面，Aihara 和 Mizuno（[4, 6]）研究了三角范畴中关于 silting 对象的 Bongartz 型引理，并给出了其成立的充分条件。作为他们结果的类比，我们给出了 Bongartz 型引理成立的一些充分条件（见定理 4.19、推论 4.21 和定理 4.22）。

最后，我们给出倾斜子范畴与反变有限的预解子范畴之间的一种关系，它推广了 Auslander–Reiten 结果（[7, 定理 5.5]）。令 $\mathcal{P}^\infty$表示由 $\mathcal{C}$ 中具有有限投射维数的对象组成的子范畴。于是我们有如下结果。

定理 1.3（定理 4.23）。设 $\mathcal{C}$ 是一个弱幂等完备外三角范畴，且有足够多的投射对象和内射对象。假设 $\mathcal{P}^\infty$ 中每个具有有限投射维数的倾斜子范畴都是反变有限的。那么， $\mathcal{P}^\infty$ 中具有有限投射维数的倾斜子范畴集合与 $\mathcal{C}$ 中具有有限投射维数的反变有限预解子范畴集合之间存在互逆双射。

由定理 1.3，对于有限维代数，我们得到基本倾斜模的同构类集合与由具有有限投射维数的模组成的反变有限预解子范畴集合之间的一个双射（见推论 4.30）。

2. Extriangulated categories

在本文中， R 是一个交换幺环， $\mathcal{C}$ 是一个小的可加 R-线性范畴，并且假设所有子范畴都是严格满的。

本节汇集了我们后文所需的外三角范畴的术语和基本性质。我们省略外三角范畴的精确定义。详情请参见 [18, 26]。外三角范畴 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$由以下满足某些公理的数据构成（见 [26, 定义 2.12]）：

- $\mathcal{C}$ 是一个小的可加 R-线性范畴。
- $\mathbb{E}$： $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\, R$ 是一个 R-双线性函子。
- $\mathfrak{s}$ 是一个对应，它将一个等价类 $[A \to B \to C]$ 与复形相联系
  在 $\mathcal{C}$ 到每个 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$。这里，若 $\mathcal{C}$ 中的两个复形 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 和 $A \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C$ 之间存在同构 $b : B \to B'$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle b}\cong & & \| \\ A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C \end{array}$$

是可交换的，则称它们等价，并令 $[A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C]$ 表示 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$的等价类。若存在 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$，使得$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C]$，则称 $\mathcal{C}$ 中的复形 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 为 $\mathfrak{s}$-冲突。我们将 $\mathfrak{s}$-冲突记作 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$。于是， f 称为 $\mathfrak{s}$-膨胀， g 称为 $\mathfrak{s}$-压缩， C 记作 Cone(f)，而 A 记作 Cocone(g)。

在本文余下部分，以下子范畴起着关键作用。

定义 2.1. 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴。

(1) 令 $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的子范畴，它由满足以下条件的 $M \in \mathcal{C}$ 构成：在 $\mathcal{C}$ 中存在一个 $\mathfrak{s}$-混淆序列$X \to M \to Y \dashrightarrow$，使得 $X \in \mathcal{X}$ 且 $Y \in \mathcal{Y}$。若 $\mathcal{X} * \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$，则称 $\mathcal{X}$ 对扩张封闭。(2) 令 cone($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$) 表示 $\mathcal{C}$ 的子范畴，它由满足以下条件的 $M \in \mathcal{C}$ 构成：在 $\mathcal{C}$ 中存在一个 $\mathfrak{s}$-混淆序列$X \to Y \to M \dashrightarrow$，使得 $X \in \mathcal{X}$ 且 $Y \in \mathcal{Y}$。若 cone($\mathcal{X}, \mathcal{X}$) $\subseteq \mathcal{X}$，则称 $\mathcal{X}$ 对锥封闭。(3) 对每个 $n \geq 0$，我们归纳地定义 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}_n^{\wedge}$ 如下： $\mathcal{X}_n^{\wedge}$:= cone($\mathcal{X}_{n-1}^{\wedge}, \mathcal{X}$)，其中 $\mathcal{X}_{-1}^{\wedge} := \{0\}$。令 $\mathcal{X}^{\wedge} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{X}_n^{\wedge}$。(4) 令 cocone($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$) 表示 $\mathcal{C}$ 的子范畴，它由满足以下条件的 $M \in \mathcal{C}$ 构成：在 $\mathcal{C}$ 中存在一个 $\mathfrak{s}$-混淆序列 $M \to X \to Y \dashrightarrow$，使得 $X \in \mathcal{X}$ 且 $Y \in \mathcal{Y}$。若 cocone($\mathcal{X}, \mathcal{X}$) $\subseteq \mathcal{X}$，则称 $\mathcal{X}$ 对余锥封闭。(5) 对每个 $n \geq 0$，我们归纳地定义 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}_n^{\vee}$ 如下： $\mathcal{X}_n^{\vee}$:= cocone($\mathcal{X}, \mathcal{X}_{n-1}^{\vee}$)，其中 $\mathcal{X}_{-1}^{\vee} := \{0\}$。令 $\mathcal{X}^{\vee} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{X}_n^{\vee}$。(6) 若 $\mathcal{X}$ 对扩张、锥、余锥及直和项封闭，则称其为 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴。令 thick $\mathcal{X}$ 表示包含 $\mathcal{X}$ 的最小厚子范畴。(7) 若 $\mathcal{C} =$ cone($\mathcal{C}, \mathcal{X}$)，且 $\mathcal{X}$ 对扩张、余锥及直和项封闭，则称其为 $\mathcal{C}$ 的解消子范畴。

若对象 $P \in \mathcal{C}$ 满足 $\mathbb{E}(P, \mathcal{C}) = 0$，则称其为投射对象。令 proj $\mathcal{C}$ 表示由 $\mathcal{C}$中所有投射对象组成的子范畴。对偶地，我们定义内射对象和子范畴 inj $\mathcal{C}$。可以验证，若 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象（即 $\mathcal{C} =$ cone($\mathcal{C}$, proj $\mathcal{C}$)），则 $\mathcal{X}$是解消子范畴，当且仅当 proj $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$，且它对扩张、余锥和直和项封闭。

Gorsky、Nakaoka 和 Palu（[14]）给出了一个 R-双线性函子 $\mathbb{E}^n \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\ R$，并证明任意 $\mathfrak{s}$-冲突列都会导出以下长正合列。

命题 2.2（[14, 定理 3.5]）。设 $A \to B \to C \dashrightarrow$ 是一个 $\mathfrak{s}$-冲突列，则以下陈述成立。

(1) 对每个 $X \in \mathcal{C}$，都存在一个长正合列

$$\mathcal{C}(X, A) \to \mathcal{C}(X, B) \to \mathcal{C}(X, C) \to \mathbb{E}(X, A) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathbb{E}^{n-1}(X, C) \to \mathbb{E}^n(X, A) \to \mathbb{E}^n(X, B) \to \mathbb{E}^n(X, C) \to \cdots .$$

(2) 对于每个 $X \in \mathcal{C}$，都存在一个长正合列

$$\mathcal{C}(C, X) \to \mathcal{C}(B, X) \to \mathcal{C}(A, X) \to \mathbb{E}(C, X) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathbb{E}^{n-1}(A, X) \to \mathbb{E}^n(C, X) \to \mathbb{E}^n(B, X) \to \mathbb{E}^n(A, X) \to \cdots .$$

回顾外三角范畴的典型例子（详情见 [14, 26]）。

例 2.3. (1) 设 Λ 是一个有限维代数，并令 mod Λ 表示有限生成右 Λ-模的范畴。那么，借助以下数据，mod Λ 成为一个外三角范畴。

- $\mathbb{E}(C, A) := \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(C, A)$ 对所有 $A, C \in \mathrm{mod}\ \Lambda$ 均成立。
- $\mathfrak{s}$ 是恒等映射。

在这种情况下，对所有 $A, C \in \mathrm{mod}\ \Lambda$ and $k \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^k(C, A) = \mathrm{Ext}^k_\Lambda(C, A)$。
(2) 设 $\mathcal{D}$ 是一个移位函子为 Σ 的三角范畴。则通过以下数据， $\mathcal{D}$ 成为一个外三角范畴。

- $\mathbb{E}(C, A) := \mathcal{D}(C, \Sigma A)$ 对所有 $A, C \in \mathcal{D}$ 均成立。
- 对于 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$，取一个三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A$。然后定义 $\mathfrak{s}(\delta) := [A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C]$。

在这种情况下，对于所有 $A, C \in \mathcal{D}$ 和 $k \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^k(C, A) = \mathcal{D}(C, \Sigma^k A)$。
(3) 设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对扩张封闭的子范畴。将外三角结构限制到 $\mathcal{X}$ 上后，我们可将 $\mathcal{X}$ 视为一个外三角范畴（见 [26, 注 2.18]）。

我们对双线性函子 $\mathbb{E}^n$ 给出两点说明。如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象和足够多的内射对象，那么双线性函子 $\mathbb{E}^n$ 与 [17] 或 [23] 中的函子同构（见 [14, 推论 3.21]）。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对扩张封闭的子范畴。对于 M、$N \in \mathcal{X}$，令 $\mathbb{E}^i_{\mathcal{X}}(M, N)$ 表示外三角范畴 $\mathcal{X}$ 的第 i 个正扩张群。尽管对于每个 M、$N \in \mathcal{X}$，我们都有 $\mathbb{E}_{\mathcal{X}}(M, N) = \mathbb{E}(M, N)$，但对于 $i \geq 2$，它不一定满足 $\mathbb{E}^i_{\mathcal{X}}(M, N) = \mathbb{E}^i(M, N)$（见 [14, 例 3.30]）。

如果 $\mathcal{X}$ 是解消的，那么 $\mathcal{X}$ 的正扩张群与 $\mathcal{C}$ 的正扩张群同构 .

引理 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多投射对象的外三角范畴，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个解消子范畴。那么，对于每个 M、$N \in \mathcal{X}$ 和 $i \geq 1$，我们有同构 $\mathbb{E}^i_{\mathcal{X}}(M, N) \cong \mathbb{E}^i(M, N)$。

证明。设 $M, N \in \mathcal{X}$。由于 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象，存在一个 $\mathfrak{s}$-冲突列 $K_1 \to P_0 \to M \dashrightarrow$，其中 $P_0 \in \mathrm{proj}\,\mathcal{C}$。由于 $\mathcal{X}$ 对余锥封闭且包含投射对象，因此有 $K_1 \in \mathcal{X}$。归纳地，存在一个 $\mathfrak{s}$-冲突列 $K_{i+1} \to P_i \to K_i \dashrightarrow$，使得 $K_{i+1}, K_i \in \mathcal{X}$ 且 $P_i \in \mathrm{proj}\ \mathcal{C}$。将 $\mathcal{X}(-, N)$ 应用于 $\mathfrak{s}$-冲突列，可得一个同构 $\mathbb{E}^i_{\mathcal{X}}(M, N) \cong \mathbb{E}_{\mathcal{X}}(K_{i-1}, N) = \mathbb{E}(K_{i-1}, N)$，对每个 $i \geq 1$ 均成立。另一方面，将 $\mathcal{C}(-, N)$ 应用于 $\mathfrak{s}$-冲突列，可得一个同构 $\mathbb{E}^i(M, N) \cong \mathbb{E}(K_{i-1}, N)$，对每个 $i \geq 1$ 均成立。因此断言得证。
□

3. Silting subcategories and hereditary cotorsion pairs

设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴。本节汇集倾斜子范畴和遗传余扭对的基本性质。

3.1. 倾斜子范畴的定义与基本性质。本小节回顾倾斜子范畴的定义，并汇集其性质。详情请参见 [2, 24]。对于 $\mathcal{C}$ 中的一类对象 $\mathcal{X}$，令 $\mathrm{add}\,\mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的子范畴，其对象是 $\mathcal{X}$ 中对象的有限直和的直和项。

定义 3.1. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴。
(1) 若对于所有 $k \geq 1$，$\mathcal{M} = \mathrm{add}\,\mathcal{M}$ 且 $\mathbb{E}^k(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = 0$，则称 $\mathcal{M}$ 为预 silting。(2) 若预倾斜子范畴 $\mathcal{M}$ 满足 $\mathcal{C} = \mathrm{thick}\ \mathcal{M}$，则称其为 $\mathcal{C}$ 的倾斜子范畴。令 $\mathrm{silt}\,\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的所有倾斜子范畴构成的集合。(3) 若存在一个倾斜子范畴 $\mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则称预倾斜子范畴 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{C}$ 的部分 silting 子范畴。

如果加性子范畴 $\mathrm{add}\,M$ 是预 silting（分别为 silting、部分 silting），则称对象 $M \in \mathcal{C}$ 是预 silting（分别为 silting、部分 silting）。若 $\mathcal{C}$ 是 Krull–Schmidt 范畴，则 $M \mapsto \mathrm{add}\,M$ 在基本对象的同构类集合与 $\mathcal{C}$ 中含有加性生成元的子范畴集合之间给出一一对应。若 $\mathcal{C}$ 存在 silting 对象，则每个 silting 子范畴都含有一个加性生成元（例如，参见命题 5.4]）。因此，我们可以将 $\mathrm{silt}\,\mathcal{C}$ 视为基本 silting 对象的同构类集合。

对于整数 $n \geq 0$ 和 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$，我们定义子范畴 $\mathcal{X}^{\perp_{>n}}$ 如下

$$\mathcal{X}^{\perp_{>n}} := \{M \in \mathcal{C} \mid \mathbb{E}^k(\mathcal{X}, M) = 0 \text{ for each } k \geq n+1\}.$$

设 $\mathcal{X}^{\perp} := \mathcal{X}^{\perp_{>0}}$。对偶地，我们定义子范畴 ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{X}$和 ${}^{\perp}\mathcal{X}$。对于预倾斜子范畴$\mathcal{M}$，我们汇总了 $\mathcal{M}^{\wedge}$ 和 $\mathcal{M}^{\vee}$ 的性质（见 [2, 命题 4.7、命题 4.8、引理 4.9、命题 4.10 和引理 4.11]）。

引理 3.2. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，并设 n, m 为非负整数。则以下结论成立。

(1) $\mathcal{M}_n^{\wedge}$ 和 $\mathcal{M}_n^{\vee}$ 对扩张和直和项封闭。(2) 有 $(\mathcal{M}_n^{\wedge})_m^{\vee}$ =余锥$(\mathcal{M}_n^{\wedge}, \mathcal{M}_{m-1}^{\vee})$ =锥$(\mathcal{M}_{n-1}^{\wedge}, \mathcal{M}_m^{\vee})$ = $(\mathcal{M}_m^{\vee})_n^{\wedge}$。(3) 有 $(\mathcal{M}^{\wedge})^{\vee} = (\mathcal{M}^{\vee})^{\wedge}$ = 厚子范畴 $\mathcal{M}$。(4) $\mathcal{M}^{\wedge}$ = 厚子范畴 $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ 成立。特别地，$\mathcal{M}^{\wedge}$ 对锥封闭。若 $\mathcal{M}$ 对余锥封闭，则有 $\mathcal{M}^{\wedge}$ = 厚子范畴 $\mathcal{M}$。(5) $\mathcal{M}^{\vee}$ = 厚子范畴 $\mathcal{M} \cap {}^{\perp}\mathcal{M}$ 成立。特别地，$\mathcal{M}^{\vee}$ 对余锥封闭。若 $\mathcal{M}$ 对锥封闭，则有 $\mathcal{M}^{\vee}$ = 厚子范畴 $\mathcal{M}$。

我们给出 ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}_n^{\wedge}$之间的关系。

引理 3.3. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，并设 n 是一个非负整数。那么以下结论成立。

(1) ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} = {}^{\perp_{>n}}(\mathcal{M}^{\wedge})$ 和 $\mathcal{M}^{\perp_{>n}} = (\mathcal{M}^{\vee})^{\perp_{>n}}$。(2)
$\mathcal{M}_n^{\wedge} = \mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>n}}(\mathcal{M}^{\wedge})$。(3)
$\mathcal{M}_n^{\vee} = \mathcal{M}^{\vee} \cap \mathcal{M}^{\perp_{>n}} = \mathcal{M}^{\vee} \cap (\mathcal{M}^{\vee})^{\perp_{>n}}$。

证明. (1) 由于证明类似，我们只证明 ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} = {}^{\perp_{>n}}(\mathcal{M}^{\wedge})$。对 l使用归纳法，我们证明 ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} \subseteq {}^{\perp_{>n}}(\mathcal{M}_l^{\wedge})$。若 $l = 0$，则结论显然。设 $l \geq 1$。那么归纳假设推出

$$\mathcal{M}_l^{\wedge} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}_{l-1}^{\wedge}, \mathcal{M}) \subseteq \mathsf{cone}(({}^{\perp_{>n}}\mathcal{M})^{\perp_{>n}}, ({}^{\perp_{>n}}\mathcal{M})^{\perp_{>n}}) \subseteq ({}^{\perp_{>n}}\mathcal{M})^{\perp_{>n}}.$$

因此我们有 ${}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} \subseteq {}^{\perp_{>n}}(\mathcal{M}_l^{\wedge})$。由于反向包含显然成立，故断言得证。

(2) 我们通过对 n 使用归纳法来证明 $\mathcal{M}_n^{\wedge} \subseteq {}^{\perp_{>n}}\mathcal{M}$ 。若 $n = 0$，则结论显然成立。假设 $n \geq 1$。那么由归纳假设可得

$$\mathcal{M}_n^{\wedge} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}_{n-1}^{\wedge}, \mathcal{M}) \subseteq \mathsf{cone}({}^{\perp_{>n-1}}\mathcal{M}, {}^{\perp}\mathcal{M}) \subseteq {}^{\perp_{>n}}\mathcal{M}.$$

我们通过对 n 使用归纳法来证明反向包含。若 $n = 0$，则有 $\mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>0}}\mathcal{M}$ =$\mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>0}}(\mathcal{M}^{\wedge})$ = $\mathcal{M}$，其中第一个等号由 (1) 得出。假设 $n \geq 1$。那么有

$$\mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge}, \mathcal{M}) \cap {}^{\perp_{>n}}\mathcal{M} \subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>n-1}}\mathcal{M}, \mathcal{M}) \subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{M}_{n-1}^{\wedge}, \mathcal{M}),$$

其中最后一个包含关系由归纳假设得出。因此断言成立。( )
3 通过类似于 (2)，我们得到该断言。 □

假设 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴。那么 $\mathcal{C}$ 成为一个弱幂等完备范畴。因此，根据 [22, 命题 2. 7], , 若 $h = gf$ 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀态射，则 f 也是。对偶地，若 h 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀态射，则 g 也是。回忆一下，$\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f\colon M \to N$ 都有如下两种分解 $f = \left[\begin{smallmatrix} f' \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\colon M \to N' \oplus N''$，其中 f' 是左极小的；以及 $f = [0\ f'']\colon M' \oplus M'' \to N$，其中 f'' 是右极小的。因此，若 f 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀态射，则 f' 也是。类似地，若 f 是一个 $\mathfrak{s}$- 膨胀态射，则 f'' 也是。$\mathcal{M}_l^{\wedge}$ 中的对象允许以下 $\mathfrak{s}$- 冲突。

引理 3.4. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴。设 $\mathcal{M}$ 是$\mathcal{C}$ 的预倾斜子范畴，且 N 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。对于正整数 l，以下陈述成立。

(1) $N \in \mathcal{M}_l^{\wedge}$当且仅当存在 $\mathfrak{s}$-融合

$$\begin{array}{l} N_1 \xrightarrow{g_1} M_0 \xrightarrow{f_0} N_0 := N \dashrightarrow \\ N_2 \xrightarrow{g_2} M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \dashrightarrow \\ \vdots \\ N_l \xrightarrow{g_l} M_{l-1} \xrightarrow{f_{l-1}} N_{l-1} \dashrightarrow \\ 0 \xrightarrow{g_{l+1}} M_l \xrightarrow{f_l} N_l \dashrightarrow \end{array}$$

使得 f_i 是一个极小右 $\mathcal{M}$-逼近，且对于每个 i， g_{i+1} 都属于 $\mathcal{C}$ 的雅各布森根。在这种情况下， $N \notin \mathcal{M}_{l-1}^{\wedge}$ 当且仅当 $M_l \neq 0$。

(2) 假设 N' 是 $\mathcal{M}^{\wedge}$ 中的一个对象，即存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $N_1' \xrightarrow{g_1'} M_0' \xrightarrow{f_0'} N' \dashrightarrow$，使得 $N_1' \in \mathcal{M}^{\wedge}$，$f_0'$ 是一个极小右 $\mathcal{M}$-逼近，且 g_1' 属于 $\mathcal{C}$ 的雅各布森根。若 $\mathbb{E}^l(N, N') = 0$，则添加 $M_0' \cap$添加 $M_l = \{0\}$。

注意，对于一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \dashrightarrow$，以下陈述成立。

(a) f 是右极小态射，当且仅当 g 属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根。(b) g 是左极小态射，当且仅当 f 属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根。

证明。(1) 由于“若”部分显然，只需证明“唯若”部分。由 $N \in \mathcal{M}_l^{\wedge}$，存在一个 $\mathfrak{s}$-余三角 $N_1 \xrightarrow{g_1} M_0 \xrightarrow{f_0} N \dashrightarrow$，使得 $N_1 \in \mathcal{M}_{l-1}^{\wedge}$ 和 $M_0 \in \mathcal{M}$。由于 $\mathcal{C}$ 是 Krull–Schmidt 范畴，且 $\mathcal{M}_{l-1}^{\wedge}$ 对直和项封闭，我们可以假设 f_0 是右极小的。由引理 3.3(1)， $\mathcal{M} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{M} = {}^{\perp}(\mathcal{M}^{\wedge})$成立，因此 f_0 是 N的右 $\mathcal{M}$-逼近。重复这一过程，即可得到所需的 $\mathfrak{s}$-余三角。

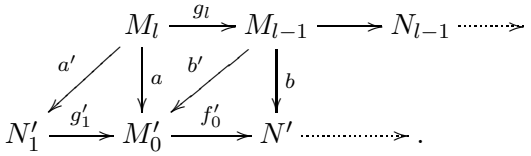
(2) 只需证明 $\mathcal{C}(M_l, M_0') = \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(M_l, M_0')$。令 $a \in \mathcal{C}(M_l, M_0')$。我们证明$\mathcal{C}(g_l, N')$是满射。将 $\mathcal{C}(-, N')$作用于 (1) 中的 $\mathfrak{s}$-conflation $M_l \xrightarrow{g_l} M_{l-1} \xrightarrow{f_{l-1}} N_{l-1} \dashrightarrow$，得到一个正合列

$$\mathcal{C}(M_{l-1}, N') \xrightarrow{\mathcal{C}(g_l, N')} \mathcal{C}(M_l, N') \to \mathbb{E}(N_{l-1}, N').$$

由引理 3.2(4)，对每个 $i \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^i(\mathcal{M}, N') = 0$。将 $\mathcal{C}(-, N')$作用于 (1) 中的 $\mathfrak{s}$-conflations，诱导出同构

$$\mathbb{E}(N_{l-1}, N') \cong \cdots \cong \mathbb{E}^l(N_0, N') = 0,$$

其中最后一个等式由我们的假设可得。因此，存在一个态射 $b \in \mathcal{C}(M_{l-1}, N')$，使得 $f_0'a = bg_l$。由于 f_0'是一个右 $\mathcal{M}$-逼近，存在一个态射$b' \in \mathcal{C}(M_{l-1}, M_0')$，使得 $b = f_0'b'$。由 $f_0'(a - b'g_l) = f_0'a - f_0'b'g_l = f_0'a - bg_l = 0$，存在一个态射 $a' \in \mathcal{C}(M_l, N_1')$，使得 $a - b'g_l = g_1'a'$。由于 g_1' 和 g_l属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根，我们得到 $a = g_1'a' + b'g_l \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(M_l, M_0')$。



证明至此完成。 □

注意，引理 3.4(1) 中的 $\mathfrak{s}$-胚在同构意义下唯一确定。因此，我们将这样的 $\mathfrak{s}$-胚记作 $N_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}^N} M_i^N \xrightarrow{f_i^N} N_i \dashrightarrow$。

3.2. 倾斜子范畴与遗传余扭对之间的关系。本小节中，我们回顾倾斜子范畴与遗传余扭对之间的关系。先回顾遗传余扭对的定义；它们是三角范畴中的 co-t-结构以及精确范畴中的（完备）遗传余扭对的一种常见推广。

定义 3.5. 设 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴。若一对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{C}$ 中的遗传余扭对。

(1) $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 对直和项封闭。(2) 对所有 $k\geq 1$, $\mathbb{E}^k(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$。(3) $\mathcal{C}=\mathsf{cone}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$。(4) $\mathcal{C}=\mathsf{cocone}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$。

令 hcotors $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中遗传余扭对的集合。若 $\mathcal{Y}_1\supseteq\mathcal{Y}_2$，则记 $(\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1)\geq(\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2)$。于是 (hcotors $\mathcal{C}$, $\geq$) 显然构成一个偏序集。

下面的引理是一个简单的观察。

引理 3.6. 设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的遗传余扭对。对每个 $n\geq 0$，有 $\mathcal{X}_n^{\wedge}={}^{\perp_{>n}}\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}_n^{\vee}=\mathcal{X}^{\perp_{>n}}$。特别地，$\mathcal{X}$ 对扩张和余锥封闭，而 $\mathcal{Y}$ 对扩张和锥封闭。

证明。设 $M\in{}^{\perp_{>n}}\mathcal{Y}$。根据 $\mathcal{C}=\mathsf{锥}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，存在 $Y^1\to X^0\to M\dashrightarrow$，使得 $Y^1\in\mathcal{Y}$且 $X^0\in\mathcal{X}$。由归纳法可得一个 $\mathfrak{s}$-缠结 $Y^{i+1}\to X^i\to Y^i\dashrightarrow$，其中 Y^i、$Y^{i+1}\in\mathcal{Y}$且$X^i\in\mathcal{X}$。将 $\mathcal{C}(-,\mathcal{Y})$ 应用于上述 $\mathfrak{s}$-缠结，可诱导出同构

$$\mathbb{E}(Y^n,\mathcal{Y})\cong\mathbb{E}^2(Y^{n-1},\mathcal{Y})\cong\cdots\cong\mathbb{E}^{n+1}(M,\mathcal{Y})=0,$$

其中，最后一个等式由 $M\in{}^{\perp_{>n}}\mathcal{Y}$ 得出。也就是说，$\mathfrak{s}$-缠结 $Y^{n+1}\to X^n\to Y^n\dashrightarrow$ 是分裂的。这意味着 $Y^n\in\mathcal{X}$。因此，我们得到 $M\in\mathcal{X}_n^{\wedge}$。我们通过对 n 使用归纳法来证明反向包含。若 $n=0$，则结论显然。假设 $n\geq 1$。根据归纳假设，我们得到

$$\mathcal{X}_n^{\wedge}=\mathsf{cone}(\mathcal{X}_{n-1}^{\wedge},\mathcal{X})\subseteq\mathsf{cone}({}^{\perp_{>n-1}}\mathcal{Y},{}^{\perp_{>0}}\mathcal{Y})\subseteq{}^{\perp_{>n}}\mathcal{Y}.$$

类似地，我们得到 $\mathcal{Y}_n^{\vee}=\mathcal{X}^{\perp_{>n}}$。 □

若 $\mathcal{C}=\mathcal{X}^{\wedge}$ 且 $\mathcal{C}=\mathcal{Y}^{\vee}$，则称遗传余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 有界。令 bdd-hcotors$\,\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中有界遗传余挠对的集合。于是，有界遗传余挠对与倾斜子范畴之间存在如下双射。

命题 3.7（[2, 定理 5.7]）。设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴。则存在互逆双射

$$\mathsf{silt}\,\mathcal{C}\underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\mathsf{bdd\text{-}hcotors}\,\mathcal{C},$$

其中 $F(\mathcal{M}):=(\mathcal{M}^{\vee},\mathcal{M}^{\wedge})$，且 $G(\mathcal{X},\mathcal{Y}):=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$。

对于 $\mathcal{C}$ 的两个子范畴 $\mathcal{M},\mathcal{N}$，若对所有 $k\geq 1$ 都有 $\mathbb{E}^k(\mathcal{M},\mathcal{N})=0$，则记作 $\mathcal{M}\geq\mathcal{N}$。

命题 3.8（[2, 命题 5.12]）。设 $\mathcal{M},\mathcal{N}\in$ 是 $\mathsf{silt}\,\mathcal{C}$。当且仅当 $\mathcal{M}^{\wedge}\supseteq\mathcal{N}^{\wedge}$ 时，$\mathcal{M}\geq\mathcal{N}$。特别地，$\geq$ 在 silt $\mathcal{C}$ 上给出一个偏序。

我们给出二元关系 $\geq$ 的一个基本性质。

引理 3.9. 设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴。则以下陈述成立。
(1) 假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 子范畴。那么，$\mathcal{M}\geq\mathcal{N}$ 当且仅当 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}^{\wedge}$。(2) 假设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 子范畴。那么，$\mathcal{M}\geq\mathcal{N}$ 当且仅当 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}^{\vee}$。(3) 假设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 子范畴。对于每个 $n\geq 0$，$\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}_n^{\wedge}$ 当且仅当 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}_n^{\vee}$。

证明。(1) 由于 $\mathcal{M}$ 是 silting，我们有 $\mathcal{C}=$ 厚子范畴 $\mathcal{M}$。由引理 3.2(4)， $\mathcal{M}^{\wedge}=\mathcal{M}^{\perp}$ 成立。因此该断言成立。

(2) 通过与 (1) 类似的论证，可得该断言。

(3) 由 (1) 和 (2)， $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}^{\wedge}$ 当且仅当 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}^{\vee}$。此外，对每个 $n\geq 0$， $\mathcal{N}\subseteq{}^{\perp_{>n}}\mathcal{M}$ 当且仅当$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}^{\perp_{>n}}$。因此，由引理 3.3(2) 和 (3) 可得该断言。□

3.3. $\mathcal{P}^{\infty}$的倾斜子范畴。令 $\mathcal{P}^{\infty}:=(\mathrm{proj}\,\mathcal{C})^{\wedge}$。由于 $\mathcal{P}^{\infty}$ 对扩张封闭，根据例 2.3(3)，它成为一个外三角范畴。本小节研究 $\mathcal{P}^{\infty}$的倾斜子范畴。首先，回顾$\mathcal{C}$的子范畴的投射维数这一概念。对于 $\mathcal{C}$的子范畴 $\mathcal{X}$，若$\mathcal{X}\subseteq(\mathrm{proj}\ \mathcal{C})^{\wedge}_{n}$，则称 $\mathcal{X}$ 的投射维数 $\mathrm{pd}\mathcal{X}$ 至多为 n。对于 $\mathcal{C}$中的对象 M，$\mathrm{pd}M:=\mathrm{pd}(\mathrm{add}\ M)$。投射维数具有与模的投射维数类似的性质。

引理 3.10 ([2, 引理 5.16])。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴，且 n 是一个非负整数。若 $\mathrm{pd}\mathcal{X}\leq n$，则 $\mathcal{C}=\mathcal{X}^{\perp_{>n}}$ 成立。此外，若 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象，则逆命题也成立。

在一定条件下，我们比较 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}^{\vee}$的投射维数。

引理 3.11。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$的一个子范畴。假设 $\mathcal{M}$ 对余锥封闭。对每个 $n\geq 0$， $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{M}^{\wedge}_{n}$ 当且仅当 $\mathcal{X}^{\vee}\subseteq\mathcal{M}^{\wedge}_{n}$。此外，$\mathrm{pd}\mathcal{X}=\mathrm{pd}\mathcal{X}^{\vee}$ 成立。

证明。假设 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{M}^{\wedge}_{n}$。对每个 $m\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{\vee}_{m}&\subseteq(\mathcal{M}^{\wedge}_{n})^{\vee}_{m}\\&=\mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge}_{n-1},\mathcal{M}^{\vee}_{m})&&\text{by Lemma 3.2(2)}\\&=\mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge}_{n-1},\mathcal{M})&&\text{since }\mathcal{M}\text{ is closed under cocones}\\&=\mathcal{M}^{\wedge}_{n}&&\text{by definition.}\end{aligned}$$

因此，前一个断言成立。由于 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 是预 silting 且对余锥封闭，前一个断言推出后一个断言。□

下面的命题给出了 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的一个基本性质。

命题 3.12. 我们有 $\mathcal{P}^{\infty}=\mathrm{thick}(\mathrm{proj}\,\mathcal{C})$。此外，如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象，那么 $\mathcal{P}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}$ 的解消子范畴。

证明. 由于 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 对余锥封闭，我们有 $\mathcal{P}^{\infty}:=(\mathrm{proj}\ \mathcal{C})^{\wedge}=\mathrm{thick}(\mathrm{proj}\ \mathcal{C})$，其中最后一个等式由引理 3.2(4) 得出。假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象。那么 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}^{\infty}$ 显然成立。因此， $\mathcal{P}^{\infty}$ 是 $\mathcal{C}$ 的解消子范畴。□

我们给出 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的倾斜子范畴的一个例子，并刻画何时预倾斜子范畴是倾斜子范畴。

命题 3.13. 以下陈述成立。

(1) $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的一个倾斜子范畴。(2) 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的一个预倾斜子范畴。那么，当且仅当 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}^{\vee}$ 时， $\mathcal{M}$ 是倾斜子范畴。

证明。（1）由于 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 中的对象在 $\mathcal{P}^{\infty}$ 中也都是投射对象，因此子范畴 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 中的预 silting 子范畴。于是断言由命题 3.12 得出。

(2) 我们证明 $\mathcal{P}^{\infty}=$厚子范畴 $\mathcal{M}$ 当且仅当 $\mathrm{proj}\ \mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}^{\vee}$。若 $\mathrm{proj}\ \mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}^{\vee}$，则由引理 3.2(3) 可得 $\mathcal{P}^{\infty}=(\mathrm{proj}\ \mathcal{C})^{\wedge}\subseteq(\mathcal{M}^{\vee})^{\wedge}=$厚子范畴 $\mathcal{M}$。反过来，假设$\mathcal{P}^{\infty}=$厚子范畴 $\mathcal{M}$。于是我们有 $\mathrm{proj}\ \mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}^{\infty}\cap{}^{\perp}\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\vee}$，其中最后一个等式由引理 3.2(5) 得出。□

利用 silting 对象的概念，我们给出有限维代数上的倾斜模的刻画。设 Λ 是一个有限维代数。由例 2.3(1)，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ 构成一个具有足够多投射对象的外三角范畴。回顾倾斜模的定义。若一个 Λ-模 $T \in \mathrm{mod}\ \Lambda$ 满足对所有 $i \geq 1$，均有 $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T,T) = 0$，且 $\mathrm{pd}T < \infty$ 并且 $\Lambda \in (\mathrm{add}\ T)^\vee$，则称其为倾斜模。

推论 3.14. 设 Λ 是一个有限维代数，且 $\mathcal{P}^\infty := (\mathrm{proj}(\mathrm{mod}\,\Lambda))^\wedge$。那么 $\mathcal{P}^\infty$ 的 silting 对象与倾斜 Λ-模一致。

证明。由命题 3.12，$\mathcal{P}^\infty$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的解消子范畴。因此，由引理 2.4 可知，T 是 $\mathcal{P}^\infty$ 的预 silting 对象，当且仅当 T 对所有 $i \geq 1$ 且 $\mathrm{pd}T < \infty$ 满足 $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T,T) = 0$。于是断言由命题 3.13(2) 得出。□

利用命题 3.7，我们给出 $\mathcal{P}^\infty$ 的倾斜子范畴与 $\mathcal{P}^\infty$ 中遗传余扭对之间的关系。

命题 3.15. 假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象。那么存在互逆双射

$$\{\mathcal{M} \in \mathsf{silt}\,\mathcal{P}^\infty \mid \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty\} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathsf{hcotors}\,\mathcal{P}^\infty \mid \mathrm{pd}\mathcal{A} < \infty\},$$

其中 $F(\mathcal{M}) := (\mathcal{M}^\vee, \mathcal{M}^\wedge)$ 且 $G(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$。

证明。由命题 3.7，我们有互逆双射

$$\{\mathcal{M} \in \mathsf{silt}\,\mathcal{P}^\infty \mid \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty\} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathsf{bdd\text{-}hcotors}\,\mathcal{P}^\infty \mid \mathrm{pd}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) < \infty\}, \tag{3.1}$$

其中 $F(\mathcal{M}) := (\mathcal{M}^\vee, \mathcal{M}^\wedge)$ 且 $G(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$。只需证明：$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{P}^\infty$ 中的遗传余挠对且 $\mathrm{pd}\,\mathcal{A} < \infty$，当且仅当 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{P}^\infty$ 中的有界遗传余扭对且 $\mathrm{pd}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) < \infty$。我们证明“若”部分。由 (3.1)，$\mathcal{A} = (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\vee$。因此，由引理 3.11 可得 $\mathrm{pd}\,\mathcal{A} = \mathrm{pd}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\vee = \mathrm{pd}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) < \infty$。我们证明“仅若”部分。根据定义，$\mathrm{pd}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) \leq \mathrm{pd}\,\mathcal{A} < \infty$。由于 $\mathrm{proj}\,\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的子范畴，我们得到 $\mathcal{A}^\wedge = \mathcal{P}^\infty$。令 $n := \mathrm{pd}\,\mathcal{A}$。由引理 3.6 和 3.10，我们有 $\mathcal{P}^\infty = \mathcal{A}^{\perp_{>n}} \cap \mathcal{P}^\infty = \mathcal{B}^\vee_n$。因此 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是有界的。证明完毕。□

4. Main results

本节将根据 [5] 研究倾斜子范畴的性质。设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴。在本节中，我们始终假设 $\mathcal{C}$ 有一个倾斜子范畴。

4.1. Grothendieck 群。假设 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴。本小节将描述 $\mathcal{C}$ 的 Grothendieck 群。对于 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$，令 $\mathrm{iso}\,\mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{X}$ 中对象的同构类集合，令 $\mathrm{ind}\,\mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{X}$ 中不可分解对象的同构类集合。令 $\mathbb{Z}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{X}}$ 表示以 ind $\mathcal{X}$ 为基的自由阿贝尔群，令 $\mathbb{Z}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{X}}_{\geq 0}$ 表示以 ind $\mathcal{X}$ 为基的自由幺半群。$\mathcal{C}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{C})$ 定义为商群 $\mathbb{Z}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{C}}/R(\mathcal{C})$，其中 $R(\mathcal{C})$ 是由以下元素生成的 $\mathbb{Z}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{C}}$ 的子群

$$\{[X]-[Y]+[Z] \mid \text{there exists an } \mathfrak{s}\text{-conflation } X \to Y \to Z \dashrightarrow \text{in } \mathcal{C}\}.$$

本小节旨在证明以下定理。

定理 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 外三角范畴。若 $\mathcal{C}$ 有一个 silting 子范畴 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{C}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{C})$ 是以 $\mathrm{ind}\,\mathcal{M}$ 为基的自由阿贝尔群。

对于一个对象 $M \in \mathcal{C}$，令 $|M|$ 表示 M 的非同构不可分解直和项的个数。作为定理 4.1 的直接推论，我们得到以下结果。

推论 4.2. 假设 $\mathcal{C}$ 具有一个 silting 对象 M。那么以下结论成立。

(1) 若 N是 $\mathcal{C}$的 silting 对象，则有 $|N| = |M|$。(2) 设 N是 $\mathcal{C}$的部分倾斜对象。那么 N是 silting 当且仅当 $|N| = |M|$。

证明。（1）这由定理 4.1 得出。

（2）“仅当”部分由（1）得出。我们证明“当”部分。假设 N 不是 silting。由于 N 是一个部分倾斜对象，存在一个对象 X，使得 $X \oplus N$ 是 silting，且$X \notin \mathrm{add}\ N$。因此我们有 $|M| = |N| < |X| + |N| = |M|$，矛盾。□

在本小节余下部分，我们给出定理 4.1 的证明。设 $\mathcal{M}$ 是$\mathcal{C}$的一个 silting 子范畴。由命题 3.7，对所有 $i \geq 1$，我们有 $\mathcal{C} = \mathrm{cone}(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee) = \mathrm{cocone}(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$ 和 $\mathbb{E}^i(\mathcal{M}^\vee, \mathcal{M}^\wedge) = 0$。为证明 $\mathrm{ind}\,\mathcal{M}$ 中的元素线性无关，我们定义一个映射

$$\gamma : \mathrm{iso}\,\mathcal{C} \to \mathbb{Z}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{M}}$$

如下：

(i) γ自然地将 $\mathrm{iso}\ \mathcal{M}$与 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{ind}\,\mathcal{M}}$相识别。

(ii) 对于每个 $N \in \mathcal{M}_l^\wedge$，存在一个 $\mathfrak{s}$-脉冲 $N' \xrightarrow{f} M \to N \dashrightarrow$ 使得 $N' \in \mathcal{M}_{l-1}^\wedge$和 f 是由引理 3.4(1)给出的一个极小右 $\mathcal{M}$-逼近。接着我们归纳定义

$$\gamma(N) := \gamma(M) - \gamma(N').$$

(iii) 对于每个 $N \in \mathcal{M}_l^\vee$，存在一个 $\mathfrak{s}$-脉冲 $N \xrightarrow{g} M \to N' \dashrightarrow$，使得 $N' \in \mathcal{M}_{l-1}^\vee$和 g 是由引理 3.4(1)的对偶命题给出的一个极小左 $\mathcal{M}$-逼近。接着我们归纳定义

$$\gamma(N) := \gamma(M) - \gamma(N').$$

(iv) 令 $N \in \mathcal{C} = \mathrm{cone}(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$。由于 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴，且 $\mathcal{M}^\wedge$、$\mathcal{M}^\vee$ 对直和项封闭，由 $\mathbb{E}(\mathcal{M}^\vee, \mathcal{M}^\wedge) = 0$ 可知，存在一个 $\mathfrak{s}$-脉冲 $U_N \to V_N \xrightarrow{f} N \dashrightarrow$，使得 $U_N \in \mathcal{M}^\wedge$、$V_N \in \mathcal{M}^\vee$，并且 f 是一个极小右$\mathcal{M}^\vee$-逼近。然后我们令

$$\gamma(N) := \gamma(V_N) - \gamma(U_N).$$

下面我们证明映射 γ是可加的，也就是说，对每个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$，$\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$ 成立。

引理 4.3. 设 $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$。那么我们有 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(X_1) + \gamma(X_2)$。

证明。首先，我们对 l作归纳，证明若 $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_l^\wedge$，则 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(X_1) + \gamma(X_2)$成立。若 $l = 0$，则该断言由 (i) 得出。假设 $l \geq 1$。根据引理 3.4(1)，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $K_i \to M_i \xrightarrow{\alpha_i} X_i \dashrightarrow$，使得 $K_i \in \mathcal{M}_{l-1}^\wedge$，且 α_i 是 $i = 1$的一个极小右$\mathcal{M}$-逼近，2。由于 $K_1 \oplus K_2 \in \mathcal{M}_{l-1}^\wedge$，并且 $\left[\begin{smallmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{smallmatrix}\right]$ 也是一个极小右 $\mathcal{M}$-逼近，因此我们有 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(M_1 \oplus M_2) - \gamma(K_1 \oplus K_2)$。于是归纳假设蕴含 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(M_1) + \gamma(M_2) - \gamma(K_1) - \gamma(K_2) = \gamma(X_1) + \gamma(X_2)$。类似地，若 $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_l^\vee$，则 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(X_1) + \gamma(X_2)$成立。令 $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$。存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀$U_i \to V_i \xrightarrow{f_i} X_i \dashrightarrow$，使得 $U_i \in \mathcal{M}^\wedge$，且 f_i 是一个极小右 $\mathcal{M}^\vee$-逼近。由于$U_1 \oplus U_2 \in \mathcal{M}^\wedge$，并且 $\left[\begin{smallmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{smallmatrix}\right]$ 也是一个极小右 $\mathcal{M}^\vee$-逼近，因此我们有 $\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(V_1 \oplus V_2) - \gamma(U_1 \oplus U_2)$。由上述论证可得，$\gamma(X_1 \oplus X_2) = \gamma(V_1) + \gamma(V_2) - \gamma(U_1) - \gamma(U_2) = \gamma(X_1) + \gamma(X_2)$成立。□

我们经常使用以下观察结果。

注 4.4. 设 $N \in \mathcal{C}$。

(1) 映射 γ 不依赖于态射的极小性。例如，若 $U \to V \xrightarrow{f} N \dashrightarrow$ 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀，则 $U \in \mathcal{M}_{l-1}^{\wedge}$ 和 $V \in \mathcal{M}$，那么我们有 $\gamma(N) = \gamma(V) - \gamma(U)$。事实上，由于 $\mathcal{C}$ 是一个 Krull–Schmidt 范畴，我们有一个 $\mathfrak{s}$-膨胀的同构

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & N \dashrightarrow \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \| \\ N' \oplus W & \longrightarrow & M \oplus W & \xrightarrow{[f'\ 0]} & N \dashrightarrow , \end{array}$$

其中 f' 是右极小的。由引理 4.3，我们有

$$\gamma(V) - \gamma(U) = \gamma(M \oplus W) - \gamma(N' \oplus W) = \gamma(M) + \gamma(W) - (\gamma(N') + \gamma(W)) = \gamma(N).$$

对 (iii) 和 (iv)，我们也有类似的观察。

(2) 由 $\mathcal{C} =$余锥$(\mathcal{M}^{\wedge}, \mathcal{M}^{\vee})$，存在一个 $\mathfrak{s}$-冲突序列 $N \xrightarrow{g} U_N' \to V_N' \dashrightarrow$，使得$U_N' \in \mathcal{M}^{\wedge}$、$V_N' \in \mathcal{M}^{\vee}$，且 g 是一个极小左 $\mathcal{M}^{\wedge}$-逼近。于是我们可以定义$\gamma'(N)$ 为 $\gamma'(N) := \gamma(U_N') - \gamma(V_N')$。我们证明 $\gamma'(N) = \gamma(N)$。由$U_N' \in \mathcal{M}^{\wedge}$，我们有一个$\mathfrak{s}$-冲突序列$U \to M \to U_N' \dashrightarrow$，其中 $M \in \mathcal{M}$ 且 $U \in \mathcal{M}^{\wedge}$。将 (ET4)^{op} 应用于上述 $\mathfrak{s}$- 冲突序列，可导出一个由 $\mathfrak{s}$- 冲突序列构成的交换图

$$\begin{array}{ccccc} U & = & U & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ V & \longrightarrow & M & \longrightarrow & V_N' \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ N & \longrightarrow & U_N' & \longrightarrow & V_N' \dashrightarrow \\ \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array} .$$

由于 $\mathcal{M}^{\vee}$ 对余锥封闭， $V \in \mathcal{M}^{\vee}$ 成立。因此我们得到

$$\gamma'(N) = \gamma(U_N') - \gamma(V_N') = (\gamma(M) - \gamma(U)) - (\gamma(M) - \gamma(V)) = \gamma(V) - \gamma(U) = \gamma(N).$$

映射 γ 满足以下性质。

引理 4.5. 设 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$ 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀。则以下结论成立。

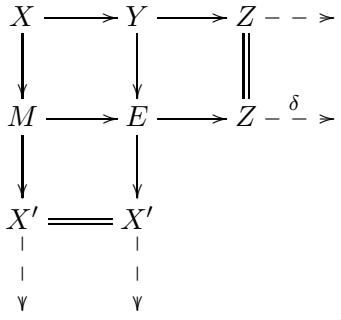
(1) 若 X、Y、$Z \in \mathcal{M}^{\vee}$，则有 $\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$。(2) 若 X、Y、$Z \in \mathcal{M}^{\wedge}$，则有 $\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$。(3) 若 $Z \in \mathcal{M}^{\vee}$，则有 $\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$。

证明. (1) 对于每个 $l \geq 0$，我们考虑以下陈述。

(i)$_l$ 当 X、Y、$Z \in \mathcal{M}_l^{\vee}$ 时，该陈述成立。(ii)$_l$ 当 $X \in \mathcal{M}_{l+1}^{\vee}$ 且 Y、$Z \in \mathcal{M}_l^{\vee}$ 时，该陈述成立。(iii)$_l$ 当 X、$Y \in \mathcal{M}_{l+1}^{\vee}$ 且 $Z \in \mathcal{M}_l^{\vee}$ 时，该陈述成立。

首先，我们证明命题 (i)$_0$ 成立。设 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$ 是一个满足X、Y、$Z \in \mathcal{M}$的 $\mathfrak{s}$-脆弱序列。则该 $\mathfrak{s}$-脆弱序列显然分裂。因此，根据引理 4.3，我们得到 $\gamma(Y) = \gamma(X) + \gamma(Z)$。接下来，我们证明 (i)$_l$ 蕴含 (ii)$_l$。设 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$ 是一个满足$X \in \mathcal{M}_{l+1}^{\vee}$ 且满足 Y、$Z \in \mathcal{M}_l^{\vee}$的 $\mathfrak{s}$-脆弱序列。根据 $X \in \mathcal{M}_{l+1}^{\vee}$，存在一个 $\mathfrak{s}$-脆弱序列 $X \to M \to X' \dashrightarrow$，使得 $M \in \mathcal{M}$ 且 $X' \in \mathcal{M}_l^{\vee}$。因此，我们有 $\gamma(X) = \gamma(M) - \gamma(X')$。由 [26, 的对偶命题

命题 3.15], 我们得到一个交换图



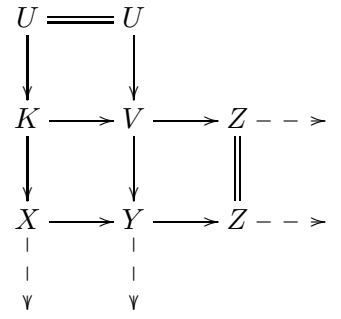
由于 $\mathcal{M}_l^\vee$ 对扩张封闭，我们有 $E \in \mathcal{M}_l^\vee$。因此，假设 (i)$_l$ 导出 $\gamma(Y) - \gamma(E) + \gamma(X') = 0$。另一方面，由引理 3.3(1)可知 $\delta = 0$，因此由引理 4.3，$\gamma(E) = \gamma(M) + \gamma(Z)$ 成立。因此我们得到

$$\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = (\gamma(M) - \gamma(X')) - (\gamma(E) - \gamma(X')) + (\gamma(E) - \gamma(M)) = 0.$$

类似地，我们可以证明 (ii)$_l$ $\Rightarrow$(iii)$_l$ 以及 (iii)$_l$ $\Rightarrow$(i)$_{l+1}$。因此断言成立。

(2) 通过与 (1) 类似的论证，可得断言。

(3) 设 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$ 是一个 $\mathfrak{s}$-conflation，且满足 $Z \in \mathcal{M}^\vee$。由 $Y \in \mathcal{C} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$，存在一个 $\mathfrak{s}$-conflation $U \to V \to Y \dashrightarrow$，使得 $U \in \mathcal{M}^\wedge$ 且 $V \in \mathcal{M}^\vee$。因此，$\gamma(Y) = \gamma(V) - \gamma(U)$。由 (ET4)^{op}，我们有一个交换图



由于 $\mathcal{M}^\vee$ 对余锥封闭，我们有 $K \in \mathcal{M}^\vee$。因此，由 (1) 可得 $\gamma(K) - \gamma(V) + \gamma(Z) = 0$。另一方面，我们有 $\gamma(X) = \gamma(K) - \gamma(U)$。故可得

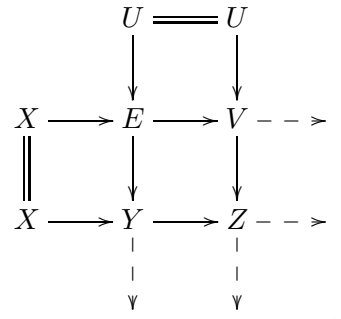
$$\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = (\gamma(K) - \gamma(U)) - (\gamma(V) - \gamma(U)) + (\gamma(V) - \gamma(K)) = 0.$$

证明至此完成。 □

我们得到了所需的性质。

引理 4.6. 对于每个 $\mathfrak{s}$-冲突 $X \to Y \to Z \dashrightarrow$，我们有 $\gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) = 0$。

证明。由 $Z \in \mathcal{C} = \mathsf{锥}(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $U \to V \to Z \dashrightarrow$ 使得$U \in \mathcal{M}^\wedge$ 且 $V \in \mathcal{M}^\vee$。由 [26, 命题 3.15], ，我们得到一个交换图表



因此，由引理 4.5(3)可得 $\gamma(X) - \gamma(E) + \gamma(V) = 0$。由 $E \in \mathcal{C} =$ 锥$(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $U' \to V' \to E \dashrightarrow$ 使得 $U' \in \mathcal{M}^\wedge$ 且 $V' \in \mathcal{M}^\vee$。由 (ET4)^{op}，我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} U' & = & U' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & Y \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ U & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Y \dashrightarrow \\ \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array}.$$

由于 $\mathcal{M}^\wedge$ 对扩张封闭，我们有 $K \in \mathcal{M}^\wedge$。根据引理 4.5(2)，我们有 $\gamma(U') - \gamma(K) + \gamma(U) = 0$。此外，$\gamma(Y) = \gamma(V') - \gamma(K)$ 成立。因此我们得到

$$\begin{aligned} \gamma(X) - \gamma(Y) + \gamma(Z) &= (\gamma(E) - \gamma(V)) - (\gamma(V') - \gamma(K)) + (\gamma(V) - \gamma(U)) \\ &= (\gamma(E) - \gamma(V')) + (\gamma(K) - \gamma(U)) = -\gamma(U') + \gamma(U') = 0 \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在我们可以证明定理 4.1。

定理 4.1 的证明。首先，我们证明 ind $\mathcal{M}$ 生成 $K_0(\mathcal{C})$。对于每个对象 $N \in \mathcal{C} =$cone$(\mathcal{M}^\wedge, \mathcal{M}^\vee)$，存在一个 $\mathfrak{s}$-conflation $U \to V \to N \dashrightarrow$，使得 $U \in \mathcal{M}^\wedge$ 且 $V \in \mathcal{M}^\vee$。根据 $\mathcal{M}^\wedge$ 和 $\mathcal{M}^\vee$的定义，元素 $[U], [V] \in K_0(\mathcal{C})$ 由 ind $\mathcal{M}$生成。因此，$[N] \in K_0(\mathcal{C})$ 也由 ind $\mathcal{M}$生成。接下来，我们证明 ind $\mathcal{M}$ 的每个有限子集都是线性无关的。根据引理 4.6，γ 是可加的。由 Grothendieck 群的泛性质，存在唯一的群同态 $K_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}^{\mathsf{ind}\,\mathcal{M}}$。因此，ind $\mathcal{M}$ 构成 $K_0(\mathcal{C})$ 的一组基。□

4.2. Silting 变异。本小节中，我们引入外三角范畴中 silting 变异的概念，并研究其基本性质。回顾 $\mathcal{C}$ 的协变有限子范畴的定义。

定义 4.7. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个子范畴。
(1) 若 $\mathcal{M}$ 中的每个对象都有一个左 $\mathcal{D}$-逼近，我们称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个协变有限子范畴 .

对偶地，我们定义反变有限子范畴。(2) 若 $\mathcal{M}$ 中的每个对象都有一个左 $\mathcal{D}$-逼近，且该逼近是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀（在 $\mathcal{C}$ 中），则称协变有限子范畴 $\mathcal{D}$ 是良好的。对偶地，我们定义良好反变有限子范畴。(3) 若 $\mathcal{D}$ 同时是协变有限和反变有限的，我们称其为 $\mathcal{M}$ 的一个函子有限子范畴。

我们给出协变有限子范畴是良好的一个充分条件。

引理 4.8. 假设 $\mathcal{C}$ 是弱幂等完备的。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴，且设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的子范畴。则以下结论成立。
(1) 假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的协变有限子范畴。若 $\mathcal{M} \subseteq$ 余锥$(\mathcal{D}, \mathcal{C})$，则 $\mathcal{D}$ 是良好协变有限的。(2) 假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的反变有限子范畴。若 $\mathcal{M} \subseteq$ 锥$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$，则 $\mathcal{D}$ 是良好协变有限的。

证明。由于证明类似，我们只证明 (1)。设 $M \in \mathcal{M}$。由 $\mathcal{M} \subseteq$ 余锥$(\mathcal{D}, \mathcal{C})$，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $f\colon M \to D$，使得 $D \in \mathcal{D}$。由于 $\mathcal{D}$ 是$\mathcal{M}$的协变有限子范畴，我们得到一个左 $\mathcal{D}$-逼近 $f'\colon M \to D'$。因此存在一个态射 $g\colon D' \to D$，使得$f = gf'$。由于 $\mathcal{C}$是弱幂等完备的，f'是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀。□

我们整理预倾斜子范畴的良好协变有限子范畴的基本性质。

引理 4.9. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的预倾斜子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的良余变有限子范畴。则对每个 $M \in \mathcal{M}$，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀

$$M \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} N \dashrightarrow \tag{4.1}$$

使得 f 是一个左 $\mathcal{D}$-逼近。此外，以下结论成立。

(1) $N \in \mathcal{M}^{\perp}$。(2) $N \in {}^{\perp_{>1}}\mathcal{M}$。
(3) $N \in {}^{\perp}\mathcal{D}$。(4) g 是一个右
$\mathcal{D}$-逼近。

证明。设 $M \in \mathcal{M}$。由于 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的良余变有限子范畴，存在一个左$\mathcal{D}$-逼近 $f\colon M \to D$，它是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀。因此，我们有 $\mathfrak{s}$-膨胀 (4.1)。由 (4.1)，得到 $N \in \mathcal{M}_1^{\wedge}$。因此，结论 (1) 和 (2) 分别由引理 3.2(4) 和 3.3(2) 得出。由 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$，有 $N \in {}^{\perp_{>1}}\mathcal{D}$。将 $\mathcal{C}(-, \mathcal{D})$ 应用于 (4.1)，可导出一个正合列

$$\mathcal{C}(D, \mathcal{D}) \xrightarrow{\mathcal{C}(f, \mathcal{D})} \mathcal{C}(M, \mathcal{D}) \to \mathbb{E}(N, \mathcal{D}) \to \mathbb{E}(D, \mathcal{D}) = 0.$$

由于 f 是一个左 $\mathcal{D}$-逼近，我们有 $\mathbb{E}(N, \mathcal{D}) = 0$。因此，陈述 (3) 成立。下面证明陈述 (4)。将 $\mathcal{C}(\mathcal{D}, -)$ 应用于 (4.1)，得到一个正合列

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, D) \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathcal{D}, g)} \mathcal{C}(\mathcal{D}, N) \to \mathbb{E}(\mathcal{D}, M) = 0.$$

因此， g 是一个右 $\mathcal{D}$-逼近。 □

现在，我们介绍外三角范畴中预倾斜子范畴的变异。

定义 4.10. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$的一个良余变有限子范畴。对于每个 $M \in \mathcal{M}$，取一个左 $\mathcal{D}$-逼近 $f\colon M \to D$ 以及一个$\mathfrak{s}$-外化

$$M \xrightarrow{f} D \to N_M \dashrightarrow .$$

我们将 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mu^L(\mathcal{M}; \mathcal{D})$ 定义为

$$\mu^L(\mathcal{M}; \mathcal{D}) := \mathsf{add}(\mathcal{D} \cup \{N_M \mid M \in \mathcal{M}\})$$

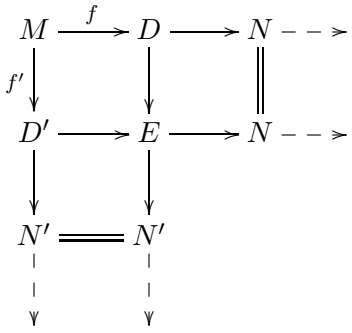
并称之为相对于 $\mathcal{D}$的 $\mathcal{M}$ 的左变异。对偶地，我们定义 $\mathcal{M}$ 相对于良好反变有限子范畴 $\mathcal{D}$的右变异 $\mu^R(\mathcal{M}; \mathcal{D})$。

我们对变异作一些说明。

注 4.11. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的预倾斜子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$ 的良余变有限子范畴。

(1) 左变异 $\mu^L(\mathcal{M}; \mathcal{D})$ 不依赖于左 $\mathcal{D}$-逼近的选取。事实上，若存在两个 $\mathfrak{s}$-共轭
$M \xrightarrow{f} D \to N \dashrightarrow$和 $M \xrightarrow{f'} D' \to N' \dashrightarrow$，使得 f, f' 是

左 $\mathcal{D}$-逼近，则有如下交换图



由 [26, 命题 3.15] 的对偶命题可得。因此，引理 4.9(3) 推出 $N \oplus D' \cong E \cong N' \oplus D$。

(2) 我们有 $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D}) = \mu^L(\mathcal{M};\mathrm{add}\ \mathcal{D})$。事实上，这由 (1) 以及每个左 $\mathcal{D}$-逼近都是左 add $\mathcal{D}$-逼近这一性质可得。因此，当 $\mathcal{D}$ 是良好协变有限子范畴时，我们可以假设 $\mathcal{D} = \mathrm{add}\,\mathcal{D}$。

我们给出预倾斜子范畴变异的一些基本性质。

定理 4.12. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$的一个良好协变有限子范畴。那么，下列结论成立。

(1) $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{C}$的一个预倾斜子范畴。(2) $\mathcal{M} \geq \mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$，其中等式成立当且仅当 $\mathcal{M} = \mathrm{add}\ \mathcal{D}$。(3) 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$的一个 silting 子范畴，那么 $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$ 也是。

证明。令 $\mathcal{N} := \mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$。

(1) 根据定义，$\mathcal{N} = \mathrm{add}\ \mathcal{N}$成立。我们证明对所有 $k \geq 1$，$\mathbb{E}^k(\mathcal{N},\mathcal{N}) = 0$。令 $N \in \mathcal{N}$。于是存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $M \xrightarrow{f} D \to N \dashrightarrow$，使得 $M \in \mathcal{M}$，且 f 是一个左 $\mathcal{D}$-逼近。将 $\mathcal{C}(\mathcal{N},-)$ 应用于上述 $\mathfrak{s}$-膨胀，可导出一个正合列

$$\mathbb{E}^k(\mathcal{N},D) \to \mathbb{E}^k(\mathcal{N},N) \to \mathbb{E}^{k+1}(\mathcal{N},M).$$

由引理 4.9(2) 和 (3)，两端项均为零，因此对所有 $k \geq 1$，$\mathbb{E}^k(\mathcal{N},N) = 0$。

(2) 由引理 4.9(1)，$\mathcal{M} \geq \mathcal{N}$ 成立。我们证明，当且仅当 $\mathcal{M} = \mathrm{add}\,\mathcal{D}$时，$\mathcal{M} = \mathcal{N}$ 成立。假设存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $M \to D \to N \overset{\delta}{\dashrightarrow}$，使得 $M \in \mathcal{M}$, $D \in \mathcal{D}$ 和$N \in \mathcal{N}$。若 $M \notin \mathrm{add}\ \mathcal{D}$成立，则可得 $\delta \neq 0$，因此 $\mathbb{E}(N,M) \neq 0$。这意味着$N \notin \mathcal{M}$。另一方面，假设 $M \in \mathrm{add}\,\mathcal{D}$。由引理 4.9(3)，可得 $\delta = 0$，因此 $N \in \mathrm{add}\,\mathcal{D}$。

(3) 由 (1) 可知，$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$的预倾斜子范畴。根据左变异的定义，我们得到$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_1^{\vee} \subseteq$厚子范畴 $\mathcal{N}$。因此，由 $\mathcal{C} =$厚子范畴 $\mathcal{M} \subseteq$厚子范畴 $\mathcal{N}$可知，$\mathcal{N}$是 $\mathcal{C}$的 silting 子范畴。□

对偶地，若 $\mathcal{D}$ 是 silting 子范畴 $\mathcal{M}$的良好反变有限子范畴，则可以证明 $\mu^R(\mathcal{M};\mathcal{D})$是 $\mathcal{M}$ 的 silting 子范畴，且 $\mu^R(\mathcal{M};\ \mathcal{D}) \geq \mathcal{M}$。下述命题是一个显然的观察。

命题 4.13。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的预倾斜子范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{M}$的良余变有限子范畴。则下述结论成立。

(1) $\mathcal{D}$ 是 $\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$的良好反变有限子范畴。(2) $\mu^R(\mu^L(\mathcal{M};\ \mathcal{D});\mathcal{D}) = \mathcal{M}$。

证明。（1）这由引理 4.9(4) 得出。

(2) 设 $N \in \mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D})$。那么存在两个 $\mathfrak{s}$-conflations $L \to D \xrightarrow{g} N \dashrightarrow$ 和 $M \to D' \xrightarrow{g'} N \to$，使得 $L \in \mu^R(\mu^L(\mathcal{M};\mathcal{D});\ \mathcal{D})$、$M \in \mathcal{M}$，且 g, g' 是右 $\mathcal{D}$-逼近。由注 4.11(1) 的对偶论证，我们得到 $M \oplus D' \cong L \oplus D$。因此断言成立。□

由于协变有限子范畴不一定是良好的，因此在外三角范畴中进行 silting 变异往往是不可能的。我们给出一个使 silting 变异成为可能的充分条件。在本小节余下部分，我们假设 R 是一个域，且 $\mathcal{C}$ 是一个 Hom-有限 Krull–Schmidt 范畴。下面的引理起着重要作用，它是[8, 19]的一个类似结果。

引理 4.14. 假设存在一个 $\mathfrak{s}$-冲突 $A \xrightarrow{f} A' \to C \dashrightarrow$，使得 f 属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根。那么，对于 A的每个不可分解直和项 X，存在一个$\mathfrak{s}$-冲突 $X \to A_X \to C_X \dashrightarrow$，使得 $X \notin \mathsf{add}\, A_X$ 且 $A_X \in \mathsf{add}\ A'$。

证明. 设 X 是 A 的一个不可分解直和项，并令 $\iota : X \to A$ 为自然单射。那么 $g := f\iota$ 是一个 $\mathfrak{s}$-膨胀，且属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根。将 $A' = X^{\oplus l} \oplus U$分解为 $X \notin \mathsf{add}\ U$。若 $l = 0$，则 $X \xrightarrow{g} A' \to \mathsf{Cone}(g) \dashrightarrow$是所需的 $\mathfrak{s}$-冲突。假设 $l \geq 1$。令 $Y_0 := X$ 和 $g_0 := g$。对于每个 $i \geq 1$，我们归纳定义

$$Y_i := X^{\oplus l^i} \oplus U^{\oplus(1+l+\cdots+l^{i-1})}$$

and

$$g_i := g^{\oplus l^i} \oplus \mathrm{id}_U^{\oplus(1+l+\cdots+l^{i-1})} : Y_i \to Y_{i+1}.$$

由于 $\mathcal{C}$ 是 Hom-有限的，我们可以取 $m > 0$ 使得 $\mathsf{rad}^m_{\mathcal{C}}(X, X) = 0$。因此，复合态射

$$g_{m-1} \cdots g_1 g_0 : X \to Y_m = X^{\oplus l^m} \oplus U^{\oplus(1+l+\cdots+l^{m-1})}$$

是两个态射 $0 : X \to X^{\oplus l^m}$ 和 $h : X \to U^{\oplus(1+l+\cdots+l^{m-1})}$ 的直和。由于每个 g_i都是一个 $\mathfrak{s}$-inflation，$\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ h \end{smallmatrix}\right]$也是如此。由于 $\mathcal{C}$是一个 Krull–Schmidt 范畴，h是一个 $\mathfrak{s}$-inflation。因此我们得到所需的 $\mathfrak{s}$-conflation $X \xrightarrow{h} U^{\oplus(1+l+\cdots+l^{m-1})} \to \mathsf{Cone}(h) \dashrightarrow$。□

设 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，并令 $X \in \mathcal{M}$。将 $\mathcal{M}$的一个子范畴 $\mathcal{M}_X$ 定义为 $\mathcal{M}_X := \mathsf{add}(\mathsf{ind}\ \mathcal{M} \setminus \mathsf{ind}(\mathsf{add}\ X))$。若 $\mathcal{M}_X$是良好协变有限的，则记 $\mu_X(\mathcal{M}) := \mu^L(\mathcal{M}; \mathcal{M}_X)$。若 X不可分解，则称 $\mu_X(\mathcal{M})$为不可约左变异。下文中，我们假设以下条件。

(F) 对于每个 silting 子范畴 $\mathcal{M}$ 和 $X \in \mathsf{ind}\,\mathcal{M}$，子范畴 $\mathcal{M}_X$ 是 $\mathcal{M}$的函子有限子范畴。

如果 $\mathcal{C}$ 有一个 silting 对象，那么条件 (F) 成立。

命题 4.15. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴，且 $\mathcal{N}$ 是满足 $\mathcal{M} > \mathcal{N}$和 $\mathcal{M} \not\supseteq \mathcal{N}$的预倾斜子范畴。那么以下结论成立。
(1) 存在 $N \in \mathcal{N}$，使得对于某个 $l \geq 1$有 $N \in \mathcal{M}_l^\wedge \setminus \mathcal{M}_{l-1}^\wedge$。(2) 如果 X 是 M_l^N的一个不可分解直和项，那么 $\mathcal{M}_X$ 是 $\mathcal{M}$的良好协变有限子范畴。(3) 我们有 $\mathcal{M} > \mu_X(\mathcal{M}) \geq \mathcal{N}$。

证明. (1) 由引理 3.9(1)，$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^\wedge$。由于 $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$，存在 $N \in \mathcal{N}$ 使得对于某个 $l \geq 1$有 $N \in \mathcal{M}_l^\wedge \setminus \mathcal{M}_{l-1}^\wedge$。

(2) 由引理 3.4(1)，存在一个 $\mathfrak{s}$-相合序列 $M_l^N \xrightarrow{g_l^N} M_{l-1}^N \to N_{l-1} \dashrightarrow$，使得 g_l^N属于 $\mathcal{C}$的雅各布森根。令 X 为 M_l^N的一个不可分解直和项。由引理 4.14，我们得到一个 $\mathfrak{s}$-相合序列 $X \xrightarrow{\iota} M_X \to C_X \dashrightarrow$，其中 $M_X \in \mathcal{M}_X$。因此我们得到$\mathcal{M} \subseteq$余锥($\mathcal{M}_X$,$\mathcal{C}$)。由引理 4.8(1)，$\mathcal{M}_X$是一个良余变有限子范畴。

(3) 由于 $\mathcal{M}_X$ 是良好协变有限子范畴，存在一个 $\mathfrak{s}$-冲合 $X \xrightarrow{\alpha} M' \to C \dashrightarrow$，使得 α是一个左 $\mathcal{M}_X$-逼近。令 $\mathcal{L} := \mu_X(\mathcal{M}) = \mathsf{add}(\mathcal{M}_X \cup \{C\})$。根据定理 4.12，$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{M} > \mathcal{L}$的 silting 子范畴。我们证明 $\mathcal{L} \geq \mathcal{N}$，或等价地

$\mathbb{E}^i(C,\mathcal{N}) = 0$对每个 $i \geq 1$都成立。将 $\mathcal{C}(-,\mathcal{N})$ 应用于 $\mathfrak{s}$-冲合 $X \xrightarrow{\alpha} M' \to C \dashrightarrow$，可导出一个正合列

$$\mathbb{E}^{i-1}(M',\mathcal{N}) \to \mathbb{E}^{i-1}(X,\mathcal{N}) \to \mathbb{E}^i(C,\mathcal{N}) \to \mathbb{E}^i(M',\mathcal{N}).$$

若 $i \geq 2$，则上述正合列蕴含 $\mathbb{E}^i(C,\mathcal{N}) = 0$。因此，只需证明对每个 $N' \in \mathcal{N}$，都有$\mathbb{E}(C, N') = 0$。令 $a \in \mathcal{C}(X,N')$。由引理 3.4(1)，存在一个 $\mathfrak{s}$- conflation $N_1' \to M_0^{N'} \xrightarrow{f_0^{N'}} N' \dashrightarrow$，使得 $f_0^{N'}$是一个右 $\mathcal{M}$-逼近。因此，存在态射 $b \in \mathcal{C}(X, M_0^{N'})$，满足 $a = f_0^{N'}b$。由引理 3.4(2)，$M_0^{N'} \in \mathcal{M}_X$。由于 α是 X的左$\mathcal{M}_X$-逼近，故存在 $c \in \mathcal{C}(M', M_0^{N'})$，满足 $b = c\alpha$。由 $a = f_0^{N'}b = f_0^{N'}c\alpha$，映射$\mathcal{C}(\alpha, N')\colon \mathcal{C}(M', N') \to \mathcal{C}(X, N')$ 是满射。因此，$\mathbb{E}(C, N') = 0$。证明完毕。□

定义 silting 箭图 $Q(\text{silt } \mathcal{C}) = (Q_0, Q_1)$ 如下:

$$Q_0 := \operatorname{silt}\mathcal{C},$$
$$Q_1 := \{\mathcal{M} \to \mathcal{N} \mid \mathcal{N} \text{ is an irreducible left mutation of } \mathcal{M}\}.$$

我们比较 silting 箭图 $Q(\text{silt } \mathcal{C})$ 与 $(\text{silt } \mathcal{C}, \geq)$ 的哈斯箭图。

定理 4.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个满足条件 (F) 的 Hom-有限 Krull–Schmidt 外三角范畴。设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 子范畴。那么下列陈述等价。

(1) $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的不可约左变异。(2) $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的不可约右变异。(3) $\mathcal{M} > \mathcal{N}$，并且不存在满足 $\mathcal{M} > \mathcal{L} > \mathcal{N}$ 的 silting 子范畴 $\mathcal{L}$。

特别地，$Q(\text{silt } \mathcal{C})$ 与 $(\text{silt}\,\mathcal{C}, \geq)$ 的哈斯箭图重合。

证明. (3)⇒(1)：由命题 4.15，我们得到 $\mathcal{M}$ 的一个不可约左变异 $\mathcal{L}$，使得$\mathcal{M} > \mathcal{L} \geq \mathcal{N}$。因此我们有 $\mathcal{L} = \mathcal{N}$。

(1)⇒(3)：令某个不可分解对象 $X \in \mathcal{M}$ 满足 $\mathcal{N} := \mu_X(\mathcal{M})$。于是得到$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{M}_X$。假设存在一个倾斜子范畴 $\mathcal{L}$，使得 $\mathcal{M} > \mathcal{L} > \mathcal{N}$。根据命题 4.15，存在一个不可分解对象 $Y \in \mathcal{M}$，使得 $\mathcal{K} := \mu_Y(\mathcal{M})$ 且$\mathcal{M} > \mathcal{K} \geq \mathcal{L} > \mathcal{N}$。由命题 3.7 可得

$$\mathcal{M}_X = \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^\vee \cap \mathcal{N}^\wedge \subseteq \mathcal{K}^\vee \cap \mathcal{K}^\wedge = \mathcal{K}.$$

因此我们有 $X \cong Y$，进而得到 $\mathcal{N} = \mathcal{K}$，矛盾。

类似地，我们可以证明 (2)⇔(3)。证明完毕。□

作为应用，我们有以下结果。

推论 4.17。设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是满足 $\mathcal{M} > \mathcal{N}$ 的倾斜子范畴。若满足 $\mathcal{M} \geq \mathcal{L} \geq \mathcal{N}$ 的倾斜子范畴 $\mathcal{L}$ 只有有限多个，则 $\mathcal{N}$ 可由 $\mathcal{M}$ 经过迭代的不可约左变异得到。

证明。根据命题 4.15，存在 $\mathcal{M}$ 的一次不可约左变异 $\mathcal{L}_1$，使得 $\mathcal{M} >\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{N}$。若 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{N}$，则断言成立。我们假设 $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{N}$。根据命题 4.15，存在 $\mathcal{L}_1$ 的一次不可约左变异 $\mathcal{L}_2$，满足 $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{N}$。重复这一过程，我们得到一个由不可约左变异构成的序列 $\mathcal{M} > \mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2 > \cdots (\geq \mathcal{N})$。根据我们的假设，存在一个整数 $l \geq 1$，使得 $\mathcal{L}_l = \mathcal{N}$。证明完毕。□

我们给出了 [15, 推论 2.2]的一个类似结果。

推论 4.18. 假设 silt $\mathcal{C}$ 有最大元 $\mathcal{A}$。若 $Q(\text{silt}\,\mathcal{C})$ 有有限个连通分支$\mathfrak{C}$，则 $\mathfrak{C}$ 是连通的，且 $\mathfrak{C} = Q(\text{silt}\,\mathcal{C})$。

证明. 令 $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$。我们证明 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$。不妨设 $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$。由于 $\mathcal{A}$ 是最大元，我们得到 $\mathcal{A} > \mathcal{M}$。由命题 4.15 的对偶命题，存在 $\mathcal{M}$ 的不可约右变异 $\mathcal{M}_1$，使得 $\mathcal{A} \geq \mathcal{M}_1 > \mathcal{M}$。若 $\mathcal{A} = \mathcal{M}_1$，则无需证明。因此我们假设 $\mathcal{A} \neq \mathcal{M}_1$。重复这一过程，我们得到一个序列 $(\mathcal{A} \geq) \cdots > \mathcal{M}_2 > \mathcal{M}_1 > \mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$，它由 $\mathfrak{C}$ 中的不可约右变异组成。由于 $\mathfrak{C}$是有限的，存在整数 $l \geq 1$，使得 $\mathcal{A} = \mathcal{M}_l$。于是我们得到 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$。令 $\mathcal{N}$ 为满足$\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$的任意 silting 子范畴。由于 $\mathcal{A}$ 是最大元，我们有 $\mathcal{A} > \mathcal{N}$。因此，由命题 4.15 可知，存在一个序列 $\mathcal{A} =: \mathcal{A}_0 > \mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2 > \cdots (\geq \mathcal{N})$，它由 $\mathfrak{C}$ 中的不可约左变异组成。由于 $\mathfrak{C}$ 是有限的，对某个 $k \geq 1$，我们有 $\mathcal{N} = \mathcal{A}_k$。因此，$\mathcal{N}$ 属于 $\mathfrak{C}$。证明完毕。□

4.3. Bongartz 完备化。假设 R 是一个域。设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-线性外三角范畴。本小节旨在给出充分条件，使预倾斜子范畴成为部分倾斜子范畴。对于一个 silting 子范畴 $\mathcal{M}$ 和一个预倾斜子范畴 $\mathcal{N}$，将 silt $\mathcal{C}$ 的子集 $\nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 定义为 $\nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) := \{\mathcal{L} \in \mathsf{silt}\ \mathcal{C} \mid \mathcal{L} \geq \mathcal{N}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_1^{\wedge}\}$。

以下定理是本节的主要结果之一，它是 [6, 命题 2.14] 的外三角版本。

定理 4.19。设 $\mathcal{C}$ 是一个满足条件 (F) 的 Hom-有限 Krull–Schmidt 外三角范畴。设 $\mathcal{M}$ 是一个 silting 子范畴，$\mathcal{N}$ 是一个预倾斜子范畴，且 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_l^{\wedge}$ 对某个 $l \geq 0$ 成立。假设对于每个满足 $\mathcal{M} \geq \mathcal{L} \geq \mathcal{N}$ 的 silting 子范畴 $\mathcal{L}$，$\nabla_{\mathcal{L}}(\mathcal{N})$ 中都存在一个极小元。那么 $\mathcal{N}$ 是一个部分 silting 子范畴。

为了证明定理 4.19，我们需要以下引理。

引理 4.20. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴，且 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，并且 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_l^{\wedge}$，其中 $l \geq 1$。假设 $\nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 有一个极小元 $\mathcal{Q}$。那么 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}_{l-1}^{\wedge}$。

证明. 根据引理 3.3(2) 和 3.9(1)，我们得到

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}^{\wedge} \cap {}^{\perp_{>l}}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_l^{\wedge}.$$

反设 $\mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{Q}_{l-1}^{\wedge}$。那么存在一个对象 $N \in \mathcal{N}$，它属于 $\mathcal{Q}_l^{\wedge}$，但不属于 $\mathcal{Q}_{l-1}^{\wedge}$。由引理 3.4(1)，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀

$$Q_l^N \xrightarrow{g_l^N} Q_{l-1}^N \xrightarrow{f_{l-1}^N} N_{l-1} \dashrightarrow \tag{4.2}$$

使得 $Q_l^N \neq 0$，且 g_l^N 属于 $\mathcal{C}$ 的雅各布森根。设 X 是 Q_l^N 的一个不可分解直和项。由命题 4.15，存在一个 $\mathfrak{s}$- 膨胀

$$X \xrightarrow{a} Q' \to Y \dashrightarrow \tag{4.3}$$

使得 a是 X的左 $\mathcal{Q}_X$-逼近，且 $\mathcal{R} := \mu_X(\mathcal{Q}) = \mathsf{add}(\mathcal{Q}_X \cup \{Y\})$ 是 $\mathcal{C}$的一个 silting 子范畴，并满足 $\mathcal{Q} > \mathcal{R} \geq \mathcal{N}$。我们证明 $\mathcal{R} \in \nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$，或等价地证明 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_1^{\wedge}$。由引理 3.3(2)，只需证明 $\mathcal{R} \subseteq {}^{\perp_{>1}}\mathcal{M}$。设 $i \geq 2$。将 $\mathcal{C}(-, \mathcal{M})$ 应用于 (4.3)，可导出一个正合列

$$\mathbb{E}^{i-1}(Q', \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{E}^{i-1}(a, \mathcal{M})} \mathbb{E}^{i-1}(X, \mathcal{M}) \to \mathbb{E}^i(Y, \mathcal{M}) \to \mathbb{E}^i(Q', \mathcal{M}) = 0,$$

其中最后一个等式由引理 3.3(2)得出。若 $i \geq 3$，则由引理 3.3(2)，$\mathbb{E}^{i-1}(X, \mathcal{M})$ 也为零。因此，对于所有 $i \geq 3$，我们得到 $\mathbb{E}^i(Y, \mathcal{M}) = 0$。假设 $i = 2$。我们证明，对于每个 $M \in \mathcal{M}$，$\mathbb{E}(a, M)$ 都是满射。设 $\eta \in \mathbb{E}(X, M)$。由引理 3.9(3)，$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}_1^{\wedge}$推出$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}_1^{\vee}$。因此存在一个 $\mathfrak{s}$-脆弱序列

$$M \xrightarrow{f} Q_0 \xrightarrow{g} Q_1 \overset{\delta}{\dashrightarrow} \tag{4.4}$$

使得 $Q_0, Q_1 \in \mathcal{Q}$ 且 g 属于 $\mathcal{C}$ 的雅各布森根。将 $\mathcal{C}(X, -)$ 应用于 (4.4)，得到一个正合列

$$\mathcal{C}(X, Q_1) \to \mathbb{E}(X, M) \to \mathbb{E}(X, Q_0) = 0,$$

其中，最后一个等式由 $\mathcal{Q}$ 是倾斜的假设得出。因此，存在一个态射$b \in \mathcal{C}(X, Q_1)$，使得 $b^*\delta = \eta$。我们断言 $Q_1 \in \mathcal{Q}_X$。由 $X \in \mathsf{add}\ Q_l^N$，只需证明 $\mathsf{add}\ Q_1 \cap \mathsf{add}\ Q_l^N = \{0\}$。令 $\alpha \in \mathcal{C}(Q_l^N, Q_1)$。将 $\mathcal{C}(-, M)$ 应用于 (4.2)，得到一个正合列

$$\mathbb{E}(Q_{l-1}^N, M) \xrightarrow{\mathbb{E}(g_l^N, M)} \mathbb{E}(Q_l^N, M) \to \mathbb{E}^2(N_{l-1}, M).$$

由引理 3.3(2)，我们有同构

$$\mathbb{E}^2(N_{l-1}, M) \cong \cdots \cong \mathbb{E}^{l+1}(N, M) = 0.$$

因此，存在 $\theta \in \mathbb{E}(Q_{l-1}^N, M)$，使得 $\alpha^*\delta = \mathbb{E}(g_l^N, M)(\theta) = (g_l^N)^*\theta$。将 $\mathcal{C}(Q_{l-1}^N, -)$ 应用于 (4.4)，可导出一个正合列

$$\mathcal{C}(Q_{l-1}^N, Q_1) \to \mathbb{E}(Q_{l-1}^N, M) \to \mathbb{E}(Q_{l-1}^N, Q_0) = 0,$$

其中，最后一个等式由 $\mathcal{Q}$ 是倾斜的假设得出。因此，我们有 $\beta \in \mathcal{C}(Q_{l-1}^N, Q_1)$，满足 $\beta^*\delta = \theta$。由 $(\alpha - \beta g_l^N)^*\delta = \alpha^*\delta - (g_l^N)^*(\beta^*\delta) = \alpha^*\delta - (g_l^N)^*\theta = 0$，存在$\beta' \in \mathcal{C}(Q_l^N, Q_0)$，使得 $\alpha - \beta g_l^N = g\beta'$。由于 g 和 g_l^N 属于 $\mathcal{C}$ 的雅各布森根，因此有 $\alpha = \beta g_l^N + g\beta' \in \mathsf{rad}_{\mathcal{C}}(Q_l^N, Q_1)$，从而 $\mathcal{C}(Q_l^N, Q_1) = \mathsf{rad}_{\mathcal{C}}(Q_l^N, Q_1)$。这意味着 $\mathsf{add}\ Q_l^N \cap \mathsf{add}\ Q_1 = \{0\}$。因此 $Q_1 \in \mathcal{Q}_X$。由于 a 是一个左 $\mathcal{Q}_X$-逼近，存在$c \in \mathcal{C}(Q', Q_1)$，使得 $b = ca$。因此，我们有 $c^*\delta \in \mathbb{E}(Q', M)$ 和 $\mathbb{E}(a, M)(c^*\delta) = a^*(c^*\delta) = (ca)^*\delta = b^*\delta = \eta$。这意味着 $\mathbb{E}(a, M)$ 是满射。因此 $\mathcal{R} \in \nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$。这与 $\mathcal{Q}$ 是 $\nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 中的极小元矛盾。因此我们得到 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}_{l-1}^{\wedge}$。□

我们现在可以证明定理 4.19。

定理 4.19 的证明。若 $l = 0$，则显然成立。假设 $l \neq 0$。令 $\mathcal{M}_1$ 为 $\nabla_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ 中的一个极小元。由引理 4.20，我们有 $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{M}_1)_{l-1}^{\wedge}$。重复这一过程，我们得到 silting 子范畴 $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_1 \geq \cdots \geq \mathcal{M}_l$，且满足 $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{M}_i)_{l-i}^{\wedge}$。因此 $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{M}_l)_0^{\wedge} = \mathcal{M}_l$。证毕。□

由定理 4.19，我们得到以下结果。

推论 4.21。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 silting 子范畴，且 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个预倾斜子范畴，满足 $\mathcal{M} > \mathcal{N}$。若满足 $\mathcal{M} \geq \mathcal{L} \geq \mathcal{N}$ 的 silting 子范畴 $\mathcal{L}$ 只有有限多个，则$\mathcal{N}$ 是一个部分 silting 子范畴。

证明。对于每个满足 $\mathcal{M} \geq \mathcal{L} \geq \mathcal{N}$ 的 silting 子范畴 $\mathcal{L}$，集合 $\nabla_{\mathcal{L}}(\mathcal{N})$ 根据我们的假设是有限的。因此，$\nabla_{\mathcal{L}}(\mathcal{N})$ 有一个极小元。由定理 4.19，我们得到该断言。

□

通过取泛余扩张，我们给出一个使预 silting 对象成为部分 silting 对象的另一充分条件。回顾泛余扩张的定义。设 M、N 是 $\mathcal{C}$ 中的对象。假设向量空间 $\mathbb{E}(N, M) \neq 0$ 是有限维的，并令 $d := \dim \mathbb{E}(N, M)$。

取 $\mathbb{E}(N, M)$ 的一组基 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_d$。于是，对每个 $i \in [1, d]$，都有一个 $\mathfrak{s}$-冲突 $M \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{g_i} N \overset{\delta_i}{\dashrightarrow}$。由 [26, 推论 3.16] 可知，$[\,\mathrm{id}\ \cdots\ \mathrm{id}\,]\colon M^{\oplus d} \to M$ 是一个 $\mathfrak{s}$-满射。因此，根据 (ET4)，我们有一个由 $\mathfrak{s}$-冲突构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} M^{\oplus d} & \xrightarrow{\oplus f_i} & \oplus_{i=1}^d F_i & \xrightarrow{\oplus g_i} & N^{\oplus d} & \overset{\oplus \delta_i}{\dashrightarrow} & \\ \downarrow{\scriptstyle [\,\mathrm{id}\ \cdots\ \mathrm{id}\,]} & & \downarrow & & \| & & \\ M & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & N^{\oplus d} & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & . \end{array}$$

然后我们称 $\mathfrak{s}$-冲突 $M \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} N^{\oplus d} \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 M 被 N 的万有余扩张。根据万有余扩张的构造，$(\delta\sharp)_N\colon\ \mathcal{C}(N, N^{\oplus d}) \to \mathbb{E}(N, M)$ 是满射。下面的定理是 Bongartz 引理（[10]）的一个类似结果。

定理 4.22. 设 M 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 对象，N 是 $\mathcal{C}$ 的预 silting 对象。假设向量空间 $\mathbb{E}(N, M)$ 是有限维的。若 $N \in (\mathrm{add}\ M)_1^{\wedge}$，则 N 是部分 silting。

证明. 令 $d := \dim \mathbb{E}(N, M)$。若 $d = 0$，则 $N \in (\mathrm{add}\ M)_1^{\wedge}$ 诱导出一个分裂的 $\mathfrak{s}$-conflation $M_1 \to M_0 \to N \dashrightarrow$，其中 $M_1, M_0 \in$ 属于 add M。因此 $N \in$ 属于 add M。假设 $d \neq 0$。取一个泛余扩张，我们得到一个 $\mathfrak{s}$-conflation

$$M \to F \to N^{\oplus d} \dashrightarrow . \tag{4.5}$$

接下来证明 $T := F \oplus N$ 是 $\mathcal{C}$ 的 silting 对象。由于 thick$T$ 对余锥封闭，$F, N \in$ 属于 thick T 蕴含 $M \in$ 属于 thick T。因此 $\mathcal{C} =$ 属于 thick $M \subseteq$ thick T。我们证明对所有 $k \geq 1$，$\mathbb{E}^k(T, T) = 0$。

(i) 将 $\mathcal{C}(-, N)$ 应用于 (4.5)，得到一个正合列

$$0 = \mathbb{E}^k(N^{\oplus d}, N) \to \mathbb{E}^k(F, N) \to \mathbb{E}^k(M, N).$$

由引理 3.3(1) 可知 $\mathbb{E}^k(M, N) = 0$，因此对所有 $k \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^k(F, N) = 0$。(ii) 将 $\mathcal{C}(N, -)$ 应用于 (4.5)，得到一个正合列

$$\mathbb{E}^{k-1}(N, N^{\oplus d}) \to \mathbb{E}^k(N, M) \to \mathbb{E}^k(N, F) \to \mathbb{E}^k(N, N^{\oplus d}) = 0.$$

由引理 3.3(2)，对所有 $k \geq 2$，都有 $\mathbb{E}^k(N, M) = 0$。此外，根据泛余扩张的一个性质，映射 $\mathcal{C}(N, N^{\oplus d}) \to \mathbb{E}(N, M)$ 是满射。因此，对所有 $k \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^k(N, F) = 0$。(iii) 将 $\mathcal{C}(M, -)$ 应用于 (4.5)，得到一个正合列

$$0 = \mathbb{E}^k(M, M) \to \mathbb{E}^k(M, F) \to \mathbb{E}^k(M, N^{\oplus d}).$$

由引理 3.3(1)，$\mathbb{E}^k(M, N^{\oplus d}) = 0$，因此对所有 $k \geq 1$，都有 $\mathbb{E}^k(M, F) = 0$。此外，将$\mathcal{C}(-, F)$ 应用于 (4.5)，得到一个正合列

$$\mathbb{E}^k(N^{\oplus d}, F) \to \mathbb{E}^k(F, F) \to \mathbb{E}^k(M, F) = 0.$$

由 (ii) 可知左侧为零，因此对所有 $k \geq 1$，$\mathbb{E}^k(F, F) = 0$。

由 (i)、(ii) 和 (iii)，T 是 $\mathcal{C}$ 中的 silting 对象。因此，N 是部分 silting。 □

4.4. 恢复 Auslander–Reiten 结果。本小节旨在证明以下定理，它是 Auslander–Reiten 结果（[7, 定理 5.5]）的一个类似结果。

定理 4.23. 设 $\mathcal{C}$ 是一个弱幂等完备外三角范畴，且有足够多的投射对象和内射对象。假设 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的每个具有有限投射维数的 silting 子范畴在 $\mathcal{C}$ 中都是反变有限的。那么存在互逆双射

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{M} \in \mathrm{silt}\,\mathcal{P}^{\infty} \mid \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty\} \\ \psi \uparrow \downarrow \varphi \\ \{\mathcal{X} :\ \mathcal{C} \mid \mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty\} \text{ 的反变有限解消子范畴,} \end{array}$$

其中 $\varphi(\mathcal{M}) := \mathcal{M}^{\vee}$ 且 $\psi(\mathcal{X}) := \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}$。

为证明定理 4.23，以下定理起着重要作用。

定理 4.24. 设 $\mathcal{C}$ 是一个弱幂等完备外三角范畴，且有足够多的投射对象和足够多的内射对象。假设 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的每个具有

有限投射维数的 silting 子范畴在 $\mathcal{C}$中都是反变有限的。那么存在互逆双射

$$\{\mathcal{M} \in \mathsf{silt}\,\mathcal{P}^{\infty} \mid \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \in \mathsf{hcotors}\,\mathcal{C} \mid \mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty\},$$

其中 $\Phi(\mathcal{M}) := (\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp})$ 且 $\Psi(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$。

在证明定理 4.24 之前，我们先证明定理 4.23。

定理 4.23 的证明。由 [2, 命题 5.15], , 存在互逆双射

$$\begin{array}{c} \{(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \in \mathsf{hcotors}\,\mathcal{C} \mid \mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty\} \\ \psi' \uparrow \quad \downarrow \varphi' \\ \{\mathcal{X} : \text{contravariantly finite resolving subcategory of } \mathcal{C} \mid \mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty\}, \end{array}$$

其中 $\varphi'(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathcal{X}$且 $\psi'(\mathcal{X}) := (\mathcal{X}, \mathcal{X}^{\perp})$。因此，断言由定理 4.24 得证。 □

下面我们证明定理 4.24。首先，我们证明 Ψ 是良定义的。

命题 4.25. 假设 $\mathcal{C}$有足够多的投射对象。若 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的遗传余挠对，且 $\mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty$，则 $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 中的 silting 子范畴，且 $\mathrm{pd}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) < \infty$。

证明. 设 $(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \in$hcotors $\mathcal{C}$，且 $\mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty$。于是 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty}$。由命题 3.15，只需证明 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty})$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$中的遗传余挠对。子范畴 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty}$显然对直和项封闭。由命题 3.12， $\mathcal{P}^{\infty}$ 是一个厚子范畴和解消子范畴。因此，由引理 2.4 可得

$$\mathbb{E}^{i}_{\mathcal{P}^{\infty}}(X,Y) \cong \mathbb{E}^{i}(X,Y) = 0$$

对每个 $X \in \mathcal{X}$、$Y \in \mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty}$和 $i \geq 1$均成立。由于 $\mathcal{P}^{\infty}$是 $\mathcal{C}$的厚子范畴，我们有$\mathcal{P}^{\infty} \supseteq \mathsf{cone}(\mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty}, \mathcal{X})$ 和 $\mathcal{P}^{\infty} \supseteq \mathsf{cocone}(\mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty}, \mathcal{X})$。下面证明反向包含。设 $M \in \mathcal{P}^{\infty}$。由 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in$hcotors $\mathcal{C}$，存在 $\mathfrak{s}$-挠化 $Y_M \to X_M \to M \dashrightarrow$和$M \to Y^M \to X^M \dashrightarrow$，使得 $Y_M, Y^M \in \mathcal{Y}$以及 $X_M, X^M \in \mathcal{X}$。由于 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty}$和 $\mathcal{P}^{\infty}$是解消子范畴，我们有 $Y_M, Y^M \in \mathcal{Y}\cap\mathcal{P}^{\infty}$。因此， $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$是 $\mathcal{P}^{\infty}$中的 silting 子范畴，且 $\mathrm{pd}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) < \infty$。□

接下来，我们证明 Φ 定义良好。

命题 4.26. 假设 $\mathcal{C}$ 是弱幂等完备的，且有足够多的投射对象和内射对象。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的一个 silting 子范畴，且 $\mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$。假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$的一个反变有限子范畴。那么，$(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个遗传余挠对，且 $\mathrm{pd}\mathcal{M}^{\vee} < \infty$。

证明. 根据引理 3.11，$\mathrm{pd}\mathcal{M}^{\vee} = \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$。我们证明 $(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp}) \in$hcotors $\mathcal{C}$。由引理 3.2(1)可知，$\mathcal{M}^{\vee}$ 和 $\mathcal{M}^{\perp}$ 对直和项封闭。根据引理 3.3(1)，对每个 $i \geq 1$，可得 $\mathbb{E}^{i}(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp}) = 0$。为证明 $\mathcal{C} = \mathsf{cocone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}^{\vee}) = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}^{\vee})$，我们断言：(i) $\mathcal{C} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\vee}_{d}$，其中 $d := \mathrm{pd}\mathcal{M}$；以及 (ii) $\mathcal{M}^{\perp} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M})$。首先，我们证明 (i)。设 $X \in \mathcal{C}$。由于 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象，存在一个 $\mathfrak{s}$-conflation $X \to I^0 \to C^1 \dashrightarrow$，其中 $I^0 \in \mathrm{inj}\,\mathcal{C}$。归纳地，存在一个 $\mathfrak{s}$-conflation $C^i \to I^i \to C^{i+1} \dashrightarrow$，使得 $I^i \in$inj $\mathcal{C}$。将 $\mathcal{C}(\mathcal{M}, -)$ 应用于上述 $\mathfrak{s}$-conflations，可诱导出同构

$$\mathbb{E}^{j}(\mathcal{M}, C^{d}) \cong \mathbb{E}^{j+1}(\mathcal{M}, C^{d-1}) \cong \cdots \cong \mathbb{E}^{j+d}(\mathcal{M}, X) = 0$$

对每个 $j \geq 1$，其中最后一个等式由引理 3.10 得出。由 $I^i, C^d \in \mathcal{M}^{\perp}$，我们有$X \in (\mathcal{M}^{\perp})^{\vee}_{d}$。接下来，我们证明 (ii)。由于 $\mathcal{M}^{\perp}$ 对锥封闭，因此我们得到

$$\mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}) \subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}^{\perp}) \subseteq \mathcal{M}^{\perp}.$$

我们证明反向包含。设 $X \in \mathcal{M}^{\perp}$。由于 $\mathcal{M}$ 是反变有限的，存在一个右 $\mathcal{M}$-逼近 $f\colon M \to X$。我们证明 f 是一个 $\mathfrak{s}$-亏量。由于 $\mathcal{C}$ 有足够的投射对象，我们得到 $\mathcal{C} = \mathsf{cone}(\mathcal{C}, \mathsf{proj}\ \mathcal{C})$，从而

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\perp} &\subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{C}, \mathsf{proj}\,\mathcal{C}) \\
&\subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{C}, \mathcal{M}^{\vee}) && \text{by Proposition 3.13(2)} \\
&= \mathsf{cone}(\mathcal{C}, \mathsf{cocone}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\vee})) \\
&\subseteq \mathsf{cocone}(\mathsf{cone}(\mathcal{C}, \mathcal{M}), \mathcal{M}^{\vee}) && \text{by (ET4).}
\end{aligned}$$

因此，存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $X \to E \to C \dashrightarrow$，使得 $E \in$ 锥$(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 且 $C \in \mathcal{M}^{\vee}$。由 $X \in \mathcal{M}^{\perp} = (\mathcal{M}^{\vee})^{\perp}$ 和 $C \in \mathcal{M}^{\vee}$，该 $\mathfrak{s}$-膨胀分裂。因此，我们有一个 $\mathfrak{s}$-满射$f'\colon M' \to X$，且 $M' \in \mathcal{M}$。由于 $f\colon M \to X$ 是一个右 $\mathcal{M}$-逼近，存在$g\colon M' \to X$，使得 $fg = f'$。根据我们的假设，$\mathcal{C}$ 是弱幂等完备的，因此 f 是一个 $\mathfrak{s}$-满射。于是我们有一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $X' \to M \xrightarrow{f} X \dashrightarrow$。由 M, $X \in \mathcal{M}^{\perp}$，可得$X' \in \mathcal{M}^{\perp_{>1}}$。将 $\mathcal{C}(\mathcal{M}, -)$ 应用于上述 $\mathfrak{s}$-膨胀，可导出一个正合列

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}, M) \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathcal{M}, f)} \mathcal{C}(\mathcal{M}, X) \to \mathbb{E}(\mathcal{M}, X') \to \mathbb{E}(\mathcal{M}, M) = 0.$$

由于 f 是一个右 $\mathcal{M}$-逼近，我们有 $\mathbb{E}(\mathcal{M}, X') = 0$。因此 $X' \in \mathcal{M}^{\perp}$。为完成证明，我们通过对 n使用归纳法来证明 $(\mathcal{M}^{\perp})_n^{\vee} \subseteq$ 余锥$(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_{n-1}^{\vee}) \subseteq$ 锥$(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_n^{\vee})$。假设$n = 0$。由 (ii)，我们有 $\mathcal{M}^{\perp} =$ 余锥$(\mathcal{M}^{\perp}, \{0\}) \subseteq$ 锥$(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M})$。假设 $n \geq 1$。那么我们有

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}^{\perp})_n^{\vee} &= \mathsf{cocone}(\mathcal{M}^{\perp}, (\mathcal{M}^{\perp})_{n-1}^{\vee}) \\
&\subseteq \mathsf{cocone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_{n-1}^{\vee})) && \text{由归纳假设} \\
&\subseteq \mathsf{cocone}(\mathcal{M}^{\perp} * \mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_{n-1}^{\vee}) && \text{由 [26, 命题 3.15]} \\
&= \mathsf{cocone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_{n-1}^{\vee}) \\
&= \mathsf{cocone}(\mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}), \mathcal{M}_{n-1}^{\vee}) && \text{by (ii)} \\
&\subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathsf{cocone}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_{n-1}^{\vee})) && \text{by } (\mathrm{ET4})^{\mathrm{op}} \\
&= \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}_n^{\vee}).
\end{aligned}$$

由 (i)，我们得到该断言。 □

现在，我们准备证明定理 4.24。

定理 4.24 的证明。由命题 4.25 和 4.26，只需证明 $\Psi\Phi = 1$ 和 $\Phi\Psi = 1$。设 $\mathcal{M} \in \mathsf{silt}\,\mathcal{P}^{\infty}$，且 $\mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$。由引理 3.3(3)，我们得到 $\Psi\Phi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\vee} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M}$。因此 $\Psi\Phi = 1$。为证明 $\Phi\Psi = 1$，我们断言，对于每个满足 $\mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty$的 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathsf{hcotors}\ \mathcal{C}$，都有 $\mathcal{X} = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^{\vee}$。由命题 4.25，$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$的一个 silting 子范畴。因此，由引理 3.2(5) 和 3.6 可得

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty} \cap {}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq \mathsf{thick}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \cap {}^{\perp}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^{\vee} \subseteq \mathcal{X}^{\vee} = \mathcal{X}.$$

证明至此完成。 □

作为应用，我们得到定理 5.1] 的 silting 版本 [12,。

推论 4.27. 设 $\mathcal{C}$ 是一个拥有足够多投射对象的外三角范畴，并设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 的一个 silting 子范畴。那么以下陈述等价。

(1) $\mathcal{C} = \mathcal{P}^{\infty}$。(2) 厚子范畴 $\mathcal{M} = \mathcal{C}$。(3) $(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp})$ 和 $({}^{\perp}\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\wedge})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的遗传余扭挠对，且 $(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp})$ 与 $({}^{\perp}\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\wedge})$ 重合。

此外，假设 $\mathcal{C}$ 是一个具有足够多内射对象的弱幂等完备范畴，$\mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$，并且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反变有限子范畴。那么，以下条件也等价。

(4) $\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M}^{\wedge}$.

证明. (1)⇔(2)：这是显然的。

(2)⇒(3)：由引理 2.4， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$的一个倾斜子范畴。由命题 3.7 可知，$(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\wedge})$ 是 $\mathcal{C}$中的一个遗传余挠对。此外，由引理 3.2(4) 和 (5)，我们有${}^{\perp}\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\vee}$ 和 $\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M}^{\wedge}$。

(3)⇒(1)：由于$(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\wedge})$是 $\mathcal{C}$中的一个遗传余挠对，我们有

$$\mathcal{C} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge}, \mathcal{M}^{\vee}) \subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{P}^{\infty}, \mathcal{P}^{\infty}) \subseteq \mathcal{P}^{\infty},$$

因此断言成立。

(3)⇒(4)：这是显然的。

下文中，我们假设 $\mathcal{C}$ 是一个弱幂等完备范畴，且有足够多的内射对象，$\mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$，并且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反变有限子范畴。

(4)⇒(1)：由于 $\mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty$，且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反变有限子范畴，由命题 4.26 可知，$(\mathcal{M}^{\vee}, \mathcal{M}^{\perp})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的遗传余挠对。因此我们得到

$$\mathcal{C} = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}^{\vee}) = \mathsf{cone}(\mathcal{M}^{\wedge}, \mathcal{M}^{\vee}) \subseteq \mathsf{cone}(\mathcal{P}^{\infty}, \mathcal{P}^{\infty}) \subseteq \mathcal{P}^{\infty}.$$

因此证明完成。 □

将 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 视为一个外三角范畴，我们有以下结果。

推论 4.28（[12, 定理 5.1]）。设 Λ 是一个有限维代数，且 T 是一个倾斜Λ-模。那么，以下命题等价。

(1) Λ 的全局维数有限。(2) thick $T = \mathrm{mod}\,\Lambda$。(3) 对偶 ((add T)$^{\vee}$, (add T)$^{\perp}$) 和 ($^{\perp}$(add T), (add T)$^{\wedge}$) 是遗传余挠对，并且 ((add T)$^{\vee}$, (add T)$^{\perp}$) 和 ($^{\perp}$(add T), (add T)$^{\wedge}$) 相同。(4) (add T)$^{\perp}$ =(add T)$^{\wedge}$。

证明。 Λ 的全局维数有限，当且仅当 $\mathrm{mod}\,\Lambda = \mathcal{P}^{\infty}$。根据推论 3.14， T是 $\mathcal{P}^{\infty}$中的一个 silting 对象。由于 $\mathrm{mod}\,\Lambda$是 Hom-有限的，add T是反变有限的。因此，该断言由推论 4.27 得出。□

我们以恢复 Auslander–Reiten 结果来结束本小节。对于 $\mathcal{C}$中的对象 C_1、C_2、.....、C_n，令 $\mathcal{F}$(C_1、C_2、.....、C_n)表示由满足下列条件的 $M \in \mathcal{C}$ 组成的子范畴：其存在一个由 $\mathfrak{s}$-膨胀构成的序列

$$0 = M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to \cdots \xrightarrow{f_{l-1}} M_l = M$$

使得对每个 $i \in [0, l-1]$，$\mathsf{Cone}(f_i) \in \mathsf{add}\ C_{j_i}$。注意， $\mathcal{F}$(C_1、C_2、.....、C_n)是 $\mathcal{C}$ 中对扩张封闭且包含 C_1、C_2、.....、C_n的最小子范畴。下面的引理是 [7, 命题 3.8、推论 3.10]的一个外三角版本。

引理 4.29. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有足够多投射对象的 Krull–Schmidt 外三角范畴。假设 $\mathcal{C} = \mathcal{F}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$，其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是 $\mathcal{C}$ 中的对象。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反变有限解消子范畴。则以下陈述成立。

(1) 对于每个 $M \in \mathcal{C}$，都存在一个 $\mathfrak{s}$-膨胀 $K \to Y \to M \dashrightarrow$，使得 $K \in \mathcal{X}^{\perp}$ 且$Y \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，其中 $X_i \to C_i$是一个极小右 $\mathcal{X}$-逼近。(2) $\mathcal{X} =$add$(\mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n))$。(3) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty}$ 当且仅当 $\mathrm{pd}\mathcal{X} < \infty$。

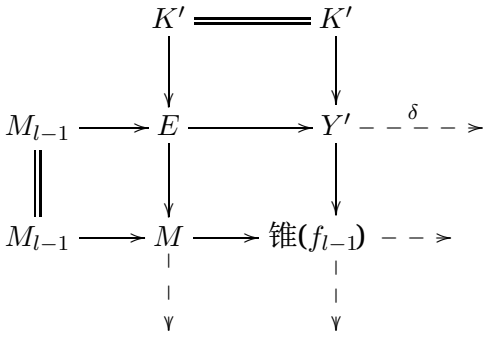
证明。令 $\mathcal{Y}:=\mathcal{F}(X_1,X_2,\dots,X_n)$。

(1) (i) 我们证明存在一个 $\mathfrak{s}$-冲突序列 $K_i\to X_i\xrightarrow{\alpha_i}C_i\dashrightarrow$，使得 $K_i\in\mathcal{X}^{\perp}$ 和 $\alpha_i:X_i\to C_i$ 是每个 $i\in[1,n]$ 的极小右 $\mathcal{X}$-逼近。由 [2, 引理 5.14], ，我们有一个 $\mathfrak{s}$-冲突序列 $K_i'\to X_i'\xrightarrow{\beta_i}C_i\dashrightarrow$，满足 $K_i'\in\mathcal{X}^{\perp}$ 和 $X_i'\in\mathcal{X}$。由 $K_i'\in\mathcal{X}^{\perp}$可知，$\beta_i$ 是一个右 $\mathcal{X}$-逼近。设 α_i 是 β_i 的一个右极小态射。则 α_i 是一个$\mathfrak{s}$-满射，且 $K_i:=$ 余锥(α_i) 是 $K_i'\in\mathcal{X}^{\perp}$ 的一个直和项。因此，我们得到所需的$\mathfrak{s}$-冲突序列。

(ii) 设 $M\in\mathcal{C}=\mathcal{F}(C_1,C_2,\dots,C_n)$。则存在一列 $\mathfrak{s}$-膨胀

$$0=M_0\xrightarrow{f_0}M_1\xrightarrow{f_1}M_2\to\cdots\xrightarrow{f_{l-1}}M_l=M$$

使得对每个 $i\in[0,l-1]$，$\mathsf{Cone}(f_i)\in\mathsf{add}\,C_{j_i}$。对 l 作归纳法，我们证明存在一个 $\mathfrak{s}$-相容序列 $K\to Y\to M\dashrightarrow$，使得 $K\in\mathcal{X}^{\perp}$ 且 $Y\in\mathcal{Y}$。若 $l=1$，则$M\in\mathsf{add}\,C_{j_0}$。因此，结论由 (i) 得出。假设 $l\geq 2$。则有一个 $\mathfrak{s}$-相容序列$M_{l-1}\xrightarrow{f_{l-1}}M\to\mathsf{Cone}(f_{l-1})\dashrightarrow$，其中 $\mathsf{Cone}(f_{l-1})\in\mathsf{add}\ C_{j_{l-1}}$。由 (i) 可知，存在一个 $\mathfrak{s}$-相容序列 $K'\to Y'\to\mathsf{Cone}(f_{l-1})\dashrightarrow$，使得 $K'\in\mathcal{X}^{\perp}$ 且 $Y'\in\mathsf{add}\ X_{j_{l-1}}$。根据[26, 命题 3.15], ，我们有一个交换图

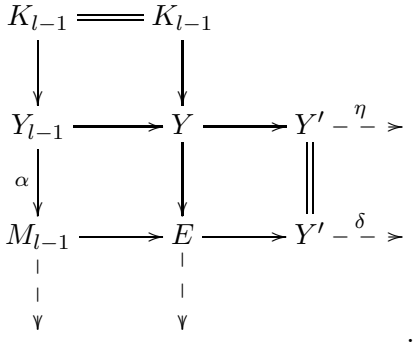


.

归纳假设表明，存在一个 $\mathfrak{s}$-融贯 $K_{l-1}\to Y_{l-1}\xrightarrow{\alpha}M_{l-1}\dashrightarrow$，使得 $K_{l-1}\in\mathcal{X}^{\perp}$ 且 $Y_{l-1}\in\mathcal{Y}$。将 $\mathcal{C}(Y',-)$ 应用于该 $\mathfrak{s}$-融贯，可得一个正合列

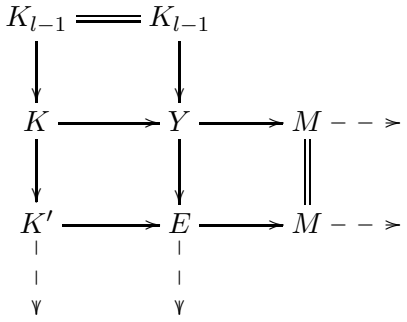
$$\mathbb{E}(Y',K_{l-1})\to\mathbb{E}(Y',Y_{l-1})\xrightarrow{\mathbb{E}(Y',\alpha)}\mathbb{E}(Y',M_{l-1})\to\mathbb{E}^2(Y',K_{l-1}).$$

由 $Y'\in\mathcal{X}$和 $K_{l-1}\in\mathcal{X}^{\perp}$，我们有 $\mathbb{E}(Y',K_{l-1})=0=\mathbb{E}^2(Y',K_{l-1})$。因此，存在$\eta\in\mathbb{E}(Y',Y_{l-1})$，使得 $\delta=\mathbb{E}(Y',\alpha)(\eta)=\alpha^*\eta$。于是我们得到一个交换图



.

由于 $\mathcal{Y}$ 对扩张封闭，我们有 $Y \in \mathcal{Y}$。由 (ET4)^{op}，我们得到一个交换图



由于 $\mathcal{X}^{\perp}$ 对扩张封闭，我们有 $K \in \mathcal{X}^{\perp}$，因此 $K \to Y \to M \dashrightarrow$ 是一个所需的 $\mathfrak{s}$-纯合。

(2) 设 $X \in \mathcal{X}$。由 (1)，存在一个 $\mathfrak{s}$-纯合 $K \to Y \to X \dashrightarrow$，使得 $K \in \mathcal{X}^{\perp}$ 且 $Y \in \mathcal{Y}$。由 $X \in \mathcal{X}$，该 $\mathfrak{s}$-纯合分裂。因此 $X \in$ 属于 add $\mathcal{Y}$。由于反向包含显然成立，故断言得证。

(3) 由于“若”部分显然，我们证明“仅若”部分。由 $X_i \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty}$，存在 $d \geq 0$，使得对每个 $i \in [1, n]$，均有 add $X_i \subseteq (\mathrm{proj}\ \mathcal{C})^{\wedge}_d$ 成立。由引理 3.2(1)，子范畴 $(\mathrm{proj}\,\mathcal{C})^{\wedge}_d$ 对扩张和直和项封闭。因此由 (2) 可得 $\mathcal{X} =$ 属于 $\mathrm{add}(\mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \subseteq (\mathrm{proj}\ \mathcal{C})^{\wedge}_d$。也就是说，$\mathrm{pd}\mathcal{X} \leq d$。□

现在，我们已经可以重新得到 Auslander–Reiten 结果。

推论 4.30 ([7, 定理 5.5])。设 Λ 为一个有限维代数。那么，$T \mapsto (\mathrm{add}\ T)^{\vee}$ 在基本倾斜模的同构类集合与由有限投射维数模组成的反变有限的预解子范畴集合之间给出一个双射。

证明。由命题 3.13(1)，Λ 是 $\mathcal{P}^{\infty}$ 中的一个 silting 对象。因此，由 [2, 命题 5.4] 可知，$\mathcal{P}^{\infty}$ 的每个 silting 子范畴都有一个加性生成元。于是我们得到 $\mathrm{silt}\,\mathcal{P}^{\infty} = \{\mathcal{M} \in \mathrm{silt}\,\mathcal{P}^{\infty} \mid \mathrm{pd}\mathcal{M} < \infty\}$。由于 mod Λ 是 Hom-有限的，$\mathcal{P}^{\infty}$ 的所有 silting 子范畴都是反变有限的。由定理 4.23 和引理 4.29(3)，我们得到互逆双射

$$\begin{array}{c} \mathrm{silt}\,\mathcal{P}^{\infty} \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \{\mathcal{X} :\ \mathcal{C} \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}^{\infty}\}.\text{的反变有限解消子范畴} \end{array}$$

因此，结论由推论 3.14 得出。□

5. Examples of silting objects in an extriangulated category

本节中，我们给出一个关于 silting 对象和 silting 变异的例子。设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴。假设 R 是一个域，且 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{E}$-有限的，也就是说，对于所有 X、$Y \in \mathcal{C}$，$\mathbb{E}(X, Y)$ 都是有限维的。回顾 $\mathcal{C}$ 中可标准化集合的概念。

定义 5.1. 设 $\Theta := (\Theta(1)\ \Theta(2) \ldots, \Theta(n))$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个有序对象集。若 Θ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{C}$ 中的一个可标准化集合。

(S1) 对于每个 $i \in [1, n]$，$\Theta(i)$ 都是不可分解的。

(S2) 若 $i > j$，则 $\mathcal{C}(\Theta(i)\ \Theta(j)) = 0$ 成立。(S3) 若 $i \geq j$，则 $\mathbb{E}(\Theta(i)\ \Theta(j)) = 0$ 成立。

令 $\mathcal{F}(\Theta) := \mathcal{F}(\Theta(1)\ \Theta(2) \ldots, \Theta(n))$，$\mathcal{F}(\Theta(\geq i)) := \mathcal{F}(\Theta(i)\ \Theta(i+1) \ldots, \Theta(n))$，以及 $\mathcal{F}(\Theta(\leq i)) := \mathcal{F}(\Theta(1)\ \Theta(2) \ldots, \Theta(i))$。由于 $\mathcal{F}(\Theta)$ 对扩张封闭，它因此成为一个外三角范畴。注意，$\mathcal{F}(\Theta) = \mathrm{add}\ \Theta(n) * \mathrm{add}\ \Theta(n-1) * \cdots * \mathrm{add}\ \Theta(1)$（例如，[3, 命题 3.9(1)]）。

按照 Dlab–Ringel 的标准化方法（[13]），我们构造 $\mathcal{F}(\Theta)$ 的一个投射生成元和一个内射余生成元。若对象 $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ 在 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中是投射的，且 $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq$锥($\mathcal{F}(\Theta)$, add X) 成立，则称其为投射生成元。对偶地，我们定义 $\mathcal{F}(\Theta)$ 的一个内射余生成元。

命题 5.2 ([3, 命题 3.10(1)])。设 $\Theta := (\Theta(1)\ \Theta(2) \dots, \Theta(n))$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个可标准化集合。则以下结论成立。

(1) 对每个 $i \in [1, n]$，存在一个 $\mathfrak{s}$-粘合

$$K(i) \to P(i) \to \Theta(i) \dashrightarrow$$

使得 $K(i) \in \mathcal{F}(\Theta(\geq i+1))$，且 $P(i)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的一个投射对象。特别地，$P_\Theta := \oplus_{i=1}^{n} P(i)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 的一个投射生成元。

(2) 对每个 $i \in [1, n]$，存在一个 $\mathfrak{s}$-粘合

$$\Theta(i) \to I(i) \to C(i) \dashrightarrow$$

使得 $C(i) \in \mathcal{F}(\Theta(\leq i-1))$，且 $I(i)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的一个内射对象。特别地，$I_\Theta := \oplus_{i=1}^{n} I(i)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 的一个内射余生成元。

现在，我们给出一个 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中 silting 对象的例子。

命题 5.3. 若 $\Theta := (\Theta(1)\ \Theta(2) \dots, \Theta(n))$ 是 $\mathcal{C}$ 中的可标准化集合，则 P_Θ 和 I_Θ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的 silting 对象。特别地，silt $\mathcal{F}(\Theta)$ 有最大元 P_Θ 和最小元 I_Θ。

证明。由命题 5.2(1)，P_Θ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的投射对象，因此它在 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中是预 silting。令 thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$ 表示 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中包含 P_Θ 的最小厚子范畴。注意，thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对扩张封闭的子范畴。我们用关于 i 的归纳法证明 $\Theta(i) \in$thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$。若 $i = n$，则 $\Theta(n) \cong P(n) \in$ thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$。假设 $i \leq n-1$。由命题 5.2(1)，存在一个 $\mathfrak{s}$-conflation $K(i) \to P(i) \to \Theta(i) \dashrightarrow$，使得 $K(i) \in \mathcal{F}(\Theta(\geq i+1))$，且 $P(i)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的投射对象。归纳假设意味着，对于每个 $j \geq i+1$，$\Theta(j) \in$ thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$。由于 thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$ 对扩张封闭，我们有 $K(i) \in$ thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$。因此，由于 thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$ 对锥封闭，断言得证。由于 $\mathcal{F}(\Theta)$ 是对扩张封闭且包含 $\Theta(1) \dots, \Theta(n)$ 的最小子范畴，我们得到 $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq$thick$_{\mathcal{F}(\Theta)} P_\Theta$。因此，$P_\Theta$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的 silting 对象。对偶地，I_Θ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的 silting 对象。□

若 $\mathcal{F}(\Theta)$ 是有限型（即 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中非同构的不可分解对象只有有限多个），则 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的所有 silting 对象都可通过迭代变异到达。

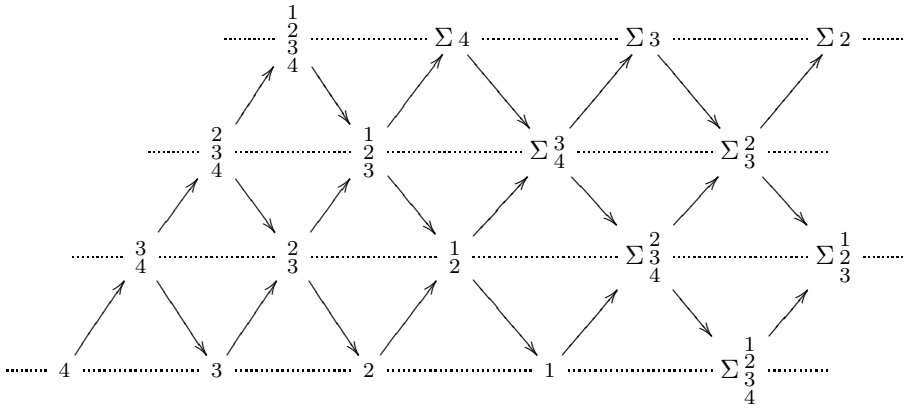
推论 5.4. 若 $\mathcal{F}(\Theta)$ 是有限型，则 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的每个 silting 对象都可由 P_Θ 经过迭代不可约左变异得到。

证明. 由命题 5.3，我们得到 silt $\mathcal{F}(\Theta) = \{M \in \text{silt } \mathcal{F}(\Theta) \mid P_\Theta \geq M \geq I_\Theta\}$。由于 $\mathcal{F}(\Theta)$ 是有限型，集合 silt $\mathcal{F}(\Theta)$ 是有限的。因此，断言由推论 4.17 得出。□

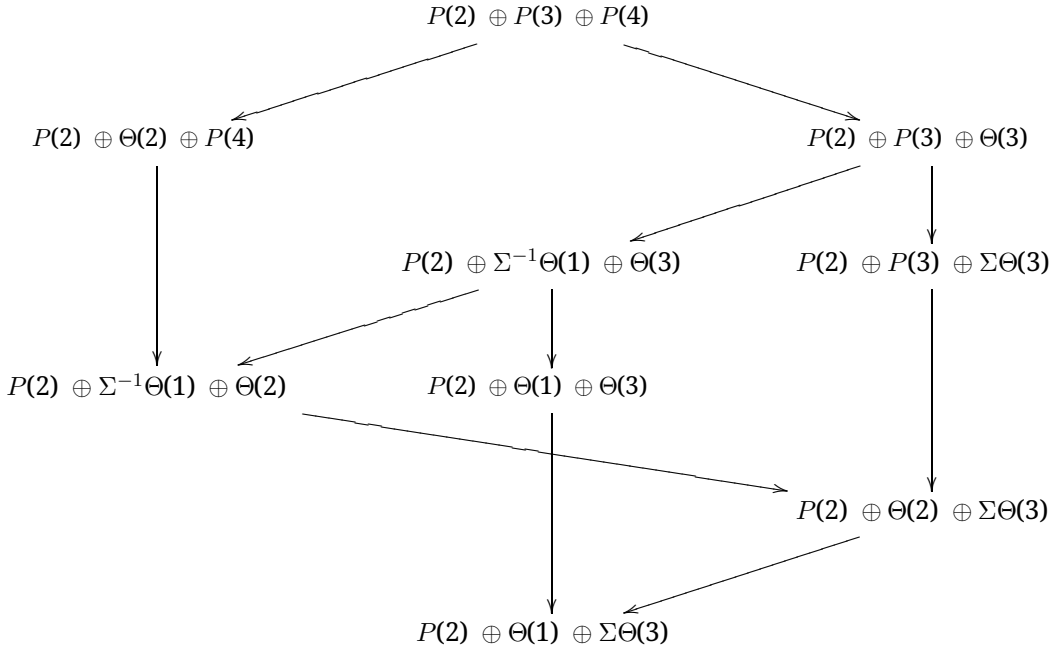
使用标准化集 合，我们给出 silting 对象和 silting 变异的一个具体例子 n.

例 5.5. 设 R 是代数闭域，且 $\Lambda := R(1 \to 2 \to 3 \to 4)$ 是路径代数。考虑 mod Λ 的有界导出范畴 $\mathcal{D}$。那么 Auslander–Reiten

$\mathcal{D}$ 的 Auslander–Reiten 箭图如下。



令 $\Theta(1) := \Sigma\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$, $\Theta(2) := \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$, $\Theta(3) := \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, $\Theta(4) := \begin{smallmatrix}4\end{smallmatrix}$. 注意，外三角范畴$\mathcal{F}(\Theta)$既不是三角范畴，也不是精确范畴。由于 $(\Theta(1)\ \Theta(2)\ \Theta(3)\ \Theta(4))$ 是一个可标准化集合，因此 $P_\Theta = P(1) \oplus P(2) \oplus P(3) \oplus P(4)$ 是 $\mathcal{F}(\Theta)$ 中的一个 silting 对象，其中$P(1) = 0$, $P(2) = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix}$, $P(3) = \begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix}$, $P(4) = \Theta(4)$. 通过左变异，我们得到一个有限连通分支



根据推论 4.18，这与 $Q(\mathrm{silt}\ \mathcal{F}(\Theta))$ 一致。

致谢。第一作者获得日本学术振兴会科研费项目（编号：JP20K14291）资助。第二作者获得日本学术振兴会科研费项目（编号：JP19K14513）资助。第二作者谨向 Takuma Aihara 致谢，感谢他对注 4.11(1) 提出的意见。

References

[1] T. Adachi, Y. Mizuno, D. Yang, *Discreteness of silting objects and t-structures in triangulated categories*, 伦敦数学会会刊 (3) 118 (2019), 第 1 期，1–42。[2] T. Adachi, M. Tsukamoto, *Hereditary cotorsion pairs and silting subcategories in extriangulated categories*, 《代数杂志》594 (2022), 109–137。[3] T. Adachi, M. Tsukamoto, *Mixed standardization and Ringel duality*, arXiv:2202.06057。[4] T. Aihara, *Tilting-connected symmetric algebras*, 《代数与表示论》16 (2013), 第 3 期，873–894。

[5] T. Aihara, O. Iyama,
Silting mutation in triangulated categories 2 **85** 2012 3, , 伦敦数学会杂志 ( ) ( ), 第 – 期。[6] T. Aihara, Y. Mizuno,
Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type.《代数与数论》11 (2017), 1287–1315。[7] M. Auslander, I. Reiten,
Applications of contravariantly finite subcategories **86** 1991 1, , 《数学进展》( ), 第 – 期。[8] M. Auslander, S. O. Smalø, *Preprojective modules over Artin algebras*,《代数杂志》66 (1980), 第 1 期, 66–122。[9] M. V. Bondarko, *Weight structures vs. t-structures; weight filtrations*,
spectral sequences and complexes (for , ,《K-理论杂志》( ), 第 – 期。[10] K. Bongartz, *Tilted algebras*,《代数表示》（普埃布拉，1980），第 26–38 页，《数学讲义》903，施普林格，柏林-纽约，1981。[11] T. Br¨ustle, D. Yang, *Orderd exchange graphs*,《代数表示论进展》，135–193, EMS 会议报告丛书，欧洲数学学会，苏¨黎世，2013。[12] T. Cruz, C. Psaroudakis, *Relative Auslander–Gorenstein Pairs*, arXiv:2302.10704。[13] V. Dlab, C. M. Ringel, *The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras*,《代数表示及相关主题》（京都，1990），200–224，伦敦数学会讲义丛书168，剑桥大学出版社，剑桥，1992。[14] M. Gorsky, H. Nakaoka, Y. Palu, *Positive and negative extensions in extriangulated categories*, arXiv:2103.12482。[15] D. Happel, L. Unger,
On a partial order of tilting modules **8** 2005 2, ,《代数与表示论》( ), 第 – 期。[16] J. Haugland, *The Grothendieck Group of an n-exangulated Category*,《范畴结构及其应用》29 (2021), 第 3 期, 431–446。[17] M. Herschend, Y. Liu, H. Nakaoka,
n-exangulated categories (I): Definitions and fundamental properties,《代数杂志》570 (2021), 531–586。[18] O. Iyama, H. Nakaoka, Y. Palu, *Auslander–Reiten theory in extriangulated categories*, arXiv:1805.03776。[19] O. Iyama, X. Zhang, *Tilting modules over Auslander–Gorenstein algebras*,《太平洋数学杂志》298 2, 399 2019 416 ( ), 第 – 期。[20] B. Keller, D. Vossieck, *Aisles in derived categories*,《比利时数学会通报》S´er. A 40 (1988), 第 2 期, 239–253。[21] S. Koenig, D. Yang,
Silting objects simple-minded collections t-structures and co-t-structures for finite- , , ,《数学文献》( ), – 。[22] C. Klapproth, *n-extension closed subcategories of n-exangulated categories*, arXiv:2209.01128。[23] Y. Liu, H. Nakaoka, *Hearts of twin Cotorsion pairs on extriangulated categories*,《代数杂志》528 (2019), 96–149。[24] Y. Liu, P. Zhou, Y. Zhou, B. Zhu, *Silting reduction in extriangulated categories*, arXiv:2108.07964。[25] O. Mendoza, V. Santiago, C. S´aenz, V. Souto, *Auslander–Buchweitz context and co-t-structures*,《范畴结构及其应用》21 (2013), 417–440。[26] H. Nakaoka, Y. Palu, *Extriangulated categories*,
Hovey twin cotorsion pairs and model structures,《拓扑、几何与微分范畴笔记》60 (2019), 第 2 期, 117–193。[27] J. Rickard, A. Schofield, *Cocovers and tilting modules*,《剑桥哲学学会数学会刊》106 (1989), 1–5。[28] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*,《赫尔维蒂数学评论》66 (1991), 第 1 期, 70–78。[29] H. Su, D. Yang, *From simple-minded collections to silting objects via Koszul duality*,《代数与表示论》22 (2019), 第 1 期, 219–238。[30] B. Zhu, X. Zhuang, *Grothendieck groups in extriangulated categories*,《代数杂志》574 (2021), 206–232。

T. Adachi: Faculty of Global and Science Studies, Yamaguchi University, 1677-1 Yoshida, Yam-aguchi 753-8541, Japan*Email address*: tadachi@yamaguchi-u.ac.jp
M. Tsukamoto: Graduate school of Sciences and Technology for Innovation, Yamaguchi Uni-versity, 1677-1 Yoshida, Yamaguchi 753-8512, Japan*Email address*: tsukamot@yamaguchi-u.ac.jp