arXiv:2303.08161v2 [cs.LO] 5 Sep 2023

按值正规形式双模拟

BENIAMINO ACCATTOLI，Inria 与 LIX、巴黎综合理工学院、UMR 7161，法国
ADRIENNE LANCELOT，Inria 与 LIX、巴黎综合理工学院、UMR 7161，法国CL
AUDIA FAGGIAN，IRIF、法国国家科学研究中心、巴黎西岱大学，F-75013 巴黎，法国

范式双模拟是程序等价的一种自然形式，基于开放项，最早由 Sangiorgi 在按名称调用中引入。文献中已有一种针对 Plotkin 的按值调用λ演算的范式双模拟，即 Lassen 的*enf* 双模拟；它验证了 Moggi 的所有单子定律，并可扩展以验证 η。然而，它无法验证其他重要原则，例如无意义项的等同——这一原则由 Sangiorgi 的双模拟验证——或 let 绑定的交换。这些缺陷源于 Plotkin 演算中开放项所带来的问题。我们引入一种新的按值调用范式双模拟，称为网双模拟，其理念更接近 Sangiorgi 的双模拟，并满足上述额外原则。我们在一种现有形式体系之上发展这一双模拟，该体系专为处理按值调用中的开放项而设计。事实证明，enf 双模拟与网双模拟不可比较，因为网双模拟既无法验证 Moggi 定律，也无法验证 η。此外，也没有简单的方法将二者合并。为更好地理解这一情况，我们分析按值调用范式双模拟丰富多样的可能形式，并将它们与 Ehrhard 的关系模型联系起来。

附加关键词和短语：λ 演算、程序等价、双模拟、按值调用

ACM 引用格式：
Beniamino Accattoli、Adrienne Lancelot 和 Claudia Faggian。2018年。按值正规形式双模拟。《*ACM* 杂志》37，4，第111号文章（2018年8月），54 页。https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

1 引言

对 λ演算的程序等价性的研究是一个重要课题，语义技术与操作技术在此交汇。程序等价性的性质向来难以证明。即使要确立两个项等价，也可能颇具挑战性，尤其是当等价性的概念为Morris的上下文等价 [1968]，，或是仍涉及全称量化的某种变体，例如Abramsky的应用双模拟 [1990]。另一个难点在于，程序等价性的性质十分脆弱：它们既不会在扩展所研究的演算时得到保留，也不会在对其加以限制时得到保留；即便只是在同一演算中改变求值策略，也无法保留这些性质。

众所周知，在无类型、按名称调用的弱 λ-演算中，应用双模拟对于上下文等价是完全抽象的（其中弱表示只在抽象之外进行归约，这在函数式语言中是标准做法）[Abramsky 1990], 的结果也适用于 Plotkin 的按值调用弱 λ-演算 [Egidi 等人 1992年；Pitts 2012]。因此，人们可能会认为，在弱设置下，按名称调用与按值调用之间的转换相当稳健；尽管已知这种稳健性在概率设置下会被打破，正如Dal Lago 等人 [2014]所示。

作者地址：Beniamino Accattoli，Inria 与 LIX，巴黎综合理工学院，UMR 7161，法国，beniamino.accattoli@inria. fr；Adrienne Lancelot，Inria 与 LIX，巴黎综合理工学院，UMR 7161，法国，adrienne.lancelot@inria.fr；Claudia Faggian，IRIF，法国国家科学研究中心，巴黎西岱大学，F-75013 巴黎，法国，faggian@irif.fr。

特此授权免费制作本作品全部或部分内容的数字副本或纸质副本，供个人或课堂使用，但不得为营利或商业利益而制作或分发副本，且副本首页必须载有本声明及完整引文。对于本作品中归他人而非美国计算机协会所有的组成部分，必须尊重其版权。注明出处后允许摘录。若要以其他方式复制、再版、发布到服务器或分发至列表，须事先取得明确许可和/或支付费用。请向 permissions@acm.org 申请许可。© 2018 美国计算机协会。
0004-5411/2018/8-ART111 $15.00https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

本文源于这样一个观察：另一种自然的程序等价性——Sangiorgi的范式双模拟 [1994]（简称 nf-双模拟）在按名称调用（简称 CbN）和按值调用（CbV）中表现不同，即使在无类型、无副作用的弱情形下也是如此。

范式双模拟等价。 范式双模拟是一种程序等价，它不通过观察项在外部的行为来比较项（即它们在上下文中的行为），而是通过考察它们（无穷）范式的结构，从内部进行比较。nf-双模拟的一个显著特点是，它们直接处理开放项，以至于Sangiorgi 在其开创性论文中更习惯于将其称为开放双模拟。 [1994]

Sangiorgi 的按名正规形双模拟等价对于上下文等价并非完全抽象：它是可靠的，但并不完备。完全抽象性的缺失，因按名正规形双模拟等价比应用相似性更容易确立这一事实而得到弥补，因为前者无需对参数进行量化。通常，证明不同的不动点组合子——它们是具有无穷范式的典型项——彼此 nf-双模拟等价并不困难；而证明它们彼此应用双模拟等价则很困难。

存在一种按值调用范式双模拟，Lassen的*enf* 双模拟 $\simeq_{enf}$ [2005a],，它被视为标准的按值调用范式双模拟。与 Sangiorgi 的方法一样，它对于按值调用上下文等价是可靠的，但并不完备 $\simeq_{C}^{v}$。它并非将 Sangiorgi 的方法直接套用到按值调用上的现成改编，因为它增加了一个额外子句，涉及求值上下文，利用了 Plotkin 的按值调用 λ演算在开放项上的众所周知的问题；这些问题已由Accattoli 和 Guerrieri [2016, 2018, 2022]进行了详尽讨论。

乍看之下，按名调用和按值调用范式双模拟对于弱 λ-演算都不完备，这似乎表明它们对于按名调用/按值调用之间的切换具有稳健性。事实上，它们并非如此。这两种双模拟等价确实因截然不同的原因而不完备。

Enf 的不完备性。 以下是 enf 双模拟不完备的四个重要原因。

(1) *Eta*：enf 双模拟不验证 η_v，即 η-等价的按值调用变体，即使 Lassen 本人展示了如何改进 enf 来修正这一点。(2) 按名称调用重复：enf 双模拟不会将非按值调用的项的重复视为等价：例如 $(\lambda x.yxx)t$和 ytt这样的项，对于任意 t都上下文等价；即使是非值项 t 也是如此，但一般而言，它们并非 enf 双模拟等价。在包含状态或概率的更丰富的按值调用设置中，上下文的区分能力更强，这些项并不上下文等价；但在纯情形下，它们是上下文等价的。本文将这一特性称为成本敏感性，它未必是缺点，因为这使程序等价更贴近按值调用的直觉。(3) （相互独立的）let绑定的换序：在纯情形下——或存在可交换效应时——上下文等价认可以下换序 $\equiv_{com}$（为便于阅读，以 let 绑定的形式呈现，但也很容易将 let 绑定展开为 β-可归约表达式来表示）：$\text{let } x = u \text{ in let } y = s \text{ in } t \equiv_{com} \text{let } y = s \text{ in let } x = u \text{ in } t$，条件是 $x \notin \text{fv}(s)$ 且 $y \notin \text{fv}(u)$。enf 双模拟不会将这些项视为等价。(4) Ω-项／无意义项：enf 双模拟不会将与典型的循环／无意义 λ-项 Ω上下文等价的项视为等价，本文将这类项称为 Ω-项。这与前文提到的 Plotkin 演算处理开项时的问题有关，因为这些问题会导致伪范式，也就是正规形式的 Ω-项。而在按名调用中，所有 Ω-项都会发散。

第 2 点是可以接受的，因为在按值调用中验证按名称调用重复的双模拟等价，必须超越对范式结构的比较，如示例所示，因此必然偏离范式双模拟等价的形式。因此，我们将成本敏感性视为按值调用范式双模拟等价固有的特性，无需修正。第 3 点是按值调用所特有的，因为在按名调用中，let 绑定会在求值过程中消失，而在含有开放项的按值调用中，它们可能会出现在范式中。因此，let 交换未能得到刻画，令人失望。更确切地说，理想情况下应当有一种

范式双模拟等价的概念，能够模块化地添加或移除对 let 交换的验证，以适应不同的按值调用设定（纯设定／（非）交换效应）。第 4 点是按值调用与按名调用之间的显著差异，因为 Sangiorgi 的双模拟等价确实会将弱按名调用中的 Ω-项判定为等价。

Ω-项。 enf 双模拟对 Ω-项的失效具有重要意义，因为所有自然的指称模型和程序等价都会将 Ω-项（针对模型所采用的求值概念）视为等价。粗略地说，不同的语义通过区分非Ω-项的各种划分来构建，但它们会将所有与空转循环上下文等价的项归入同一类——毕竟，把它们划分到不同类别又有何益？尤其对于强按名求值而言，将 Ω-项等同起来这一等式识别概念，正是 Barendregt的经典著作 [1984] 的核心（该书中， Ω-项称为不可解项，见第 2节）。

两种可能的途径。 要通过 nf-双模拟克服上述部分不完备性，可以从两个不同层面着手：改变底层演算，以提供供比较的范式；或者 改变 *nf-* 双模拟，也就是改变比较的概念。例如，Biernacki 等人 [2019a] 针对 Ω-项（他们称之为 延迟发散项）提出了 enf 双模拟的一种替代定义。然而，通过类似地调整 enf 双模拟，似乎无法捕捉 let 的交换性，因为这种交换性在 Plotkin 的 CbV 演算中表现不佳。乍看之下，改变底层演算并不可行，因为这通常会改变上下文等价的概念。

值替换演算。 本文的出发点是 值替换演算(简称 VSC)，这是一种按值调用 λ演算，由 Accattoli 和 Paolini [2012] 提出，并与线性逻辑证明网相关 [Accattoli 2015]。VSC 通过扩展重写规则，解决了 Plotkin 演算处理开放项时的问题，同时——至关重要的是——保留了相同的上下文等价概念 [Accattoli 和 Guerrieri 2022]。此外，该演算源自证明网，因此易于处理 let 的交换；只需通过一种 结构等价概念即可模块化地加入，而这种结构等价在设计上与重写规则相容。因此，VSC 是设计按值调用范式双模拟等价的自然候选方案，可以通过改变底层演算，弥补 Lassen 方法在某些方面的不完备性。

网双模拟。 借助 VSC，我们提出一种按值调用范式双模拟等价，它验证 let 的交换，并将 Ω-项视为等同。由此得到的 网双模拟 $\simeq_{net}$ 以及对其 相容性 的证明（即其在上下文闭包下的稳定性）——这是双模拟等价中最具挑战性的待证性质——构成了本文的主要贡献。相容性蕴含其相对于上下文等价的可靠性，而证明过程则通过调整 Lassen为 Howe 方法的范式双模拟等价所提出的变体 [1999] 来完成。与范式双模拟等价通常的情形一样，我们的方法是可靠的，但并不完备。具体而言——与 enf 双模拟一样——它是成本敏感的。

网双模拟的构建依赖于对按值调用和 VSC 的精细分析。我们首先将 Sangiorgi 的范式双模拟等价直接移植到 VSC，不包含 *Lassen* 的额外子句，因为目前尚不清楚如何将该子句移植到 VSC。接着，我们通过在 VSC 的（证明网）结构等价下比较范式来改进这一移植——该结构等价包括 *let* 交换，因此得名网双模拟。实际上，我们更进一步，引入参数化的范式双模拟等价，其中结构等价的部分规则可以随意启用或禁用——因为其中一些规则（如 let 交换）在扩展按值调用以支持非交换效应时不再成立——由此定义了一个按值调用正常形式双模拟的族，并通过单个抽象证明证明它们全部具有兼容性。

然而，我们的结果与其说是故事的终点，不如说是一个新的起点：事实上，网双模拟等价并非 Lassen 的 $\simeq_{enf}$ 的一种细化。实际上，两者不可比较，因为网双模拟等价在其他一些方面仍不完备，而这些方面却能由 Lassen 的方法验证。

Moggi 定律。众所周知，Plotkin 的按值调用 λ演算存在缺陷，而且问题不只是开放项。Plotkin 本人证明了其续延传递翻译的不完备性 [Plotkin 1975]。为了同时解决这一问题并对带效应的扩展进行建模，Moggi 扩展了 Plotkin 演算，加入了与单子定律相对应的等式 [Moggi 1988, 1989], ，这些定律对于上下文等价是可靠的。Lassen 的 enf 双模拟验证了这些定律，表明可以通过范式双模拟这一概念来刻画这些定律，而不必改变底层演算。特别是，正是 Lassen 额外的子句使 enf 能够刻画 Moggi 定律。

然而，Moggi 定律并非 VSC 的规则，也无法由网双模拟捕获。此外，目前尚不清楚如何扩展 net 双模拟以满足 Moggi 定律。再一次，有两种选择：扩展底层演算（VSC），或扩展 nf-双模拟（$\simeq_{net}$）。然而，这两种选择都会破坏证明网双模拟具有相容性所必需的性质。另一个令人失望的事实是，将 η_v 加入网双模拟需要用到 Moggi 定律，因此如何将 η_v 加入 net 双模拟也同样不清楚。

僵局及其后。 总而言之，似乎无法既拥有蛋糕（一个满足 let 交换和 Ω-项，或满足 Moggi 定律和 η_v的 nf-双模拟框架），又能享用它（扩展该框架以捕获缺失的另一半）；至少，目前还远未明显知道该如何做到这一点。对这种僵局 的探讨是本文的另一项主要贡献。我们研究了另外两种程序等价关系：一种朴素双模拟 $\simeq_{nai}$，以及由模型诱导的程序等价关系 $\eqsim_{type}$；它们分别可视为 enf 与网双模拟的交和并。

朴素双模拟 $\simeq_{nai}$ =没有蛋糕，也无从享用。我们考虑将 Sangiorgi 的名字调用范式双模拟直接移植到 Plotkin 的按值调用中，从而得到朴素范式双模拟。它们严格弱于 enf 和 net 双模拟，因为它们无法识别 let 交换、 Ω- 项、Moggi 定律，也无法识别 η_v。这项实验很有启发性，因为我们表明，尽管朴素双模拟较弱，却足以轻松证明不动点组合子的双模拟等价——Lassen 的额外子句在此并不起作用。朴素双模拟也让我们得以循序渐进地介绍用于网双模拟的证明技术。

类型等价$\eqsim_{type}$ = 兼得其利，普遍成立。在谱系的另一端，我们考察由 Ehrhard 的按值调用关系模型的等式理论所给出的程序等价[Ehrhard 2012]。我们称之为类型等价，因为该模型以多重类型系统（一种交类型的变体）呈现。Accattoli 和 Guerrieri 曾结合 VSC 对这类模型作过深入研究 [2018, 2022]。其等式理论既无法通过范式双模拟来呈现，也没有其他刻画方式；不过，仍可借助多重类型系统对其进行研究。事实证明，与范式双模拟等价类似，类型等价具有相容性且是可靠的，但对于上下文等价而言并不完备，因为它对成本敏感。它并非一种易于使用的等价关系，因为它基于对一个项所有类型赋值的全称量化，但它能带来有趣的见解。

我们的结果表明，enf 和网双模拟均包含于类型等价之中。因此，这两种双模拟等价可以合并。由于二者都是可靠的，在成本不敏感的情形下，它们显然可以合并，因为二者都包含于上下文等价之中。我们的结果表明，在成本敏感的程序等价中，它们也可以合并，这说明或许可以构造一种将二者合并的 nf-双模拟。如何构造它，尤其是证明其具有兼容性，留待未来工作完成。

下表总结了这一情况。

	$\simeq_{nai}$	$\simeq_{enf}$	$\simeq_{net}$	$\simeq_{type}$	$\simeq_C^v$
Moggi 的左单位律 $\mathrm{I}t \equiv_{lid} t$?	✗	✓	✗	✓	✓
Ω-项与 let 交换的识别?	✗	✗	✓	✓	✓
定义中的全称量化?	✗	✗	✗	✓	✓
按名调用重复 $(\lambda x.yxx)t \equiv_{dup} ytt$?	✗	✗	✗	✗	✓

相关工作。除了前文已引用的论文，Lassen [1999, 2005b、 2006], Lassen 和 Levy [2007, 2008], Biernacki 与 Lenglet[2012] 以及 Jagadeesan 等人 [2009], 研究了 λ-演算的变体和扩展中的 nf-双模拟; Levy 和 Staton[2014],、Jaber 和 Murawski [2021], 以及 Jaber 和 Sangiorgi [2022]则在博弈语义的背景下研究了它。 [Biernacki 等人 2019年; Støvring 和 Lassen 2009] 指出，状态的存在使 enf 类双模拟具有完全抽象性（因为它会使上下文等价具有成本敏感性，并使 let 的交换无效）。Biernacki 等人 [2019b], 研究了 Lassen 的 enf 双模拟相对于 η-等价性的情况; Dal Lago 和 Gavazzo[2019],研究了带效应的扩展; Durier 等人 [2022]则研究了 π-演算。

Kesner 及其合作者也使用按值调用多重类型 [Arrial 等人 2023年; Bucciarelli 等人 2020年; Kesner 和 Peyrot 2022; Kesner 和 Viso 2022] 以及Díaz-Caro 等人 [2013]。

Kerinec 等人提出了一种按值调用 Böhm 树的概念，由此导出一种类似于 nf-双模拟的程序等价性 Kerinec 等人 [2020]。他们的等价性介于我们朴素的双模拟与网双模拟之间。他们推测，这种等价性刻画了类型等价。我们的结果驳斥了这一猜想：就第5节的基准测试而言，他们的等价性将所有 Ω-项等同起来，但不将经变换的lets 等同起来——而网双模拟认可后者；它也不认可 Moggi 的左单位律 $\equiv_{lid}$。

最近，Koutavas 等人 [2023] 提出了一种完备的按值调用双模拟，并将其表述为一种*nf*-双模拟。然而，它与 Sangiorgi 和 Lassen 的双模拟不同，因为 Koutavas 等人的双模拟考虑的不只是范式的结构；正如前文所指出的，这对于验证按名称调用重复并保证按值调用下的完备性是必要的。事实上，他们的定义主要基于博弈语义工具和环境双模拟。此外，它针对的是按值调用 PCF 这一不同的设定；该语言带有类型，而这一结果能否平滑地推广到无类型的纯按值调用 λ演算，尚不明确。

证明。 未展示的证明见本次投稿在 HotCRP 上附带的补充材料。若论文被接收，我们将把包含所有证明的版本发布到 arXiv.org。

2 预备知识

上下文。 本文始终会用到（许多种）上下文，即 恰好有一个空位的项，记作 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$。将项 t 填入上下文 C，记作 $C\mathrm{h}t\mathrm{i}$，可能会捕获 t 的自由变量。例如 $(\lambda x.\mathrm{h}\cdot\mathrm{i})\mathrm{h}x\mathrm{i} = \lambda x.x$，而 $(\lambda x.y)\{y{\leftarrow}x\} = \lambda z.x$。

预序。我们主要讨论模拟，而非双模拟，因为只需考虑对称概念，等价关系的结果便总能随之得到。给定某个 X 的预序／相似关系 $\lesssim_X$，我们用 $\simeq_X$ 表示相应的等价关系／双模拟等价。

（不）等式理论与相容性。 良好的程序预序／等价关系是（不）等式理论，也就是说，它们包含演算的归约，并且具有相容性，其定义如下：若$t \lesssim t'$，则对所有上下文 C，都有 $C\mathrm{h}t\mathrm{i} \lesssim C\mathrm{h}t'\mathrm{i}$；换言之，它们在上下文闭包下保持稳定。归约通常显然包含在相似关系中，而相容性通常需要经过非平凡的证明。

上下文等价。 程序等价的标准参照是上下文等价，可抽象地定义如下。

定义 2.1（上下文预序与等价关系）。 给定一门项语言 $\mathcal{T}$、与之关联的上下文概念 C 以及表示求值终止的谓词 $\Downarrow_e$，我们定义与之关联的上下文预序 $\lesssim^e_C$ 和上下文等价 $\simeq^e_C$ 如下：

- $t \lesssim^e_C t'$ 如果 $C\langle t\rangle \Downarrow_e$ 蕴含 $C\langle t'\rangle \Downarrow_e$ 对所有满足条件的上下文 C 而言，只要 $C\langle t\rangle$ 和 $C\langle t'\rangle$ 都是闭项。
- $t \simeq^e_C t'$ 是由 $\lesssim_C$ 所诱导的等价关系，也就是说，$t \simeq^e_C t' \iff t \lesssim^e_C t'$ 且 $t' \lesssim^e_C t$。

关系 R 对上下文预序 $\lesssim^e_C$ 是可靠的，当 $\mathrm{R} \subseteq \lesssim^e_C$。可靠性由相容性和对 的充分性 推出，其定义如下：若 $t \mathrm{R}\ t'$，则 $t \Downarrow_e$ 蕴含 $t' \Downarrow_e$。

命题 2.2。 设 $\lesssim$ 是相容且充分的预序。那么 $\lesssim \subseteq \lesssim^e_C$。

证明。假设 $u \lesssim u'$。令 C 为 u 和 u' 的任意封闭上下文。由相容性，$C\langle u\rangle \lesssim C\langle u'\rangle$。由充分性，$C\langle u\rangle \Downarrow_e$ 蕴含 $C\langle u'\rangle \Downarrow_e$，也就是说，$u \lesssim^e_C u'$。□

我们将看到，正规形式模拟的定义方式保证了它们具有充分性，因此可靠性可直接由相容性推出。请注意，缺乏相容性的可靠性毫无用处：关系 $\mathrm{R} := \{(xy,\ xy)\}$ 是可靠的，但不具相容性。

菱形性质。 一种将发挥作用的重写概念是菱形性质，它是归约 $\to$ 的合流性的如下单步强化：若 $t \to u_1$、$t \to u_2$，且 $u_1 \neq u_2$，则存在 s 使得 $u_1 \to s$ 且 $u_2 \to s$。一些众所周知的事实：菱形性质蕴含合流性，反之则不成立；若 $\to$ 具有菱形性质，且存在从 t 出发的终止归约，那么从 t 出发就不存在分歧归约；所有归约到范式的路径（若存在）长度都相同。粗略地说，菱形性质是确定性的一种宽松形式，在这种形式下，非确定性的选择不会影响结果，也不会影响导向结果的求值长度。

Ω-项、可解性与可检验性。 （按名调用） λ演算理论的基石之一，是研究我们在此称为 Ω-项的对象，即在上下文中等价于 Ω的项；后者是典型的循环项。这一概念已在 头（按名调用）上下文等价中得到广泛研究，其中 Ω-项更广为人知的名称是 不可解项，也常被称为 无意义项。实际上，不可解项的定义（此处略去）有所不同，因为它既未提及 Ω，也未提及上下文等价，但与 Ω-项的定义等价。最早研究将所有不可解项视为等同的等式理论的是 Wadsworth [1971, 1976] 和 Barendregt[1971, 1977]，，这也是 Barendregt一书的核心主题 [1984]。正如 Wadsworth 所证明的那样，不可解项可刻画为相对于头归约会发散的项。

采用弱头（按名调用）上下文等价性，会得到一组不同的 Ω项。与头情形一样，这些 Ω项恰好构成一组自然的项，而这组项的定义无需提及Ω，即（按名调用）不可测项（定义见附录C （第34页）），最早由Ronchi Della Rocca和Paolini [2004] 研究（他们称之为非潜在有价值项），并给出了以下有用的刻画，类似于 Wadsworth 对不可解项的刻画。

定理 2.3（按名调用可检验性的发散刻画）。当且仅当 t 的弱头归约发散时，项 t 是按名调用不可测的（因此是弱按名调用 Ω项）。

例如，Ω是不可测的，但 $\lambda x.\Omega$ 和 $x\Omega$ 不是（而 $\lambda x.\Omega$ 是不可解的）。根据该刻画可知，每个不可测项都是不可解项，但反之则不成立。

在按值调用中，存在类似的不可解项和不可窥探项概念，但在 Plotkin 的 CbV发散刻画中，并没有类似的 λ-演算。Accattoli 和Guerrieri [2022] 在 VSC 中对它们进行了深入研究；在那里，它们则具有发散刻画。令人惊讶的是，任何能够识别按值调用不可解项的等式理论都必然是不一致的。

按值调用中恰当的无意义项概念实际上由按值调用不可窥探项给出。在附录C （第34页）中，可以找到按值调用不可窥探项的技术定义，以及证明它们与按值调用 Ω-项一致的证明（该证明依赖于第9节引入的 VSC）。

本文不考虑不可解项，因为我们只考虑弱归约。因此，CbN/CbV Ω项始终相对于弱 CbN/CbV 上下文等价，并且与 CbN/CbV 按值调用不可窥探项一致。

3 范式双模拟背景

范式双模拟是一种程序等价关系。它们不从外部比较项，即不根据项在上下文中的行为来比较，而是通过考察项（无穷）范式的结构来从内部进行比较。下面给出最简单的示例。

令 $\to_{wh}$ 为弱头归约，也称为按名调用求值；它是一种确定性归约，定义为$(\lambda x.t)\,us_1 \dots s_k \to_{wh} t\{x \leftarrow u\}s_1 \dots s_k$其中 $k \geq 0$。范式模拟通常基于 $\to_{wh}$的大步表示：记作 $t \Downarrow_{wh} u$，如果 $\to_{wh}$对 t的按名调用求值在 u处终止；若 $t \not\Downarrow_{wh}$ 则表示其他情况。以下模拟概念最早由 Sangiorgi [1994]提出。我们的表述略有不同，但等价。

定义 3.1（按名称调用范式模拟，[Sangiorgi 1994]）。关系 $\mathcal{R}$ 是按名调用范式模拟，如果 $\mathcal{R} \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle_{cbn}$，其中 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{cbn}t'$ 在以下条件成立时成立 t，t' 满足以下某一条款：

（cbn 1）$t \not\Downarrow_{wh}$ 即没有 $\to_{wh}$-范式。（cbn 2）$t \Downarrow_{wh} x$ 且 $t' \Downarrow_{wh} x$（cbn 3）$t \Downarrow_{wh} \lambda x.t_1$ 且 $t' \Downarrow_{wh} \lambda x.t_1'$ 其中 $t_1 \mathcal{R}\ t_1'$（cbn 4） $t \Downarrow_{wh} n = n_1 u$ 且 $t' \Downarrow_{wh} n' = n_1' u'$ 其中 $n_1 \mathcal{R}\ n_1'$ 且 $u \mathcal{R}\ u'$

按名称调用范式相似性 $\precsim_{cbn}$ 是最大的按名称调用范式模拟，也就是说，它是所有范式模拟的并集。我们将范式 简称为nf。

范式双模拟和双模拟等价是模拟和相似性的对称变体，其定义符合预期。证明 $\precsim_{cbn}$ 可靠性的一种简单方法是，通过 Lassen [1999], 提出的 Howe 方法变体来证明相容性；我们将在第 7 节回顾这一技巧。

部分性与发散。Nf-模拟依赖于一种部分求值概念（相对于完全的 β 归约），例如弱头归约 $\to_{wh}$。关键在于，部分归约会使某些子项保持未求值状态（对于 $\to_{wh}$，即参数和抽象体）。由此得到的模拟通过以下方式比较 t 和 u 的 $\to_{wh}$ 范式 $\mathrm{nf}_{wh}(t)$ 和 $\mathrm{nf}_{wh}(u)$：

- 检查项在部分求值部分是否具有相同的结构；并且
- 要求 $\mathrm{nf}_{wh}(t)$ 和 $\mathrm{nf}_{wh}(u)$ 中处于相同位置的未求值子项两两 nf-相似。

采用部分求值这一概念至关重要，因为它能够对发散进行细致区分；若只考虑完整范式，这些差异就会被掩盖。事实上，按名称调用 nf-相似性能够区分以下几种发散形式：

(1) 像 Ω 这样循环；(2) 只有在接收到参数后才循环，如 $\lambda x.\Omega$；(3) 拥有循环参数，如 $x\Omega$；(4) 第 2 种和第 3 种情况的有限次迭代，以及它们的组合；(5) 第 2 种或第 3 种情况的无限次迭代，它们实际上从不循环，如 Ω，因为它们会持续产生无限多个头变量和/或抽象。确实存在这样的项 t，其 $\to_{wh}$正规范式例如是 $\lambda x.u$、xu 或 $x\lambda y.u$，并且 u 具有相同的

性质。因此，它们会产生无限正规形，例如 $\lambda x.\lambda x.\lambda x.\ldots$、$x\,(x\,(x\ldots$，或 $x\,(\lambda y.x\,(\lambda y.\ldots$。

开放项。 Nf-模拟与大多数其他程序等价概念不同，因为它们必须处理开放项：即使待比较的项是闭项，反复进行比较所依据的子项也可能是开放项。

更易使用。 与应用双模拟等其他等价概念相比，nf-双模拟等价通常更容易建立，因为它免去了对参数的量化。一个典型的例子是证明 Curry 和图灵不动点组合子的等价性 Y 和 Θ；正如 Lassen 在其第一篇探讨伯姆树等价与头部正规形双模拟的文章中所阐释的那样，借助按名正规形双模拟，这一证明尤其简单 [Lassen 1999], 提出了 Sangiorgi 方法的一种变体。我们可以轻松地将他关于头部正规形双模拟的论证改用于弱头部正规形双模拟。令$Y = \lambda x.\Xi\Xi$，其中 $\Xi = \lambda z.x\,(zz)$且 $\Theta = (\lambda z.\lambda x.x(zzx))(\lambda z.\lambda x.x(zzx))$。容易验证，以下关系 $\mathcal{R}$ 是一个按名调用范式（双）模拟，关联了 Y和 Θ。

$$\mathcal{R} := \{(Y,\Theta), (\Xi\Xi, x(\Theta x)), (x(\Xi\Xi), x(\Theta x)), (\Xi\Xi, \Theta x) \mid x \text{ a variable}\}$$

等式基准。我们称一种程序等价概念 $\simeq_X$ 验证等价关系 $\equiv_Y$，如果 $t \equiv_Y u$ 蕴含 $t \simeq_X u$。按名调用中的程序等价（弱/头/强）大致只会在两个方面有所不同：

(1) η-等价：它们所验证的 η 等价关系的范围；(2) Ω-项：它们对（各种变体的） Ω-项所作识别的范围。

Sangiorgi 的按名正规形双模拟等价无法验证 η-等价，因为他的双模拟等价是刚性的，无法将不同的范式（例如 x 和 $\lambda y.xy$）等同起来。由于弱按名调用上下文等价验证了某些 η 等价关系， $\simeq_{cbn}$ 因此并非完全抽象的 [Sangiorgi 1994]。更一般地说，范式双模拟等价往往并非完全抽象。直观而言， t 和 t' 在外部可能等价，也就是说，它们在所有上下文中的行为都相同，但在内部却有所不同，因为它们具有不同的（可能是无限的）范式。

关于 Ω-项，由其发散刻画（定理2.3）可知，按名正规形双模拟等价将所有按名 Ω-项等价起来，也就是说，它验证了以下等价关系。

- Ω-等价性： $t \equiv_\Omega u$ 若 t和 u 是按名调用 Ω-项。

相反， $\simeq_{cbn}$ 并未将所有不可解项等价起来，因为它能区分 Ω 和 $\lambda x.\Omega$（即 $\Omega \precsim_{cbn} \lambda x.\Omega$ ，但 $\lambda x.\Omega \not\precsim_{cbn} \Omega$）。我们将看到，在按值调用中，作为参照的按值调用范式双模拟并未将所有按值调用 Ω- 项等价起来。

4 PLOTKIN 的按值调用与开放项

这里我们回顾 Plotkin 的 CbV λ-演算，并关注一些常被忽略的方面，因为它们与后续章节相关。

按值调用 λ-演算。 A 值 v是一个变量或一个抽象。在重写层面，我们只考虑弱求值，也就是在抽象之外进行求值。我们将其定义为三种变体：从左到右、从右到左，以及顺序未指定，接下来将分别讨论。

$$\begin{array}{rrcl} \text{项 } t,\ u,\ s & ::= & v \mid tu \\ \text{值 } v & ::= & x \mid \lambda x.t \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{(General) Contexts} & C & ::= & \langle\cdot\rangle \mid tC \mid Ct \mid \lambda x.C \\ \text{Weak Contexts} & W & ::= & \langle\cdot\rangle \mid tW \mid Wt \\ \text{Left Contexts} & L & ::= & \langle\cdot\rangle \mid vL \mid Lt \\ \text{Right Contexts} & R & ::= & \langle\cdot\rangle \mid tR \mid Rv \end{array}$$

定义 4.1（归约）。令根 β_v归约 $\mapsto_{\beta_v}$定义为 $(\lambda x.t)v \mapsto_{\beta_v} t\{x \leftarrow v\}$。那么$\beta_v$，弱归约、从左到右归约和从右到左归约，分别记作 $\rightarrow_{\beta_v}$、 $\rightarrow_w$、 $\rightarrow_l$ 和 $\rightarrow_r$，定义如下：若$t \mapsto_{\beta_v} u$ 则

$$C\langle t\rangle \rightarrow_{\beta_v} C\langle u\rangle \qquad W\langle t\rangle \rightarrow_w W\langle u\rangle \qquad L\langle t\rangle \rightarrow_l L\langle u\rangle \qquad R\langle t\rangle \rightarrow_r R\langle u\rangle$$

众所周知， $\rightarrow_l$和 $\rightarrow_r$是确定性的，且包含于 $\rightarrow_w$中； $\rightarrow_w$是非确定性的，但具有菱形性质，而$\rightarrow_{\beta_v}$ 是非确定性且合流的，但不具有菱形性质。

闭项。 如果项是闭项且求值是弱求值——这是研究函数式语言时的标准假设——那么按值调用求值具有一些非常好的性质，下一条命题概括了这些性质。

命题 4.2。 设 t 是一个闭项。

(1) t 是弱／左／右范式，当且仅当 t 是一个抽象。(2) 对于 t，左归约和右归约相对于弱求值是完备的；也就是说，如果 $t \rightarrow_w u$，那么存在 s和 r，使得 $t \rightarrow_l s$ 且 $t \rightarrow_r r$。

直观而言，在闭项上，左归约和右归约是将弱归约转化为确定性归约的两种等价方式。在按值调用中，上下文预序 $\lesssim_C^v$ 是根据求值到值来定义的，而这也等价于弱归约、左归约或右归约的终止。重要的是，对于 $\lesssim_C^v$，只考虑闭项的归约，因为 $\lesssim_C^v$ 的定义是基于将待比较的项闭合的上下文。

开放项、停滞红ex与三种策略的不等价性。 一旦考虑开放项，系统的良好性质便会失效。仅有弱归约的菱形性质以及左归约和右归约具有确定性这两项性质得以保留。然而，弱正规形现在具有复杂的形式，因为其中可能包含停滞红ex，例如 $(\lambda x.t)(yy)$；由于其参数是正规形而非值，这类表达式无法归约。

遗憾的是，停滞红ex破坏了左归约、右归约与弱归约之间的等价性：左正规形、右正规形和弱正规形是彼此不同的概念，因为相对于弱归约而言，左归约和右归约不再是完备的。例如，$t := xx\mathrm{(II)}$ 是左正规形，却不是弱/右正规形，因为 $t \rightarrow_w xx\mathrm{I}$ 是弱/右正规形。类似地，$\mathrm{II}(xx)$ 是右正规形，却不是左/弱正规形；而 $xx\mathrm{(II)}(xx)$ 是左/右正规形，却不是弱正规形。或许更令人担忧的是，停滞红ex使上下文等价的项之间出现了可疑的区别： Ω和 $\Omega^L := (\lambda x.\delta)(yz)\delta$在上下文上等价，但前者发散，而后者是正规形，这是由停滞红ex造成的。

5 按值程序等价的等式基准

在按名调用中，程序等价只有两个“等式基准”，也就是两个自由度，即 η-等价和 Ω-等价 $\equiv_\Omega$。在按值调用中，情况则更为丰富，存在多种可能成立或不成立的等价关系。下面列出其中最相关的几种。我们先讨论 η-等价和 Ω-等价的按值调用变体，然后介绍一些已知的 Plotkin 演算扩展中出现的等价关系。

对于所有这些等价关系，我们只给出定义它们的根公理，并假定这些公理在所有上下文下封闭。除按名调用擦除等价外，所有给出的等价关系都由按值调用上下文等价 $\simeq_C^v$验证。一些扩展按值调用演算中的等价关系，其含义可能看起来不太明晰。在第9节介绍显式替换后，它们就会更容易理解。

在按值调用中， η-等价性必须受到限制，否则会将非值变成值。乍看之下， η 的按值版本似乎是 $v \equiv_{\eta_v} \lambda x.vx$，如果 $x \notin \mathrm{fv}(v)$。但由于任何按值调用程序

等价性都能验证 β_v-归约，情形 $v = \lambda y.t$ 实际上已由 β_v-归约涵盖（因为$\lambda x.(\lambda y.t)x \to_{\beta_v} \lambda x.t\{y \leftarrow x\} =_\alpha \lambda y.t$），因此$\equiv_{\eta_v}$归结为变量情形。

- η_v 等价性： $y \equiv_{\eta_v} \lambda x.yx$ 对每个变量 y。

按值调用 Ω-项。 Ω-项只需考虑按值调用上下文等价，即可适配按值调用。这里需要验证的等价性如下：

- Ω按值调用等价： $t \equiv_{\Omega_v} u$ 若 t 且 u 是按值调用 Ω-项。

在 Plotkin 演算中，按值调用 Ω-项无法像按名调用那样得到发散刻画Ω-项（定理2.3）——但在 VSC 中可以。例如， Ω-项，如 $\Omega^L := (\lambda x.\delta)(yz)\delta$对 Plotkin 而言是正规的；若存在良好的刻画，它就应该发散。

等价关系 $\equiv_{\Omega_v}$ 在此处列出的等价关系中具有特殊作用，因为判断一个项是否为Ω-项是不可判定的，因此不能将该等价关系视为可通过重写规则检验的计算原理。因此，程序等价能够验证它就显得尤为重要。

Moggi。 现在我们转向 Plotkin 演算扩展中出现的等价关系。Moggi 的无类型计算 λ 演算中扩充 β_v-转换的等价关系如下，下面将它们改写为不含 let 表达式的形式：

- 左单位： $\mathrm{I}t \equiv_{lid} t$，其中 $\mathrm{I} = \lambda x.x$ 是恒等组合子；
- *let* 的结合律： $(\lambda x.t)((\lambda y.u)s) \equiv_{ass} (\lambda y.(\lambda x.t)u)s$ 当 $y \notin \mathrm{fv}(t)$；
- 应用的左分解： $tu \equiv_{lad} (\lambda x.xu)t$ 当 $x \notin \mathrm{fv}(u)$；
- 应用的右分解： $vt \equiv_{rad} (\lambda x.vx)t$ 当 $x \notin \mathrm{fv}(v)$。此外，这条规则还有一种扩展形式： $ut \equiv_{exrad} (\lambda x.ux)t$ 当 $x \notin \mathrm{fv}(u)$

其中，对我们的研究而言最有趣的是 $\equiv_{lid}$。在 Plotkin 的演算中，它仅对值成立，因为对值而言它是 β_v-转换的一个实例；而在 Moggi 的演算中，它对每个项都成立 t。

证明网。按值调用翻译 λ演算在Accattoli [2015], 的线性逻辑证明网中，将若干对项等同起来。正如我们将在第10节看到的，使用显式替换可以更好地表达这些诱导出的等价关系；不过，我们在此先行介绍。它们涵盖了 Moggi 的 $\equiv_{ass}$ 规则，以及证明网等价的其他表述，例如 σ由 Carraro 和 Guerrieri [2014]提出的洗牌演算的规则。此外，它们还包含以下等价关系。

- 左侧（应用-λ）应用： $(\lambda x.t)us \equiv @_l (\lambda x.ts)u$ 当 $x \notin \mathrm{fv}(s)$ 时；
- 右侧（应用-λ）应用： $t((\lambda y.u)s) \equiv @_r (\lambda y.tu)s$ 当 $y \notin \mathrm{fv}(t)$ 时；
- 交换律： $(\lambda y.(\lambda x.t)u)s \equiv_{com} (\lambda x.(\lambda y.t)s)u$ 当 $x \notin \mathrm{fv}(s)$ 且 $y \notin \mathrm{fv}(u)$。

前两条规则对应于应用与应用λ之间可能发生的交换——这将对应于应用与let在第10节中的交换。第二条规则也可以看作是对 Moggi 的 $\equiv_{ass}$ 将值 $\lambda x.t$ 替换为任意项 t的一种推广。交换律会交换相邻且互不相关的可归约表达式；引言中用lets 表述的等价性正是它。至少有两个原因使它成为一种特殊的等价性。

(1) 效应：在纯按值调用（CbV）设定中，交换律成立，但在带效应的按值调用扩展中，交换律往往不成立，因为许多效应依赖于顺序（例如内存单元上的写入顺序）。因此，人们或许希望能够在模块化的双模拟等价概念中添加或移除这种等价关系，而不是始终要求它成立。(2) 不可定向：由于交换律具有对称性，因此无法将其定向为重写规则。因此，任何使其成立的范式双模拟都必须能够比较经过某种项变形后的范式。

某些等价关系有时会以受限形式出现，其原因也与效应有关。对于非交换效应，必须固定一种确定性求值策略，通常是从左到右，这会限制等价关系的形式，要求某个子项为值 v（分别为 $\lambda x.t$），如 $\equiv_{rad}$（分别为 $\equiv_{ass}$）所示。类似地，对于证明网等价，从左到右求值会导出其受限版本 $\equiv_{@r}$，其中子项 t 必须为值。从右到左求值会放宽这些限制，但会带来其他对偶约束（例如要求 $\equiv_{lad}$ 中的 t 为值）；而采用未指定的顺序，则会导出 Moggi 定律的扩展版本以及不受限的证明网等价。

按名调用重复与按名调用擦除。我们要考察的最后两种等价关系是按名调用重复和按名调用擦除。我们实际上不知道如何用一条公理或一组公理来刻画独立于擦除的按名调用重复，不过我们会讨论一个特定情形，以说明这一思路。

- 按名调用重复：$(\lambda x.yxx)u \equiv_{dup} yuu$;
- 按名调用擦除：$(\lambda x.t)u \equiv_{era} t$ 其中 $x \notin$ 自由变量(t)。

在按值调用中，如果 u 是一个值，那么重复和擦除都包含在 β_v-转换中；否则则不然。对于任意项，在按值调用中擦除并不可靠，因为擦除一个子项可能会将发散转变为终止：例如，在按值调用中，$t := (\lambda x.z)(yy)$ 与 $u := z$在上下文上并不等价，因为在上下文 $C := (\lambda y.\mathrm{h}\cdot\mathrm{i})\delta$下，$C\langle t\rangle$会发散，而 $C\langle u\rangle$会终止。

相反，重复对任意项都是可靠的，其思想是：终止（或发散）一次，还是终止（或发散）两次，都不会影响终止（或发散）。然而，这一原则在某种程度上与按值调用的本质相悖。按值调用的基石是这样一种思想：应当先规约参数再进行代入，而按名称调用重复恰恰反其道而行之。直观而言，认可按名称调用重复的按值调用程序等价是定性的或成本不敏感的，因为它只观察终止性；而拒绝该原则的等价关系则在某种意义上是成本敏感的，因为它会区分以不同效率实现相同行为特征的方式。

总结。在讨论过的所有等价关系中，与我们的研究最相关的是Ω等价 $\equiv_{\Omega_v}$ 和左单位 $\equiv_{lid}$。交换律 $\equiv_{com}$ 也将为第*11*节的模块化镜像方法提供灵感。按值调用上下文等价认可按名称调用重复，而本文研究的程序等价无一认可这一原则。这一事实表明，它们可能是可靠的，但相对于上下文等价而言并不完备。

6 朴素按值调用互模拟相似性

如果采用 Sangiorgi 的按名称调用范式相似性 $\precsim_{cbn}$ (定义 3.1)，并将弱头归约简单替换为某一种弱按值调用归约（弱归约、左归约或右归约），那么便可得到按值调用范式相似性的概念。

我们定义由弱归约所诱导的相似性。左归约或右归约会诱导出不同的相似性，但它们各自的优缺点相同，具体将在下文讨论。令 $\Downarrow_w$ 和 $\not\Downarrow_w$ 分别表示相对于弱按值调用归约 $\to_w$的大步终止和发散。

定义 6.1（按值调用的朴素范式互模拟）。关系 $\mathcal{R}$ 是一个朴素（按值调用）范式模拟，当且仅当$\mathcal{R} \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle_{nai}$，其中 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{nai}t'$ 在 t、t' 满足以下某一条件时成立：

(nai 1)			$t \not\Downarrow_w$	*i.e. has no* $\to_w$ *-normal form.*
(nai 2)	$t \Downarrow_w x$	*and*	$t' \Downarrow_w x$	
(nai 3)	$t \Downarrow_w \lambda x.t_1$	*and*	$t' \Downarrow_w \lambda x.t'_1$	*with* $t_1\ \mathcal{R}\ t'_1$
(nai 4)	$t \Downarrow_w n = n_1 n_2$	*and*	$t' \Downarrow_w n' = n'_1 n'_2$	*with* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$ *and* $n_2\ \mathcal{R}\ n'_2$

朴素范式相似性 $\precsim_{nai}$ 是最大的朴素范式模拟。

朴素（双）相似性看起来定义得十分自然，然而它并不能验证上一节中的任何 等价关系。让我们讨论 $\equiv_{\Omega_v}$ 和 $\equiv_{lid}$。

(1) Ω-等价性： $\equiv_{\Omega_v}$未被 $\precsim_{nai}$验证，而且 Ω-项对于 $\precsim_{nai}$而言并非最小；这与按名调用 Ω-项对于 Sangiorgi 的相似性 $\precsim_{cbn}$而言是最小的事实形成对比。例如， Ω 是$\precsim_{nai}$-最小的，但 Ω^L 是一个 Ω-项，并且有 $\Omega \precsim_{nai} \Omega^L$，因为 $\Omega \not\Downarrow_w$；但没有 $\Omega^L \precsim_{nai} \Omega$，因为 Ω^L 是 $\to_w$-正规项。(2) 左单位：等价性 $\equiv_{lid}$ 未被 $\precsim_{nai}$验证。在 Plotkin 演算中，$\mathrm{I}(xt)$不会归约为 xt，因为 xt 不是值——更一般地说，对于所有不是值的正规开放项，都会出现这种情况。因此，$\mathrm{I}(xt)$和 xt 是 $\precsim_{nai}$-不可比的。

β_v-转换。根据 $\precsim_{nai}$的定义，可以立即得出，朴素双模拟包含$\mapsto_{\beta_v}$根规则；也就是说，若$t \mapsto_{\beta_v} u$，则 $t \simeq_{nai} u$，这仅仅是因为 t和 u具有相同的左正规形。由于 $\simeq_{nai}$ 是一个相容等价关系，因此 $\simeq_{nai}$ 包含整个 β_v-转换$=_{\beta_v}$。

命题 6.2（β_v-转换由朴素双模拟验证）。如果$t =_{\beta_v} u$那么 $t \simeq_{nai} u$。

朴素相似性与不动点。 尽管这种方法很朴素，我们仍可证明，Curry 和图灵不动点组合子的常见按值调用变体 Y_v 和 Θ_v 是朴素相似的，下面就来说明这一点。

Curry's fix-point	Turing's fix-point
$Y_v := \lambda x.\Xi_v\Xi_v$, where $\Xi_v = \lambda z.x\lambda y.zzy$	$\Theta_v := (\lambda z.\lambda x.x\lambda y.zzxy)(\lambda z.\lambda x.x\lambda y.zzxy)$

我们来构造一个朴素（双）模拟关系 R，使 Y_v 和 Θ_v相关。关系 R 必须包含这一对（Y_v， Θ_v）。两个项 $\to_w$都会按值求值为一个抽象（$\Theta_v \to \lambda x.x\lambda y.\Theta_v xy$）。因此，它们的弱范式（抽象）$\lambda x.\Xi_v\Xi_v$和 $\lambda x.x\lambda y.\Theta_v xy$必须满足关于 $\precsim_{nai}$的第三个条件，也就是说，它们在抽象下的体（$\Xi_v\Xi_v$, $x\lambda y.\Theta_v xy$）必须属于 R。由于 $\Xi_v\Xi_v \to_w x\lambda y.\Xi_v\Xi_v y$，R 必须满足第四个条件的要求，即 $x\,\mathrm{R}\,x$以及 $\lambda y.\Xi_v\Xi_v y\,\mathrm{R}\,\lambda y.\Theta_v xy$。因此，需要将 $x\,\mathrm{R}\,x$ 加入模拟关系中（对于第一步打开抽象时所有可能的变量选择），接着继续把（$\lambda y.\Xi_v\Xi_v y$， $\lambda y.\Theta_v xy$）加入 R，再加入满足 $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{hRi}_{nai}$所需的任意项对。重复这一过程后，我们最终会回到 $x\lambda y.\Xi_v\Xi_v y\,\mathrm{R}\,x\lambda y.\Theta_v xy$，它已经属于所构造的关系 R，这意味着此时 R 满足 $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{hRi}_{nai}$，也就是说，R 是一个朴素模拟。类似地，对称关系 sym(R) 也满足 $sym(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{h}sym(\mathrm{R})\mathrm{i}_{nai}$，因此 R 实际上是一个朴素双模拟。

证明下一个命题的完整关系如下：

$$\mathcal{R} := \{(x,x) \mid x \text{ a variable}\} \cup \{(Y_v,\Theta_v),(\lambda x.\Xi_v\Xi_v, \lambda x.x\lambda y.\Theta_v xy),\} \cup$$
$$\{(\Xi_v\Xi_v, x\lambda y.\Theta_v xy),\ (x\lambda y.\Xi_v\Xi_v y, x\lambda y.\Theta_v xy),\ (\lambda y.\Xi_v\Xi_v y, \lambda y.\Theta_v xy) \mid x \text{ a variable}\} \cup$$
$$\{(\Xi_v\Xi_v y, \Theta_v xy), ((x\lambda y'.\Xi_v\Xi_v y')y, (x\lambda y'.\Theta_v xy')y) \mid x \text{ and } y \text{ variables}\}$$

命题 6.3。 $Y_v \simeq_{nai} \Theta_v$，也就是说，*Curry* 和图灵的不动点是朴素双模拟等价的。

7 朴素双模拟的相容性与 Lassen 方法

本节将证明上一节引入的朴素双模拟的相容性。本文旨在简要介绍 Lassen 对 [1999] Howe 方法的改进版本 [Howe1996； Pitts 2012] 提出了证明相似关系相容性的方法，并且我们将暂缓讨论证明我们真正关注的相似性所需处理的一些技术细节。

我们证明弱朴素相似关系的相容性，但这一证明技术很容易适用于左朴素相似性和右朴素相似性。

从小步到大步。 范式相似关系关注范式，而 Howe 方法中的关键证明通过对求值的大步表述进行归纳来展开，其中大步表示将一个终止项直接与其范式关联起来，隐藏中间步骤。因此，我们需要将小步归约 $t \to_w^k n$（其中 n 是 $\to_w$-范式）重新表述为大步形式 $t \Downarrow_w n$。

在技术性推导中，我们需要保留关于小步数量的信息 k，也就是说，我们应当写作 $t \Downarrow_w^k n$。这种定量信息对于证明其与小步求值的等价性，以及证明该方法中的关键结论，都是必需的。

定义 7.1（大步弱求值 $\Downarrow_w$）。大步弱求值谓词 $t \Downarrow_w^k n$，读作 t 在 k 步内弱收敛到范式 n，定义如下。

$$\frac{}{v \Downarrow_w^0 v}\ (\Downarrow\text{-}Ax) \qquad \frac{t \Downarrow_w^k \lambda x.s \quad u \Downarrow_w^h v \quad s\{x \leftarrow v\} \Downarrow_w^i n}{tu \Downarrow_w^{k+h+i+1} n}\ (\Downarrow\text{-}@\beta_v) \qquad \frac{t \Downarrow_w^k n \quad u \Downarrow_w^h n'}{tu \Downarrow_w^{k+h} n_1 = nn'}\ (\Downarrow\text{-}@NF)$$

记号： $t \Downarrow_w n$ 表示存在一个 k 使得 $t \Downarrow_w^k n$。

命题 7.2（弱求值中小步与大步的等价性）。 $t \Downarrow_w^k n$ 当且仅当$t \to_w^k n$ 且 n 正规。

我们强调一个重要之处。回顾一下， $\to_w$ 是非确定性的，但具有菱形性质。菱形性质在这里至关重要，因为只有这样才能在大步层面上理解步数 k；对于菱形归约，步数不依赖于通往范式的归约路径。

（*Howe–*）*Lassen* 方法。证明行为预序 $\precsim$ 具有相容性，往往无法直接做到，也就是说，不能仅通过对上下文闭包作归纳来证明。Howe 方法的思路是，不直接证明 $\precsim$具有相容性，而是引入一个导出预序 $\precsim^{\mathcal{H}}$，在其定义中强制要求相容闭包，然后证明 $\precsim$ 与 $\precsim^{\mathcal{H}}$ 一致。Howe提出了他的方法 [1996] 来处理应用式相似关系；Lassen 对其进行了改编 [1999]，用于范式相似关系。总体思路相同，但 Lassen 考虑的是另一种闭包运算 $\precsim^{\mathcal{L}}$。

Lassen 闭包。直接证明相似性 $\precsim$具有相容性之所以困难，是因为应用上下文闭包可能会引入一个 β-redex（将抽象应用于某个项时），而这又可能将替换作用于彼此 $\precsim$相关的项上。其思路是将预序 $\precsim^{\mathcal{L}}$定义为 $\precsim$的相容、可代入且自反闭包。

定义 7.3（Lassen 闭包）。关系 $\mathcal{R}$ 在项上的Lassen 闭包 $\mathcal{R}^{\mathcal{L}}$ 定义如下：

$$\frac{a\,\mathcal{R}\,b}{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,b}\ \mathcal{L}_{LIFT} \qquad \frac{}{x\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,x}\ \mathcal{L}_{VAR} \qquad \frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,b}{\lambda x.a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,\lambda x.b}\ \mathcal{L}_{\lambda}$$

$$\frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,b \quad p\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,q}{ap\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,bq}\ \mathcal{L}_{@} \qquad \frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,b \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,v'}{a\{x \leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,b\{x \leftarrow v'\}}\ \mathcal{L}_{SUB}$$

请注意规则（Lsub）：只有值可以被代入，因为这是按值调用的宗旨。

Lassen 闭包保持模拟。 $\precsim_{nai}$ 与 $\precsim_{nai}^{\mathcal{L}}$ 等价性的证明归结为证明闭包算子 $\cdot^{\mathcal{L}}$ 保持 $\precsim_{nai}$ 模拟，也就是说，若 R 是朴素模拟，则 $R^{\mathcal{L}}$ 也是朴素模拟——这通常被称为该方法的主引理。证明颇为微妙，依赖于两个关键的中间性质。第一个性质与求值层面有关；在大步层面表述时，它相当于关于元层替换的一种分解性质。事实上，它不过是小步求值替换性的另一种表述，只是改用大步层面来表述。

命题 7.4（小步替换性）。若 $t \to_w t'$ 则 $t\{x\leftarrow v\} \to_w t'\{x\leftarrow v\}$。

证明。通过对 $t \to_w t'$ 进行归纳（对上下文的归纳）。 □

引理 7.5（大步替换性）。若 $t\{x\leftarrow v\} \Downarrow_w^k n$，则存在 k' 和 n'，使得 $t \Downarrow_w^{k'} n'$ 且 $n'\{x\leftarrow v\} \Downarrow_w^{k-k'} n$。

证明。若 $t\{x\leftarrow v\} \Downarrow_w^k n$，则 $t \Downarrow_w n'$，因为如果 t 发散，那么根据 $\to_w$ 的替换性（引理 7.4），$t\{x\leftarrow v\}$ 也会发散。于是存在 k'，使得 $t \Downarrow_w^{k'} n'$。注意，根据替换性，我们有 $t\{x\leftarrow v\} \to_w^{k'} n'\{x\leftarrow v\}$，因此 $n'\{x\leftarrow v\} \Downarrow_w^{k-k'} n$，因为归约具有菱形性质，所以所有归约至正规形序列的长度都相同。□

第二个关键的中间性质是朴素模拟关于归约和替换的一致性。

命题 7.6（模拟、归约与替换的一致性）。设 R 是一个朴素模拟，$n \mathrm{hR}\, \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\, n'$，且 $v \mathrm{hR}\, \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\, v'$。

（1）范式：若 $n\{x\leftarrow v\}$ 是 $\to_w$-正规，则 $n'\{x\leftarrow v'\}$ 是 $\to_w$-正规，且 $n\{x\leftarrow v\}\langle \mathcal{R}\mathcal{L}\rangle_{nai}\, n'\{x\leftarrow v'\}$。（2）步骤：若 $n\{x\leftarrow v\} \to_w t$，则 $n'\{x\leftarrow v'\} \to_w u$，且 $t\mathcal{R}\mathcal{L}\ u$。

请注意，第二点的结论中是 $\mathrm{R}\,\mathcal{L}$，而不是 $\mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}$。这是因为一般来说，$t$ 和 u 并非正规。在下一个命题的证明中会说明，t 和 u 的范式实际上是 $\mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}$-相关的。

现在我们可以证明 Lassen 闭包的关键性质。

命题 7.7. 设 $\mathcal{R}$ 是一个朴素模拟。

(1) 技术性辅助陈述：若 $a\mathrm{R}^{\mathcal{L}}\, b$ 且 $a \Downarrow_w^k n$ 则 $b \Downarrow_w n'$ 且 $n \mathrm{hR}\, \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\, n'$。(2) Lassen 闭包保持朴素模拟：$\mathrm{R}^{\mathcal{L}}$ 是一个朴素模拟。

证明。

(1) 证明思路（完整证明见 HotCRP 上补充材料的附录 A）：对 (k, d) 进行归纳，其中 d 是 $a\mathrm{R}^{\mathcal{L}}\, b$ 的推导大小。我们对推导 $a\mathrm{R}^{\mathcal{L}}\, b$ 的最后一条规则进行分类讨论。情形 ($\mathrm{L}_{\mathrm{LIFT}}$)、($\mathrm{L}_{\mathrm{VAR}}$) 和 ($\mathrm{L}_{\lambda}$) 根据定义可立即得出。情形 (L@) 需要进行第二次分类讨论（针对该 $a \Downarrow_w^k n$ 推导的最后一条规则）。这些子情况都很常规，可能会用到 ($\mathrm{L}_{\mathrm{SUB}}$) 规则。情形 ($\mathrm{L}_{\mathrm{SUB}}$) 是证明的核心。首先对 $a = t\{x\leftarrow v\}$ 应用大步替换性（引理 7.5），然后根据所得的 $n'\{x\leftarrow v\}$ 是否为正规形式，应用朴素模拟相对于求值的相应相干性性质（命题 7.6 ）。

(2) 展开该陈述后，恰好得到第1点的陈述。 □

最后，我们可以利用保持性证明闭包是冗余的，由此可得朴素相似性的相容性与可靠性。

定理 7.8（$\precsim_{nai}$ 的相容性与可靠性）。

(1) Lassen 闭包的冗余性：$\precsim_{nai} = \precsim_{nai}{}^{\mathcal{L}}$.(2) 朴素相似性具有相容性，且包含于按值调用上下文预序 $\precsim_C^v$。

证明。

（1）根据 $\langle\cdot\rangle^{\mathcal{L}}$，$\precsim_{nai} \subseteq \precsim_{nai}\mathcal{L}$（根据规则 $\mathcal{L}_{\mathrm{LIFT}}$）。Lassen 闭包对朴素模拟的保持性（命题 7.7）以及 $\precsim_{nai}$ 是朴素模拟这一事实表明，$\precsim_{nai}{}^{\mathcal{L}}$ 是朴素模拟。根据定义，$\precsim_{nai}$ 是最大的朴素模拟，因此 $\precsim_{nai}\mathcal{L} \subseteq \precsim_{nai}$。（2）根据第1点可得相容性，因为根据定义，$\precsim_{nai}{}^{\mathcal{L}}$ 是相容的。根据命题 $\simeq_C^v$ 2.2，以及 $\precsim_{nai}$ 的充分性（这是显然的），可得包含关系。□

8 LASSEN 的急切范式模拟

文献中提到的按值调用正常形式模拟由 Lassen 提出 [Lassen 2005a]。Lassen 的模拟很有意思，因为它并非仅仅通过改变 Sangiorgi 的归约概念来定义。事实上，Lassen 利用了开放项中的停滞可归约表达式，并定义了一种能够解除停滞 这些表达式的模拟机制，我们将其称为停止与继续。

左正规形的文法。Lassen 的相似性是通过左归约 $\rightarrow_l$构建的。其出发点是这样一个观察：尽管左归约存在局限，它仍能通过左上下文以极其简单而优雅的方式描述其范式。

引理 8.1（唯一分解，[Lassen 2005a]）。任意（可能是开放的）项要么是一个值，要么存在唯一分解 $L\langle vv'\rangle$。特别地，左正规形可描述如下：

$$\textit{Left normal forms} \quad n, n' \quad ::= \quad v \mid L\langle xv\rangle$$

Lassen 随后利用左正规形的简单结构来定义急切正常形式模拟。关键是第四个条款，它实现了停止与继续机制。记号：令 $\Downarrow_l$和 $\not\Downarrow_l$ 分别表示相对于左侧按值调用归约 $\rightarrow_l$的大步终止和发散。

定义 8.2（Enf 模拟，[Lassen 2005a]）。关系 $\mathcal{R}$ 是一个急切正规范式（enf）模拟，如果$\mathcal{R} \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle_{enf}$，其中 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{enf} t'$ 成立，只要 t, t' 满足下列条件之一：

（enf 1）$t \not\Downarrow_l$（enf 2）$t \Downarrow_l x$ 且 $t' \Downarrow_l x$（enf 3）$t \Downarrow_l \lambda x.t_1$ 且 $t' \Downarrow_l \lambda x.t_1'$ 满足 $t_1 \mathcal{R} t_1'$（enf 4） $t \Downarrow_l L\langle xv\rangle$ 且 $t' \Downarrow_l L'\langle xv'\rangle$ 满足 $v \mathcal{R} v'$ 且 $L\langle z\rangle \mathcal{R} L'\langle z\rangle$其中 z 在 L 或 L'中不是自由变量

Enf 相似性记作 $\precsim_{enf}$，通过余归纳定义为最大的enf 模拟，也就是说，它是所有enf 模拟的并。若 t与 t' enf 相似，则称 $t \precsim_{enf} t'$。

停止与继续、双重任务与左单位。停止-继续子句（enf 4）巧妙地同时完成两项任务：自底向上地涵盖朴素相似性的子句（nai 4），并捕捉左单位等价性 $\equiv_{lid}$。

关于 (nai 4)，例如，可以考虑通过 enf 模拟将 $t := xyw$ 与其自身进行比较。子句 (enf 4) 将其简化为分别比较 zw和 y 与它们自身，因为 $t = L\langle xy\rangle$ 与 $L := \mathsf{h}\cdot\mathsf{i}w$。接着，它将前者简化为比较 z' 和 w与它们自身。相比之下，(nai 4)（或 Sangiorgi 的 (cbn 4)）采用自顶向下的方式，将 xyw拆分为 xy 和 w，然后再拆分 xy。

关于左单位等价性，可以考虑证明 $t := \mathsf{I}(xx)$ 和 $u := xx$是 enf 相似的。求值在 t处受阻，也就是说，它停止 了，因为 xx不是值。注意， t具有 $L\langle xv\rangle$的形态，其中$L = \mathsf{I}\langle\cdot\rangle$ 且 $v = x$。其思路是，与 t具有 $\precsim_{enf}$-相似关系的项 u 也必须受阻，或者至少以相似的方式分解。现在， u 并未受阻，因为不存在阻塞的可约表达式，但它仍具有 $L'\langle xv'\rangle$ 的形态，这是通过取 $L' = \mathsf{h}\cdot\mathsf{i}$ 和 $v' = x$得到的。于是，对 t和u 的比较可简化为比较两对： $L\langle z\rangle = \mathsf{I}z$ 与 $L'\langle z\rangle = z$，以及 $v = x$ 和 $v' = x$。第二对显然匹配，因为恒等关系是一种 enf 模拟。对于第一对，注意 $\mathsf{I}z$ 不再受阻，也就是说，它可以继续。而在下一轮比较（$\mathsf{I}z$与 z）中，我们必须先 $\rightarrow_l$ 对这些项求值，这样 $\mathsf{I}z \rightarrow_l z$，第一对也就显然匹配了。

总而言之，关联 $\mathsf{I}(xx)$ 和 xx 的 enf 模拟是以下模拟 R：

$$\mathcal{R} = \{(\mathsf{I}(xx), xx), (x, x), (\mathsf{I}z, z), (z, z)\}$$

这只是一个特例，但以下更一般的结果同样成立。

Pʀ命题 8.3（enf 双模拟验证左单位）。对于任意项 $t \simeq_{enf} t$ t.

左／右／弱的非等价变体。 将左归约替换为右归约，可得到类似引理 8.1 的唯一分解引理，只不过是针对右上下文而言；相应地，还可定义一种右 *Lassen* 相似性——记作 $\precsim_{renf}$。结果表明，$\precsim_{enf}$和$\precsim_{renf}$是不同且不可比较的相似关系。例如，Ω 和 $\Omega(xx)$ 是 enf 双模拟等价的（因为它们都 $\to_l$发散），但并非 renf 双模拟等价，因为 $\precsim_{renf}$ 在 $\Omega(xx)$ 处停下，而 $\to_r$是正规的。类似地，Ω 和 $xx\Omega$ 并非 enf 双模拟等价，但它们是 renf 双模拟等价的。

用弱归约替代左归约，则会因另一个原因而产生问题。由于$\to_w$具有非确定性，唯一分解引理（引理 8.1）对它不成立。因此，弱 enf 相似性的恰当定义并不明确，因为停止-继续子句可以通过不止一种方式推广。作为一种推广，弱 enf 相似性的恰当定义应当包含由 enf 相似性关联的项。然而，我们也不清楚（我们尝试过，但未能成功[1]）如何证明其中某些推广的相容性。

接下来的几段将讨论 enf 相似性所验证（或否定）的原则。

β_v-转换。 与朴素相似性一样，enf 相似性包含 β_v-转换，因此也包含左归约以及弱归约和右归约。

命题 命题 8.4（β_v 转换由 enf 双模拟等价验证）。如果$t =_{\beta_v} u$ 那么 $t \simeq_{enf} u$.

Curry 和图灵不动点组合子是 *enf* 双模拟等价的。证明 $Y_v \simeq_{nai} \Theta_v$不是 enf 双模拟的关系。尽管如此，很容易构造一个 enf 双模拟，将 Curry 和图灵的按值调用不动点组合子关联起来。这些组合子在朴素相似性下双模拟等价，这意味着停止-继续子句中的解除卡住状态方面与它们的等价性无关。

命题 8.5。 $Y_v \simeq_{enf} \Theta_v$，也就是说，*Curry* 和图灵的不动点是 *enf* 双模拟等价的.

Ω-等价性。enf 双模拟等价无法验证 Ω-等价性 $\equiv_{\Omega_v}$。例如，用于朴素相似性的同一个反例也适用于 enf，如下所示：$\Omega \precsim_{enf} \Omega^L$，但 $\Omega^L \not\precsim_{enf} \Omega$。事实上，$\simeq_{enf}$ 将一些被 $\simeq_{nai}$ 区分开的 Ω-项等同起来，反之亦然。例如，设$\delta_3 := \lambda x.xxx$。 Ω-项 $\Omega_3 := \delta_3\delta_3$会发散。我们有 $\Omega_3^L := (\lambda x.\delta_3)(yz)\delta_3$与 Ω^L是 enf 双模拟等价的，因为它们以相同的方式停止，然后都发散。另一方面，按照 $\precsim_{nai}$，它们彼此无关，因为将它们作为范式进行比较时，其结构并不相同。至于反过来的情形，考虑 $xx\Omega$ 和 Ω，它们在 $\simeq_{nai}$ 下等同，却被$\simeq_{enf}$区分开来，因为$xx\Omega$ 是左正规但弱发散的。

命题 8.6. *enf* 双模拟不验证 Ω-等价性 $\equiv_{\Omega_v}$。

enf 的问题在于 $\equiv_{\Omega_v}$涉及子句（enf 1），因为左发散项是按值调用Ω-项的真子集。为了解决这一问题，通常有两种选择：修改演算或修改 nf-双模拟。Biernacki 等人 [2019a] 选择修改 nf-双模拟，将（enf 1）扩展到所有 延迟发散项，这些项恰好对应于他们的（按值调用 + 状态）Ω-项。他们的方法没有解决 Ω-项无法被判定为等价的原因（即 Plotkin 的按值调用演算中的卡住的范式），而只是绕开了这个问题；当该原因影响到其他方面时，例如 let的交换（当两个 let之一被卡在停滞 redex 深处时，就会发生这种情况），他们的方法也无济于事。事实上，要解决这一原因并消除卡住的范式，就需要修改演算。在第 11节中，我们将介绍一种 nf-双模拟，它能够自然地验证 $\equiv_{\Omega_v}$ 以及 let的交换，因为它建立在 Plotkin 演算的一个扩展之上，而该扩展不存在卡住的范式。

[1]我们能够提出的、可能兼容的弱 enf 相似定义，无法像 enf 相似性那样关联尽可能多的项。

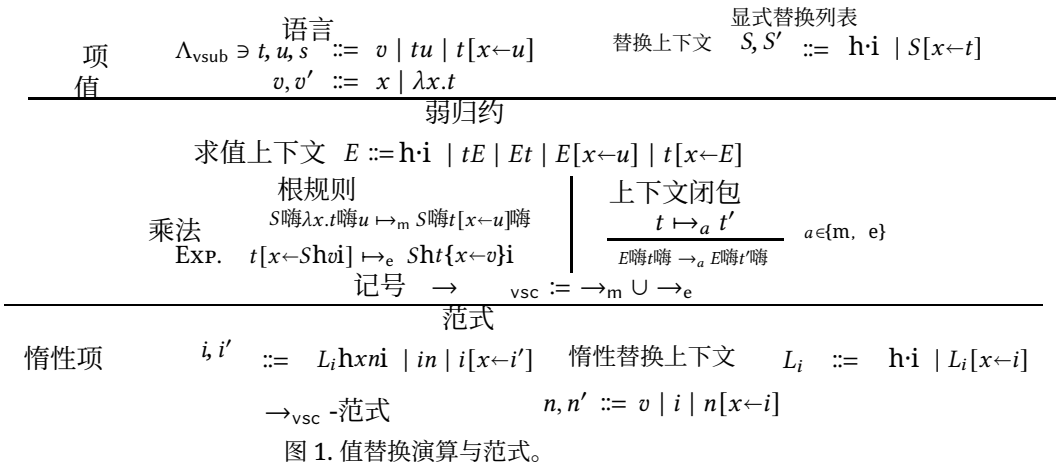


图 1. 值替换演算与范式。

进一步的等价关系。 下一个命题总结了 enf 的基准。

命题 8.7. *enf* 双模拟验证了 *Moggi* 的等价关系和证明网等价的从左到右限制，但它不验证 η_v，也不验证所有不受限制的证明网等价关系，亦不验证按名称调用重复。

enf 相似性不验证 η_v，因为 x 和 $\lambda y.xy$ 在 $\lesssim_{enf}$的定义中由不同子句处理。不过，可以对它进行调整，使其能够验证 η_v，参见 [Biernacki 等人 2019年；Lassen2005a；Støvring 和 Lassen 2007]。关于 Moggi 的等价关系，我们已经讨论过左单位。enf 相似性验证其余所有等价关系。请注意，在 [2005a] Lassen 声称 enf 验证 $\equiv_{exrad}$ （定义见第 5 节），但这实际上是错误的；它只验证 $\equiv_{rad}$ （事实上， $\equiv_{exrad}$并不对应于 Moggi 通常所说的右分解规则；它应由第 10 节中的证明网来解释）。验证的证明很简单，只需写出要验证的关系（恒等关系 $\cup$ 与该等价关系），并证明它确实是一个 enf 双模拟。

验证证明网等价的从左到右受限版本（$\equiv_{@l}$ 以及 $\equiv_{@r}$ 的一个受限版本），是本文一项简单的贡献。简单检查即可发现，enf 无法验证（未指定顺序的）证明网等价 $\equiv_{@r}$ 和 $\equiv_{com}$，也无法验证按名称调用重复。现在考虑 renf 双模拟，它是 enf 的从右到左变体。就证明网等价而言，它的行为有些对偶：它无法验证 $\equiv_{@l}$，而是验证从右到左的证明网等价（$\equiv_{@r}$ 以及 $\equiv_{@l}$ 的一个受限版本）。

9 值替换演算

直观而言，VSC 是一种扩展了 let 表达式的按值调用 λ-演算，这在按值调用 λ-演算中很常见，例如 Moggi 的演算 [1988； 1989]。不过，我们用更紧凑的显式替换（简称 ES）记号 $t[x\leftarrow u]$ 替换 let 表达式 let $x = u$ in t；该记号将 x 绑定在 t 中，并且其优先级高于抽象和应用（也就是说， $\lambda x.t[y\leftarrow u]$ 表示 $\lambda x.(t[y\leftarrow u])$，而 $ts[y\leftarrow u]$ 表示 $t(s[y\leftarrow u])$）。此外，与文献中的许多论文（例如 Levy 等人 [2003]；Sabry 和 Wadler [1997]）不同，我们的 let/ES 不规定 t 和 u 之间的求值顺序；在那些论文中， u 会先求值。

VSC 的归约规则略显特殊，因为它们使用上下文，既允许归约位于子项中的可归约表达式（这是标准做法），又用来定义可归约表达式本身（这不太常见）——这类规则称为远距规则。其背后的理念是，重写规则

旨在精确模仿线性逻辑证明网上的割消去，通过Girard的 [1987] 按值调用翻译$(A \Rightarrow B)^v = !(A^v \multimap B^v)$ 将直觉主义逻辑翻译为线性逻辑，参见Accattoli [2015]。

根重写规则。 在 VSC 中，有两条主要的重写规则，即乘法规则 $\to_{\mathsf{m}}$ 和指数规则 $\to_{\mathsf{e}}$（这一术语源于 VSC 与线性逻辑之间的联系），两者都以远距方式运作：即使在定义其根规则时（也就是在应用上下文闭包之前），也会使用上下文。它们的定义基于替换上下文 S，即由 ES 组成的列表。在图1中，假定根规则 $\mapsto_{\mathsf{m}}$ （分别是 $\mapsto_{\mathsf{e}}$）满足无捕获条件，因此 u（分别是 t）中的自由变量不会被替换上下文 S 捕获（可通过即时 α-重命名避免）。

示例：$(\lambda x.y)\,[y{\leftarrow}t]u \mapsto_{\mathsf{m}} y[x{\leftarrow}u][y{\leftarrow}t]$和$(\lambda z.xx)\,[x{\leftarrow}y[y{\leftarrow}t]] \mapsto_{\mathsf{e}} (\lambda z.yy)\,[y{\leftarrow}t]$。一个涉及即时 α-重命名的示例是 $(\lambda x.y)\,[y{\leftarrow}t]y \mapsto_{\mathsf{m}} z[x{\leftarrow}y][z{\leftarrow}t]$。

关键在于， β可归约表达式通过显式替换进行分解：其按值调用限制针对显式替换可约式，而非针对 β可归约表达式，因为只有值才能被代入。乘法规则 $\mapsto_{\mathsf{m}}$ 会在远距处触发一个 β可归约表达式，并且即使参数不是值，也会生成显式替换。按值调用的规范完全编码在指数规则中 $\to_{\mathsf{e}}$ （见图1）：只有当参数在一列显式替换下是一个值（即变量或抽象）时，该规则才能触发显式替换并执行替换。这意味着只有值才能被复制或擦除。

重写规则。我们将弱归约记作 $\to_{\mathsf{vsc}}$，定义为根规则在求值上下文下的闭包；这类上下文允许在除 lambda 抽象体之外的任何位置进行归约。在其他关于 VSC 的论文中， [Accattoli 等人 2021；Accattoli 和 Guerrieri 2016，2022；Accattoli 和 Paolini 2012],，还考虑了其他上下文闭包，并将其称为弱或开放上下文。示例：

$$t[x{\leftarrow}(\lambda y.u)[z{\leftarrow}s]r] \to_{\mathsf{m}} t[x{\leftarrow}u[y{\leftarrow}r][z{\leftarrow}s]] \qquad t(xx)[x{\leftarrow}y[z{\leftarrow}u]] \to_{\mathsf{e}} t(yy)[z{\leftarrow}u]$$
$$((xx)[x{\leftarrow}\lambda y.z]t)[w{\leftarrow}u] \to_{\mathsf{e}} ((\lambda y.z)(\lambda y.z)t)[w{\leftarrow}u] \qquad \lambda z.(xx)[x{\leftarrow}\lambda y.z] \not\to_{\mathsf{e}} \lambda z.(\lambda y.z)\lambda y.z$$

菱形性质。 归约具有非确定性，例如：

$$\delta(\delta \mathtt{I}) \;{}_{\mathsf{e}_\lambda}\!\leftarrow\; y[y{\leftarrow}\delta](\delta \mathtt{I}) \;\to_{\mathsf{m}}\; y[y{\leftarrow}\delta]((xx)[x{\leftarrow}\mathtt{I}]).$$

不过，它不只是合流，而是满足菱形性质。

命题 9.1（菱形性质， [Accattoli 和 Paolini 2012]）。 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 满足菱形性质。

现在我们来考察 VSC 中项的范式，它们可以通过惰性项得到一种相当复杂的归纳描述。

惰性项与范式。 按值调用（CbV）关注的是值；如果项是闭的，范式就是抽象。若要超越闭项的情形，则需要一种更精细、更一般的观点。范式（对于 $\to_{\mathsf{vsc}}$）与惰性项和惰性替换上下文的概念通过相互归纳给出，如图1所示。惰性替换上下文是由显式替换构成的列表，其中每个显式替换的内容都是惰性项，因此这些显式替换都无法触发 $\to_{\mathsf{e}}$-重约（因为惰性项恰好是形状不为 $S\langle v\rangle$ 的范式）。

示例： $\lambda x.y$作为抽象是一个正规范式，而 $y(\lambda x.x)$、 xy 和 $(z(\lambda x.x))(zz)(\lambda y.(zy))$ 作为惰性项是正规范式。这些文法还允许在抽象和应用周围包含惰性项的显式替换：$(\lambda x.y)\,[y{\leftarrow}zz]$是一个正规范式，而 $x[x{\leftarrow}y(\lambda x.x)]y$是一个惰性项。惰性项的一个关键特征是它们具有自由头变量（特别是，它们是开放的）。惰性项是按值调用中与按名调用中性项相对应的概念。在 [Grégoire 和 Leroy 2002], 的工作中，惰性项称为累积器，正规范式称为值。一些关于 VSC 的论文采用了受限版本的 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 归约，其中变量不是值，因此不能通过 $\to_{\mathsf{e}}$规则代入。这种限制会导出略有不同的正规范式（通常称为火球）和惰性项（仍称为惰性项）的概念，但如 [Accattoli 和 Guerrieri 2022]所述，这种差异不会改变 VSC 的主要性质。

命题 9.2（正规范式，[Accattoli 和 Paolini 2012]）。t 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-正规当且仅当 t 是图中定义的一个*1*。

Ω-等价性。VSC 的一项特点是，它解决了 Plotkin 演算在按值调用 Ω-项方面的问题。考虑项 Ω $\Omega^L = (\lambda x.\delta)(yz)\delta$，它在上下文上等价于 Ω，但在 Plotkin 演算中是正规形式。而在 VSC 中，它则会发散：

$$(\lambda x.\delta)(yz)\delta \to_{\mathsf{m}} \delta[x{\leftarrow}yz]\delta \to_{\mathsf{m}} ww[w{\leftarrow}\delta][x{\leftarrow}yz] \to_{\mathsf{e}_\lambda} \delta\delta[x{\leftarrow}yz] \to_{\mathsf{m}} \dots.$$

更一般地说，所有按值调用 Ω-项都会发散：以下对按值调用 Ω 的刻画成立，类似于按名调用的刻画（定理2.3），其证明结合了 Accattoli 和 Paolini [2012] 对按值调用不可窥探项的发散刻画，以及一个简单的命题（见附录C（第34页）），该命题表明按值调用不可窥探项与按值调用 Ω-项一致。

定理 9.3（VSC 对 Ω-项的发散刻画）。t 是一个按值调用 Ω-项，当且仅当 t 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 发散的。

尽管 VSC 会像按名调用（CbN）那样使 Ω^L 发散，但它不验证按名调用的复制或名调用擦除，因为 $(\lambda x.y)\Omega$ 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-发散的，而 $(\lambda x.yxx)(zz) \to_{\mathsf{m}} (yxx)\ [x{\leftarrow}zz] \not\to_{\mathsf{vsc}} y(zz)\ (zz)$。

上下文等价。像 Ω^L 这样的项在 Plotkin 演算中是正规项，但在 VSC 中会发散，也就是说，VSC 与 Plotkin 演算对终止有不同的定义。因此，人们可能会怀疑，VSC 中的上下文等价与 Plotkin 演算中的上下文等价并不相同。事实并非如此，因为 VSC 的行为差异仅发生在开放项上，而上下文等价的定义只涉及闭项的规约。

命题 9.4（[Accattoli 和 Guerrieri 2022]）。两个 λ不含 *ES* 的项在 *Plotkin* 演算中上下文等价，当且仅当它们在 *VSC* 中上下文等价。

10 等式基准与值替换演算 S

在此，我们重新审视第 5 节中 VSC 的等式基准。我们从证明网等价开始，因为它们是 VSC 的存在理由之一，也是重新理解这一切的关键。

结构等价。将 VSC 翻译为证明网时，某些带显式替换的项会映射到同一个证明网。由此诱导出的项识别称为结构等价[Accattoli（2015）；Accattoli 和 Paolini 2012]。

定义 10.1（结构等价 $\equiv_{str}$）。结构等价 $\equiv_{str}$ 定义为由以下根规则的并集生成的最小相容等价关系。

$$\begin{array}{rcll}
(ts)[x{\leftarrow}u] & \equiv_{@l} & t[x{\leftarrow}u]s & \text{if } x \notin \mathsf{fv}(s) \\
(ts)[x{\leftarrow}u] & \equiv_{@r} & ts[x{\leftarrow}u] & \text{if } x \notin \mathsf{fv}(t) \\
t[x{\leftarrow}u][y{\leftarrow}s] & \equiv_{ass} & t[x{\leftarrow}u[y{\leftarrow}s]] & \text{if } y \notin \mathsf{fv}(t) \\
t[y{\leftarrow}s][x{\leftarrow}u] & \equiv_{com} & t[x{\leftarrow}u][y{\leftarrow}s] & \text{if } x \notin \mathsf{fv}(s) \text{ and } y \notin \mathsf{fv}(u)
\end{array}$$

这些公理保持项中构造子的数量和类型不变，只重新排列它们的顺序。特别是，结构等价的项具有相同数量的显式替换。请注意，这些公理只是表达了显式替换与应用以及显式替换本身之间保持构造子和作用域的交换（但不包括抽象，因为那会破坏下文的命题 10.2）。

此外，结构等价与求值的关系十分良好：它与归约规则可交换，因此可以延后，同时保留步骤的数量和类型。以下命题对此作了说明。在文献中，下文所称的强交换通常称为强双模拟。我们倾向于在此更改术语，以避免与

范式-(双)模拟混淆，因为两者概念相似却又不同（无需观察范式，且能保留步骤数）。

命题 10.2（$\equiv_{str}$ 与 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 强交换Accattoli 和 Paolini [2012]）。令$a \in \{\mathtt{m}、\ \mathtt{e}_{\lambda}、\ \mathtt{e}^{y}\}$。结构等价 $\equiv_{str}$ 与 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 强交换：若 $t \equiv_{str} u$ 且 $t \to_a t'$ 则 $u \to_a u'$ 且 $t' \equiv_{str} u'$。

事实上，$\equiv_{str}$-等价类是证明网的一种同构表示，因为与 P_t 相关联的证明网 t 执行的重写步骤与 t完全相同，也就是说，从 t 到 P_t 的翻译也与求值强交换（将项步骤转换为证明网步骤，反之亦然），参见Accattoli [2015]。因此，$\equiv_{str}$-等价项 无法区分，任何合理的纯项程序等价概念都应将其视为相等（带效应的扩展可能会使某些结构等价失效，通常是 $\equiv_{com}$，下文将对此进行讨论）。特别地，结构等价包含于上下文等价之中，正如 Accattoli 和 Guerrieri[2022]所示。

重新审视演算中的基准测试。Moggi 等价可以通过结构等价重新理解。其思路是，对等价关系两边应用 $\to_{\mathsf{m}}$，便可用显式替换来表示它，而其中许多都可归结为 $\equiv_{str}$ 的情形。以 $\equiv_{ass}$ 为例：

$$\begin{array}{ccc} (\lambda y.t)((\lambda x.u)s) & \equiv_{ass} & (\lambda x.(\lambda y.t)u)s) \quad \text{with } x \notin \lambda y.t \\ \downarrow_{\mathsf{m}} & & \downarrow_{\mathsf{m}} \\ (\lambda y.t)u[x \leftarrow s] & \equiv_{@r} & ((\lambda y.t)u)[x \leftarrow s] \end{array}$$

同样，第 $\equiv_{@r}$ 节的等价关系 $\equiv_{com}$ 和 5 会成为带有相应 $\equiv_{str}$标签的公理。因此，结构等价涵盖了证明网等价。相反，Moggi 等价 $\equiv_{lid}$、$\equiv_{lad}$ 和 $\equiv_{rad}$并未被涵盖。应用 $\to_{\mathsf{m}}$后，我们得到 VSC 的如下重新表述，它对应于 Moggi 最初采用 let表达式的表述。若 $x \notin \mathsf{fv}(u)$ 对于 $\equiv_{lad}$ 成立，且 $x \notin \mathsf{fv}(v)$ 对于 $\equiv_{rad}$成立：

$$\begin{array}{ccc} (\lambda x.x)t & \equiv_{lid} & t \\ \downarrow_{\mathsf{m}} & = & \\ x[x \leftarrow t] & \equiv_{lid} & t \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\lambda x.xu)t & \equiv_{lad} & tu \\ \downarrow_{\mathsf{m}} & = & \\ (xu)[x \leftarrow t] & \equiv_{lad} & tu \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\lambda x.vx)t & \equiv_{rad} & vt \\ \downarrow_{\mathsf{m}} & & \downarrow_{\mathsf{m}} \\ (vx)[x \leftarrow t] & \equiv_{rad} & vt \end{array}$$

在结构等价的情况下，应用分解等价关系 $\equiv_{lad}$ 和 $\equiv_{rad}$ 的显式替换表述是可推导的：$\equiv_{lad}$ 可由 $\equiv_{@l}$ 和 $\equiv_{lid}$ 推出，$\equiv_{rad}$ 可由 $\equiv_{@r}$ 和 $\equiv_{lid}$ 推出。事实上，借助（不受限制的）证明网等价 $\equiv_{@r}$，我们实际上可以推导出 (ux) 的扩展版本 $[x \leftarrow t] \equiv_{exrad} ut$（若 $x \notin \mathsf{fv}(u)$），即 $\equiv_{rad}$。因此，只需将 $\equiv_{lid}$ 加入结构等价，便能涵盖 Moggi 的全部等价关系。

一族强交换。事实证明，结构等价的各种子关系也满足强交换（为便于核实本段中的论断，命题 10.2 的证明见 HotCRP 上补充材料的附录 D；Accattoli 和 Paolini [2012] 首次发表该结果时省略了证明）。这里我们通过根规则来描述这些关系，同时隐含地采用 $\equiv_{str}$ 定义中使用的相同闭包。例如，$\equiv_{com}$ 单独就与 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 强交换，$\equiv_{@l}$ 单独也如此，$\equiv_{@r} \cup \equiv_{ass}$ 亦然；某些受限版本也是如此，例如 $(\equiv_{@r})_{|ltr} \cup \equiv_{ass}$，其中 $(\equiv_{@r})_{|ltr}$ 是 $\equiv_{@r}$ 的从左到右限制。特别是，$\equiv_{@l} \cup (\equiv_{@r})_{|ltr} \cup \equiv_{ass}$——它是将 $\equiv_{str}$ 限制到效应的非交换情形所得的版本——也与 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 强交换。下一节中，我们将为 VSC 构造一种范式相似性，使其能够参数化地适用于这些结构等价的变体。

洗牌。Carraro 和 Guerrieri的洗牌演算 [2014]是 Plotkin 演算的又一种扩展，其中包含两条洗牌规则的按值调用变体。这两条规则最初由 Regnier [1994], 在按名调用中提出，而它

被用于按值调用的语义研究 [Guerrieri 等, 2017; Kerinec 等 2020]。其按值调用洗牌规则也属于结构等价的实例，只要应用上文讨论的 $\to_{\mathsf{m}}$ 步骤即可。

11 值替换演算的网相似性

本节中，我们终于为所关注的 VSC 定义了范式相似性，即网相似性，它沿着以下两个方向扩展了 $\precsim_{nai}$：

(1) 改变底层演算：现在基于 VSC 进行求值，其中 Ω-项具有发散刻画，因此 Ω-等价性 $\equiv_\Omega$ 将被双模拟等价平凡地包含；(2) 改变 *nf*-双模拟：允许模拟在结构等价 $\equiv_{str}$ 下测试项，以避免对不可区分项作出人为区分，并验证 let 的交换 $\equiv_{com}$。

本节末尾将讨论引入左单位等价 $\equiv_{lid}$ 这一有问题的做法。

改变底层演算。 从 Plotkin 的 CbV 演算转向 VSC 后，范式更难描述，这一点从图 1中的范式文法便可看出。

由于在证明中处理情形 $L_i\hbar x\imath n$ 相当棘手，我们更进一步，考虑模 $\equiv_{@l}$ 的范式，并为每个范式选取其 $\equiv_{@l}$-代表元，使上下文 L_i 从惰性项中棘手的情形移出。这样做不会造成问题，因为 $\equiv_{@l}$ 本身就满足相对于 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 的强交换性质，而且所描述的代表元很容易在大步层面上刻画。下面的引理给出了模 $\equiv_{@l}$ 范式的文法；我们重新定义惰性项，从现在起它仅指新文法中的惰性项。

引理 11.1。 t 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-正规当且仅当存在 n，其由以下文法给出，且满足 $t \equiv_{@l} n$。

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Applicative Inert terms} & \mathring{\imath}, \mathring{\imath}' & ::= & xn \mid \mathring{\imath} n \\ \textit{Inert terms} & i, i' & ::= & \mathring{\imath} \mid i[x \leftarrow i'] \\ \to_{\mathsf{vsc}}\textit{-normal forms modulo} \equiv_{@l} & n, n' & ::= & v \mid i \mid n[x \leftarrow i'] \end{array}$$

注意应用式惰性项这一概念，它们是特定的惰性项，其中没有任何替换可以通过 $\equiv_{@l}$ 向外推。例如：$\to_{\mathsf{vsc}}$-范式 $t = x[x \leftarrow yy]z$ 不属于上述文法，但 $t \equiv_{@l} (xz)[x \leftarrow yy] = n$ 和 n 则由该文法描述。

大步求值。 接下来，我们需要将模 $\equiv_{@l}$ 的求值至 $\to_{\mathsf{vsc}}$-范式表示为一个大步谓词。为此，我们重新定义惰性替换上下文。乍看之下，其定义与之前相同，只是惰性项的概念现在发生了变化。

$$\textsc{Inert Substitution Contexts} \quad L_i ::= \langle\cdot\rangle \mid L_i[x \leftarrow i]$$

定义 11.2（大步求值 $\Downarrow^k_{\mathsf{vsc}}$）。 模 $\equiv_{@l}$ 的大步 *VSC* 求值 $t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$ 定义如下：

$$\frac{}{v \Downarrow^0_{\mathsf{vsc}} v}\ (\Downarrow\text{-}Ax) \qquad \frac{t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle\lambda x.s\rangle \quad s[x \leftarrow u] \Downarrow^i_{\mathsf{vsc}} n}{tu \Downarrow^{k+i+1}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle n\rangle}\ (\Downarrow\text{-}@M)$$

$$\frac{t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle x\rangle \quad u \Downarrow^h_{\mathsf{vsc}} n}{tu \Downarrow^{k+h}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle xn\rangle}\ (\Downarrow\text{-}@x) \qquad \frac{u \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle v\rangle \quad t\{x \leftarrow v\} \Downarrow^i_{\mathsf{vsc}} n}{t[x \leftarrow u] \Downarrow^{k+i+1}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle n\rangle}\ (\Downarrow\text{-}[E])$$

$$\frac{t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle \mathring{\imath}\rangle \quad u \Downarrow^h_{\mathsf{vsc}} n}{tu \Downarrow^{k+h}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle \mathring{\imath} n\rangle}\ (\Downarrow\text{-}@I) \qquad \frac{t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n \quad u \Downarrow^h_{\mathsf{vsc}} i}{t[x \leftarrow u] \Downarrow^{k+h}_{\mathsf{vsc}} n[x \leftarrow i]}\ (\Downarrow\text{-}[I])$$

记号： $t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n$ 表示 存在一个 k 使得$t \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$。

给定的大步系统通过规则 (⇓-@x) 和 (⇓-@i) 捕捉了 $\equiv_{@l}$：当将一个由惰性上下文 L_i 包围的惰性项／变量应用于正规项 n时，上下文 L_i 会从应用中移出，得到 $L_i\mathsf{h}x n\mathsf{i}$ 和 $L_i\mathsf{h}\mathsf{i}n\mathsf{i}$，而不是 $L_i\mathsf{h}x\mathsf{i}n$和 $L_i\mathsf{h}\mathsf{i}\mathsf{i}n$。因此，$\Downarrow_{\mathsf{vsc}}$-正规范式恰好是给定文法中 $\to_{\mathsf{vsc}}$-正规范式在 $\equiv_{@l}$意义下的那些范式。

我们证明，该大步系统相对于小步归约是正确且完备的。重要的是，替换性也能顺利适用。

命题 11.3. $t \Downarrow^{k}_{\mathsf{vsc}} n$ 当且仅当存在一个正规范式 n' 使得 $t \to^{k}_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_{@l} n$。

命题 11.4（替换性）。
(1) 小步：若 $t \to_{\mathsf{vsc}} t'$则 $t\{x\leftarrow v\} \to_{\mathsf{vsc}} t'\{x\leftarrow v\}$。(2) 大步：若 $t\{x\leftarrow v\} \Downarrow^{k}_{\mathsf{vsc}} n$ 则 $\exists\, k'$且 n'使得$t \Downarrow^{k'}_{\mathsf{vsc}} n'$且 $n'\{x\leftarrow v\}\Downarrow^{k-k'}_{\mathsf{vsc}} n$。

通过在模拟中加入结构等价来改变 *nf*-双模拟，采用参数化方式。现在，我们还将通过在 nf-双模拟中加入结构等价$\equiv_{str}$，进一步完善朴素相似性的定义。事实上，为了得到一整族相似关系，我们将进行更一般的处理。我们将结构等价 $\equiv_{str}$ 抽象为一种更抽象的概念，即镜像等价 $\equiv_M$，它由证明模 $\equiv_{str}$ 相似性具有相容性所需的 $\equiv_{str}$ 性质定义。然后，以镜像 $\equiv_M$为参数来定义相似性，并通过取 $\equiv_{str}$作为镜像得到网相似性。使用镜像这一术语，是为了表明 $\equiv_M$只能以非本质的方式改变项。

定义 11.5（镜像）。当满足以下条件时，等价关系 $\equiv_M$是 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 的镜像：
(1) 强交换：若 $t \equiv_M u$且 $t \to_{\mathsf{vsc}} t'$，则 $u \to_{\mathsf{vsc}} u'$且 $t' \equiv_M u'$。(2) 替换性：若 $t \equiv_M u$，则 $t\{x\leftarrow v\} \equiv_M u\{x\leftarrow v\}$，对所有值 v均成立。

定义 11.6（镜像相似与网相似）。设$\mathcal{R}$是一个关系，$\equiv_M$是 *VSC* 项上的一个镜像。若$\mathcal{R}$是一个 $\equiv_M$-镜像（mir_M）模拟，则称$\mathcal{R} \subseteq \langle\mathcal{R}\rangle_{\mathrm{mir}_M}$，其中 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathrm{mir}_M}t'$在 t、t' 满足以下任一子句时成立：

(mir_M 1)	$t \not\Downarrow_{\mathsf{vsc}}$		*i.e. has no* $\to_{\mathsf{vsc}}$ *-normal form.*
(mir_M 2)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} x$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} x$	
(mir_M 3)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} \lambda x.t_1$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} \lambda x.t'_1$	*with* $t_1\ \mathcal{R}\ t'_1$
(mir_M 4)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n_1 n_2$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_M n'_1 n'_2$	*with* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$ *and* $n_2\ \mathcal{R}\ n'_2$
(mir_M 5)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n_1[x\leftarrow n_2]$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_M n'_1[x\leftarrow n'_2]$	*with* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$ *and* $n_2\ \mathcal{R}\ n'_2$

$\equiv_M$-镜像（mir_M）相似性记作 $\precsim_{\mathrm{mir}_M}$，定义为最大的 $\equiv_M$-镜像模拟。
网模拟和网相似性 $\precsim_{net}$定义为以结构等价 $\equiv_{str}$为镜像 $\equiv_M$的 $\equiv_M$-镜像模拟和相似性。

在子句中显式表示惰性项。情形 (mir_M 4) 和 (mir_M 5) 可以用正规式的文法改写，这有助于使证明更加清晰。对于 (mir_M 4)，它实际上分为两种情况：

(mir_M 4a)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} xn_1$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_M xn'_1$	*with* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$
(mir_M 4b)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} \mathsf{i}n_1$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_M \mathsf{i}'n'_1$	*with* $\mathsf{i}\ \mathcal{R}\ \mathsf{i}'$ *and* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$
(mir_M 5)	$t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n_1[x\leftarrow i]$	*and* $t' \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \equiv_M n'_1[x\leftarrow i']$	*with* $i\ \mathcal{R}\ i'$ *and* $n_1\ \mathcal{R}\ n'_1$

相容性。关于 $\precsim_{\mathrm{mir}_M}$的相容性证明与 $\precsim_{nai}$的证明结构相同（见 HotCRP 上补充材料的附录 E）。在求值层面，我们已经看到，替换性对于 VSC 的弱归约以及加入等价性 $\equiv_{@l}$（命题 11.4）同样成立。在模拟层面，我们需要通过加入规则 $\mathcal{L}^{M}_{\equiv_M}$ 来完善 Lassen 闭包的概念，以涵盖镜像。

定义 命题 11.7（镜像 Lassen 闭包）。令 $\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M}$ 的镜像 *Lassen* 闭包 R 为 ：

$$\frac{a\,\mathcal{R}\,b}{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b}\;\mathcal{L}^M_{LIFT}\qquad\frac{}{x\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,x}\;\mathcal{L}^M_{VAR}\qquad\frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b}{\lambda x.a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,\lambda x.b}\;\mathcal{L}^M_{\lambda}\qquad\frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b\quad p\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,q}{ap\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,bq}\;\mathcal{L}^M_{@}$$

$$\frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b\quad p\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,q}{a[x\leftarrow p]\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b[x\leftarrow q]}\;\mathcal{L}^M_{ESUB}\qquad\frac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b\quad v_p\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,v_q}{a\{x\leftarrow v_p\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b\{x\leftarrow v_q\}}\;\mathcal{L}^M_{SUB}\qquad\frac{a'\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b'\quad b'\equiv_M b}{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b}\;\mathcal{L}^M_{\equiv_M}$$

然后，相容性的论证——尤其是相干性——可以顺利地调整，并在证明闭包保持镜像模拟时运用规则 $\mathrm{L}^M_{\equiv_M}$ 的镜像性质。具体而言， $\equiv_M$ 的强交换意味着它保持范式和步骤，也就是说，保持相干性。综上，我们得到主要结果。

定理 11.8（ $\precsim_{\mathtt{mir}_M}$ 与 $\precsim_{net}$ 的相容性与可靠性）。令 $\equiv_M$ 为一个镜像。

（1）镜像 Lassen 闭包的冗余性： $\precsim_{\mathtt{mir}_M}=\precsim_{\mathtt{mir}_M\mathcal{L}^M}$.（2） Mir_M 相似性 $\precsim_{\mathtt{mir}_M}$ 具有相容性，且包含于按值调用上下文预序 $\precsim^v_C$ 中。（3）网相似性 $\precsim_{net}$ 具有相容性，且包含于按值调用上下文预序 $\precsim^v_C$ 中。

不动点与基准测试。对于任意镜像 $\equiv_M$，特别是 $\equiv_M:=Id$ 和 $\equiv_M:=\equiv_{str}$，都可以证明图灵和 Curry 的按值调用不动点组合子是 mir_M 双模拟等价的。证明所依赖的关系与朴素双模拟（命题 6.3）所用的关系完全相同。Plotkin 的 β_v 和 VSC 转换包含在 mir_M 相似性中。与朴素相似关系和 enf 相似性不同，mir_M 和 net 相似关系验证 Ω_v-等价性 $\equiv_{\Omega_v}$。然而，net 和 $\equiv_M$-镜像双模拟关系并不验证 η_v 等价性；要使其成立，必须更改抽象对应的情形，而且它不验证按名称调用重复，例如（yxx）$[x\leftarrow z\mathrm{I}]$ 和 $y(z\mathrm{I})(z\mathrm{I})$ 都是 $\rightarrow_{\mathtt{vsc}}$-正规，但并非 $\equiv_{str}$-等价。

左单位不能由镜$_M$。类似地，网相似性无法验证 Moggi 的 $\equiv_{lid}$ 规则，因为 $x[x\leftarrow y\mathrm{I}]\not\rightarrow_{\mathtt{vsc}} y\mathrm{I}$ 和 $x[x\leftarrow y\mathrm{I}]\not\equiv_{str} y\mathrm{I}$。因此，enf 不包含在网相似性中。关于加入 $\equiv_{lid}$，定义镜 $\equiv_{lid}$ 双模拟很容易，但目前的相容性证明无法成立，因为 $\equiv_{lid}$ 不是 $\rightarrow_{\mathtt{vsc}}$ 的镜像（尤其是，它与 $\rightarrow_{\mathtt{vsc}}$不强交换），而且这种证明技术目前无法处理 $\equiv_{lid}$ 项，因为它会破坏范式的协调性，也就是说，若 $n\,\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M}\,t$，则 t 是正规形式（反向命题也成立）。

也可以将 $\equiv_{lid}$ 加入为 VSC 的一个归约步骤，但这样一来，归约便不再具有菱形性质，而菱形性质（或至少是到范式的步数不变性）对于当前的证明技术至关重要。因此，目前尚不清楚如何扩展网相似性以验证 $\equiv_{lid}$。下一节将介绍一种包含 $\simeq_{net}$ 并能验证 $\equiv_{lid}$ 的程序等价性。

网双模拟不能是外延的。 Lassen 引入了 enf 双模拟的扩展，用于验证 $\equiv_{\eta_v}$，即基于 η_v 的 enf 双模拟；与此同时，他也引入了 enf 双模拟 [Lassen2005a]。目前，这一修改无法应用于网双模拟。我们将解释其中的问题，其归根结底仍是 net 不满足左单位律 $\equiv_{lid}$。

设存在一个基于 VSC 的范式相似性 R（即 $t\rightarrow_{\mathtt{vsc}} t'$ 蕴含 $t\,\mathrm{R}\,t'$），它是一个相容等价关系，并且验证 $\equiv_{\eta_v}$。那么，特别地，我们有 $x\,\mathrm{R}\,\lambda y.xy$，因为 $\equiv_{\eta_v}\subseteq\mathrm{R}$。根据相容性（对于 $C=\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}t$），$xt\,\mathrm{R}\,(\lambda y.xy)t$；再根据归约和传递性， $xt\mathrm{R}\;xy[y\leftarrow t]$。这意味着关系 R 至少必须包含 $(xt,\ xy[y\leftarrow t])$，这是 $\equiv_{rad}$ 的一个子情形，而 $\equiv_{rad}$ 本身可由 $\equiv_{lid}$ 规则和结构等价 $\equiv_{str}$ 推出。由于网双模拟不验证 Moggi 定律，而且我们目前不知道如何将它们纳入其中，网双模拟无法包含 $\equiv_{\eta_v}$。

$$\begin{array}{rrcl} \textsc{Linear Types} & L, L' & ::= & M \multimap N \\ \textsc{Multi Types} & M, N & ::= & [L_1, \dots, L_n] \quad n \geq 0 \end{array}$$

$$\frac{}{x : [L] \vdash x : L}\ \mathsf{ax} \qquad \frac{\Gamma, x : M \vdash t : N}{\Gamma \vdash \lambda x.t : M \multimap N}\ \lambda \qquad \frac{(\Gamma_i \vdash v : L_i)_{i \in I} \quad I \text{ finite}}{\uplus_{i \in I} \Gamma_i \vdash v : \uplus_{i \in I} [L_i]}\ \mathsf{many}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : [M \multimap N] \quad \Delta \vdash u : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash tu : N}\ @ \qquad \frac{\Gamma, x : M \vdash t : N \quad \Delta \vdash u : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash t[x \leftarrow u] : N}\ \mathsf{es}$$

图 2. VSC 的按值调用多重类型系统。

12 FRO M 从操作语义到指称语义：类型预序

本节研究一种行为预序，即类型预序 $\precsim_{type}$。它并非定义为 nf-相似，而是由一个指称模型诱导而来。具体而言，Ehrhard的按值关系模型 [2012] 以多重类型系统的形式呈现，也称为非幂等交类型。我们将证明，Lassen 的相似性 $\precsim_{enf}$ 和我们的网相似性 $\precsim_{net}$ 都包含于 $\precsim_{type}$。我们的目标是说明，尽管 $\precsim_{enf}$ 与 $\precsim_{net}$ 不可比较，但可以将它们结合成一个成本敏感预序（上下文预序将二者结合起来，但它不是成本敏感的）。我们只介绍按值调用多重类型的基本内容。更多详情请参见[Accattoliand Guerrieri 2018，2022]。

多重类型。图2 给出了 VSC 的多重类型定义 M，该定义与线性类型的定义相互依赖 L。多重类型被定义为有限多重集 $[L_1, \dots, L_n]$，直观上表示交 $L_1 \cap \dots \cap L_n$，其中交 $\cap$ 是一个满足交换律、结合律且非幂等的（$A \cap A \neq A$）运算，其单位元是 $[\,]$, 空多重集。请注意，这里没有基类型，其作用由空多重类型承担 $[\,]$。

类型判断的形式为 $\Gamma \vdash t : T$，其中 T 是线性类型或多重类型，Γ 是类型上下文，即将多重类型赋给有限个变量的赋值（$\Gamma = x_1 : M_1, \dots\dots, x_n : M_n$）。类型推导 $\pi \rhd \Gamma \vdash t : M$ 是由图 2 中定义的推导规则构成的一棵树，其结尾是类型判断 $\Gamma \vdash t : M$。

类型规则。线性类型只能通过 ax 和 λ规则为值赋予类型。若要为值v赋予多重类型，必须使用 many 规则，将 v 的一个指标族线性类型转化为多重类型。注意，任何值都可以赋予空多重类型 $[\,]$。符号 $\uplus$ 是多重集合上的不交并运算符（对应于多重类型上的非幂等交）。

终止性刻画。多重类型的一项关键性质是，它们刻画 $\to_{\mathsf{vsc}}$终止性。该刻画通过主体归约和扩展得以证明。

定理 12.1（终止性刻画，[Accattoli 和 Guerrieri 2022]）。

(1) 主体归约与扩展：令 $t \to_{\mathsf{vsc}} u$。则 $\Gamma \vdash t : M$ 当且仅当 $\Gamma \vdash u : M$。(2) t 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-终止的，当且仅当存在 Γ 和 M，使得 $\Gamma \vdash t : M$。

由于 $\to_{\mathsf{vsc}}$-发散刻画了按值调用 Ω-项（定理9.3），根据前一定理，不可类型化 也刻画了它。

多重类型诱导出一个模型。多重类型通过将一个项解释为其类型判断的集合来诱导出一个模型。一个可能为空且由两两不同变量组成的列表 $®x = (x_1, \dots, x_n)$ 对于 t 是适用的，如果 $\mathrm{fv}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$。若 $®x = (x_1, \dots, x_n)$ 对于 t 适用，则 $®x$ 的 t语义 $[\![t]\!]_{\vec{x}}$为：

$$[\![t]\!]_{\vec{x}} := \{((N_1, \dots, N_n), M) \mid \exists \Phi \rhd x_1 : N_1, \dots, x_n : N_n \vdash t : M\}$$

这正是 Ehrhard的按值关系模型 [2012]。Ehrhard 从 Plotkin 演算的角度考察了它。我们没有证明它是 VSC 的模型，因为 VSC 模型尚无正式定义。不过，我们确实有主体归约和扩展（定理 12.1。1）保证解释 $[\![t]\!]_{\vec{x}}$在 归约 下 $\to_{\mathsf{vsc}}$保持不变，而下文将证明其诱导的等式理论具有相容性。这些性质正是 λ-模型或范畴模型的定义旨在确保的。此外，刻画定理（定理 12.1）保证 $[\![t]\!]_{\vec{x}}$ 是适当的。

推论 12.2 ([Accattoli 和 Guerrieri 2022])。令 t 为 *VSC* 中的一个项，且 $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$适用于该项。

(1) 不变性：若 $t(\to_{\mathsf{vsc}} \cup \equiv_{str}) u$则 $[\![t]\!]_{\vec{x}} = [\![u]\!]_{\vec{x}}$。(2) 关于 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 的充分性：$[\![t]\!]_{\vec{x}}$ 非空，当且仅当 t 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-终止的。

类型预序。每个模型 M 都会导出一个等式理论，定义为 $t =_M u$，若 $[\![t]\!]_M = [\![u]\!]_M$。对于多类型模型，我们考虑由 $[\![t]\!]_{\vec{x}} \subseteq [\![t']\!]_{\vec{x}}$ 导出的预序。

定义 12.3（类型预序）。若 $\Gamma \vdash t : M$ 蕴含 $\Gamma \vdash t' : M$，则类型预序 $t \lesssim_{type} t'$ 成立。

将定义改写为关于解释的形式，我们有 $t \lesssim_{type} t'$ 如果 $[\![t]\!]_{\vec{x}} \subseteq [\![t']\!]_{\vec{x}}$对每个合适的变量列表 ®$x$都成立。根据 $[\![t]\!]_{\vec{x}}$的充分性，可以推出 $\lesssim_{type}$的充分性。相容性很容易直接证明，只需证明一次即可，而可靠性也随之成立。

命题 12.4（$\lesssim_{type}$的相容性）。

(1) 相容性：如果 $t \lesssim_{type} t'$ 那么 $C\langle t\rangle \lesssim_{type} C\langle t'\rangle$。(2) 可靠性：如果 $t \lesssim_{type} t'$ 那么 $t \lesssim^{v}_{C} t'$。

enf 和 *net* 包含于类型之中。现在，我们证明 $\lesssim_{enf}$ 和 $\lesssim_{net}$ 都包含于 $\lesssim_{type}$之中。为此，我们证明：如果 $t \lesssim_{enf} t'$ 或 $t \lesssim_{net} t'$，那么任何针对 t的类型推导都可以转换为针对 t' 的类型推导，且最终判断相同。接下来的两个命题及相关引理通过对以下概念进行归纳法证明：类型推导π的大小 $|\pi|$，其定义为 π 中规则出现的次数，但不包括 many 规则。

命题 12.5。

(1) 网模拟与类型推导：设 $\mathcal{R}$ 是一个网模拟。若 $t \mathcal{R} t'$ 且 $\pi : \Gamma \vdash t : M$，则存在一个推导 $\pi' : \Gamma \vdash t' : M$。(2) 网包含于类型：若 $t \lesssim_{net} t'$，则 $t \lesssim_{type} t'$。

为重新联系 enf 相似性与可定型性，我们需要一个引理来处理 Lassen 的停走 .

引理 12.6（停止与继续和类型推导）。设 $\pi \rhd \Gamma \vdash L\langle xv\rangle : M$，且 z 是新鲜的。那么存在 $\pi_L \rhd \Gamma_L$、$z : N \vdash L\langle z\rangle : M$，使得 $|\pi_L| < |\pi|$，并且存在 $\pi_v \rhd \Gamma_v \vdash v : N_1$，使得 $|\pi_v| < |\pi|$。

命题 12.7。

(1) enf 模拟与类型推导：令$\mathcal{R}$ 为一个enf 模拟。若 $t \mathcal{R} t'$ 且 $\pi \rhd \Gamma \vdash t : M$，则存在一个推导 $\pi' \rhd \Gamma \vdash t' : M$。(2) enf 包含于 Type：若 $t \lesssim_{enf} t'$，则 $t \lesssim_{type} t'$。

η_v 等价性。由 enf 相似关系与 net 相似关系不可比较这一事实可知，它们严格包含于 $\lesssim_{type}$。类型预序 $\lesssim_{type}$ 与 $\lesssim_{enf}$ 或 $\lesssim_{net}$ 之间还存在另一处差异，即 η_v等价性；它包含于 $\lesssim_{type}$，但不包含于 $\lesssim_{enf}$ 或 $\lesssim_{net}$。

命题 12.8（η_v-等价性包含于类型等价性）。设 x 是一个变量。那么$\lambda y.xy \lesssim_{type} x$ 且 $x \lesssim_{type} \lambda y.xy$。

刻画类型等价性。我们猜想，$\precsim_{type}$ 恰好是由 enf 和 net 相似关系扩展等价性后所得的上确界，也就是说，将 $\precsim_{net}$ 推广为同时验证 $\equiv_{lid}$ 和 $\equiv_{\eta_v}$，就会与 $\precsim_{type}$ 一致。如果这个猜想不成立，那么找到 $\precsim_{type}$ 的范式相似性表述——这相当于描述按值调用关系语义的等式理论——无论如何都是一个有趣且富有挑战性的问题。

关于按值调用上下文等价的完全抽象性 $\simeq_C^v$，对于 $\simeq_{type}$ 而言并不成立，因为 $\simeq_{type}$具有成本敏感性——它无法验证按名称调用重复——而 $\simeq_C^v$ 则不具有成本敏感性。

13 结论

受 Lassen 的 enf 双模拟 $\simeq_{enf}$——按值调用中备受关注的范式双模拟——无法区分 Ω-项与 let 交换这一事实的启发，我们引入了网双模拟 $\simeq_{net}$，它能够区分它们。然而，事实证明，$\simeq_{net}$ 既无法验证 Moggi 定律，也无法验证 η_v；而这两者都能由 $\simeq_{enf}$验证。此外，目前尚不清楚如何扩展 enf 双模拟或网双模拟，才能涵盖另一者。

这种棘手的二元性促使我们深入分析按值调用，以及范式双模拟能够或无法验证的原理。分析表明，按值调用的语义图景比按名称调用丰富得多，也复杂得多。

具体而言，我们的分析提出了另外两种等价关系。首先是朴素双模拟 $\simeq_{nai}$，它主要有助于更好地理解 Lassen 对 enf 模拟所作的复杂定义。其次是由 Ehrhard 的多重类型所诱导的类型等价 $\simeq_{type}$，它涵盖了 enf 和网双模拟，并包含 η_v-等价，同时保留了它们的成本敏感特性。实际上，$\simeq_{type}$ 并不真正适合用于比较程序，但它提供了一种有力的理论工具。

未来工作。类型等价表明，或许有可能找到一种正规形式双模拟，将 enf 和网双模拟合并起来。我们正在积极研究这一颇具挑战性的问题。另一个相关问题是为 $\simeq_{type}$寻找公理化，并应为此发展某种分离定理。我们也希望探究网双模拟 $\simeq_{net}$ 与 $\simeq_{enf}$相关主题之间的关系，例如博弈语义 [Jaber 和 Murawski 2021], 带效应的扩展[Biernacki 等人 2019年、2020年；Dal Lago 和 Gavazzo 2019], 以及 π-演算 [Durier 等人 2022]。

参考文献

Samson Abramsky。1990年。惰性 λ 演算。Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.，美国，65–116。
Beniamino Accattoli。2015。证明网与按值调用 λ演算。理论计算机科学606（2015），2–24。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.08.006 Beniamino Accattoli、Andrea Condoluci 和 Claudio Sacerdoti Coen。2021。强按值调用具有合理性，且呈爆发式。在第三十六届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑研讨会（*LICS 2021*），意大利罗马，*2021*年*6*月*29*日至*7*月*2*日。IEEE，1–14。https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470630 Beniamino Accattoli 和 Giulio Guerrieri。2016。开放式按值调用。在编程语言与系统——第十六届亚洲研讨会（*APLAS 2016*），越南河内，*2016*年*11*月*21*日至*23*日，论文集（计算机科学讲义），Atsushi Igarashi（编），第10017卷。206–226。https://doi.org/10.1007/978-3-319-47958-3_12 Beniamino Accattoli 和 Giulio Guerrieri。2018。火球类型。在编程语言与系统——第十六届亚洲研讨会（*APLAS 2018*），新西兰惠灵顿，*2018*年*12*月*2*日至*6*日，论文集（计算机科学讲义），Sukyoung Ryu（编），第11275卷。施普林格，45–66。https://doi.org/10.1007/978-3-030-02768-1_3 Beniamino Accattoli 和 Giulio Guerrieri。2022。按值调用可解性理论。*ACM* 编程语言论文集6，ICFP（2022），855–885。https://doi.org/10.1145/3547652 Beniamino Accattoli 和 Luca Paolini。2012。重新探讨按值调用可解性。在函数式与逻辑编程——第十一届国际研讨会（*FLOPS 2012*），日本神户，*2012*年*5*月*23*日至*25*日，论文集（计算机科学讲义），Tom Schrijvers 和 Peter Thiemann（编），第7294卷。施普林格，4–16。https://doi.org/10.1007/978-3-642-29822-6_4 Victor Arrial、Giulio Guerrieri 和 Delia Kesner。2023。统一框架下不同 λ 演算的定量居留。*ACM* 编程语言论文集7，POPL（2023），1483–1513。https://doi.org/10.1145/3571244 Hendrik Pieter Barendregt。1971。组合逻辑和 λ演算的一些外延项模型。博士学位论文。乌得勒支大学。

Hendrik Pieter Barendregt。1977年。λ 演算中的可解性。载于《逻辑国际研讨会：克莱蒙费朗，1975年7月18日至25日》，M. Guillaume（编）。法国国家科学研究中心出版社，巴黎，209–219。Hendrik Pieter Barendregt。1984年。《λ 演算——其语法与语义》。逻辑与数学基础研究，第103卷。North-Holland。Dariusz Biernacki 和 Sergueï Lenglet。2012年。分界控制算子的范式双模拟。载于《函数式与逻辑编程——第十一届国际研讨会（FLOPS 2012），日本神户，2012年5月23日至25日，论文集（计算机科学讲义）》，Tom Schrijvers 和 Peter Thiemann（编），第7294卷。施普林格，47–61。https://doi.org/10.1007/978-3-642-29822-6_7 Dariusz Biernacki、Sergueï Lenglet 和 Piotr Polesiuk。2019年。状态的完备范式双模拟等价。载于《软件科学与计算结构基础——第二十二届国际会议（FOSSACS 2019），作为欧洲软件理论与实践联合会议（ETAPS 2019）的一部分举办，捷克共和国布拉格，2019年4月6日至11日，论文集（计算机科学讲义）》，Mikolaj Bojanczyk 和 Alex Simpson（编），第11425卷。施普林格，98–114。https://doi.org/10.1007/978-3-030-17127-8_6 Dariusz Biernacki、Sergueï Lenglet 和 Piotr Polesiuk。2019年。证明外延范式双模拟的可靠性。《计算机科学逻辑方法》15，1（2019）。https://doi.org/10.23638/LMCS-15(1:31)2019 Dariusz Biernacki、Sergueï Lenglet 和 Piotr Polesiuk。2020年。代数效应与处理器的完备范式双模拟等价。载于《第五届计算与演绎形式结构国际会议（FSCD 2020）》（莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）），Zena M. Ariola（编），第167卷。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，德国达格施图尔，7:1–7:22。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2020.7 Antonio Bucciarelli、Delia Kesner、Alejandro Ríos 和 Andrés Viso。2020年。Bang 演算再探。载于《函数式与逻辑编程——第十五届国际研讨会（FLOPS 2020），日本秋田，2020年9月14日至16日，论文集（计算机科学讲义）》，Keisuke Nakano 和 Konstantinos Sagonas（编），第12073卷。施普林格，13–32。https://doi.org/10.1007/978-3-030-59025-3_2 Alberto Carraro 和 Giulio Guerrieri。2014年。按值可解性的语义与操作性描述。载于《软件科学与计算结构基础——第十七届国际会议（FOSSACS 2014），作为欧洲软件理论与实践联合会议（ETAPS 2014）的一部分举办，法国格勒诺布尔，2014年4月5日至13日，论文集（计算机科学讲义）》，Anca Muscholl（编），第8412卷。施普林格，103–118。https://doi.org/10.1007/978-3-642-54830-7_7 Ugo Dal Lago 和 Francesco Gavazzo。2019年。效应范式双模拟。载于《编程语言与系统——第二十八届欧洲编程研讨会（ESOP 2019），作为欧洲软件理论与实践联合会议（ETAPS 2019）的一部分举办，捷克共和国布拉格，2019年4月6日至11日，论文集（计算机科学讲义）》，Luís Caires（编），第11423卷。施普林格，263–292。https://doi.org/10.1007/978-3-030-17184-1_10 Ugo Dal Lago、Davide Sangiorgi 和 Michele Alberti。2014年。关于高阶概率函数程序的余归纳等价关系。载于《第四十一届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会（POPL '14）》，美国加利福尼亚州圣迭戈，2014年1月20日至21日，Suresh Jagannathan 和 Peter Sewell（编）。美国计算机协会，297–308。https://doi.org/10.1145/2535838.2535872 Alejandro Díaz-Caro、Giulio Manzonetto 和 Michele Pagani。2013年。线性逻辑类型系统中的按值非确定性。载于《计算机科学逻辑基础国际研讨会（LFCS 2013），美国加利福尼亚州圣迭戈，2013年1月6日至8日，论文集（计算机科学讲义）》，Sergei N. Artëmov 和 Anil Nerode（编），第7734卷。施普林格，164–178。https://doi.org/10.1007/978-3-642-35722-0_12 Adrien Durier、Daniel Hirschkoff 和 Davide Sangiorgi。2022年。急切函数作为进程。《理论计算机科学》913（2022），8–42。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.01.043 Lavinia Egidi、Furio Honsell 和 Simona Ronchi Della Rocca。1992年。操作式、指称式与逻辑描述：案例研究。《Fundam. Inform.》16，1（1992），149–169。Thomas Ehrhard。2012年。非幂等交类型的坍缩。载于《计算机科学逻辑（CSL'12）——第二十六届国际研讨会／EACSL 第二十一届年会（CSL 2012），2012年9月3日至6日，法国枫丹白露（LIPIcs）》，Patrick Cégielski 和 Arnaud Durand（编），第16卷。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，259–273。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2012.259 Jean-Yves Girard。1987。线性逻辑。《理论计算机科学》50（1987），1–102。https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4 Benjamin Grégoire 和 Xavier Leroy。2002年。强归约的编译实现。载于《第七届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集》（ICFP '02）。美国计算机协会，235–246。https://doi.org/10.1145/581478.581501 Giulio Guerrieri、Luca Paolini 和 Simona Ronchi Della Rocca。2017年。精化按值调用 λ 演算的标准化与保守性。《计算机科学中的逻辑方法》13，4（2017）。https://doi.org/10.23638/LMCS-13(4:29)2017

Douglas J. Howe. 1996年. 证明函数式编程语言中双模拟的同余性. 《信息与计算》124, 2 (1996), 103–112. https://doi.org/10.1006/inco.1996.0008 Guilhem Jaber and Andrzej S. Murawski. 2021年. 通过操作性博弈语义进行组合式关系推理. 收录于第36届年度ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会（LICS 2021），罗马，意大利，2021年6月29日至7月2日. IEEE, 1–13. https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470524 Guilhem Jaber and Davide Sangiorgi. 2022. 博弈、移动进程与函数. 收录于第30届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2022），2022年2月14日至19日，哥廷根，德国（线上会议）（LIPIcs），Florin Manea 和 Alex Simpson（编），第216卷. 达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，25:1–25:18. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2022.25 Radha Jagadeesan, Corin Pitcher, and James Riely. 2009. 面向切面的开放双模拟. LNCS Trans. Aspect Oriented Softw. Dev. 5 (2009), 72–132. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02059-9_3 Axel Kerinec, Giulio Manzonetto, and Michele Pagani. 2020. 从泰勒展开的角度重新审视按值调用博姆树. 计算机科学逻辑方法16, 3 (2020). https://lmcs.episciences.org/6638 Delia Kesner and Loïc Peyrot. 2022. 广义应用的可解性. 收录于第7届计算与演绎形式结构国际会议（FSCD 2022），2022年8月2日至5日，海法，以色列（LIPIcs），Amy P. Felty（编），第228卷. 达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，18:1–18:22. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2022.18 Delia Kesner and Andrés Viso. 2022. 在统一框架中编码紧致类型系统. 收录于第30届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2022），2022年2月14日至19日，哥廷根，德国（线上会议）（LIPIcs），Florin Manea 和 Alex Simpson（编），第216卷. 达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，27:1–27:20. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2022.27 Vasileios Koutavas, Yu-Yang Lin, and Nikos Tzevelekos. 2023. 按值调用 PCF 的完全抽象正规形式双模拟. 收录于 LICS 2023，即将出版. Soren Lassen. 2005a. 急切正规形式双模拟. 收录于第20届IEEE计算机科学逻辑年会论文集（LICS '05）. IEEE计算机学会，美国，345–354. https://doi.org/10.1109/LICS.2005.15 Søren B. Lassen. 1999. 无类型λ演算中的双模拟：博姆树与上下文闭包双模拟. 20 (1999), 346–374. https://doi.org/10.1016/S1571-0661(04)80083-5 Søren B. Lassen. 2005b. McCarthy Amb 的正规形式模拟. 收录于第21届程序语义数学基础年会（MFPS 2005）论文集，伯明翰，英国，2005年5月18日至21日（理论计算机科学电子笔记），Martín Hötzel Escardó, Achim Jung, and Michael W. Mislove（编），第155卷. Elsevier, 445–465. https://doi.org/10.1016/j.entcs.2005.11.068 Søren B. Lassen. 2006. 配对与\lambda\mu演算的头部正规形式双模拟. 收录于第21届IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS 2006），2006年8月12日至15日，美国华盛顿州西雅图，论文集. IEEE计算机学会，297–306. https://doi.org/10.1109/LICS.2006.29 Søren B. Lassen and Paul Blain Levy. 2007. 类型化正规形式双模拟. 收录于计算机科学逻辑， 第21届国际研讨会，CSL 2007，EACSL第16届年会，瑞士洛桑，2007年9月11日至15日，论文集（计算机科学讲义），Jacques Duparc and Thomas A. Henzinger（编），第4646卷. 施普林格，283–297. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74915-8_23 Søren B. Lassen and Paul Blain Levy. 2008. 参数多态的类型化正规形式双模拟. 收录于第23届IEEE计算机科学逻辑年会（LICS 2008）论文集，2008年6月24日至27日，美国宾夕法尼亚州匹兹堡. IEEE计算机学会，341–352. https://doi.org/10.1109/LICS.2008.26 Paul Blain Levy, John Power, and Hayo Thielecke. 2003. 按值调用编程语言中的环境建模. 《信息与计算》185, 2 (2003), 182–210. https://doi.org/10.1016/S0890-5401(03)00088-9 Paul Blain Levy and Sam Staton. 2014. 博弈上的迁移系统. 收录于第二十三届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL）与第二十九届ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS）联合会议，CSL-LICS '14，奥地利维也纳，2014年7月14日至18日，Thomas A. Henzinger and Dale Miller（编）. ACM, 64:1–64:10. https://doi.org/10.1145/2603088.2603150 Eugenio Moggi. 1988. 计算 λ 演算与单子 . LFCS 报告 ECS-LFCS-88-66. 爱丁堡大学. http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/88/ECS-LFCS-88-66/ECS-LFCS-88-66.pdf Eugenio Moggi. 1989. 计算 λ演算与单子. 收录于第四届计算机科学逻辑年会（LICS '89）论文集，美国加利福尼亚州太平洋格罗夫，1989年6月5日至8日. IEEE计算机学会，14–23. https://doi.org/10.1109/LICS.1989.39155 James Hiram Morris. 1968年. 编程语言的λ演算模型. 博士学位论文. 麻省理工学院. https://books.google.is/books?id=DklAAQAAIAAJ Andrew M. Pitts. 2012年. Howe 方法在高阶语言中的应用. 收录于《双模拟与余归纳专题》，Davide Sangiorgi and Jan J. M. M. Rutten（编）. 剑桥理论计算机科学论丛，第52卷. 剑桥大学出版社，197–232. https://doi.org/10.1017/CBO9780511792588.006

Gordon D. Plotkin. 1975. 按名称调用、按值调用与 λ演算. 理论计算机科学1, 2 (1975), 125–159. https://doi.org/10.1016/0304-3975(75)90017-1 Laurent Regnier. 1994. λ项上的一种等价关系. 理论计算机科学 126, 2 (1994), 281–292. https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)90012-4 Simona Ronchi Della Rocca and Luca Paolini. 2004. 参数 λ演算——一种计算元模型. 施普林格. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10394-4 Amr Sabry and Philip Wadler. 1997. 对按值调用的思考. ACM Trans. Program. Lang. Syst. 19, 6 (1997), 916–941. https://doi.org/10.1145/267959.269968 Davide Sangiorgi. 1994. 并发场景中的惰性λ演算. 《信息与计算》 111, 1 (1994), 120–153. https://doi.org/10.1006/inco.1994.1042 Kristian Støvring and Søren B. Lassen. 2009. 顺序控制与状态的完备余归纳句法理论. 收录于《语义学与代数规范：献给 Peter D. Mosses 六十岁生日的论文集》（计算机科学讲义），Jens Palsberg（编），第5700卷. 施普林格，329–375. https://doi.org/10.1007/978-3-642-04164-8_17 Kristian Støvring and Soren B. Lassen. 2007. 顺序控制与状态的完备余归纳句法理论. 收录于第34届ACM编程语言原理研讨会论文集. 法国尼斯，161–172. http://doi.acm.org/10.1145/1190215.1190244 Christopher P. Wadsworth. 1971. λ演算的语义学与语用学. 博士论文. 牛津大学. Christopher P. Wadsworth. 1976. Scott 的 D_∞模型中计算性质与指称性质之间的关系. SIA M J. Comput. 5, 3 (1976), 488–521. https://doi.org/10.1137/0205036

第 6 节的证明（朴素按值调用互模拟相似性）

本节中，我们遵循 Lassen 的 Howe 方法变体来处理范式双模拟，并证明（弱）朴素相似性的相容性。

A.1 小步与大步操作语义等价性的证明

我们将证明，大步求值谓词相对于小步操作语义是可靠且完备的（命题 7.2）。

引理 A.1。若 $t \to_w t'$ 且 $t' \Downarrow_w^k n$，则 $t \Downarrow_w^{k+1} n$。

证明。通过结构归纳法即可轻松证明。 □

命题 7.2 （弱情形下小步与大步的等价性）。$t \Downarrow_w^k n$ 当且仅当$t \to_w^k n$ 且 n 正规。

证明。 利用引理A.1即可得证。 □

A.2 关于范式以及$\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$和$\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\rangle_{nai}$的引理

实际上，在证明命题 7.7 对所有项成立之前，我们需要先证明它仅对范式成立。更准确地说，我们将证明 $\mathcal{R}^{\mathcal{L}}$和 $\langle\mathcal{R}_{\mathcal{L}}\rangle_{nai}$在范式上重合（引理 A.2和引理 A.4）。

引理 A.2。若 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, n'$ 则 $n \mathrm{R}_{\mathcal{L}}\ n'$。

证明。根据 n的形式进行分类讨论。 □

请注意，下一个引理已经证明了命题7.6第一部分结论的一部分。

引理 A.3（范式上的 $\mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}$受约束替换性）。若 $n \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, n'$，$v \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, v'$ 且 $n\{x\leftarrow v\}$ 且 $n'\{x\leftarrow v'\}$ 均为 $\to_w$<style id='27}-正规，则 $n\{x\leftarrow v\}\ \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, n'\{x\leftarrow v'\}$。

证明。根据 n的形式进行分类讨论。情形如下：

- $n = x$与 $n\prime = x$，则 $n\{x\leftarrow v\} = v \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, v\prime = n\prime\{x\leftarrow v\prime\}$。
- $n = y$且 $n' = y$则 $n\{x\leftarrow v\} = y \mathrm{hR}\ \mathrm{Li}_{nai}\, y = n'\{x\leftarrow v'\}$。
- $n = \lambda y.t$且 $n\prime = \lambda y.t\prime$，有 $t \mathrm{R}_{\mathcal{L}}\ t\prime$

$$\frac{t\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,t' \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,v'}{t\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,t'\{x\leftarrow v'\}}$$

因此，由情形 (ncbv 3) 可得 $n\{x\leftarrow v\} = \lambda y.t\{x\leftarrow v\}\ \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\, \lambda y.t'\{x\leftarrow v'\} = n'\{x\leftarrow v'\}$。

- $n = n_1 n_2$且 $n\prime = n\prime_1 n_2$ 且 $n_1 \mathcal{R}_{\mathrm{L}}\ n\prime 1$ 且 $n_2 \mathcal{R}_{\mathrm{L}}\ n\prime 2$。此外，由引理 A.2，$v \mathcal{R}_{\mathrm{L}}\ v\ \prime$.

$$\frac{n_1\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_1' \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,v'}{n_1\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_1'\{x\leftarrow v'\}}\ \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}} \text{ and } \frac{n_2\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_2' \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,v'}{n_2\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_2'\{x\leftarrow v'\}}\ \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}}$$

因此，由于 $n\{x\leftarrow v\}$ 和 $n\{x\leftarrow v'\}$ 是范式，证明得证。

□

引理 A.4。若 $\mathcal{R}$是朴素模拟。若 $n \mathcal{R}_{\mathcal{L}}\ n'$，则 $n \langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\rangle_{nai}\, n'$。

证明。由 对推导 $n \mathrm{R}_{\mathcal{L}} n'$ 使用归纳法。 $n \mathrm{R}^{\mathcal{L}}\, n'$ 的推导中，最后一条规则的情况：

- $\mathcal{L}_{var}$

$$\frac{}{x\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,x}\ \mathcal{L}_{\text{VAR}}$$

于是根据朴素模拟的定义， $x\,\mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\,x$。

- $\mathcal{L}_{\lambda}$

$$\frac{t\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,t'}{n=\lambda x.t\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,\lambda x.t'=n'}\ \mathcal{L}_{\lambda}$$

于是根据带有 $t\mathrm{R}^{\mathcal{L}}\,t'$ 的朴素模拟定义， $n\mathrm{hR}\ \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n'$。

- $\mathcal{L}_{\text{提升}}$

$$\frac{n\,\mathcal{R}\,n'}{n\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n'}\ \mathcal{L}_{\lambda}$$

于是，由于 R 是朴素模拟， $n\mathrm{hRi}_{nai}n'$，因此根据 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}_{nai}$ 的单调性， $n\mathrm{hR}\ \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n'$。

- $\mathcal{L}_{@}$

$$\frac{n_1\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_1'\quad n_2\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_2'}{n=n_1n_2\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_1'n_2'=n'}\ \mathcal{L}_{@}$$

那么，根据朴素定义有 $n\mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai}\,n'$，其中 $n_1\mathrm{R}\,\mathcal{L}\quad n_1'$ 且 $n_2\mathrm{R}\,\mathcal{L}\quad n_2'$。

- $\mathcal{L}_{\text{替换}}$

$$\frac{n_1\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_2\quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,v'}{n=n_1\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}}\,n_2\{x\leftarrow v'\}=n'}\ \mathcal{L}_{\text{SUB}}$$

由归纳假设。 我们有 $n_1\langle\mathcal{R}\mathcal{L}\rangle_{nai}\,n_2$ 且 $v\langle\mathcal{R}\mathcal{L}\rangle_{nai}\,v'$。由引理 A.3， $n_1\{x\leftarrow v\}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{Li}_{nai}\,n_2\{x\leftarrow v'\}$. □

A.3 模拟、归约与替换的一致性

命题 7.7 的证明中SUB，主要难点在于 (规则。以下引理处理了这种情况，它说明替换与演算的模拟和归约相容。

命题 7.6 （模拟、归约与替换的一致性）。设 R 是一个朴素模拟， $n\mathrm{hR}\ \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n'$，且 $v\mathrm{hR}\ \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,v'$。

（1）范式：若 $n\{x\leftarrow v\}$ 是 $\rightarrow_w$-正规，则 $n'\{x\leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_w$-正规，且$n\{x\leftarrow v\}\langle\mathcal{R}\mathcal{L}\rangle_{nai}\,n'\{x\leftarrow v'\}$。（2）步骤：若 $n\{x\leftarrow v\}\rightarrow_w t$，则 $n'\{x\leftarrow v'\}\rightarrow_w u$，且 $t\mathcal{R}\mathcal{L}\quad u$。

证明。 （1）我们只证明 $n'\{x\leftarrow v'\}$ 是一个范式，结论的其余部分由 A.3 得出。对 n 进行归纳法。

- $n=y$， 则 $n\prime=y$ （因为 $n\,\mathrm{hR}\mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n\prime$），这是一个范式。
- $n=x$， 则 $n\prime=x$ （因为 $n\,\mathrm{hR}\mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n\prime$），因此结论成立。
- $n=\lambda y.t$，那么 $n\prime=\lambda y.t\prime$与 $t\mathrm{R}\mathcal{L}\quad t\prime$相联系（因为 $n\mathrm{hR}\ \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}\,n\prime$），我们得出结论，因为 $\lambda y.t\prime\{x\leftarrow v\prime\}$是一个正规范式。
- $n=n_1n_2$，那么 $n'=n_1'n'2$ 与 $n_1\mathrm{R}\,\mathrm{L}\quad n'1$ 和 $n_2\mathrm{R}\,\mathrm{L}\quad n'2$ 相联系。根据引理 A.4， $n_1\mathrm{hR}\ \mathrm{Li}_{nai}\,n'1$ 和 $n_2\mathrm{hR}\ \mathrm{Li}_{nai}\,n'2$。因此，我们可以应用归纳假设，得出 $n'1\{x\leftarrow v'\}$ 和 $n'2\{x\leftarrow v'\}$ 都是正规范式。事实上，经过快速分析可知， $n_1'n'2\{x\leftarrow v'\}$ 是一个正规范式（否则 $n\{x\leftarrow v\}$ 就不是正规范式）。

(2) 对 n进行归纳法。注意， n唯一可能的形态是 n_1n_2，否则，对一个值进行替换并不意味着发生了归约步骤。

- $n_1\{x\leftarrow v\}$是正规形式，且 $n_2\{x\leftarrow v\}$是正规形式。因此，$n_1\{x\leftarrow v\} = \lambda y.a$且 $n_2\{x\leftarrow v\} = v_1$。根据第1点，存在$n'_1 = \lambda y.b$和$n'_2 = v_2$，使得$a \mathrel{R} \mathrel{L} b'$且$v_1 \mathrel{R} \mathrel{L} v_2$（由A.2可知）。因此，$n'\{x\leftarrow v\} \to_w b\{y\leftarrow v_2\}$，由以下推导可得结论：

$$\frac{a \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} b \quad v_1 \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} v_2}{a\{y\leftarrow v_1\} \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} b\{y\leftarrow v_2\}}$$

- $n_1\{x\leftarrow v\} \to_w t_1$或 $n_2\{x\leftarrow v\} \to_w t_1$。
  根据 *i.h.*，$n'_1\{x\leftarrow v'\} \to_w u_1$ 或 $n'_2\{x\leftarrow v'\} \to_w u_1$ 使得 $t_1 \mathrel{R^{\mathcal{L}}} u_1$，因此我们可以在两种情况下轻易找到 u，使得 $n'\{x\leftarrow v\} \to_w u$且 $t \mathrel{R_{\mathcal{L}}} u$。

□

A.4 Lassen 闭包保留朴素模拟

最后，我们证明，朴素模拟的 Lassen 闭包是一个模拟。

命题7.7. 设 $\mathcal{R}$ 是一个朴素模拟。
(1) 技术性辅助陈述：如果 $a \mathrel{R^{\mathcal{L}}} b$且 $a \Downarrow_w^k n$那么 $b \Downarrow_w n'$且 $n \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'$。(2) Lassen 闭包保持朴素模拟：$\mathrm{R}^{\mathcal{L}}$ 是一个朴素模拟。

证明。根据推导 $a \mathrel{R^{\mathcal{L}}} b$ 的最后一条规则进行分类讨论。

(1) 提升：

$$\frac{a \mathrel{\mathcal{R}} b}{a \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} b}\ (\mathcal{L}_{\text{LIFT}}) \text{ and } a \Downarrow_w^k n$$

由于 R 是一个朴素模拟，因此我们有 $a \mathrel{\mathrm{hRi}_{nai}} b$ and $b \Downarrow_w n'$，其中存在某个 n' 使得 $n \mathrel{\mathrm{hRi}_{nai}} n'$。因此，由 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}_{nai}$ 的单调性可得 $n \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'$。

(2) 变量：

$$\frac{}{x \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} x}\ (\mathcal{L}_{\text{VAR}}) \text{ and } x \Downarrow_w^0 x$$

因此得到结果 $(x \Downarrow_w^0 x)$，并且根据 $\mathrm{hR}\,\mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}$ 的定义，有 $x \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} x$。

(3) 抽象：

$$\frac{a \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} b}{\lambda x.a \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} \lambda x.b}\ (\mathcal{L}_{\lambda}) \text{ and } \lambda x.a \Downarrow_w^0 \lambda x.a$$

因此得到结果 $(\lambda x.b \Downarrow_w^0 \lambda x.b)$，并且根据 $\mathrm{hR}\,\mathcal{L}\mathrm{i}_{nai}$ 的定义，有 $\lambda x.a \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} \lambda x.b$。

(4) 应用：

$$\frac{a \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} b \quad p \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} q}{ap \mathrel{\mathcal{R}^{\mathcal{L}}} bq}\ (sc.app) \text{ and } ap \Downarrow_w^k n$$

然后，根据大步推导的最后一条规则进行分类讨论：

- 应用范式：

$$\frac{a \Downarrow_w^k n_1 \quad p \Downarrow_w^h n_2}{ap \Downarrow_w^{k+h} n = n_1 n_2}$$

根据归纳假设（d 严格递减，第一d分量不递增），我们得到$b \Downarrow_w n'_1$和$q \Downarrow_w n'_2$，其中 $n_1 \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'_1$，$n_2 \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'_2$。接下来，我们需要两个事实才能得出结论：

– $n'_1 n'_2$ 是 bq的正规范式：假设它不是正规范式，即 $n'_1 = \lambda x.s$ 且 $n'_2 = v$。根据 $n_1 \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'_1$，$n_2 \mathrel{\mathrm{hR}} \mathcal{L}\mathrm{i}_{nai} n'_2$ 以及朴素模拟的定义，n_1必须是一个抽象，且 n_2 必须是一个值，这与 $n_1 n_2$ 是正规范式这一事实矛盾。因此：

$$\frac{b \Downarrow_w^{k'} n_1' \quad q \Downarrow_w^{h'} n_2'}{bq \Downarrow_w^{k'+h'} n' = n_1' n_2'}$$

– $n_1 n_2 \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}} \rangle_{nai} n_1' n_2'$: 这显然可由第一点以及引理 A.2, $n_1 \mathrm{R}_{\mathcal{L}} \; n_1'$, $n_2 \mathrm{R}_{\mathcal{L}} \; n_2'$。

- β_v步:

$$\frac{a \Downarrow_w^{k} \lambda x.a' \quad p \Downarrow_w^{h} v \quad a'\{x \leftarrow v\} \Downarrow_w^{i} n}{ap \Downarrow_w^{k+h+i+1} n}$$

那么，根据关于d （严格递减，第一分量不增）的归纳假设a和 p，我们得到 $b \Downarrow_w \lambda x.b'$，其中 $\lambda x.a' \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}} \rangle_{nai} \lambda x.b'$且 $q \Downarrow_w v'$，其中 $v \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}} \rangle_{nai} v'$。特别地，根据引理 A.2， $v \mathcal{R}^{\mathcal{L}} v'$。

于是:

$$\frac{a' \mathcal{R}^{\mathcal{L}} b' \quad v \mathcal{R}^{\mathcal{L}} v'}{a'\{x \leftarrow v\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}} b'\{x \leftarrow v'\}}$$

因为 $a'\{x \leftarrow p\} \Downarrow_w^{i} n$与 $i < k+h+i+1$，我们可以对第一个分量应用归纳假设，针对 $a'\{x \leftarrow v\}$ 得到 $b'\{x \leftarrow v'\} \Downarrow_w n'$，其中存在某个 n' 使得 $n \mathrm{hR}_{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai} n'$。最后，注意到 $bq \Downarrow_w n'$ by

$$\frac{b \Downarrow_w \lambda x.b' \quad q \Downarrow_w v' \quad b'\{x \leftarrow v'\} \Downarrow_w n'}{bq \Downarrow_w n'}$$

(5) 元层替换:

$$\frac{a \mathcal{R}^{\mathcal{L}} b \quad v \mathcal{R}^{\mathcal{L}} v'}{a\{x \leftarrow v\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}} b\{x \leftarrow v'\}} \; (sc.subst) \text{ and } a\{x \leftarrow v\} \Downarrow_w^{k} n$$

然后应用大步替换性（引理 7.5），得到 $a \Downarrow_w^{k_1} n_a$ 和 $n_a\{x \leftarrow v\} \Downarrow_w^{k_2} n$，其中 $k = k_1 + k_2$。因此，根据归纳假设（d严格递减，第一个分量不递增）， $b \Downarrow_w n_b$ 和 $n_a \mathrm{hR}^{\mathcal{L}}\mathrm{i}_{nai} n_b$。特别地，根据引理 A.2， $n_a \mathrm{R}_{\mathcal{L}} \; n_b$。于是我们有:

$$\frac{n_a \mathcal{R}^{\mathcal{L}} n_b \quad v \mathcal{R}^{\mathcal{L}} v'}{n_a\{x \leftarrow v\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}} n_b\{x \leftarrow v'\}}$$

分两种情况。

(a) a 不是正规形式，也就是说， $k_1 > 0$ 且 $k_2 < k$。然后，对 k_2（第一个分量）和 $n_a\{x \leftarrow v\}$ 应用归纳假设，得到 $n_b\{x \leftarrow v'\} \Downarrow_w n'$，其中 $n \mathrm{hR}\, \mathrm{Li}_{nai} n'$。根据 $\rightarrow_w$ 的替换性（7.4），可得 $b\{x \leftarrow v'\} \rightarrow_w^* n_b\{x \leftarrow v'\} \rightarrow_w^* n'$，因此由大步与小步之间的等价性（7.2）， $b\{x \leftarrow v'\} \Downarrow_w n'$。

(b) a 是正规，也就是说， $k_1 = 0$ 和 $k_2 = k$。于是 $a = n_a$。分为两种子情况:

- $a\{x \leftarrow v\} = n_a\{x \leftarrow v\}$ 也是正规的。由于我们知道 $n_a \mathrm{hRLi}_{nai} n_b$，并且 $v \mathrm{R}\, \mathrm{L} \; v'$，因此可以应用命题 7.6 的第 1 点，得到 $n_b\{x \leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_w$-正规的，且 $a\{x \leftarrow v\} \mathrm{hR}\, \mathrm{Li}_{nai} n_b\{x \leftarrow v'\}$。只需证明 $b\{x \leftarrow v'\} \Downarrow_w n_b\{x \leftarrow v'\}$，这可由 $b \Downarrow_w n_b$、 $\rightarrow_w$的替换性（引理 7.4）以及 $n_b\{x \leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_w$-正规这一事实推出（并通过引理 7.2）。
- $a\{x \leftarrow v\} = n_a\{x \leftarrow v\}$不是正规
  因此， $n_a\{x \leftarrow v\} \rightarrow_w a' \rightarrow_w^{k-1} n$（归约具有菱形性质，所有归约长度相同，我们任选一个可行的第一步）。然后，根据命题 7.6 的第 2 点，取 $n_a \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}} \rangle_{nai} n_b, n_b\{x \leftarrow v'\} \rightarrow_w b'$，其中 $a' \mathcal{R}^{\mathcal{L}} b'$。

  我们可以对 a' 应用归纳假设（第一个分量递减，因为 $k-1 < k$），从而得到 $b' \Downarrow_w n'$ 其中 $n \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}} \rangle_{nai} n'$。于是命题得证，因为（利用引理 7.4）

$$b\{x \leftarrow v'\} \rightarrow_w^* n_b\{x \leftarrow v'\} \rightarrow_w b' \rightarrow_w^* n'$$

也就是说， $b\{x\leftarrow v'\} \Downarrow_w n'$ 由引理 7.2。 □

B 第 8 节的证明（Lassen 的急切范式模拟)

在本节中，我们给出关于洗牌等价的命题 8.7 的证明，并详细说明 $\equiv_{@l}$的情形。对于 $(\equiv_{@r})_{|ltr}$，即 $\equiv_{@r}$的受限从左到右版本，证明类似。

引理 B.1. $t \equiv_{@l} t'$ 则 $t \simeq_{enf} t'$。

证明。我们证明 $\mathrm{R} = Id \cup \{(t,t') \mid t \equiv_{@l} t'\}$ 是一个 enf 双模拟。首先注意到$Id \subseteq \mathrm{h}Id\mathrm{i}_{enf}$和 $sym(Id) \subseteq \mathrm{h}sym(Id)\mathrm{i}_{enf}$。我们证明 $\{(t,t') \mid t \equiv_{@l} t'\} \subseteq \mathrm{hRi}_{enf}$ （同样的推理也表明 $sym(\mathrm{R})$ 是一个 enf 模拟）。

令 $(a,b) = (((\lambda x.t)u)s, (\lambda x.ts)u) \in \mathrm{R}$。

- 若 $u \not\Downarrow_l$，则 a和 b发散，因此 $(a,b) \in \mathrm{hRi}_{enf}$，由情形 (enf 1) 可知。
- 若 $u \Downarrow_l^k v$，则 $a \to_l^{k+1} t\{x\leftarrow v\}s$和 $b \to_l^{k+1} (ts)\{x\leftarrow v\}$。由此可得 $(a,b) \in \mathrm{hRi}_{enf}$，因为它们都归约到 $t\{x\leftarrow v\}s = (ts)\{x\leftarrow v\}$——事实上 $x \notin \mathrm{fv}(s)$），因此具有相同的正规范式（关系 R 的一部分）。
- 若 $u \Downarrow_l^k L\mathrm{h}yv\mathrm{i}$，则 $a \Downarrow_l^k ((\lambda x.t)L\mathrm{h}yv\mathrm{i})s$和 $b \Downarrow_l^k (\lambda x.ts)L\mathrm{h}yv\mathrm{i}$。由情形 (enf 4)，$(a,b) \in \mathrm{hRi}_{enf}$，因为 $v\,\mathrm{R}\,v$且 $((\lambda x.t)L\mathrm{h}z\mathrm{i})s\,\mathrm{R}\,(\lambda x.ts)L\mathrm{h}z\mathrm{i}$（因为 $\{(t,t_\prime) \mid t \equiv_{@l} t_\prime\} \subseteq \mathrm{R}$）。

因此，由余归纳法可得该结果。 □

命题 8.7。 *enf* 双模拟验证了 *Moggi* 的等价关系以及证明网等价的从左到右限制，但它不验证 η_v，也不验证所有不受限制的证明网等价关系，更不验证按名称调用重复。

证明。 Moggi 的等价关系的证明很直接，且已包含在 Lassen 的原始论文中 [Lassen 2005a]。

我们通过引理 B.1 中所述的一个简单余归纳论证，得出洗牌等价关系的结果，该引理适用于 $\equiv_{@l}$。对于 $(\equiv_{@r})_{|ltr}$，论证类似。

其他等价关系的反例很容易构造出来。 □

C 第 9 节的证明（值替换演算）

在本附录中，我们给出按名调用和按值调用不可测项的定义，证明按值调用不可测项与按值调用 Ω 项一致，随后将其与由按值调用 Ω-项给出的按值调用不可测项的发散刻画联系起来。

按名调用和按值调用不可测项的定义。

定义 C.1（测试上下文与按名调用/按值调用的（不可）检验性）。测试上下文定义如下：

$$\textsc{Testing contexts} \quad T ::= \langle\cdot\rangle \mid Tt \mid (\lambda x.T)t$$

若存在一个测试上下文 T 和一个值 v，使得 $T\langle t\rangle \to_\beta^* v$，则称项 λ-项 t 是按名调用可检验的；否则， t 是按名调用不可检验的。

若存在一个测试上下文 T 和一个值 v，使得 $T\langle t\rangle \to_{\beta_v}^* v$，则称项 λ-项 t 是按值调用可检验的；否则， t 是按值调用不可检验的。

按值调用不可检验项与按值调用 Ω-项一致。 该结论由以下命题得出，而该命题基于一个辅助引理。

引理 C.2. 设 T是一个测试上下文。那么 $T\langle\Omega\rangle$ 是 $\to_{\mathsf{vsc}}$-发散的。

证明。对 T 使用归纳法。分情况讨论：

- 空，即 $T = \mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$。显然。
- 应用，也就是说 $T = T\,t$。由归纳假设 以及 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}t$ 是一个求值上下文可得。
- 应用抽象，也就是说 $T = (\lambda x.T)$。于是 $T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i} = (\lambda x.T)\mathrm{h}\Omega\mathrm{i})t \to_{\mathrm{m}} T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}[x \leftarrow t]$。根据归纳假设，$T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}$ 是 $\to_{\mathrm{vsc}}$-发散的，并且 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}[x \leftarrow t]$ 是一个求值上下文，因此 $T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}[x \leftarrow t]$，所以 $T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}$ 是 $\to_{\mathrm{vsc}}$-发散的。

□

命题 C.3（按值调用不可窥探项 = 按值调用 Ω-项）。项 t 是按值调用不可窥探项，当且仅当它是一个按值调用 Ω-项。

证明。

- 方向 ⇒。在 [Accattoli 和 Guerrieri 2022],中，已证明所有按值调用不可窥探项在按值调用下上下文等价（文中即第 17 页的命题 6.3 和推论 6.4）。
- 方向 ⇐。在 [Accattoli 和 Guerrieri 2022],中，已证明 Plotkin 演算与 VSC 中的按值调用可检验性一致（文中即第 14 页的定理 5.5）；也就是说，可以在定义 C.1 中将 $\to_{\beta_v}$ 替换为 $\to$vsc，而不改变定义。此外，Plotkin 演算与 VSC 也具有相同的上下文等价性。因此，这里我们采用 VSC。反设 t 不是按值调用不可窥探项，也就是说，存在一个测试上 T 下文，使得 $T\mathrm{h}t\mathrm{i} \to^{*}_{\mathrm{vsc}} v$。根据引理 C.2，$T\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}$ 会 $\to$vsc-发散。由于 t 与 Ω 上下文等价（而上下文等价是通过闭合上下文定义的），$T\mathrm{h}t\mathrm{i}$ 必须是一个开项。令 $\mathrm{fv}(T\mathrm{h}t\mathrm{i}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并考虑闭合测试上下文 $T' := \lambda x_n.(\ldots(\lambda x_1.T)\mathrm{I}\ldots)\mathrm{I}$。根据 $\to$vsc 归约在值替换下的稳定性（命题 11.4），有：$T'\mathrm{h}t\mathrm{i} = \lambda x_n.(\ldots(\lambda x_1.T\mathrm{h}t\mathrm{i})\mathrm{I}\ldots)\mathrm{I} \to^{*}_{\mathrm{vsc}} T\mathrm{h}t\mathrm{i}\{x_1 \leftarrow \mathrm{I}\}\ldots\{x_n \leftarrow \mathrm{I}\} \to^{*}_{\mathrm{vsc}} v\{x_1 \leftarrow \mathrm{I}\}\ldots\{x_n \leftarrow \mathrm{I}\}$，这是一个闭合值；而根据引理 C.2，$T'\mathrm{h}\Omega\mathrm{i}$ 会发散。因此，t 与 Ω 并非上下文等价，矛盾。□

发散刻画 Ω-项。我们首先回顾 [Accattoli 和 Paolini 2012]对按值调用不可窥探项的发散刻画。

定理 C.4（VSC 对按值调用不可探究性的发散刻画，[Accattoli 和 Paolini2012]）。项 t 是按值调用不可窥探项，当且仅当 t 是 $\to_{\mathrm{vsc}}$ 发散的。

定理9.3 （VSC 对 Ω-项的发散刻画）。 t 是按值调用 Ω-项，当且仅当 t 是 $\to_{\mathrm{vsc}}$ 发散的。

证明。由定理C.4 和命题 C.3可得。 □

D 第10节的证明（等式基准与值替换演算）

本节回顾结构等价与 $\to_{\mathrm{vsc}}$强交换的证明。该证明与 [Accattoli 和 Paolini 2012], 给出的证明相同；此处呈现该证明，是为了让感兴趣的读者了解结构等价中的哪些片段可以独立地强交换。

命题 10.2 ($\equiv_{str}$与 $\to_{\mathrm{vsc}}$, Accattoli 和 Paolini [2012] 强交换）。设$a \in \{\mathrm{m}, \mathrm{e}_\lambda, \mathrm{e}_v\}$。结构等价 $\equiv_{str}$与 $\to_{\mathrm{vsc}}$ 强交换：若 $t \equiv_{str} u$且 $t \to_a t'$，则 $u \to_a u'$ 且 $t' \equiv_{str} u'$。

证明。定义 $\equiv_0$ 为 $\equiv_{@l} \cup \equiv_{@r} \cup \equiv_{ass} \cup \equiv_{com}$ 的上下文闭包。我们有 $\equiv_{str} = \equiv^{*}_{0}$。我们证明：

$$\text{if } t_0 \equiv_0 t_1 \to_a s_1 \text{ then there exists } w \text{ such that } t_0 \to_a w \equiv_{str} s_1 \tag{1}$$

结论由 $\equiv_0$的自反传递闭包上的归纳法得出。下面证明：自反情形显然；若 $t_0 \equiv_0 t_0' \equiv_0^k t_1 \to_a s_1$，则根据归纳假设存在 w 使得$t_0' \to_a w \equiv_{str} s_1$，并且根据（1）存在 w' 使得 $t_0 \to_a w' \equiv_{str} w \equiv_{str} s_1$。

对（1) 的证明采用 $\equiv_0$ 归纳法。实际上，在继续证明之前，应先证明以下两个简单的代换性质：

(1) 若 $t \equiv_0 t'$，则 $t\{x \leftarrow u\} \equiv_0 t'\{x \leftarrow u\}$。

(2) 若 $u \equiv_0 u'$，则 $t\{x \leftarrow u\} \equiv_{str} t\{x \leftarrow u'\}$。

在 ES 的归纳情形中使用。我们省略它们的证明，因为这些归纳证明都很直接。

- 基本情形：– 交换律：令 $t_0 = t[y \leftarrow u][x \leftarrow s] \equiv_{com} t[x \leftarrow s][y \leftarrow u] = t_1$，其中 $x \notin \mathrm{fv}(u)$ 且 $y \notin \mathrm{fv}(s)$。若 $t_1 \to_a s_1$，则因为：
  - $t \to_a t_\prime$那么 $t_0 = t[y \leftarrow u][x \leftarrow s] \to_a t_\prime[y \leftarrow u][x \leftarrow s] \equiv_{com} t_\prime[x \leftarrow s][y \leftarrow u] = s_1$。
  - $u \to_a u_\prime$ 或者 $s \to_a s_\prime$ 那么它与前一种情况类似。
  - $s = S\langle\rangle$ 且 $t[x \leftarrow S\langle\rangle][y \leftarrow u] \to_{\mathrm{e}} S\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle[y \leftarrow u] = s_1$。那么：

$$\begin{array}{lll} t_0 & \to_{\mathrm{e}} & S\langle t[y \leftarrow u]\{x \leftarrow v\}\rangle \\ & = & S\langle t\{x \leftarrow v\}[y \leftarrow u]\rangle \\ & \equiv_{com} & S\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle[y \leftarrow u] \quad = \quad s_1 \end{array}$$

  - 当 $u = S\langle\rangle$ 且 $t[x \leftarrow s][y \leftarrow S\langle\rangle] \to_{\mathrm{e}} S\langle t[x \leftarrow s]\{y \leftarrow v\}\rangle = s_1$时，与前一种情况类似。

– *Sigma 1*：令 $t_0 = t[x \leftarrow s]u \equiv_{@l} (tu)[x \leftarrow s] = t_1$满足 $x \notin \mathrm{fv}(u)$。若 $t_1 \to_a s_1$是因为 ：
  - $t \to_a t_\prime$那么 $t_0 = t[x \leftarrow s]u \to_a t_\prime[x \leftarrow s]u \equiv_{@l} (t_\prime u)[x \leftarrow s] = s_1$。
  - $s \to_a s_\prime$ 或者 $u \to_a u_\prime$ 那么它与前一种情况类似。
  - $s = S\langle\rangle$ 和 $t_1 = (tu)\ [x \leftarrow S\langle\rangle] \to_{\mathrm{e}} S\langle (tu)\{x \leftarrow v\}\rangle = s_1$。那么：

$$\begin{array}{lll} t_0 & = & t[x \leftarrow S\langle v\rangle]u \\ & \to_{\mathrm{e}} & S\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle u \\ & \equiv_{@l} & S\langle t\{x \leftarrow v\}u\rangle \\ & = & S\langle (tu)\{x \leftarrow v\}\rangle \quad = \quad s_1 \end{array}$$

  - $t = \lambda y.t_\prime$并且 $t_1 = ((\lambda y.t_\prime)u)[x \leftarrow s] \to_{\mathrm{m}} t_\prime[y \leftarrow u][x \leftarrow s]$。那么：

$$\begin{array}{lll} t_0 & = & (\lambda y.t')[x \leftarrow s]u \\ & \to_{\mathrm{m}} & t'[y \leftarrow u][x \leftarrow s] \quad = \quad s_1 \end{array}$$

  注意，这里用到的是 $\equiv_{str}$的自反性。

– 与前一种情况对称的情形，即 $t_0 = (tu)[x \leftarrow s] \equiv_{@l} t[x \leftarrow s]u = t_1$满足$x \notin \mathrm{fv}(u)$，证明方法类似。以下所有情形均如此，因此我们不再赘述对称情形。

– 扩展 $\sigma 3$：设 $t_0 = tu[x \leftarrow s] \equiv_{@r} (tu)[x \leftarrow s] = t_1$满足 $x \notin \mathrm{fv}(t)$。若 $t_1 \to_a s_1$，则因为：
  - $t \to_a t_\prime$那么 $t_0 = tu[x \leftarrow s] \to_a t_\prime u[x \leftarrow s] \equiv_{@r} (t_\prime u)[x \leftarrow s] = s_1$。
  - $s \to_a s_\prime$ 或者 $u \to_a u_\prime$ 那么这与前一种情况类似。
  - $s = S\langle\rangle$ 和 $t_1 = (tu)\ [x \leftarrow S\langle\rangle] \to_{\mathrm{e}} S\langle (tu)\{x \leftarrow v\}\rangle = s_1$。那么：

$$\begin{array}{lll} t_0 & = & tu[x \leftarrow S\langle v\rangle] \\ & \to_{\mathrm{e}} & t\, S\langle u\{x \leftarrow v\}\rangle \\ & \equiv_{@r} & S\langle tu\{x \leftarrow v\}\rangle \\ & = & S\langle (tu)\{x \leftarrow v\}\rangle \quad = \quad s_1 \end{array}$$

∗ $t = \lambda y.t_1$和 $t_1 = ((\lambda y.t_1)u)[x \leftarrow s] \rightarrow_{\mathsf{m}} t_1[y \leftarrow u][x \leftarrow s]$。那么：

$$\begin{array}{lll} t_0 & = & (\lambda y.t')u[x \leftarrow s] \\ & \rightarrow_{\mathsf{m}} & t'[y \leftarrow u[x \leftarrow s]] \\ & \equiv_{ass} & t'[y \leftarrow u][x \leftarrow s] \quad = \quad s_1 \end{array}$$

– 显式替换的结合律：令 $t_0 = t[y \leftarrow u[x \leftarrow s]] \equiv_{ass} t[y \leftarrow u][x \leftarrow s] = t_1$ with $x \notin \mathrm{fv}(t)$。若$t_1 \rightarrow_a s_1$因为：

∗ $t \rightarrow_a t'$则 $t_0 \rightarrow_a t'[y \leftarrow u[x \leftarrow s]] \equiv_{ass} t'[x \leftarrow u][x \leftarrow s] = s_1$。
∗ $u \rightarrow_a u'$或者 $s \rightarrow_a s'$这与前一种情况类似。
∗ $s = S\langle v\rangle$ 和 $t_1 \rightarrow_{\mathsf{e}} S\langle t[y \leftarrow u]\{x \leftarrow v\}\rangle = s_1$。那么

$$\begin{array}{lll} t_0 & = & t[y \leftarrow u[x \leftarrow S\langle v\rangle]] \\ & \rightarrow_{\mathsf{e}} & t[y \leftarrow S\langle u\{x \leftarrow v\}\rangle] \\ & \equiv_{ass} & S\langle t[y \leftarrow u\{x \leftarrow v\}]\rangle \\ & = & S\langle t[y \leftarrow u]\{x \leftarrow v\}\rangle \quad = \quad s_1 \end{array}$$

∗ $u = S\langle v'\rangle$以及 $t_1 = S\langle t[x \leftarrow S'\langle v\rangle]\rangle \rightarrow_{\mathsf{e}} S\langle S'\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle\rangle = s_1$。于是 $t_0 = t[x \leftarrow S\langle S'\langle v\rangle\rangle] \rightarrow_{\mathsf{e}} S\langle S'\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle\rangle = s_1$。注意，此处用到的是 $\equiv_{str}$的自反性。

• 归纳情形。我们只展示有趣的情形：– 应用：这是唯一一个归约与上下文闭包发生交互的情形，即 $t_0 = S\langle \lambda x.t\rangle u \equiv_0 S\langle \lambda x.t'\rangle u = t_1 \rightarrow_a S\langle t'[x \leftarrow u]\rangle = s_1$。于是 $t_0 \rightarrow_a S\langle t[x \leftarrow u]\rangle \equiv_0 S\langle t'[x \leftarrow u]\rangle = s_1$。变体 $t_0 = S\langle \lambda x.t\rangle u \equiv_0 S\langle \lambda x.t\rangle u' = t_1 \rightarrow_a S\langle t[x \leftarrow u']\rangle = s_1$和 $t_0 = S\langle \lambda x.t\rangle u \equiv_0 S'\langle \lambda x.t\rangle u = t_1 \rightarrow_a S'\langle t[x \leftarrow u]\rangle = s_1$类似。应用的所有其他归纳情形都很直接。– 显式替换。我们只展示有趣的情形。

∗ $t_0 = t[x \leftarrow S\langle v\rangle] \equiv_0 t'[x \leftarrow S\langle v\rangle] = t_1 \rightarrow_a S\langle t'\{x \leftarrow v\}\rangle = s_1$。然后根据第一个替换性，我们得到 $t_0 \rightarrow_a S\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle \equiv_0 S\langle t'\{x \leftarrow v\}\rangle$。
∗ $t_0 = t[x \leftarrow S\langle v\rangle] \equiv_0 t[x \leftarrow S\langle v'\rangle] = t_1 \rightarrow_a S\langle t\{x \leftarrow v'\}\rangle = s_1$。然后根据第二个替换性，我们得到 $t_0 \rightarrow_a S\langle t\{x \leftarrow v\}\rangle \equiv_{str} S\langle t\{x \leftarrow v'\}\rangle$。□

E 网相似性的相容性证明MIRM 与 NET

该证明沿用朴素模拟情形的相同结构。我们证明关于 $\equiv_M$ 镜像的一般性陈述。

E.1 小步与大步操作语义等价性的证明 cs

在本小节中，我们利用菱形性质，详细给出我们为值替换演算引入的大步系统完备性的证明。

E.1.1 预备知识。介绍一些关于子归约及其性质的一般性内容，适用于具有菱形性质（或随机下降性质）的演算。

随机下降的一般性质。菱形性质蕴含随机下降（RD）性质，即：

定义E.1（RD性质，Newman）。若关系 $\rightarrow$ 满足以下条件，则称其具有随机下降（RD）性质：对每个元素 t，从 t 出发的所有极大序列长度都相同；若这些序列有限，则它们最终都到达同一个元素。

引理 E.2（子归约的完备性）。令 $\rightarrow$ 为满足 *RD* 性质的归约，且 $\rightarrow_s \subseteq \rightarrow$。若 $\rightarrow_s$和 $\rightarrow$ 具有相同的正规范式，并且 n 是 $\rightarrow$-正规式，则：

$$t \rightarrow^k n \iff t \rightarrow_s^k n$$

证明。对 k作归纳法。

- $k = 0$。显然。
- $k \geq 1$。假设 $t \to t' \to^{k-1} n$。根据假设，t 不是 $\to_s$-范式。因此，存在 t'' 使得$t \to_s t''$。由于 $\to_s \subseteq \to$，于是 $t \to t''$，因此根据 RD 性质，$t'' \to^{k-1} n$。由归纳假设，$t'' \to_{s}^{k-1} n$，故 $t \to_s^k n$。□

E.1.2 值替换演算中的大步与小步。

一种用于刻画大步语义的受限归约。在值替换演算中，我们将子归约 $\to_s \subseteq \to_{vsc}$ 定义如下。

替换　限制的求值上下文 $S ::= \mathrm{h}\cdot\mathrm{i} \mid tS \mid St \mid S[x{\leftarrow}i] \mid t[x{\leftarrow}S]$

Rule at Top Level	Contextual closure
$L_i\langle\lambda x.t\rangle u \mapsto_s L_i\langle t[x{\leftarrow}u]\rangle$	$S\langle t\rangle \to_s S\langle u\rangle$ if $t \mapsto_s u$
$t[x{\leftarrow}L_i\langle v\rangle] \mapsto_s L_i\langle t\{x{\leftarrow}v\}\rangle$	$S\langle t\rangle \to_s S\langle u\rangle$ if $t \mapsto_s u$

注记 E.3. 此子归约是按照大步系统来书写的，以便于引理的证明 *E.8* 并且仍然是一个完备的子归约。

引理 E.4. 如果 $S\langle t\rangle$ 是正规形式，那么 $S = L_i$。

证明。对 S使用归纳法。

- $S = \mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$，结果显然成立。
- $S = L_1[x{\leftarrow}u]$。$L_1\mathrm{h}t\mathrm{i}$ 也处于正规状态，因此根据归纳法，$L_1 = L_{i1}$。如果 u 不是惰性项，那么要么 u会归约，要么 u 是一个值，且整个项会归约；这与假设 $S\mathrm{h}t\mathrm{i}$ 处于正规状态矛盾。因此 $u = i$，所以 $S = L_{i1}[x{\leftarrow}i]$也就是说，$S = L_i$。□

引理 E.5。如果 t 是 $\to_s$-正规项，那么 t 是 $\to_{vsc}$-正规项。

证明。对 t的结构进行归纳。

- $t = x$或 $t = \lambda x.t'$，结论显然成立
- $t = ab$，那么 a 和 b 都是 $\to_s$-正规项，并且根据归纳法，它们是 $\to_{vsc}$-正规项。t 只有一种可能的 $\to_{vsc}$-归约方式。假设 $ab \to_m t'$，那么 $a = S\mathrm{h}\lambda x.a'\mathrm{i}$。由于 a是一个 $\to_{vsc}$范式，根据引理 E.4，我们有 $a = L_i\mathrm{h}\lambda x.a'\mathrm{i}$，这与假设 t是一个 $\to_s$-范式矛盾。
- $t = a[x{\leftarrow}b]$，那么 a和 b是 $\to_s$-正规形式，并且根据归纳法，它们是 $\to_{vsc}$-正规形式。t 进行 $\to_{vsc}$-归约只有一种可能。假设 $a[x{\leftarrow}b] \to_{e_\lambda} t'$，那么 $b = S\mathrm{h}v\mathrm{i}$。由于 b 是一个 $\to_{vsc}$ 范式，根据引理 E.4，我们有 $b = L_i\mathrm{h}v\mathrm{i}$，这与 t是一个 $\to_s$-正规形式的假设矛盾。□

推论 E.6。$\to_{vsc}$ 和 $\to_s$ 具有相同的范式。

Corollary E.7 (Completeness of $\to_s$). $t \to_{vsc}^k n \iff t \to_s^k n$

证明。由定理直接推得E.2 和推论 E.6。□

通过 $\to_s$ 实现大步/小步。

引理 E.8。$t \to_s t'$ 和 $t' \Downarrow_{vsc}^k n \Rightarrow t \Downarrow_{vsc}^{k+1} n$

证明。通过结构归纳法即可轻松证明。注意，无需使用替换性。

□

命题　当 11.3. $t \Downarrow_{vsc}^k n$ 当且仅当存在一个范式 n' 使得 $t \to_{vsc}^k n' \equiv_{@l} n$。

证明。(⇒) 可通过对 $(t \Downarrow^{k}_{\mathsf{vsc}} n)$ 推导进行归纳法得出。
(⇐) 对 k 使用归纳法，并利用以下事实： $t \to^{k}_{\mathsf{vsc}} n$ 蕴含 $t \to^{k}_{\mathsf{s}} n$ (根据定理 E.7)，以及引理E.8。 □

E.2 关于 $\equiv_M$的引理

命题 E.9 ($\langle\cdot\rangle_{\mathsf{mir}_M}\cdot \equiv_M \subseteq \langle\cdot\rangle_{\mathsf{mir}_M}$). 设$\mathcal{R}$是项上的一个关系。若 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathsf{mir}_M} u$且存在 u' 使得 $u \equiv_M u'$，则 $t\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathsf{mir}_M} u'$。

证明。对 $t\mathrm{hRi}_{\mathsf{mir}_M} u$ 进行分类讨论。 □

命题 E.10（$\equiv_M$相对于 $\to_{\mathsf{vsc}}$具有强交换性）。若 $t \equiv_M u$ 且$t \to_{\mathsf{vsc}} t'$，则$u \to_{\mathsf{vsc}} u'$ 且 $t' \equiv_M u'$。

命题 E.11（$\equiv_M$保持范式）。 $\forall t, u,\ t \equiv_M u$和 t是范式，意味着u 是范式。

证明。由 $\equiv_M$相对于 $\to_{\mathsf{vsc}}$具有强交换性这一事实可得。 □

命题 E.12（$\equiv_M$具有替换性）。 $\forall t,\ u,\ v,\ \ t \equiv_M u$蕴含 $t\{x \leftarrow v\} \equiv_M u\{x \leftarrow v\ \ \}$

E.3 相容性证明

证明中一个有用的工具是替换性，它适用于小步语义和大步语义，即命题11.4。

命题 E.13（$\to_{\mathsf{vsc}}$ 的替换性）。 $t \to_{\mathsf{vsc}} t' \Rightarrow t\{x \leftarrow v\} \to_{\mathsf{vsc}} t'\{x \leftarrow v\}$

证明。对 $t \to_{\mathsf{vsc}} t'$ 作归纳（对上下文的归纳），并利用这样一个事实：将某个变量替换为值后，值仍然是值。□

引理 E.14（$\Downarrow_{\mathsf{vsc}}$ 的替换性）。对于 $t,\ v,$
$t\{x \leftarrow v\} \Downarrow^{k}_{\mathsf{vsc}} n \implies \exists k',\ n'$使得$t \Downarrow^{k'}_{\mathsf{vsc}} n'$且 $n'\{x \leftarrow v\} \Downarrow^{k-k'}_{\mathsf{vsc}} n$

证明。假设 $t\{x \leftarrow v\} \Downarrow^{k}_{\mathsf{vsc}} n$，那么 $t \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$，因为如果它发散，那么根据替换下归约的稳定性（引理 E.13），前者也会发散。令 $k',\ t \Downarrow^{k'}_{\mathsf{vsc}} n'$，则 $t\{x \leftarrow v\} \to^{k'}_{\mathsf{vsc}} \equiv_{@l} n'\{x \leftarrow v\}$，因此 $n'\{x \leftarrow v\} \Downarrow^{k-k'}_{\mathsf{vsc}} n$，因为归约 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 具有菱形性质（因此所有归约序列长度相同）。 □

E.4 范式上 $\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathsf{mir}_M}$与 $\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}$的等价性。

与朴素相似性的相容性证明一样，我们需要先在范式上完成主要证明，然后再将其推广到任意项。

引理 E.15. 若 $n\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} n'$则 $n\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M} n'$。

证明。对 $n = v_t \mid xn \mid \mathrm{i}n \mid n[x \leftarrow i]$ 进行分类讨论，并使用 ($\mathrm{L}{\equiv_M}$) 规则。 □

引理 E.16（范式上 $\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M}$ 的受约束替换性）。若 $n_1\mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} n_2$，$v_p\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} v_q$ 且 $n_1\{x \leftarrow v_p\}$ 且 $n_2\{x \leftarrow v_q\}$ 均为 $\to_{\equiv_{@l}}$-正规，则 $n_1\{x \leftarrow v_p\}\ \mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} n_2\{x \leftarrow v_q\}$。

证明。对 n_1进行分类讨论。分情况如下：

- $n_1 = x$和 $n_2 = x$那么 $n_1\{x \leftarrow v_p\} = v_p\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} v_q = n_2\{x \leftarrow v_q\}$。
- $n_1 = y$且 $n_2 = y$然后 $n_1\{x \leftarrow v_p\} = y\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathsf{mir}_M} y = n_2\{x \leftarrow v_q\}$。

- $n_1 = \lambda y.t$ 且 $n_2 = \lambda y.t'$ 对于 $t \mathrel{R}_{\mathcal{L}^M} t'$，我们有

$$\frac{t \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} t' \quad v_s \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v_r}{t\{x \leftarrow v_p\} \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} t'\{x \leftarrow v_q\}}$$

因此，根据情形（mir_M 3） $n_1\{x \leftarrow v_p\} = \lambda y.t\{x \leftarrow v_p\} \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} \lambda y.t'\{x \leftarrow v_q\} = n_2\{x \leftarrow v_q\}$。

- $n_1 = n'_1 n''_1$ 和 $n_2 \equiv_M n'_2 n''_2$，满足 $n'_1 \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} n'_2$ 且 $n''_1 \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} n''_2$。由 $n_2 \equiv_M n'_2 n''_2$，根据 $\equiv_M$ 的替换性（命题 E.12），我们推得 $n'_2\{x \leftarrow v_q\} n''_2\{x \leftarrow v_q\} \equiv_M n_2\{x \leftarrow v_q\}$。
由于 $n_1\{x \leftarrow v_p\}$ 和 $n_2\{x \leftarrow v_q\}$ 是 $\to_{\equiv_{@l}}$-正规，根据命题 E.11，$n'_1\{x \leftarrow v_p\}$、$n'_2\{x \leftarrow v_q\}$、$n''_1\{x \leftarrow v_p\}$ 和 $n''_2\{x \leftarrow v_q\}$ 也都是 $\to_{\equiv_{@l}}$- 正规，并且 $n'_1\{x \leftarrow v_p\}$、$n'_2\{x \leftarrow v_q\}$ 不是近似抽象（即，对于任意 L_i，都不是 $\neq L_i \mathrm{h}\lambda y.t\mathrm{i}$）。

要得出 $n_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} n_2\{x \leftarrow v\}$，剩下唯一要证明的是
$n'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} n'_2\{x \leftarrow v'\}$ 和 $n''_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} n''_2\{x \leftarrow v'\}$。
我们很容易推出以下事实：（$v \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} v'$ 蕴含 $v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'$ 根据引理 E.15）

$$\frac{n'_1 \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'_2 \quad v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'}{n'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'_2\{x \leftarrow v'\}} \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}} \quad \text{and} \quad \frac{n''_1 \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n''_2 \quad v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'}{n''_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n''_2\{x \leftarrow v'\}} \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}}$$

- $n_1 = n_{\prime 1}[y \leftarrow i_{\prime_1}]$ 以及 $n_2 \equiv_M n_{\prime 2}[y \leftarrow i_{\prime_2}]$，其中 $i_{\prime 1} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathcal{L}^M}} i_{\prime 2}$ 且 $n_{\prime 1} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathcal{L}^M}} n_{\prime 2}$。
$n_1\{x \leftarrow v\}$ 是正规的假设，等价于 $i'_1\{x \leftarrow v\}$ 是惰性项且 $n'_1\{x \leftarrow v\}$ 是正规的假设。

由 $n_2 \equiv_M n'_2[y \leftarrow i'_2]$，根据 $\equiv_M$ 的替换性（命题 E.12），我们推得 $n_2\{x \leftarrow v'\} \equiv_M (n'_2\{x \leftarrow v'\})[y \leftarrow i'_2\{x \leftarrow v'\}]$。由于 $\equiv_M$ 保持范式（命题 E.11），$n_2\{x \leftarrow v'\}$ 是正规的假设，等价于 $i'_2\{x \leftarrow v'\}$ 是惰性项且 $n'_2\{x \leftarrow v'\}$ 是正规的假设。
为了得出 $n_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} n_2\{x \leftarrow v\}$，只剩下要证明
$i'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} i'_2\{x \leftarrow v'\}$ 和 $n'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathrm{R}_{\mathrm{L}^M}} n'_2\{x \leftarrow v'\}$。
我们很容易推出以下事实：（$v \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} v'$ 蕴含 $v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'$ 由引理 E.15）

$$\frac{i'_1 \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} i'_2 \quad v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'}{i'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} i'_2\{x \leftarrow v'\}} \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}} \quad \text{and} \quad \frac{n'_1 \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'_2 \quad v \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} v'}{n'_1\{x \leftarrow v\} \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'_2\{x \leftarrow v'\}} \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}}$$

□

引理 E.17。 若 $\mathcal{R}$ 是一个 mir_M 模拟。若 $n \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'$，则 $n \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} n'$。

证明。对推导 $n \mathrel{\mathrm{R}_{\mathcal{L}^M}} n'$ 使用归纳法。推导 $n \mathrel{\mathrm{R}_{\mathcal{L}^M}} n'$ 中最后一条规则的情形：

- $\mathcal{L}$ 值双模拟 var

$$\frac{}{x \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} x} \mathcal{L}_{\mathrm{VAR}}$$

则按情形（mir_M 2）得出 $x \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} x$。

- $\mathcal{L}_\lambda$

$$\frac{t \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} t'}{n = \lambda x.t \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} \lambda x.t' = n'} \mathcal{L}_\lambda$$

则按情形（mir_M 3），结合 $t \mathrel{\mathrm{R}_{\mathcal{L}^M}} t'$ 得出 $n \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} n'$。

- $\mathcal{L}_{LIFT}$

$$\frac{n \mathrel{\mathcal{R}} n'}{n \mathrel{\mathcal{R}_{\mathcal{L}^M}} n'} \mathcal{L}_\lambda$$

则 $n \mathrm{h} \quad \mathrm{Ri}_{\mathrm{mir}_M} n'$，因为 R 是一个 mir_M 模拟。根据 $\mathrm{h} \cdot \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}$ 的单调性，$n \mathrel{\mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}}} n'$。

- $\mathcal{L}_{@}$

$$\frac{n_1 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_1' \quad n_2 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_2'}{n = n_1 n_2 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_1' n_2' = n'} \mathcal{L}_{@}$$

那么 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} n'$，由情形 ($\mathrm{mir}_M$ 4) 可得，其中 $n_1 \mathrm{R}\, \mathcal{L}^M\, n_1'$，且 $n_2 \mathrm{R}\, \mathcal{L}^M\, n_2'$。

- $\mathcal{L}_{\text{显式替换}}$

$$\frac{n_1 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_2 \quad i_1 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} i_2}{n = n_1[x \leftarrow i_1] \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_2[x \leftarrow i_2] = n'} \mathcal{L}_{\mathrm{ESUB}}$$

那么 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} n'$ 按情形（mir_M 5），满足 $i_1 \mathrm{R}\, \mathcal{L}^M\, i_2$ 和 $n_1 \mathrm{R}\, \mathcal{L}^M\, n_2$。

- $\mathcal{L}_{\text{下标}}$

$$\frac{n_1 \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_2 \quad v \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} v'}{n = n_1\{x \leftarrow v\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_2\{x \leftarrow v'\} = n'} \mathcal{L}_{\mathrm{SUB}}$$

根据 归纳假设 我们有 $n_1 \langle \mathcal{R}\mathcal{L}^M \rangle_{\mathrm{mir}_M} n_2$ 和 $v_p \langle \mathcal{R}\mathcal{L}^M \rangle_{\mathrm{mir}_M} v_q$。根据引理 E.16, $n_1\{x \leftarrow v_p\}$ $\mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ n_2\{x \leftarrow v_q\}$。

- $\mathrm{L}_{\equiv_M}$

$$\frac{n \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_1 \quad n_1 \equiv_M n'}{n \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n'} \mathcal{L}_{\equiv_M}$$

根据 归纳假设，$n \langle \mathcal{R}\mathcal{L}^M \rangle_{\mathrm{mir}_M} n_1$ 这意味着根据命题 E.9 $n \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} n'$ 因为 $n' \equiv_M n_1$。 □

E.5 用于关联双模拟等价范式的句法引理

本小节中的引理是必要的，因为镜像模拟是以自上而下的方式定义的，而我们有时需要能够自下而上地推理，尤其是在存在显式替换以及相隔一个距离的归约时。

引理 *E.18*。若 $L_i \langle x \rangle i \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_i' \langle x \rangle$（或 $L_i \langle v \rangle i \mathrm{hR}\, L^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_i' \langle v' \rangle i$），则要么 $L_i, L_i' = h \cdot i, h \cdot i$，要么（对于 $t = x or\ v and\ t' = x or\ v$）$L_i \langle t \rangle i = L_{i1} \langle t \rangle i[y \leftarrow i]$ 且 $L_i' \langle t' \rangle i \equiv_M L_{i1}' \langle t' \rangle i[y \leftarrow i']$，其中 $L_{i1} \langle x \rangle i \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_{i1}' \langle x \rangle i$（或 $L_{i1} \langle v \rangle i \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_{i1}' \langle v' \rangle i$），并且 $i \mathrm{hR}\, L^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} i'$。

证明。通过反证法并穷尽所有情况可知，$L_i \mathrm{hxi}\ \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ L_i' \mathrm{hxi}$（或 L_i $\mathrm{hvi}\ \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_i' \mathrm{hv'i}$）只有这些可能性。

- 如果两个列表中只有一个为空：根据 nafex 的定义，$x \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ i[y \leftarrow i,]$（或 $x \mathrm{hR} \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ n[y \leftarrow i,]$）是不可能的。
- 如果 $L_i = L_{i1}[y \leftarrow i]$ 且 $L_{ni} \equiv_M L_{ni1}[z \leftarrow i,],$，我们再次得到 $\neg(n[y \leftarrow i] \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ n,[z \leftarrow i,])$。 □

这个引理E.18为我们提供了关于 L_i的 L_i'归纳原理，当 $L_i \langle x \rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} L_i' \langle x \rangle$（或$L_i \langle v \rangle$ $\langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathrm{mir}_M} L_i' \langle v' \rangle$。

引理 E.19. $L_i \mathrm{hvi}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_i' \mathrm{hv'i} \Longleftrightarrow\ v \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} v'$ 且 $L_i \mathrm{hxi}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} L_i' \mathrm{hxi}$ *(x 是新鲜的)*

证明。 对列表 L_i, L_i'进行归纳。（根据 mir_M的定义，它们的大小相同——参见引理E.18）

- $L_i, L_{ni} = \mathrm{h} \cdot \mathrm{i}, \mathrm{h} \cdot \mathrm{i}$ 那么 $v \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ v, \Longleftrightarrow\ v \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ v,$ 且 $x \mathrm{hR} \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}\ x$ 总是由情形 (mir_M 2) 成立。
- $L_i \mathrm{hvi} = L_{i1} \mathrm{hvi}[y \leftarrow i]$ 和 $L_i \mathrm{hv'i} \equiv_M L_{i1} \mathrm{hv'i}[y \leftarrow i',$ 且 $L_{i1} \mathrm{hvi}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ L_{i1} \mathrm{hv'i}$ 和 $i \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ i',$ 于是根据归纳假设，$L_{i1} \mathrm{hv'i}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ L_{i1} \mathrm{hv'i} \Longleftrightarrow\ L_{i1} \mathrm{hxi}\ \mathrm{hR} \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ L_{i1} \mathrm{hxi}$ 和 $v \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ v'$

by Lemma E.15, $L_{i1}\langle v'\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_{i1}\langle v'\rangle \iff L_{i1}\langle x\rangle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} L'_{i1}\langle x\rangle$, $v \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} v'$ and $i \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} i'$
and finally by case (nafex 5)
$L_i\langle v\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_i\langle v'\rangle \iff L_i\langle x\rangle = L_{i1}\langle x\rangle[y{\leftarrow}i] \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_{i1}\langle x\rangle[y{\leftarrow}i'] \equiv_M L'_i\langle x\rangle$, $v \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} v'$.

□

引理 E.20。若 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$ 则 $(n = L_i\langle v_t\rangle \iff n' = L'_i\langle v'_t\rangle)$

证明。 对 L_i 使用 E.15 和 E.17。 □

推论 E.21。若 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$ 则 $(n = i \iff n' = i')$

引理 E.22。设 n 和 n' 为正规范式，且 L_i 和 L'_i 为惰性替换上下文，它们可能捕获 n 和 n' 的自由变量。$n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$ 和 $L_i \mathrm{hx i\ hR\ L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L'_i \mathrm{hx i}$ (x 是新鲜的) $\Rightarrow L_i \mathrm{hn i\ hR\ L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mi}_{\mathtt{r}_M}} L'_i\langle n'\rangle$

证明。对 L_i， L'_i 进行归纳。 □

Lemma E.23. *$n \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$ and $L_i\langle x\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_i\langle x\rangle \Rightarrow L_i\langle xn\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_i\langle xn'\rangle$*

证明。对 L_i， L'_i 进行归纳。 □

Lemma E.24. *$n \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$ and $L_i\langle \mathbb{i}\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_i\langle \mathbb{i}'\rangle \Rightarrow L_i\langle \mathbb{i}n\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L'_i\langle \mathbb{i}' n'\rangle$*

证明。对 L_i进行归纳。
由于 $L_i \mathrm{hii\ hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L'_i \mathrm{hi'i}$，有两种情况：

- $L_i = \mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$，且我们属于情形 $(\mathtt{mir}_M\ 4)$，也就是说 $L_i \mathrm{hi}, \mathrm{i} \equiv_M \mathrm{i}, 1$ 且 $\mathrm{i\ R}_{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}, 1$。因此，$\mathrm{i}n \mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} \mathrm{i}_1 n, \equiv_M L_i \mathrm{hi}, n, \mathrm{i}$ 成立。
- $L_i = L_{i1}[y{\leftarrow}i]$ 并且我们属于情形 $(\mathtt{mir}_M\ 5)$，也就是说 $L'_i \mathrm{hi'i} \equiv_M L'_{i1} \mathrm{hi'1i}[x{\leftarrow}i']$（我们无法从惰性项转到答案，并且选择模 $\equiv@_l$ 的范式），其中 $L_{i1} \mathrm{hii\ R\ L}^M\ L'_{i1} \mathrm{hi'1i}$ 且 $i \mathrm{R\ L}^M\ i'$。应用引理 E.17，并通过归纳假设得到 $L_{i1} \mathrm{hi}n \mathrm{i\ hR\ L}^M \mathrm{i} \mathtt{mir}_M\ L'_{i1} \mathrm{hi'}_1 n' \mathrm{i}$。根据引理 E.15 和 $\mathtt{mir}_M$ 的定义，我们可以得出结论。□

E.6 正规替换项的刻画

下面两个引理刻画了这样的正规项：将一个变量替换为值后，仍然保持正规——根据强交换和正规形式的保持性，这一刻画不依赖于 $\equiv_M$。

引理 E.25。 $n\{x{\leftarrow}v\}$ 正规，当且仅当 $n \neq E\langle xn\rangle$。（以及 $v \neq y$）

引理 E.26。 $i\{x{\leftarrow}v\}$ 是惰性项，当且仅当（i 是惰性项，） $i\{x{\leftarrow}v\}$ 是正规项。

E.7 $\mathtt{mir}_M$ 模拟、归约与替换的一致性

我们将 $\mathtt{mir}_M$ 模拟的一致性命题拆分为两个引理来证明，并注意到第一个陈述中的一部分已在引理E.16中证明。

引理 E.27. 设 $\mathcal{R}$ 是一个 mir_M 模拟， $n\langle \mathcal{R}\mathcal{L}^M\rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$，且 $v\langle \mathcal{R}\mathcal{L}^M\rangle_{\mathtt{mir}_M} v'$。若 $n\{x{\leftarrow}v\}$ 是 $\to_{\equiv@_l}$-正规，则 $n'\{x{\leftarrow}v'\}$ 是 $\to_{\equiv@_l}$-正规。

证明。对范式归纳 n，其中 $n\{x{\leftarrow}v\}$ 是 $\to_{\equiv@_l}$-正规：

- 变量。两种子情况：

– $n = x$ 因此 $n\{x\leftarrow v\} = v$。然后 $n' = x$ 根据情况（mir_M 2）和 $n'\{x\leftarrow v'\} = v'$，它是$\rightarrow^{\equiv_{@\iota}}$-正规。– $n = y$ 因此 $n\{x\leftarrow v\} = y$。然后 $n' = y$ 根据情况（mir_M 2）和 $n'\{x\leftarrow v'\} = y$，它是$\rightarrow^{\equiv_{@\iota}}$-正规。

• 抽象，也就是说，$n = \lambda y.t$因此 $n\{x\leftarrow v\} = \lambda y.t\{x\leftarrow v\}$。那么 $n\prime = \lambda y.t\prime$，其中 $t\,\mathrm{R}\,\mathcal{L}^M\,t'$。我们有 $n\prime\{x\leftarrow v\prime\} = \lambda y.t\prime\{x\leftarrow v\prime\}$，它是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-范式。
• 替换惰性项，也就是说，$n = n_1[y\leftarrow i_1]$因此 $n\{x\leftarrow v\} = n_1\{x\leftarrow v\}[y\leftarrow i_1\{x\leftarrow v\}]$。$n\{x\leftarrow v\}$ 是范式，等价于 $i_1\{x\leftarrow v\}$ 和 $n_1\{x\leftarrow v\}$ 是范式。那么 $n' \equiv_M n'_1[y\leftarrow i'_1]$，其中$i_1\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,i'1$ 且 $n_1\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n'1$，这由引理 E.17 推出 $i_1\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,i'1$ 和 $n_1\mathrm{hRL}^M\mathrm{imir}_M\,n'1$。根据归纳假设，我们于是有 $i'1\{x\leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-范式，且 $n'1\{x\leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-范式：这等价于 $n'\{x\leftarrow v'\}$ 是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-范式，根据命题 E.11。

• 应用正规形，也就是说，$n = n_1 n_2$。然后我们有三种子情况：– $n = xn_2$ 且 v 不是抽象，则 $n' \equiv_M xn'2$，且 $n_2\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n'2$；由此根据引理 E.17 可得$n_2\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,n'2$。根据归纳假设，我们接着有 $n'2\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规：这等价于 $n'\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规，由命题 E.11 得出。– $n = yn_2$，则 $n' \equiv_M yn'2$，且 $n_2\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n'2$；由此根据引理 E.17 可得 $n_2\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,n'2$。根据归纳假设，我们接着有 $n'2\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规：这等价于 $n'\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规，由命题 E.11 得出。– $n = \mathrm{i}n_2$，且$\mathrm{i}\{x\leftarrow v\}$是一个应用惰性项，则 $n' \equiv_M \mathrm{i}'\,n'2$，其中 $\mathrm{i}\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\mathrm{i}'$ 且 $n_2\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n'2$；由此根据引理 E.17 可得 $\mathrm{i}\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\mathrm{i}'$ 以及 $n_2\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,n'2$。根据归纳假设，我们接着有$\mathrm{i}'\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规，$n'2\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规：根据命题 E.11 和引理 E.26，这等价于 $n'\{x\leftarrow v'\}$是 $\rightarrow_{\equiv@\iota}$-正规。□

引理 E.28。若 $n_a\langle\mathcal{R}\mathcal{L}^M\rangle_{\mathrm{mir}_M}\,n_b$，$v\mathcal{R}\,\mathcal{L}^M\,v'$ 且 $n_a\{x\leftarrow v\}\rightarrow_{\mathrm{vsc}} a'$，则 $n_b\{x\leftarrow v'\}\rightarrow_{\mathrm{vsc}} b'$ 且$a'\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b'$

证明。(我们将 和 $v' = \lambda y.r\prime$ 记作 $r\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,r\prime$——利用以下事实：$v\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,v' \Rightarrow v\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathrm{mir}_M}\,v'$)，由 E.17 得出。)

若 $n_a\{x\leftarrow v\}\rightarrow_{\mathrm{vsc}} a'$，则 $n_a = E\langle xn\rangle$（E是执行归约的上下文）。证明（对 E作归纳法）$a'\,\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M}\,b'$。

• $E = \mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$ 时则有 $n_a = xn$，由 $n_a\mathrm{hRL}^M\mathrm{imir}_M\,n_b$可得 $n_b \equiv_M xn'$，使得 $n\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n'$。根据 $\equiv_M$的替换性（命题 E.12），$n_b\{x\leftarrow v'\} \equiv_M v'n'\{x\leftarrow v'\}\rightarrow\mathrm{vsc}\ r'[y\leftarrow n'\{x\leftarrow v'\}]$根据命题 E.10，存在 b'，使得 $r'[y\leftarrow n'\{x\leftarrow v'\}] \equiv_M b'$，且 $n_b\{x\leftarrow v'\}\rightarrow\mathrm{vsc}\,b'$。我们还有 $n_a\{x\leftarrow v\}\rightarrow\mathrm{vsc}\ r[y\leftarrow n\{x\leftarrow v\}] = a'$，并且可以构造以下推导：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{n\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,n' \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,v'}{r\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,r' \quad n\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,n'\{x\leftarrow v'\}}\,\mathcal{L}_{\mathrm{ESUB}}}{r[y\leftarrow n\{x\leftarrow v\}]\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,r'[y\leftarrow n'\{x\leftarrow v'\}]} \quad r'[y\leftarrow n'\{x\leftarrow v'\}] \equiv_M b'}{a'\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b'}\,\mathcal{L}_{\equiv_M}$$

因此得到结果 $n_a\{x\leftarrow v\}\rightarrow_{\mathrm{vsc}} a'$，$n_b\{x\leftarrow v'\}\rightarrow_{\mathrm{vsc}} b'$以及 $a'\,\mathrm{R}\,\mathcal{L}^M\,b'$。

• $E = uE_1(u = i$因为 n_a是正规形式) 则 $n_a = iE_1\mathrm{hsi}$（其中 $s = xn'$）。然后根据 $n_a\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,n_b$，$n_b \equiv_M i'n_1$与 $i\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,i'$ 以及 $E_1\mathrm{hsi}\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,n_1$。$E_1\mathrm{hsi}\{x\leftarrow v\}\rightarrow\mathrm{vsc}\ t$由假设成立（$n_a\{x\leftarrow v\}\rightarrow\mathrm{vsc}a'$ 在此情形下是 $i\{x\leftarrow v\}E_1\mathrm{hsi}\{x\leftarrow v\}\rightarrow\mathrm{vsc}\,i\{x\leftarrow v\}t$），并且 $E_1\mathrm{hsi}\,\mathrm{hR}\,\mathrm{L}^M\mathrm{imir}_M\,n_1$（范式，应用引理 E.17），因此由归纳假设，$n_1\{x\leftarrow v'\}\rightarrow\mathrm{vsc}\ t'$，且 $t\,\mathrm{R}\,\mathrm{L}^M\,t'$。

根据 $\equiv_M$、 $n_b\{x\leftarrow v'\} \equiv_M i'\{x\leftarrow v'\}n_1\{x\leftarrow v'\} \to_{\mathsf{vsc}} i'\{x\leftarrow v'\}t'$ 的替换性和强交换，可推出 $n_b\{x\leftarrow v'\}$，且满足 $i'\{x\leftarrow v'\}t' \equiv_M b'$。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{i\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,i' \quad v\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,v'}{i\{x\leftarrow v\}\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,i'\{x\leftarrow v'\}} \quad t\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,t'}{i\{x\leftarrow v\}t\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,i'\{x\leftarrow v'\}t'} \qquad i'\{x\leftarrow v'\}t' \equiv_M b'}{a'\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b'}$$

因此 $n_a\{x\leftarrow v\} \to_{\mathsf{vsc}} a', n_b\{x\leftarrow v'\} \to_{\mathsf{vsc}} b'$和 $a'\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M} b'$。

- 归纳法中其余的情形（$E = E_1u, E = u[z\leftarrow E_1]$或 $E = E_1[z\leftarrow u]$）可由非常相似的论证推出。

□

E.8 Lassen 的镜像闭包保留 mir_M 模拟

完成所有这些预备工作后，我们终于可以证明 mir_M 相容性，其证明与朴素相似性的情形非常相似。

命题 E.29. 设$\mathcal{R}$ 是 mir_M 模拟。
(1) 技术性辅助陈述：若 $a\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M} b$且 $a \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$则 $b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$且 $n\mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} n'$。(2) 镜像 Lassen 闭包保留 mir_M 模拟： $\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M}$是 mir_M 模拟。

证明。(1) 对（k, d）进行归纳，其中 d是 $a\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M} b$ 推导的大小。

根据推导 $a\,\mathrm{R}^{\mathcal{L}^M}\,b$ 的最后一条规则进行分类讨论。

(a) 提升：

$$\dfrac{a\,\mathcal{R}\,b}{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b}\ (\mathcal{L}_{\mathrm{LIFT}}) \quad \text{and } a \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$$

由于 R 是 mir_M 模拟，因此我们有 $a\mathrm{hRi}_{\mathrm{mir}_M}b$ 且 $b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$ 存在某个 n' 使得$n\mathrm{hRi}_{\mathrm{mir}_M}n'$。因此，根据 $\mathrm{h}\cdot\mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M}$ 的单调性，有 $n\mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} n'$。

(b) 变量：

$$\dfrac{}{x\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,x}\ (\mathcal{L}_{\mathrm{VAR}}) \quad \text{and } x \Downarrow^0_{\mathsf{vsc}} x$$

因此得到结果（$x \Downarrow^0_{\mathsf{vsc}} x$），并根据 $\mathrm{mir}_M, x\mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} x$ 的定义。

(c) 抽象：

$$\dfrac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b}{\lambda x.a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,\lambda x.b}\ (\mathcal{L}_{\lambda}) \quad \text{and } \lambda x.a \Downarrow^0_{\mathsf{vsc}} \lambda x.a$$

因此得到结果（$\lambda x.b \Downarrow^0_{\mathsf{vsc}} \lambda x.b$），并根据 $\mathrm{mir}_M, \lambda x.a\mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}\mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} \lambda x.b$ 的定义。

(d) 应用：

$$\dfrac{a\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,b \quad p\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,q}{ap\,\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\,bq}\ (sc.app) \quad \text{and } ap \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$$

然后，对大步推导的最后一条规则进行分类讨论，

(i) 已应用变量：

$$\dfrac{a \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle x\rangle \quad p \Downarrow^h_{\mathsf{vsc}} n}{ap \Downarrow^{k+h}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle xn\rangle}$$

根据归纳假设（d严格递减，第一分量不增加），我们得到$b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$满足 $L_i\langle x\rangle\,\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathrm{mir}_M}\,n'$（因此由引理 E.20， $n' = L'_i\langle x\rangle$），并且 $q \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$满足

$n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$。那么：

$$\frac{b \Downarrow_{\mathtt{vsc}} i' = L_i'\langle x\rangle \quad q \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n'}{bq \Downarrow_{\mathtt{vsc}} L_i'\langle xn'\rangle}$$

根据 mir 的定义$_M$，并根据引理 E.23 我们有 $L_i\langle xn\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L_i'\langle xn'\rangle$。

（ii）应用惰性项：

$$\frac{a \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k} L_i\langle \mathbb{i}_1\rangle = i \quad p \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{h} n}{ap \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k+h} L_i\langle \mathbb{i}_1 n\rangle}$$

根据归纳假设（d严格递减，第一分量不增加），我们得到$b \Downarrow_{\mathtt{vsc}} i' = L_i'\mathrm{hi}_1'\mathrm{i}$（$\rightarrow_{\equiv@l}$范式，且根据推论 E.21，它是一个惰性项）以及$q \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n'$满足 $i \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} i'$，$n \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$。于是：

$$\frac{b \Downarrow_{\mathtt{vsc}} i' = L_i'\langle \mathbb{i}_1'\rangle \quad q \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n'}{bq \Downarrow_{\mathtt{vsc}} L_i'\langle \mathbb{i}_1' n'\rangle}$$

根据引理 E.24，$L_i\langle \mathbb{i}_1 n\rangle \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathtt{mir}_M} L_i'\langle \mathbb{i}_1' n'\rangle$。

（iii）惰性项替换：不适用。

(iv) m步骤：

$$\frac{a \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k} L_i\langle \lambda x.a'\rangle \quad a'[x\leftarrow p] \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{i} n}{ap \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k+i+1} L_i\langle n\rangle}$$

于是，根据归纳假设（d严格递减，第一分量不增），对a，我们得到 $b \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n_b$，其中 $L_i \mathrm{h}\lambda x.a'\mathrm{i}\ \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n_b$（因此根据引理 E.20 $n_b = L_i'\mathrm{h}\lambda x.b'\mathrm{i}$）即 $L_i \mathrm{h}\lambda x.a'\mathrm{i}\ \mathrm{R}\ \mathcal{L}^M\ L_i'\mathrm{h}\lambda x.b'\mathrm{i}$。

因此，根据引理 E.17，$L_i \mathrm{h}\lambda x.a'\mathrm{i}\ \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L_i'\mathrm{h}\lambda x.b'\mathrm{i}$；根据引理 E.19，我们得到$L_i \mathrm{h}x\ \mathrm{i}\ \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L_i'\mathrm{h}x\mathrm{i}$，且 $\lambda x.a' \mathrm{hR}\ \mathcal{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} \lambda x.b'$。然后由情形（$\mathrm{mir}_M$ 3）可得 $a' \mathrm{R}\ \mathcal{L}^M\ b'$。于是：

$$\frac{a'\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b' \quad p\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ q}{a'[x\leftarrow p]\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b'[x\leftarrow q]}$$

由于 $a'[x\leftarrow p] \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{i} n$ 且 $i < k + i + 1$，我们可以对第一分量应用归纳假设于 $a'[x\leftarrow p]$，从而得到 $b'[x\leftarrow q] \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n'$，其中某个 n'满足$n \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$。由于 $L_i \mathrm{h}x\mathrm{i}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L_i'\mathrm{h}x\mathrm{i}$且 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$，根据引理 E.22，我们得到 $L_i \mathrm{h}n\mathrm{i}\ \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L_i'\mathrm{h}n'\mathrm{i}$。最后，注意到 $bq \Downarrow_{\mathtt{vsc}} L_i'\mathrm{h}n'\mathrm{i}$，因为

$$\frac{b \Downarrow_{\mathtt{vsc}} L_i'\langle \lambda x.b'\rangle \quad b'[x\leftarrow q] \Downarrow_{\mathtt{vsc}} n'}{bq \Downarrow_{\mathtt{vsc}} L_i'\langle n'\rangle}$$

(v) e 步骤：不适用。

(e) 显式替换：

$$\frac{a\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b \quad p\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ q}{a[x\leftarrow p]\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b[x\leftarrow q]}\ (sc.esubst) \qquad \text{and } a[x\leftarrow p] \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k} n$$

(i) 应用惰性项：不适用。

(ii) 惰性项替换：

$$\frac{a \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k} n \quad p \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{h} i}{a[x\leftarrow p] \Downarrow_{\mathtt{vsc}}^{k+h} n[x\leftarrow i]}$$

由归纳假设（d 严格递减，第一分量不增加），我们得到 $b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$ 和 $q \Downarrow_{\mathsf{vsc}} i'$ 其中 $i \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathtt{mir}_M} i'$ 以及 $n \langle \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$。由引理E.15，$i \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} i'$ 和 $n \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n'$。于是：

$$\frac{b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n' \quad q \Downarrow_{\mathsf{vsc}} i'}{b[x \leftarrow q] \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'[x \leftarrow i']}$$

并且根据 $\mathtt{mir}_M$ 的定义，$n[x \leftarrow i] \mathrm{hR}_{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'[x \leftarrow i']$

(iii) m 步骤：不适用。

(iv) e 步骤：

$$\frac{p \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} L_i\langle v_p \rangle \quad a\{x \leftarrow v_p\} \Downarrow^i_{\mathsf{vsc}} n}{a[x \leftarrow p] \Downarrow^{k+i+1}_{\mathsf{vsc}} L_i\langle n \rangle}$$

那么，根据归纳假设（d 严格递减，第一分量不增加），对a和 p，我们得到 $q \Downarrow_{\mathsf{vsc}} q'$，其中 $L_i \mathrm{h} v_p \mathrm{i} \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} q'$（因此根据引理 E.20 $q' = L'_i \mathrm{h} v_q \mathrm{i}$），即 $L_i \mathrm{h} v_p \mathrm{i} \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L'_i \mathrm{h} v_q \mathrm{i}$。因此，根据引理 E.19，我们得到 $L_i \mathrm{h} x \mathrm{i} \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L'_i \mathrm{h} x \mathrm{i}$，并且$v_p \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}_{\mathrm{i}^{\mathtt{mir}_M}} v_q$，即 $v_p \mathrm{R}_{\mathrm{L}^M} v_q$（根据 E.15）。

于是：

$$\frac{a \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} b \quad v_p \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} v_q}{a\{x \leftarrow v_p\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} b\{x \leftarrow v_q\}}$$

由于 $a\{x \leftarrow v_p\} \Downarrow^i_{\mathsf{vsc}} n$ 满足 $i < k + i + 1$，我们可以对第一个分量应用归纳假设，针对 $a\{x \leftarrow v_p\}$ 得到 $b\{x \leftarrow v_q\} \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$，其中存在某个 n'，使得$n \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} n'$。由于 $L_i \mathrm{h} x \mathrm{i} \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M} \mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M} L'_i \mathrm{h} x \mathrm{i}$ 且 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}_{\mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M}} n'$，根据引理 E.22，我们得到 $L_i \mathrm{h} n \mathrm{i} \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}_{\mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M}} L'_i \mathrm{h} n' \mathrm{i}$。

最后，注意到 $bq \Downarrow_{\mathsf{vsc}} L'_i \mathrm{h} n' \mathrm{i}$，根据

$$\frac{q \Downarrow_{\mathsf{vsc}} L'_i\langle v_q \rangle \quad b\{x \leftarrow v_q\} \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'}{bq \Downarrow_{\mathsf{vsc}} L'_i\langle n' \rangle}$$

(f) 隐式替换：

$$\frac{a \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} b \quad v_p \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} v_q}{a\{x \leftarrow v_p\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} b\{x \leftarrow v_q\}} \; (sc.subst) \quad \text{and } a\{x \leftarrow v_p\} \Downarrow^k_{\mathsf{vsc}} n$$

于是，应用分解引理（引理 E.14）可得 $a \Downarrow^{k_1}_{\mathsf{vsc}} n_a$ 以及 $n_a\{x \leftarrow v_p\} \Downarrow^{k_2}_{\mathsf{vsc}} n$，其中 $k = k_1 + k_2$。因此，根据归纳假设（d 严格递减，第一个分量不增加），有 $b \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n_b$ 和 $n_a \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M}_{\mathrm{i}_{\mathtt{mir}_M}} n_b$，并且根据归纳假设，$v_p \mathrm{hR}_{\mathrm{L}^M \mathrm{i}^{\mathtt{mir}_M}} v_q$。应用引理 E.15，可得 $n_a \mathrm{R}^{\mathcal{L}^M} n_b$。于是我们得到：

$$\frac{n_a \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_b \quad v_p \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} v_q}{n_a\{x \leftarrow v_p\} \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M} n_b\{x \leftarrow v_q\}}$$

两种情况。

（i） a 不是正规式，也就是说，$k_1 > 0$ 和 $k_2 < k$。然后，对k_2（第一个分量）和 $n_a\{x \leftarrow v_p\}$ 应用归纳假设，可得 $n_b\{x \leftarrow v_q\} \Downarrow_{\mathsf{vsc}} n'$，其中 $n \langle \mathcal{R}_{\mathcal{L}^M} \rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$。我们利用稳定性E.13 以及大步与小步之间的等价性得出结论，因为 $b\{x \leftarrow v_q\} \to^* n_b\{x \leftarrow v_q\} \to^* n'$。

(ii) a 是正规的，也就是说，$k_1 = 0$ 和 $k_2 = k$。于是 $a = n_a$。有两个子情况：

- $a\{x\leftarrow v_p\} = n_a\{x\leftarrow v_p\}$ 也是正规的。由于我们知道 $n_a \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ n_b$ 和 $v_p \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M \mathrm{imir}_M\ v_q$，可以应用引理 E.27，得到 $n_b\{x\leftarrow v_q\}$ 是 $\to_{\equiv}@_l$-正规的；根据引理 E.16，$a\{x\leftarrow v_p\}\ \mathrm{hR}\ \mathrm{L}^M\ \mathrm{imir}_M\ n_b\{x\leftarrow v_q\}$。现在只需证明 $b\{x\leftarrow v_q\} \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n_b\{x\leftarrow v_q\}$，这可由 $b \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n_b$、替换下的归约稳定性（引理 E.13）以及 $n_b\{x\leftarrow v_q\}$ 是 $\to_{\equiv}@_l$-正规的这一事实推出（再加上小步与大步的等价性）。
- $a\{x\leftarrow v_p\} = n_a\{x\leftarrow v_p\}$ 不是正规形式
  因此，$n_a\{x\leftarrow v_p\} \to a' \to^{k-1} n$（归约具有菱形性质，所有归约的长度都相同，因此我们任选一个可行的第一步）。接着，根据引理 E.28，$n_b\{x\leftarrow v_q\} \to b'$，其中 $a'\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b'$。

  我们可以对 a' 应用归纳假设（第一个分量在减少，因为 $k-1 < k$），并得到 $b' \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n'$，其中 $n\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathrm{mir}_M} n'$。于是命题得证，因为（利用引理E.13）

$$b\{x\leftarrow v_q\} \to^* n_b\{x\leftarrow v_q\} \to b' \to^* n'$$

  也就是说，$b\{x\leftarrow v_q\} \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n'$ 根据引理 11.3。

(g) 等价 X

$$\frac{a\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b \quad b \equiv_M b'}{a\ \mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\ b'}\ \mathcal{L}_{\equiv_M} \text{ and } a \Downarrow^k_{\mathrm{vsc}} n$$

由 归纳假设，$b \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n'$ 以及 $n \mathrm{hR}^{\mathcal{L}^M} \mathrm{i}_{\mathrm{mir}_M} n'$。

由于 b 有一个正规范式，且 $b \equiv_M b'$ 那么 $b' \Downarrow_{\mathrm{vsc}} n''$ 并且 $n' \equiv_M n''$ 由命题 E.10，因此$n\langle\mathcal{R}^{\mathcal{L}^M}\rangle_{\mathrm{mir}_M} n''$ 由命题 E.9。

(2) 对第一点的重新表述。 □

命题 E.30（mir_M相似性是充分的）。假设 $\equiv_M$ 是 $\to_{\mathrm{vsc}}$的镜像。如果 $t \precsim_{\mathrm{mir}_M} u$那么 $t \Downarrow_{\mathrm{vsc}}$ 蕴含 $u \Downarrow_{\mathrm{vsc}}$

证明。不使用定义中的等价关系时，这一事实显而易见。使用等价关系时，我们需要知道 $\equiv_M$ 保持范式，以便得出结论（命题 E.11）。□

T定理 11.8 （$\precsim_{\mathrm{mir}_M}$ 和 $\precsim_{net}$的相容性与可靠性）。设 $\equiv_M$ 是一个镜像 r.
（1）镜像 Lassen 闭包的冗余性：$\precsim_{\mathrm{mir}_M} = \precsim_{\mathrm{mir}_M \mathcal{L}^M}$。（2）镜$_M$ 相似性 $\precsim_{\mathrm{mir}_M}$ 与按值调用上下文预序相容，且包含于其中 $\precsim^v_C$。（3）网相似性 $\precsim_{net}$ 与按值调用上下文预序相容，且包含于其中 $\precsim^v_C$。

证明。（1）由命题 E.29 以及 $\precsim_{\mathrm{mir}_M}$ 的余归纳定义可得。
（2）相容性由定理的第一点以及镜像 Lassen 闭包具有相容性这一事实得出。根据相容性和适当性（命题 E.30），可得其包含于上下文预序。（3）论证类似，此处依赖于 $\equiv_{str}$ 对 VSC 具有替换封闭性和强交换性。□

第 12 节的 F 部分证明（从操作语义到指称语义：类型预序）

本节中，我们证明第 12 节从操作语义到指称语义：类型预序中的命题。

F.1 类型预序具有相容性

这里我们证明类型预序具有相容性。证明相当简单，因为类型预序在某种意义上是组合性的。我们先证明一个关于语法组合性的引理，然后通过对上下文进行归纳即可推出相容性。

引理 F.1. 类型预序满足：

- (应用式) $t \precsim_{type} t' \,\&\, u \precsim_{type} u' \Rightarrow tu \precsim_{type} t'u'$.
- (抽象式) $t \precsim_{type} u \Rightarrow \lambda x.t \precsim_{type} \lambda x.u$.
- (显式替换式) $t \precsim_{type} t' \,\&\, u \precsim_{type} u' \Rightarrow t[x \leftarrow u] \precsim_{type} t'[x \leftarrow u']$.
- (α-等价性) $\lambda x.t \simeq_{type} \lambda y.t\{x \leftarrow y\}$.
- (α-等价性') $t[x \leftarrow u] \simeq_{type} (t\{x \leftarrow y\})[y \leftarrow u]$.

证明。

- *(应用式)*、*(显式替换式)* 和*(抽象式)* 这些性质都可以通过考察树来完成，因为它们在很大程度上由语法决定。我们来看（ES）情形以简要说明思路：

  令 π 为 $t[z \leftarrow u], \pi \colon \Gamma \vdash t[z \leftarrow u] : M$ 的类型推导。
  我们证明存在一个类型推导 π'，使得 $\pi' \colon \Gamma \vdash t'[z \leftarrow u'] : M$。
  由于项 $t[z \leftarrow u]$ 不是值，因此推导的最后一条规则只有一种可能：(es)。

  $$\frac{\Gamma_1, z : N \vdash t : M \quad \Gamma_2 \vdash u : N}{\Gamma \vdash t[z \leftarrow u] : M}\ \text{es}$$

  其中 $\Gamma = \Gamma_1 \uplus \Gamma_2$。
  由于 t 与 t' 类型等价，且 u 与 u' 类型等价，因此存在两个推导 $\Gamma_2 \vdash u' \colon N$ 和 $\Gamma_1, z \colon N \vdash t' \colon M$。因此，我们可以为 $t'[z \leftarrow u']$ 构造适当的推导 π'。

  $$\frac{\Gamma_1, z : N \vdash t' : M \quad \Gamma_2 \vdash u' : N}{\Gamma \vdash t'[z \leftarrow u'] : M}\ \text{es}$$

  因此 $t[z \leftarrow u] \precsim_{type} t'[z \leftarrow u']$。
- *(α-等价性)* 和 *(α-等价性')* 显然成立，因为类型判断不依赖于有界变量的表示形式。□

命题 12.4 ($\precsim_{type}$的相容性）。
(1) 相容性：若 $t \precsim_{type} t'$ 则 $C\langle t \rangle \precsim_{type} C\langle t' \rangle$。
(2) 可靠性：若 $t \precsim_{type} t'$ 则 $t \precsim^{v}_{C} t'$。
证明。 (1) 对 C作归纳。

- $C = \langle \cdot \rangle, t \precsim_{type} t'$。
- $C \precsim_{type} uC'$，则根据归纳法 $C'\langle t \rangle \precsim_{type} C'\langle t' \rangle$，且显然 $u \precsim_{type} u$，因此根据（应用式）性质 $uC'\langle t \rangle \precsim_{type} uC'\langle t' \rangle$。
- $C = C'u, C \precsim_{type} C'[x \leftarrow u]$和 $C \precsim_{type} u[x \leftarrow C']$与前一种情况类似。
- $C = \lambda x.C'$ 然后由归纳法可得 $C'\langle t \rangle \precsim_{type} C\langle t' \rangle$，因此由（抽象式）性质可得$\lambda x.C'\langle t \rangle \precsim_{type} \lambda x.C'\langle t' \rangle$。

（2）由相容性和充分性可得。 □

F.2 网相似性包含于类型预序中

事实上，对于所有满足下述命题的镜像$_M$ 相似关系（且不一定要求 $\equiv_M$ 是镜像），我们都有 $\precsim_{\mathtt{mir}_M} \subseteq \precsim_{type}$。唯一的前提是 $\equiv_M$ 满足下述命题。

命题 关于 F.2（$\equiv_M$-等价蕴含可类型化等价）。如果 $t \equiv_M u$ 那么 $t \simeq_{type} u$。

对于 $\precsim_{type}$，该命题成立，参见定理12.2。

证明。(1) 对推导 $\pi\colon \Gamma \vdash t : M$ 的大小进行归纳。

项 t 可由推导 $\pi\colon \Gamma \vdash t : M$ 导出，因此根据定理，它是可正规化的。12.2。因此我们有 $t \to^{k}_{\mathsf{vsc}} n$，所以（由于 $\mathcal{R}$ 是一个双模拟） $t' \to^{*}_{\mathsf{vsc}} n'$，其中 $n\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathtt{mir}_M} n'$。我们不必寻找 π' 的 t'推导，而可以寻找 π'_1 的 n' 推导，并通过（可类型化性）扩展得出 $\to_{\mathsf{vsc}}$ 该归约。

存在一个推导 $\pi_1\colon \Gamma \vdash n : M$，其大小不超过 π 的大小。
对推导 π_1 的最后一条规则进行分类讨论。

(a) 公理规则。

$$\pi_1 :: \frac{}{x : [L] \vdash n = x : L}\ \mathsf{ax}$$

于是，根据 $n = x\mathrm{hRi}_{\mathtt{mir}_M} n', n' = x$， $\pi'_1 := \pi_1$ 相应地具有类型 n'。(b) 抽象规则。

$$\pi_1 :: \frac{\Gamma, x : M \vdash u : N}{\Gamma \vdash n = \lambda x.u : M \multimap N}\ \lambda$$

于是，根据 $n = \lambda x.u\mathrm{hRi}_{\mathtt{mir}_M} n', n' = \lambda x.u'$，其中 $u\ \mathrm{R}\ u'$。

推导 $\pi_2\colon \Gamma, x\colon M \vdash u\colon N$ 的大小严格小于 π。根据归纳法，由于$u\mathrm{R}\ u'$，存在一个推导 $\pi'_2\colon \Gamma, x\colon M \vdash u'\colon N$。

于是，

$$\pi'_1 :: \frac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ \vdots\\ \Gamma, x : M \vdash u' : N\end{array}}{\Gamma \vdash n' = \lambda x.u' : M \multimap N}\ \lambda$$

(c) *many* 规则。

$$\pi_1 :: \frac{\begin{array}{c}\sigma_i\\ \vdots\end{array}}{\biguplus_{i\in I} \Gamma_i \vdash n = v : \biguplus_{i\in I} L_i}\ \mathsf{many}\quad \frac{(\Gamma_i \vdash n = v : L_i)_{i\in I} \quad I \text{ finite}}{}$$

于是，由 $n = v\mathrm{hRi}_{\mathtt{mir}_M} n'$， $n' = v'$ 且有 $v\mathrm{hRi}_{\mathtt{mir}_M} v'$。

根据 v 的值的性质，分为两种子情况：

- 变量。如果 $v = x$，那么 $v' = x$ 也成立。于是， $\pi_{1'} := \pi_1$ 是 v' 的一个正确推导，并由此完成此情况的证明。
- 抽象。若 $v = \lambda x.u$，则 $v' = \lambda x.u'$，其中 $u\ \mathrm{R}\ u'$。假设至少存在一个 σ_i 推导（若不存在，结论显然成立）。由于 L_i 是线性类型， σ_i 的最后一条规则只能是一个 (λ) 规则。假设 $L_i = M_i \multimap N_i$。

$$\sigma_i :: \frac{\begin{array}{c}\rho_i\\ \vdots\\ \Gamma, x : M_i \vdash u : N_i\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x.u : M_i \multimap N_i}\ \lambda$$

我们知道 $u\,\mathrm{R}\,u'$。根据对 ρ_i（其大小严格小于 π）应用归纳假设，可得 ρ_i': $\Gamma, x: M_i \vdash u': N_i$。因此，我们可以重构相应的 π_1' 推导。

$$\pi_1' : \dfrac{\begin{array}{c}\rho_i' \\ \vdots \\ \Gamma, x: M_i \vdash u: N_i\end{array}}{\dfrac{(\Gamma_i \vdash v' = \lambda x.u' : L_i)_{i\in I} \quad I \text{ finite}}{\uplus_{i\in I}\Gamma_i \vdash n' = v' : \uplus_{i\in I} L_i}\ \text{many}}$$

(d) 应用规则。

$$\dfrac{\Gamma \vdash n_1 : [M \multimap N] \quad \Delta \vdash n_2 : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash n = n_1 n_2 : N}\ @$$

于是，由 $n = n_1 n_2 \mathrm{hRi}_{\mathtt{mir}_M} n', n' \equiv_M n_1' n_2'$，以及 $n_1\,\mathrm{R}\,n_1'$ 和 $n_2\,\mathrm{R}\,n_2'$。
根据命题 F.2，n' 与 $n_1' n_2'$类型等价。因此，只需为π' 构造一个适当的 $n_1' n_2'$。

对 n_1、n_1' 和 n_2、n_2' 作归纳，可得适当的推导。

(e) 显式替换规则。

$$\dfrac{\Gamma, x: M \vdash n_1 : N \quad \Delta \vdash n_2 : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash n = n_1[x \leftarrow n_2] : N}\ \mathsf{es}$$

因此，根据 $n = n_1[x \leftarrow n_2]\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathtt{mir}_M} n', n' \equiv_M n_1'[x \leftarrow n_2']$ 其中 $n_1 \mathcal{R}\, n_1'$ 和 $n_2 \mathcal{R}\, n_2'$。根据命题 F.2，n' 与 $n_1'[x \leftarrow n_2']$类型等价。因此，只需为 π' 构造一个合适的 $n_1'[x \leftarrow n_2']$。对 n_1 作归纳，n_1' 和 n_2，n_2' 我们就能得到合适的推导。

(2) 设 t, t' 为满足 $t \lesssim_{\mathtt{mir}_M} t'$ 的项。根据命题的第一部分，$t \lesssim_{type} t'$. □

F.3 Lassen 的 Enf 相似性包含于类型预序中

对于 Lassen 的双模拟等价，证明稍微复杂一些，但依赖于相同的推理。我们考虑 Plotkin 范式，并使用 VSC 多重类型为其赋予类型。由于多重类型在归约下保持不变，这不会影响类型等价。

引理 12.6 (停止与继续和类型推导)。设 $\pi \triangleright \Gamma \vdash L\langle xv\rangle : M$ 并且 z 是新鲜的。那么存在 $\pi_L \triangleright \Gamma_L,\ z : N \vdash L\langle z\rangle : M$ 使得 $|\pi_L| < |\pi|$ 并且 $\pi_v \triangleright \Gamma_v \vdash v : N_1$ 使得 $|\pi_v| < |\pi|$。

证明。对 L进行归纳。

- $L = \mathrm{h}\cdot\mathrm{i}$

$$\pi = \dfrac{\Gamma \vdash x : [N_1 \multimap M] \quad \Delta \vdash \begin{array}{c}\pi_v \\ \vdots \\ v : N_1\end{array}}{\Gamma \uplus \Delta \vdash xv : M}\ @$$

那么，π_L 的大小为 1，也就是说，显然小于 π，而且很容易看出，π_v 的大小为 $|\pi| - 2$。

- $L = v'L'$

$$\pi = \dfrac{\Gamma \vdash v' : [M_1 \multimap M] \quad \Delta \vdash \begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ L'\langle xv\rangle : M_1\end{array}}{\Gamma \uplus \Delta \vdash L\langle xv\rangle = v'L'\langle xv\rangle : M}\ @$$

By *i.h.*, $\exists \pi_{1L} :\ \Delta_a,\ z :\ N \vdash L'\mathrm{hzi} :\ M_1$ 以及 $\exists \pi_v :\ \Gamma_v \vdash v :\ N_1$ 与 $|\pi_{1L}| < |\pi_1|$和 $|\pi_v| < |\ \pi_1|$.

因此 $|\pi_v| < |\pi|$。我们按以下方式完成 π_L：

$$\pi_L = \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{1L}\\ \vdots\end{array}}{\dfrac{\Gamma \vdash v' : [M_1 \multimap M] \quad \Delta_L, z:N \vdash L'\langle z\rangle : M_1}{\Gamma \uplus \Delta_L, z:N \vdash L\langle z\rangle = v'L'\langle z\rangle : M}\ @}$$

那么 $|\pi_L| < |\pi|$。

- $L = Lt$

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\end{array}}{\dfrac{\Delta \vdash L'\langle xv\rangle : [M_1 \multimap M] \quad \Gamma \vdash t : M_1}{\Gamma \uplus \Delta \vdash L'\langle xv\rangle t : M}\ @}$$

根据 即， $\exists \pi_{1L}\colon \Delta_a,\ z\colon N \vdash L'\mathrm{hzi} : [M_1 \multimap M]$和 $\exists \pi_v\colon \Gamma_v \vdash v\colon N_1$与 $|\pi_{1L}| < |\pi_1|$和 $|\pi_v| < |\pi_1|$。

因此 $|\pi_v| < |\pi|$。我们以如下方式完成 π_L：

$$\pi_L = \dfrac{\begin{array}{c}\pi_{1L}\\ \vdots\end{array}}{\dfrac{\Delta_L, z:N \vdash L'\langle z\rangle : [M_1 \multimap M] \quad \Gamma \vdash t : M_1}{\Gamma \uplus \Delta_L, z:N \vdash L'\langle z\rangle t = L\langle z\rangle : M}\ @}$$

于是 $|\pi_L| < |\pi|$。 □

命题 F.3. $L\langle xv\rangle \cong_{type} (\lambda z.L\langle z\rangle)(xv)$ 其中 z 不出现在 L 中。

证明。类似的参数也适用，对 L 进行归纳证明。 □

命题 12.7。

(1) enf 模拟与类型推导：设 $\mathcal{R}$ 是一个 enf 模拟。若 $t\,\mathcal{R}\,t'$ 且 $\pi \rhd \Gamma \vdash t : M$，则存在一个推导 $\pi' \rhd \Gamma \vdash t' : M$。(2) enf 包含于类型：若 $t \lesssim_{enf} t'$，则 $t \lesssim_{type} t'$。

证明。(1) 对推导 π 的大小进行归纳：$\Gamma \vdash t : M$。

项 t 可由推导 $\pi\colon \Gamma \vdash t : M$ 类型化，因此根据定理 12.2，它是可正规化的。因此我们有 $t \to^{k}_{\mathsf{vsc}} n$。由所有 VSC 可终止项都是 Plotkin 的左可终止项这一事实可知，我们有 $t \to_l n_{\mathsf{left}}$，因而（由于 R 是一个 enf 双模拟） $t' \to_l^* n'_{\mathsf{left}}$，其中 $n_{\mathsf{left}} \mathrm{hRi}_{enf} n'_{\mathsf{left}}$。我们无需寻找 t'的推导 π'，而可以寻找 n' 左 的推导π'_1，并根据 $\to_l$归约的（可类型化）扩展得出结论。

存在一个推导 $\pi_1\colon \Gamma \vdash n_{\mathsf{left}} : M$，其大小至多为 π的大小。
对推导 π_1的最后一条规则进行分类讨论。

(a) 公理规则。

$$\pi_1 : \dfrac{}{x:[L] \vdash n_{\mathsf{left}} = x : L}\ \mathsf{ax}$$

于是，根据 $n_{\mathsf{left}} = x\mathrm{hRi}_{enf} n'_{\mathsf{left}}$， $n'_{\mathsf{left}} = x$并且 $\pi'_1 := \pi_1$相应地为 n'_{left}定型。（b）抽象规则。

$$\pi_1 : \dfrac{\Gamma, x:M \vdash u : N}{\Gamma \vdash n_{\mathsf{left}} = \lambda x.u : M \multimap N}\ \lambda$$

于是根据 $n_{\mathsf{left}} = \lambda x.u\mathrm{hRi}_{enf} n'$， $n'_{\mathsf{left}} = \lambda x.u'$ 其中 $u\,\mathrm{R}\,u'$。

推导 $\pi_2\colon \Gamma, x\colon M \vdash u\colon N$的大小严格小于 π。根据归纳法，由于$u\,\mathrm{R}\,u'$，存在一个推导 $\pi'_2\colon \Gamma, x{:}M \vdash u'\colon N$。

于是，

$$\pi_1' : \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2' \\ \vdots \\ \Gamma, x:M \vdash u':N\end{array}}{\Gamma \vdash n'_{\mathsf{left}} = \lambda x.u' : M \multimap N}\ \lambda$$

(c) *many* 规则。

$$\pi_1 : \dfrac{\begin{array}{c}\sigma_i \\ \vdots \\ (\Gamma_i \vdash n_{\mathsf{left}} = v : L_i)_{i\in I} \quad I \text{ finite}\end{array}}{\uplus_{i\in I}\Gamma_i \vdash n_{\mathsf{left}} = v : \uplus_{i\in I} L_i}\ \mathsf{many}$$

于是，由 $n_{\mathsf{left}} = v\mathrm{hRi}_{enf}\, n'$, $n'_{\mathsf{left}} = v'$ 可得 $v\mathrm{hRi}_{enf} v'$。

根据 v 的值性质，分为两种子情况：

- 变量。若 $v = x$，则 $v_\prime = x$ 也成立。于是，$\pi_{\prime_1} := \pi_1$ 是 $v_\prime$ 的正确推导，并由此完成此情形的证明。
- 抽象。如果 $v = \lambda x.u$，那么 $v_\prime = \lambda x.u_\prime$，且 $u\,\mathrm{R}\,u_\prime$。假设至少存在一个 σ_i 推导（若不存在，结论显然成立）。由于 L_i 是线性类型，σ_i 的最后一条规则只能是 (λ) 规则。假设 $L_i = M_i \multimap N_i$。

$$\sigma_i : \dfrac{\begin{array}{c}\rho_i \\ \vdots \\ \Gamma, x:M_i \vdash u:N_i\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x.u : M_i \multimap N_i}\ \lambda$$

我们知道 $u\,\mathrm{R}\,u'$。根据 ρ_i 的归纳假设（其大小严格小于 π 的大小），可得 ρ_i': $\Gamma,\ x{:}\ M_i \vdash u'{:}\ N_i$。因此，我们可以重构相应的 π_1' 推导。

$$\pi_1' : \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\rho_i' \\ \vdots \\ \Gamma, x:M_i \vdash u:N_i\end{array}}{(\Gamma_i \vdash v' = \lambda x.u' : L_i)_{i\in I} \quad I \text{ finite}}\ \mathsf{many}}{\uplus_{i\in I}\Gamma_i \vdash n'_{\mathsf{left}} = v' : \uplus_{i\in I} L_i}$$

(d) 应用规则。

$$\dfrac{\Gamma \vdash a : [M \multimap N] \quad \Delta \vdash b : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash n_{\mathsf{left}} = ab : N}\ @$$

于是，根据 $n_{\mathsf{left}} = ab\mathrm{hRi}_{enf} n'$、$n_{\mathsf{left}} = L\mathrm{h}xv\mathrm{i}$ 和 $n' = L'\mathrm{h}xv'\mathrm{i}$，且 $L\mathrm{h}z\mathrm{i}\,\mathrm{R}\,L\mathrm{h}z\mathrm{i}$，并且 $v\,\mathrm{R}\,v'$，其中 z 是新鲜的。

根据命题 F.3，n_{left} 可类型化，当且仅当 $(\lambda z.L\langle z\rangle)(xv)$可类型化；（针对该类型的）推导如下：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_L \\ \vdots \\ \Gamma, z:M \vdash L\langle z\rangle : N\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda z.L\langle z\rangle : [M \multimap N]}\ \lambda \qquad \dfrac{x:[M_1 \multimap M] \vdash x:[M_1 \multimap M] \quad \begin{array}{c}\pi_v \\ \vdots \\ \Delta' \vdash v : M_1\end{array}}{\Delta', x:[M_1 \multimap M] \vdash xv : M}\ @}{\Gamma \uplus \Delta \vdash (\lambda z.L\langle z\rangle)(xv) : N}\ @$$

根据引理 12.6， π_L 和 π_v 都严格小于 π。因此，根据归纳假设，存在 π'_L 和π'_v，使得我们可以构造出以下推导树：

$$\pi' = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_L\\ \vdots\\ \Gamma, z:M \vdash L'\langle z\rangle : N\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda z.L'\langle z\rangle : [M \multimap N]}\,\lambda \quad \dfrac{x:[M_1 \multimap M] \vdash x:[M_1 \multimap M] \quad \begin{array}{c}\pi_v\\ \vdots\\ \Delta' \vdash v' : M_1\end{array}}{\Delta', x:[M_1 \multimap M] \vdash xv' : M}\,@}{\Gamma \uplus \Delta \vdash (\lambda z.L'\langle z\rangle)(xv') : N}\,@$$

由此得证，因为根据命题 F.3，（$\lambda z.L'\langle z\mathbf{i}$）（$xv'$）和 $L'\langle xv'\rangle$是类型等价的。

（e）显式替换规则。

$$\dfrac{\Gamma, x:M \vdash n_1 : N \quad \Delta \vdash n_2 : M}{\Gamma \uplus \Delta \vdash n_{\mathsf{left}} = n_1[x \leftarrow n_2] : N}\ \mathsf{es}$$

这种情况不可能出现： n_{left} 是一个不含显式替换的项。

（2）设 t， t' 为满足 $t \lesssim_{enf} t'$ 的项。根据第一部分， $t \lesssim_{type} t'$。 □

F.4 关于等价性的按值多类型

现在我们证明，本文所定义的多类型满足等价性。我们只需证明变量的情形，因为抽象上的 η_v 等价性已包含在 $=_{\beta_v}$ 中。

命题 12.8 (η_v-等价性包含于类型等价性）。设 x 是一个变量。那么$\lambda y.xy \lesssim_{type} x$ 且 $x \lesssim_{type} \lambda y.xy$。

证明。

(1) $x \lesssim_{type} \lambda y.xy$设 π 是一个类型推导，使得 $\pi\colon \Gamma \vdash x : M$。我们证明 $\lambda y.xy$ 可以在相同的上下文中以相同的类型进行类型推导。设 n、$(L_i)_{1\le i\le n}$ 满足 $M = [L_1, \ldots, L_n]$。设 N_i 和 N_{i} 满足 $L_i = N_i \multimap N_{i}$。设 m_i、 $((L'_{i,j})_{1\le j\le m_i})_{0\le i\le n}$ 满足 $N_i = [L'_{i,1}, \ldots, L'_{i,m_i}]$。

$$\dfrac{\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_i \vdash x:[\uplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \multimap N'_i] \quad \dfrac{\left(\overline{y:[L'_{i,j}] \vdash y:L'_{i,j}}\ \mathsf{ax}\right)_{0\le j\le m}}{y:\uplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \vdash y:\uplus_{0\le j\le m} L'_{i,j}}\ \mathsf{many}}{\Gamma_i, y:\uplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \vdash xy : N'_i}\,@}{\Gamma_i \vdash \lambda y.xy : L_i}\,\lambda \quad \ldots \ 0 \le i \le n}{\uplus_{0\le i\le n}\Gamma_i \vdash \lambda y.xy : M}\ \mathsf{many}$$

只需证明 $\Gamma = x\colon \grave{\mathrm{O}}_{0\le i\le n}[\grave{\mathrm{O}}_{0\le j\le m}[L_{i,j}] \multimap N'_i]$，即可完成。

展开推导 $\pi\colon \Gamma \vdash x:M$::

$$\dfrac{\left(\overline{\Delta_i \vdash x:N_i \multimap N'_i}\ \mathsf{ax}\right)_{0\le i\le n}}{\uplus_{0\le i\le n}\Delta_i \vdash x:M}\ \mathsf{many}$$

因此 $\Delta_i = x:[N_i \multimap N'_i]$，证明至此完成。

(2) $\lambda y.xy \lesssim_{type} x$，令 $(\Gamma,\ M)$ 和 π，使得 $\pi\colon \Gamma \vdash \lambda y.xy : M$。容易验证 x 在多重类型 M 下可类型化，且上下文为 $\Delta = x:M$。然后我们需要证明 $\Gamma = \Delta$ 才能得出结论。展开推导 π，得到：

令 n，$(L_i)_{1\le i\le n}$，使得 $M = [L_1, \dots, L_n]$。令 N_i 和 N_{ri}，使得 $L_i = N_i \multimap N_{ri}$。令 m_i，$((L'_{i,\ j})_{1\le j\le m_i})_{0\le i\le n}$，使得 $N_i = [L'_{i,1}, \dots, L'_{i,m_i}]$。

$$\dfrac{\dots \qquad \dfrac{\Gamma_i \vdash x : [\biguplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \multimap N'_i] \qquad \dfrac{\left(\dfrac{}{y:[L'_{i,j}] \vdash y:L'_{i,j}}\ \mathsf{ax}\right)_{0\le j\le m}}{y:\biguplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \vdash y:\biguplus_{0\le j\le m} L'_{i,j}}\ \mathsf{many}}{\dfrac{\Gamma_i, y:\biguplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \vdash xy : N'_i}{\Gamma_i \vdash \lambda y.xy : L_i}\ \lambda}\ @ \qquad \dots\ 0\le i\le n}{\biguplus_{0\le i\le n}\Gamma_i \vdash \lambda y.xy : M}\ \mathsf{many}$$

因此，如果我们继续对 $\Gamma_i \vdash x$ 展开 $[\biguplus_{0\le j\le m}[L'_{i,j}] \multimap N_{ri}]$，就会得到 $\biguplus_{0\le i\le n}\Gamma_i = x : M$。□