arXiv:2303.08180v1 [math.RA] 2 Mar 2023

薛定谔代数在（$n+1$）维时空中的转置泊松结构

Yang Yang[a]，Xiaomin Tang[a]，*，Abror Khudoyberdiyev[b,a] 黑龙江大学数学科学学院，中国黑龙江省哈尔滨市，邮编150080，[b] 乌兹别克斯坦科学院数学研究所，乌兹别克斯坦国立大学

摘要

本文描述了薛定谔李群在（$n+1$）维时空中的薛定谔代数上的转置泊松结构。证明了当 $n \neq 2$ 时，薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$不存在非平凡的 1 2-导子，因此也不具有非平凡的转置泊松结构。得到了代数 $\mathcal{S}_2$ 的全部 1 2-导子和转置泊松结构。此外，我们证明了薛定谔代数 $\mathcal{S}_2$ 具有非平凡的 Hom-Lie 结构。

关键词：薛定谔代数；1 2-导子；转置泊松代数。**数学主题分类**：17A30, 17B40, 17B63。

1 引言

泊松代数源于20世纪70年代对泊松几何的研究，已广泛应用于数学和物理的诸多领域，例如泊松流形、代数几何、上同调算子、量子化理论、量子群以及经典力学和量子力学。对泊松代数的研究也催生了其他代数结构，例如非交换泊松代数 [29], 一般泊松代数 [20, 21], 泊松双代数 [23, 24],约当括号代数和广义泊松代数 [6, 7, 14, 15, 34], Gerstenhaber代数 [13], F-流形代数 [10], Novikov-泊松代数 [30], 拟泊松代数 [5],双泊松代数 [26], 泊松n-李代数 [8], 等。最近，Bai、Bai、Guo和Wu在论文 [2] 中引入了泊松代数的一种对偶概念（转置泊松代数），其定义方式是交换泊松代数定义中的莱布尼茨法则里两个二元运算的角色。他们证明，以这种方式定义的转置泊松代数不仅具有泊松代数的一些共同性质，包括在张量积下封闭以及作为上同调算子的Koszul自对偶性，而且还满足一类丰富的恒等式。近来，人们不仅建立了李代数的 1 2 -导子与转置泊松代数之间的联系 [11], ，还建立了 1 2 -双导子与转置泊松代数之间的联系 [32]。这些思想被用于描述Witt代数上的所有转置泊松结构；Witt代数是最早出现的非平凡转置泊松代数实例之一 [11], Virasoro代数[11], 代数 $\mathcal{W}(a,b)$ [11], 薄李代数 [11], 扭曲Heisenberg-Virasoro代数

*通讯作者，电子邮箱：x.m.tang@163.com

[32], 薛定谔-维拉索罗代数 [32], 扩展薛定谔-维拉索罗代数 [32], 三维海森堡李代数 [32], Block Lie代数和超代数 [17], Witt型代数 [19], 振子李代数 [4] 以及伽利略代数和可解李代数 [18]。文献 [4]列出了一些关于转置泊松代数的实际开放问题。

薛定谔李群描述了自由粒子薛定谔方程的对称性，见 [25]。对于任意正整数 n，薛定谔李群在$(n+1)$维时空中的李代数称为薛定谔代数，见 [9]。薛定谔代数$\mathcal{S}_n$ 是一个非半单李代数，在理论物理中也发挥着重要作用。近年来，已有一系列论文研究薛定谔代数在$(1+1)$维时空中的结构与表示论，见 [1, 3, 9, 28, 31, 33]。文献 [22, 27]研究了 $\mathcal{S}_n$ 上的表示和（双）导子。

现在我们按照文献 [9, 22] 回顾薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 在$(n+1)$维时空中的定义。本文中，我们用 $\mathbb{C}$ 表示全体复数构成的集合。更准确地说，有

定义 1.1. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 是一个李代数，其 $\mathbb{C}$基为

$$\{e, f, h, z, x_i, y_i, s_{jk}(=-s_{kj}) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j < k \leqslant n\}$$

并具有以下非平凡交换关系

$$\begin{aligned}
&[e,f]=h, \quad [h,e]=2e, \quad [f,h]=2f,\\
&[x_i,y_i]=z, \quad [h,x_i]=x_i, \quad [h,y_i]=-y_i\\
&[e,y_i]=x_i, \quad [f,x_i]=y_i,\\
&[s_{jk},x_i]=\delta_{ki}x_j-\delta_{ji}x_k, \quad [s_{jk},y_i]=\delta_{ki}y_j-\delta_{ji}y_k,\\
&[s_{jk},s_{lm}]=\delta_{lk}s_{jm}+\delta_{jm}s_{kl}+\delta_{mk}s_{lj}+\delta_{lj}s_{mk},
\end{aligned}$$

其中，δ 是克罗内克δ，当 $i=j$ 时定义为1，否则为0 。

薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 是一个有限维、非半单且非可解的李代数，并且是如下半直积李代数

$$\mathcal{S}_n = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_n) \ltimes \mathfrak{h}_n$$

其中，$\mathfrak{sl}_2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e、f、h\}$ 是三维单李代数，$\mathfrak{so}_n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{s_{kl} \mid 1 \leqslant k < l \leqslant n\}$ 是正交李代数，而 $\mathfrak{h}_n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z、x_i、y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是海森堡李代数，详情请参见 [22]。特别地，由于薛定谔代数 $\mathcal{S}_1$ 不含形如s_{jk} 的项，因此其形式如下。

注 1.2. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_1$ 是一个李代数，其 $\mathbb{C}$基为 $\{e、f、h、z、x_1, y_1\}$，并具有以下非平凡交换关系

$$\begin{aligned}
&[e,f]=h, \quad [h,e]=2e, \quad [f,h]=2f,\\
&[x_1,y_1]=z, \quad [h,x_1]=x_1, \quad [h,y_1]=-y_1,\\
&[e,y_1]=x_1, \quad [f,x_1]=y_1.
\end{aligned}$$

此外，我们将单独讨论薛定谔代数 $\mathcal{S}_2$，并重点介绍其结构如下。

注 1.3. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_2$ 是一个李代数，其 $\mathbb{C}$-基为 $\{f,\ h,\ e,\ z,\ x_1,y_1,x_2,y_2,s_{12}\}$，并满足以下非平凡交换关系

$$\begin{aligned}
&[e,f]=h,\quad [h,e]=2e,\quad [f,h]=2f,\\
&[x_i,y_i]=z,\quad [h,x_i]=x_i,\quad [h,y_i]=-y_i,\\
&[e,y_i]=x_i,\quad [f,x_i]=y_i,\\
&[s_{12},x_1]=-x_2,\quad [s_{12},x_2]=x_1,\quad [s_{12},y_1]=-y_2,\quad [s_{12},y_2]=y_1.
\end{aligned}$$

下面的引理很有用，可以直接验证。

引理 1.4. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 是如下的有限生成 $\mathbb{Z}_2$-分次李代数

$$\mathcal{S}_n=(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}\bigoplus(\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}, \tag{1.1}$$

其中

$$(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e,f,h,z,s_{kl}\mid 1\leqslant k<l\leqslant n\},\quad (\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{x_i,y_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}. \tag{1.2}$$

本文将研究薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 在$(n+1)$维时空中的 1 2-导子。我们证明，对于任意整数$n\neq 2$, $\mathcal{S}_n$ 上的每个 1 2-导子都是平凡的，因此在 $\mathcal{S}_n(n\neq 2)$上定义的转置泊松代数结构均为平凡结构。我们得到了代数 $\mathcal{S}_2$ 的所有 1 2-导子和转置泊松结构。作为一项应用，我们还证明了薛定谔代数 $\mathcal{S}_2$ 具有非平凡的 Hom-Lie 结构。

2 预备知识

本节回顾研究转置泊松结构所需的一些定义和已知结果。虽然所有代数和向量空间都定义在复数域上，但许多结果也可以推广到其他域，且证明无需修改。

定义 2.1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个配备了两个非零双线性运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot]$的向量空间。三元组 $(\mathcal{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 称为转置泊松代数，若$(\mathcal{L},\cdot)$ 是交换结合代数，且$(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ 是满足以下相容条件的李代数

$$2z\cdot[x,y]=[z\cdot x,y]+[x,z\cdot y].$$

转置泊松代数最初由 Bi、Bai、Guo 和 Wu 在一篇论文中引入 [2]。

定义 2.2. 设$(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。$(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ 上的转置泊松结构是 $\mathcal{L}$ 上的一个交换结合乘法 $\cdot$，使得$(\mathcal{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 成为转置泊松代数。

定义 2.3。设（$\mathcal{L}$，$[\cdot,\cdot]$）是一个李代数，$\varphi:\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 是一个线性映射。若满足以下条件，则 φ 是一个1 2-导子

$$\varphi([x,y])=\tfrac{1}{2}([\varphi(x),y]+[x,\varphi(y)]).$$

注意，$\frac{1}{2}$-导子是 δFilippov 于 1998 年引入的 -导子[12]的一种特殊情形。$\frac{1}{2}$-导子的主要例子是与基域中的一个元素相乘。我们称这类$\frac{1}{2}$-导子为平凡的$\frac{1}{2}$-导子。

设G 是一个阿贝尔群，$\mathcal{L} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{L}_g$ 是一个G-分次李代数。若一个 $\frac{1}{2}$-导子φ 具有次数g ($\deg(\varphi)=g$)，即 $\varphi(\mathcal{L}_h) \subseteq \mathcal{L}_{g+h}, \forall h \in G$，则称其次数为$g$。令 $\triangle(\mathcal{L})$ 表示 $\frac{1}{2}$-导子的空间，并记 $\triangle_g(\mathcal{L}) = \{\varphi \in \triangle(\mathcal{L}) \mid \deg(\varphi) = g\}$。以下引理在我们的证明中很有用，但我们没有找到它的证明，因此将在下文给出证明。

引理 2.4. 设 $\mathcal{L} = \bigoplus_{g\in G}\mathcal{L}_g$ 是一个 G-分次李代数，且作为李代数是有限生成的。则

$$\triangle(\mathcal{L}) = \bigoplus_{g\in G} \triangle_g(\mathcal{L}).$$

证明。对每个元素$g \in G$，我们令$\rho_g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_g$ 表示典范投影。根据假设，存在有限子集$S \subseteq \mathcal{L}$ 生成 $\mathcal{L}$。令 φ 为一个 $\frac{1}{2}$-导子。于是存在有限集Q、$R \subseteq G$，使得

$$S \subseteq \bigoplus_{g\in Q} \mathcal{L}_g \quad and \quad \varphi(S) \subseteq \bigoplus_{g\in R} \mathcal{L}_g. \tag{2.1}$$

对于$g \in G$，令 $\varphi_g = \sum_{m\in G} \rho_{g+m} \circ \varphi \circ \rho_m$。由于对于$x_h \in \mathcal{L}_h$ 和$x_k \in \mathcal{L}_k$，有

$$\begin{aligned}
\varphi_g([x_h, x_k]) &= \sum_{m\in G} \rho_{g+m} \circ \varphi \circ \rho_m([x_h, x_k]) \\
&= \rho_{g+h+k} \circ \varphi([x_h, x_k]) \\
&= \tfrac{1}{2}(\rho_{g+h+k}([\varphi(x_h), x_k]) + \rho_{g+h+k}([x_h, \varphi(x_k)])) \\
&= \tfrac{1}{2}([\rho_{g+h}(\varphi(x_h)), x_k] + [x_h, \rho_{g+k}(\varphi(x_k))]) \\
&= \tfrac{1}{2}([\sum_{m\in G} \rho_{g+m} \circ \varphi \circ \rho_m(x_h), x_k] + [x_h, \sum_{m\in G} \rho_{g+m} \circ \varphi \circ \rho_m(x_k)]) \\
&= \tfrac{1}{2}([\varphi_g(x_h), x_k] + [x_h, \varphi_g(x_k)]).
\end{aligned}$$

设 $\varphi(x_k) = \sum \alpha_i$，其中 $\alpha_i \in \mathcal{L}_i$。则$i\in G$

$$\begin{aligned}
\varphi_g(x_k) &= \sum_{m\in G} \rho_{g+m} \circ \varphi \circ \rho_m(x_k) \\
&= \rho_{g+k} \circ \varphi(x_k) \\
&= \rho_{g+k}(\sum_{i\in G} \alpha_i) \\
&= \alpha_{g+k} \in \mathcal{L}_{g+k}.
\end{aligned}$$

因此，φ_g 包含于 $\triangle_g(\mathcal{L})$。

设$T = \{ g - h \mid h \in$ 有理数集，$g \in$ 实数集$\}$。那么T 是有限的，并且由（2.1）可得，对于$y \in S$ ，

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \sum_{g\in R} \rho_g \circ \varphi(y) \\
&= \sum_{g\in R} \sum_{h\in Q} \rho_g \circ \varphi \circ \rho_h(y) \\
&= \sum_{h\in Q} \big(\sum_{g\in R} \rho_{(g-h)+h} \circ \varphi \circ \rho_h(y) \big) \\
&= \sum_{h\in Q} \big(\sum_{q\in T} \rho_{q+h} \circ \varphi \circ \rho_h(y) \big) \\
&= \sum_{q\in T} \sum_{h\in Q} \rho_{q+h} \circ \varphi \circ \rho_h(y) \\
&= \sum_{q\in T} \sum_{h\in G} \rho_{q+h} \circ \varphi \circ \rho_h(y) \\
&= \sum_{q\in T} \varphi_q(y).
\end{aligned}$$

这表明导子 φ 和 $\sum_{q\in T} \varphi_q$ 在 S上相同。由于S 生成 $\mathcal{L}$，我们得到 $\varphi = \sum_{q\in T} \varphi_q$。这就证明了该引理。 □

另一方面，容易看出，定义 1.1 和 2.1 导出以下关键引理。

引理 2.5。*(*见 [11]*)* 设$(\mathcal{L}, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 为一个转置泊松代数，且 z 是 $\mathcal{L}$中的任意元素。那么，结合交换代数$(\mathcal{L}, \cdot)$ 中的左乘 l_z 是李代数$(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$的1 2-导子。

由引理 2.5，容易证明以下引理。

引理 2.6。*(*见 [11]*)* 设 $\mathcal{L}$ 是一个没有非平凡1 2-导子的李代数。那么，在 $\mathcal{L}$ 上定义的每个转置泊松结构都是平凡的。

3 薛定谔代数上的转置泊松代数结构

本节中，我们描述薛定谔代数$\mathcal{S}_n$上的转置泊松代数结构。薛定谔代数 $\mathcal{S}_1$ 是 3 维李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 与 3 维海森堡代数 $\mathfrak{h}_1$的半直积。容易看出， $\mathcal{S}_1$ 的所有 1 2-导子都是平凡的（另见 [11, 推论 9]）。对于$n = 2$，我们现在如下定义 $\mathcal{S}_2$ 的一个 1 2-导子。验证过程是直接的。

定义 3.1。 薛定谔代数 S_2 的1 2-导子 $\Re$ 由下式确定

$$\Re(s_{12}) = z, \ \ \Re(u) = 0, \forall u \in \{f, h, e, z, x_1, y_1, x_2, y_2\}. \tag{3.1}$$

现在我们研究薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$上的转置泊松代数结构。为得到这一结果，我们首先需要证明几个引理。

引理 3.2。 设 φ_0 是 $\mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ 的一个1 2-导子，使得

$$\varphi_0((\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}, \quad \varphi_0((\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{1}},$$

其中，分次空间$(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}$ 和$(\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}$ 由(1.2)给出。于是 φ_0 是平凡的。

证明。 根据(1.2)，我们可以假设

$$\varphi_0(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k, \tag{3.2}$$

$$\varphi_0(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ik} y_k. \tag{3.3}$$

$$\varphi_0(e) = \rho_1 e + \rho_2 h + \rho_3 f + \rho_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \rho_{kl} s_{kl}, \tag{3.4}$$

$$\varphi_0(f) = \lambda_1 e + \lambda_2 h + \lambda_3 f + \lambda_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \lambda_{kl} s_{kl}, \tag{3.5}$$

$$\varphi_0(h) = \mu_1 e + \mu_2 h + \mu_3 f + \mu_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mu_{kl} s_{kl}, \tag{3.6}$$

$$\varphi_0(s_{kl}) = \sigma_1^{kl} e + \sigma_2^{kl} h + \sigma_3^{kl} f + \sigma_4^{kl} z + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \sigma_{ij}^{kl} s_{ij}, \tag{3.7}$$

其中，$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \epsilon_{ij}, \rho_i, \rho_{ij}, \lambda_i, \lambda_{ij}, \mu_i, \mu_{ij}, \sigma_i^{kl}, \sigma_{ij}^{kl}$是一些仅有有限个非零项的复数。

Let

$$\theta = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \epsilon_{11}). \tag{3.8}$$

接下来，将通过以下步骤证明该引理。

步骤 1。 由 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \varphi_0([x_i, y_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(x_i), y_i] + [x_i, \varphi_0(y_i)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k, y_i] + [x_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ik} y_k]) \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha_{ii} + \epsilon_{ii}) z. \end{aligned}$$

This 表示对所有$i = 1, \cdots,$n</style}，结合 (3.8) 可得 e

$$\varphi_0(z) = \theta z. \tag{3.9}$$

步骤 2。 由 (3.4) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_i) &= \varphi_0([e, y_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(e), y_i] + [e, \varphi_0(y_i)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\rho_1 e + \rho_2 h + \rho_3 f + \rho_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \rho_{kl} s_{kl}, y_i] + [e, \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{ik} y_k]) \\ &= \tfrac{1}{2}((\rho_1 + \epsilon_{ii}) x_i - \rho_2 y_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \epsilon_{ik} x_k + \sum_{1 \leqslant k < i \leqslant n} \rho_{ki} y_k - \sum_{1 \leqslant i < l \leqslant n} \rho_{il} y_l). \end{aligned}$$

由 (3.2) 可得

$$\rho_1 = 2\alpha_{ii} - \epsilon_{ii}, \tag{3.10}$$

$$\beta_{ii} = -\tfrac{1}{2}\rho_2, \tag{3.11}$$

$$\alpha_{ij} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ij}, \ (j \neq i), \tag{3.12}$$

$$\beta_{ik} = \tfrac{1}{2}\rho_{ki}, (k < i), \quad \beta_{ik} = -\tfrac{1}{2}\rho_{ik}, (k > i). \tag{3.13}$$

类似地，由 (3.4) 和 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_0([e,x_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(e),x_i]+[e,\varphi_0(x_i)])\\ &= \tfrac{1}{2}([\rho_1 e+\rho_2 h+\rho_3 f+\rho_4 z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\rho_{kl}s_{kl},x_i]+[e,\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}y_k])\\ &= \tfrac{1}{2}((\rho_2+\beta_{ii})x_i+\rho_3 y_i+\sum_{1\leqslant k<i\leqslant n}(\beta_{ik}+\rho_{ki})x_k+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(\beta_{ik}-\rho_{ik})x_k),\end{aligned}$$

由此得到

$$\rho_2+\beta_{ii}=0, \tag{3.14}$$

$$\rho_3=0, \tag{3.15}$$

$$\beta_{ik}+\rho_{ki}=0\,(k<i),\quad \beta_{ik}-\rho_{ik}=0\,(k>i). \tag{3.16}$$

分别将 (3.11) 和 (3.13) 代入 (3.14) 和 (3.16)，得

$$\rho_2=0,\quad \rho_{ki}=0\,(k<i),\quad \rho_{ik}=0\,(k>i), \tag{3.17}$$

and

$$\beta_{ik}=0. \tag{3.18}$$

现在，由 (3.5) 和 (3.2) 得

$$\begin{aligned}\varphi_0(y_i) &= \varphi_0([f,x_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(f),x_i]+[f,\varphi_0(x_i)])\\ &= \tfrac{1}{2}([\lambda_1 e+\lambda_2 h+\lambda_3 f+\lambda_4 z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\lambda_{kl}s_{kl},x_i]+[f,\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}y_k])\\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_2 x_i+(\lambda_3+\alpha_{ii})y_i+\sum_{1\leqslant k<i\leqslant n}\lambda_{ki}x_k-\sum_{1\leqslant i<l\leqslant n}\lambda_{il}x_l+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_{ij}y_j),\end{aligned}$$

结合 (3.3) 可得

$$\gamma_{ii}=\tfrac{1}{2}\lambda_2, \tag{3.19}$$

$$\lambda_3=2\epsilon_{ii}-\alpha_{ii}, \tag{3.20}$$

$$\gamma_{ij}=\tfrac{1}{2}\lambda_{ji}\,(j<i),\quad \gamma_{ij}=-\tfrac{1}{2}\lambda_{ij}\,(j>i), \tag{3.21}$$

$$\epsilon_{ij}=\tfrac{1}{2}\alpha_{ij}\,(j\neq i). \tag{3.22}$$

将 (3.12) 代入 (3.22)，得

$$\alpha_{ij}=0\,(j\neq i), \tag{3.23}$$

$$\epsilon_{ij}=0\,(j\neq i). \tag{3.24}$$

类似地，由 (3.5) 和 (3.3) 得

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_0([f,y_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(f),y_i]+[f,\varphi_0(y_i)])\\ &= \tfrac{1}{2}([\lambda_1 e+\lambda_2 h+\lambda_3 f+\lambda_4 z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\lambda_{kl}s_{kl},y_i]+[f,\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{n}\epsilon_{ik}y_k])\\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 x_i+(\gamma_{ii}-\lambda_2)y_i+\sum_{1\leqslant k<i\leqslant n}(\gamma_{ik}+\lambda_{ki})y_k+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(\gamma_{ik}-\lambda_{ik})y_k),\end{aligned}$$

由此得到

$$\lambda_1=0,$$

$$\lambda_2 = \gamma_{ii}, \tag{3.25}$$

$$\gamma_{ij} + \lambda_{ji} = 0\,(j < i), \quad \gamma_{ij} - \lambda_{ij} = 0\,(j > i). \tag{3.26}$$

分别将（3.19）和（3.21）代入（3.25）和（3.26），得到

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_{ji} = 0\,(j < i), \quad \lambda_{ij} = 0\,(j > i),$$

$$\gamma_{ij} = 0. \tag{3.27}$$

由 (3.18)、(3.23) 可得

$$\varphi_0(x_i) = \alpha_{ii} x_i. \tag{3.28}$$

由 (3.24)、(3.27) 可得

$$\varphi_0(y_i) = \epsilon_{ii} y_i. \tag{3.29}$$

第3步。 由 (3.6) 和 (3.28) 可得

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x_i) &= \varphi_0([h, x_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(h), x_i] + [h, \varphi_0(x_i)]) \\
&= \tfrac{1}{2}([\mu_1 e + \mu_2 h + \mu_3 f + \mu_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mu_{kl} s_{kl}, x_i] + [h, \alpha_{ii} x_i]) \\
&= \tfrac{1}{2}((\mu_2 + \alpha_{ii}) x_i + \mu_3 y_i + \sum_{1 \leqslant k < i \leqslant n} \mu_{ki} x_k - \sum_{1 \leqslant i < l \leqslant n} \mu_{il} x_l),
\end{aligned}$$

结合 (3.28) 可得

$$\mu_2 = \alpha_{ii}, \tag{3.30}$$

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_{ki} = 0\,(k < i), \quad \mu_{ik} = 0\,(k > i).$$

同理，由 (3.6) 和 (3.29) 可得

$$\begin{aligned}
\varphi_0(y_i) = \varphi_0([y_i, h]) &= \tfrac{1}{2}([\varphi_0(y_i), h] + [y_i, \varphi_0(h)]) \\
&= \tfrac{1}{2}([\epsilon_{ii} y_i, h] + [y_i, \mu_1 e + \mu_2 h + \mu_3 f + \mu_4 z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \mu_{kl} s_{kl}]) \\
&= \tfrac{1}{2}(-\mu_1 x_i + (\epsilon_{ii} + \mu_2) y_i - \sum_{1 \leqslant k < i \leqslant n} \mu_{ki} y_k + \sum_{1 \leqslant i < l \leqslant n} \mu_{il} y_l),
\end{aligned}$$

结合 (3.29) 可知

$$\mu_1 = 0,$$

$$\mu_2 = \epsilon_{ii}. \tag{3.31}$$

由（3.30）、（3.31）、（3.8）、（3.10）和（3.20）可得

$$\epsilon_{ii} = \mu_2 = \alpha_{ii} = \theta = \rho_1 = \lambda_3. \tag{3.32}$$

此外，由（3.28）、（3.29）和（3.32）可得

$$\varphi_0(x_i) = \theta x_i, \quad \varphi_0(y_i) = \theta y_i. \tag{3.33}$$

步骤 4. 由（3.15）、（3.17）、（3.32）和（3.4）可得

$$\varphi_0(e) = \theta e + \rho_4 z.$$

类似地，我们有

$$\varphi_0(f) = \theta f + \lambda_4 z, \quad \varphi_0(h) = \theta h + \mu_4 z. \tag{3.34}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} 2\varphi_0(e) &= \varphi_0([h,e]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(h),e] + [h,\varphi_0(e)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\theta h + \mu_4 z, e] + [h, \theta e + \rho_4 z]) \\ &= 2\theta e, \end{aligned}$$

由此得到

$$\varphi_0(e) = \theta e. \tag{3.35}$$

类似地，由 $-2f = [h、f]$ 和 (3.34) 可得

$$\varphi_0(f) = \theta f. \tag{3.36}$$

现在由 (3.35) 和 (3.36) 可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(h) &= \varphi_0([e,f]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(e),f] + [e,\varphi_0(f)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\theta e, f] + [e, \theta f]) \\ &= \theta h. \end{aligned} \tag{3.37}$$

步骤 5. 由 (3.7) 和 (3.33) 可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_k) &= \varphi_0([s_{ki}, x_i]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(s_{ki}), x_i] + [s_{ki}, \varphi_0(x_i)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\sigma_1^{ki} e + \sigma_2^{ki} h + \sigma_3^{ki} f + \sigma_4^{ki} z + \sum_{1\leqslant l<j\leqslant n} \sigma_{lj}^{ki} s_{lj}, x_i] + [s_{ki}, \theta x_i]) \\ &= \tfrac{1}{2}((\sigma_{ki}^{ki} + \theta)x_k + \sigma_2^{ki} x_i + \sigma_3^{ki} y_i + \sum_{\substack{1\leqslant l<i\leqslant n \\ l\neq k}} \sigma_{li}^{ki} x_l - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sigma_{ij}^{ki} x_j), \end{aligned}$$

结合 (3.33) 可得

$$\theta = \sigma_{ki}^{ki}, \tag{3.38}$$

$$\sigma_2^{ki} = \sigma_3^{ki} = 0\,(k<i), \tag{3.39}$$

$$\sigma_{li}^{ki} = 0\,(k<i, k\neq l<i), \quad \sigma_{il}^{ki} = 0\,(k<i<l). \tag{3.40}$$

类似地，由 (3.7) 和 (3.33)，取 $\varphi_0(y_k) = \varphi_0([s_{ki}, y_i])$ 可得

$$\sigma_1^{ki} = 0\,(k<i). \tag{3.41}$$

由 (3.39)、(3.41) 和 (3.7) 可得

$$\varphi_0(s_{kl}) = \sigma_4^{kl} z + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sigma_{ij}^{kl} s_{ij}. \tag{3.42}$$

对于不同的i、k、l，且$k<l$，由 (3.42) 和 (3.33) 可得

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_0([s_{kl}, x_i]) &= \tfrac{1}{2}([\varphi_0(s_{kl}), x_i] + [s_{kl}, \varphi_0(x_i)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\sigma_4^{kl} z + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sigma_{ij}^{kl} s_{ij}, x_i] + [s_{kl}, \theta x_i]) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \sigma_{ji}^{kl} x_j - \sum_{1\leqslant i<t\leqslant n} \sigma_{it}^{kl} x_t), \end{aligned}$$

由此可得

$$\sigma_{ji}^{kl} = 0\,(j<i, i\neq k \text{ and } i\neq l), \quad \sigma_{ij}^{kl} = 0\,(j>i, i\neq k \text{ and } i\neq l). \tag{3.43}$$

由（3.42）、（3.38）、（3.40）和（3.43）可得

$$\varphi_0(s_{kl}) = \sigma_4^{kl} z + \theta s_{kl}. \tag{3.44}$$

然后由（3.44）可得

$$\begin{aligned}\varphi_0(s_{kj}) &= \varphi_0([s_{ij}, s_{ik}]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_0(s_{ij}), s_{ik}] + [s_{ij}, \varphi_0(s_{ik})]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\sigma_4^{ij} z + \theta s_{ij}, s_{ik}] + [s_{ij}, \sigma_4^{ik} z + \theta s_{ik}]) \\ &= \theta s_{kj}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

综合 (3.9)、(3.33)、(3.35)、(3.36)、(3.37) 和 (3.45) 的结果可知，对于所有$(u) = \theta u \in \mathcal{S}_n$, φ_{0}。因此， φ_0 是一个平凡的 1 2-导子。证明完毕。 □

引理 3.3. 设 φ_1 是 $\mathcal{S}_n$ $(n \geq 3)$ 的一个1 2-导子，满足

$$\varphi_1((\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}, \quad \varphi_1((\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}.$$

那么我们有 $\varphi_1 = 0$。

证明。 由 (1.2) 可设

$$\varphi_1(e) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j, \tag{3.46}$$

$$\varphi_1(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_j y_j, \tag{3.47}$$

$$\varphi_1(h) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y_j, \tag{3.48}$$

$$\varphi_1(s_{kl}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{kl} x_i + \sum_{j=1}^{n} \nu_j^{kl} y_j, \tag{3.49}$$

$$\varphi_1(x_i) = \alpha_1^i e + \alpha_2^i h + \alpha_3^i f + \alpha_4^i z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \alpha_{kl}^i s_{kl}, \tag{3.50}$$

$$\varphi_1(y_i) = \beta_1^i e + \beta_2^i h + \beta_3^i f + \beta_4^i z + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \beta_{kl}^i s_{kl}, \tag{3.51}$$

其中 ρ_i、 μ_i、 λ_i、 θi、 γ_i、 ϵ_i、 ω_i^{kl}、 ν_i^{kl}、 α_j^i、 α_{kl}^i、 β_j^i、 β_{kl}^i 属于 $\mathbb{C}$，其中仅有有限多个非零复数。接下来，将按以下步骤证明该引理。

步骤 1. 由 (3.48) 和 (3.46) 可得

$$\begin{aligned}2\varphi_1(e) &= \varphi_1([h, e]) = \tfrac{1}{2}([\varphi_1(h), e] + [h, \varphi_1(e)]) \\ &= \tfrac{1}{2}([\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y_j, e] + [h, \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j]) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \epsilon_i) x_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j),\end{aligned}$$

结合式 (3.46)，可得

$$3\rho_i + \epsilon_i = 0 \, (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{3.52}$$

$$\mu_j = 0 \, (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{3.53}$$

类似地，由式 (3.48) 和 (3.47) 可得

$$\begin{aligned}-2\varphi_1(f) = \varphi_1([h,f]) &= \tfrac{1}{2}([\varphi_1(h),f]+[h,\varphi_1(f)])\\ &= \tfrac{1}{2}([\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i+\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j y_j,f]+[h,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_j y_j])\\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-\sum_{j=1}^{n}(\theta_j+\gamma_j)y_j),\end{aligned}$$

结合（3.47），可得

$$\lambda_i = 0\,(1\leqslant i\leqslant n), \tag{3.54}$$

$$3\theta_j = \gamma_j\,(1\leqslant j\leqslant n). \tag{3.55}$$

由（3.46）和（3.47），可得

$$\begin{aligned}\varphi_1(h) = \varphi_1([e,f]) &= \tfrac{1}{2}([\varphi_1(e),f]+[e,\varphi_1(f)])\\ &= \tfrac{1}{2}([\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j y_j,f]+[e,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_j y_j])\\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j-\sum_{i=1}^{n}\rho_i y_i),\end{aligned}$$

此外，由（3.48）可得

$$\theta_j = 2\gamma_j\,(1\leqslant j\leqslant n), \tag{3.56}$$

$$\rho_i + 2\epsilon_i = 0\,(1\leqslant i\leqslant n). \tag{3.57}$$

分别将（3.55）和（3.52）代入（3.56）和（3.57），可得

$$\theta_j = \gamma_j = 0\,(1\leqslant j\leqslant n), \tag{3.58}$$

$$\rho_i = \epsilon_i = 0\,(1\leqslant i\leqslant n). \tag{3.59}$$

由（3.59）和（3.53）可知

$$\varphi_1(e) = 0, \tag{3.60}$$

由（3.54）和（3.58）可知

$$\varphi_1(f) = 0, \tag{3.61}$$

并由 (3.58)、(3.59) 可得

$$\varphi_1(h) = 0. \tag{3.62}$$

步骤 2. 由 (3.62) 和 (3.49) 可得

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_1([h,s_{kl}]) = \tfrac{1}{2}[h,\varphi_1(s_{kl})]\\ &= \tfrac{1}{2}[h,\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{kl}x_i+\sum_{j=1}^{n}v_j^{kl}y_j]\\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{kl}x_i-\sum_{j=1}^{n}v_j^{kl}y_j),\end{aligned}$$

由此得到

$$\varphi_1(s_{kl}) = 0. \tag{3.63}$$

第3步。由式（3.62）和（3.50）可得

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_i) &= \varphi_1([h,x_i]) = \tfrac{1}{2}[h,\varphi_1(x_i)]\\ &= \tfrac{1}{2}[h,\alpha_1^i e+\alpha_2^i h+\alpha_3^i f+\alpha_4^i z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\alpha_{kl}^i s_{kl}]\\ &= \alpha_1^i e-\alpha_3^i f,\end{aligned}$$

这与 (3.50) 一起推出

$$\alpha_2^i=\alpha_3^i=\alpha_4^i=\alpha_{kl}^i=0\,(k<l). \tag{3.64}$$

类似地，由 (3.62) 和 (3.51) 可得

$$\begin{aligned}-\varphi_1(y_i) &= \varphi_1([h,y_i]) = \tfrac{1}{2}[h,\varphi_1(y_i)]\\ &= \tfrac{1}{2}[h,\beta_1^i e+\beta_2^i h+\beta_3^i f+\beta_4^i z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\beta_{kl}^i s_{kl}]\\ &= \beta_1^i e-\beta_3^i f,\end{aligned}$$

这与 (3.51) 一起给出

$$\beta_1^i=\beta_2^i=\beta_4^i=\beta_{kl}^i=0\,(k<l). \tag{3.65}$$

此外，由 (3.60) 和 (3.51) 可得

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_i) &= \varphi_1([e,y_i]) = \tfrac{1}{2}[e,\varphi_1(y_i)]\\ &= \tfrac{1}{2}[e,\beta_1^i e+\beta_2^i h+\beta_3^i f+\beta_4^i z+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\beta_{kl}^i s_{kl}]\\ &= \tfrac{1}{2}(-2\beta_2^i e+\beta_3^i h),\end{aligned}$$

进一步地，由 (3.50) 可得

$$\alpha_1^i=-\beta_2^i, \tag{3.66}$$

$$2\alpha_2^i=\beta_3^i. \tag{3.67}$$

由 (3.64)、(3.65) 和 (3.66) 可知

$$\varphi_1(x_i)=0, \tag{3.68}$$

由 (3.64)、(3.65)、(3.67) 可得

$$\varphi_1(y_i)=0. \tag{3.69}$$

接着利用 (3.68) 和 (3.69)，得到

$$\varphi_1(z)=\varphi_1([x_i,y_i])=\frac{1}{2}([\varphi_1(x_i),y_i]+[x_i,\varphi_1(y_i)])=0. \tag{3.70}$$

综合 (3.60)、(3.61)、(3.62)、(3.63)、(3.68)、(3.69) 和 (3.70) 的结果，可知$\varphi_1=0$。证明完成。 □

Lem命题 3.4. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_n$ 不存在非平凡的 $\mathbb{1}\,\mathbb{2}$-导子，其中 $n\neq 2$.

证明。 当 $n=1$ 时，结论由 [11] 给出。因此下文假设 $n\geq 3$。

设 φ 是 $\mathcal{S}_n$的一个 $\mathbb{1}\,\mathbb{2}$-导子。由于 $\mathcal{S}_n$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}_2$-分次李代数，根据引理 2.4，我们知道

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1$$

它满足

$$\varphi_0((\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}, \quad \varphi_0((\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}, \quad \varphi_1((\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}, \quad \varphi_1((\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}) \subseteq (\mathcal{S}_n)_{\bar{0}},$$

其中，φ_0、φ_1 均为 $\mathcal{S}_n$ 的分次-1 2-导子，且$(\mathcal{S}_n)_{\bar{0}}$、$(\mathcal{S}_n)_{\bar{1}}$ 由（1.1）给出。由引理3.2和引理3.3可知，φ_0 分别是平凡的。因此，有 $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_0$，即 φ 是平凡的。证明完成。

□

对于$n = 2$，可以采用证明引理3.2、3.3和3.4时所用的类似方法，但无法得到公式（3.45），因为$n = 2$，因此无法由s^{kj}求得s^{ij}、s_{ik}，进而得到如下引理。

引理3.5。 φ 是薛定谔代数S_2 的1 2-导子，当且仅当存在 $\theta, \beta \in \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned} &\varphi(e) = \theta e, \quad \varphi(f) = \theta f, && \varphi(h) = \theta h, \\ &\varphi(x_i) = \theta x_i, \quad \varphi(y_i) = \theta y_i, && 1 \leq i \leq 2, \\ &\varphi(z) = \theta z, \quad \varphi(s_{12}) = \theta s_{12} + \beta z. \end{aligned} \tag{3.71}$$

也就是说，薛定谔代数 S_2 的每个 1 2-导子 φ 均具有如下形式

$$\varphi = \theta \mathrm{id}_{S_2} + \beta \Re$$

对于某个 θ，$\beta \in \mathbb{C}$，其中 $\Re$ 由（*3.1*）给出。

由引理 3.4 和引理 3.5，可得到关于 S_n上 1 2-导子的如下定理。

定理 3.6。 薛定谔代数 S_n 的每个 1 2-导子 φ 均具有如下形式

$$\varphi = \theta \mathrm{id}_{S_n} + \delta_{2n} \beta \Re$$

对于某个 θ，$\beta \in \mathbb{C}$，其中 $\Re$ 由（*3.1*）给出。换言之，我们有

$$\triangle(S_n) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{id}_{S_n}, \delta_{2n}\Re\},$$

这意味着 空间 $\triangle(S_n)$ 的维数为 $\dim \triangle(S_n) = 1$ 若 $n \neq 2$ 且 $\dim \triangle(S_2) =$ 2.

现在给出本文的主要结果。

定理 3.7。 若 $n \neq 2$，则 $(\mathcal{S}_n, [\cdot,\cdot])$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的。若 $n = 2$，则在同构意义下，$(S_2, [\cdot,\cdot])$上只有一个非平凡的转置泊松结构 $\cdot$，其定义如下：

$$s_{12} \cdot s_{12} = z.$$

证明。 由引理 2.5、2.6 和定理 3.6，结论成立。 □

下面回顾李代数上的 Hom-结构的定义。

定义 3.8。 设 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，且 φ 是一个线性映射。则 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot], \varphi)$ 是 Hom-李结构（*Hom-Lie structure*）于 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$，当且仅当

$$[\varphi(x), [y,z]] + [\varphi(y), [z,y]] + [\varphi(z), [x,y]] = 0.$$

Filippov 证明，李代数的每个非零 δ-导子 $(\delta \neq 0, 1)$ 都给出一个非平凡的 Hom-Lie 代数结构 [12, 定理 1]。因此，由（3.71）可得以下推论。

推论 3.9. 薛定谔代数 $\mathcal{S}_2$ 具有一种非平凡的 Hom-李代数结构。

资助

本研究部分得到中国国家自然科学基金（编号：12271085）、黑龙江省自然科学基金（编号：LH2020A020）以及黑龙江省复杂系统理论与计算重点实验室基金的资助。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] Aizawa, N., Dobrev, V. (2010). 非相对论全息的交织算子实现。核物理学 *B*828(3):581-593. 数字对象标识符: 10.1016/j.nuclphysb.2009.10.019.[2] Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y. 转置泊松代数、Novikov-泊松代数与3-李代数。arXiv:2005.01110.[3] Bavula, V., Lu, T. (2018). 薛定谔代数的包络代数及其素谱。加拿大数学通报61(4):688-703. 数字对象标识符: 10.4153/CMB-2018-009-1.[4] Beites P. D., Ferreira B. L. M., Kaygorodov I. 转置泊松结构。arXiv:2207.00281.[5] Billig Yu. (2022). 迈向Kac–van de Leur 猜想：超共形代数的局部性。数学进展400:108295. 数字对象标识符: 10.1016/j.aim.2022.108295.[6] Cantarini N., Kac V. (2007). 线性紧单Jordan与广义泊松超代数的分类。代数学杂志313(1):100-124. 数字对象标识符: 10.1016/j.jalgebra.2006.10.040.[7] Cantarini N., Kac V. (2010). 线性紧单刚性超代数的分类。国际数学研究通知17(1):3341-3393. 数字对象标识符: 10.1093/imrn/rnp231.[8] Cantarini N., Kac V. (2016). 线性紧单Nambu-泊松代数的分类。数学物理学杂志57(5):051701, 18页。数字对象标识符: 10.1063/1.4948409.[9]Dobrev, V., Doebner, H., Mrugalla, C. (1997). 薛定谔代数的最低权表示与广义热方程/薛定谔方程。数学物理报告39(2):201-218. 数字对象标识符: 10.1016/S0034-4877(97)88001-9.[10] Dotsenko V. (2019). 通过前李代数构造*F*-流形的代数结构。纯粹与应用数学年鉴198(2):517-527. 数字对象标识符: 10.1007/s10231-018-0787-z.[11] Ferreira B. L. M., Kaygorodov I., Lopatkin V. (2021). 李代数的1 2-导子与转置泊松代数。皇家精确、物理与自然科学学院杂志*A*辑：数学115 (142). 数字对象标识符: 10.1007/s13398-021-01088-2.[12] Filippov V. (1998). δ李代数的导子，西伯利亚数学杂志39 (6): 1218-1230.[13]Gerstenhaber M. (1963). 结合环的上同调结构。数学年刊78(2):267-288. 数字对象标识符: 10.2307/1970343.

[14] Kantor I. (1992). 由泊松代数确定的Jordan与Lie超代数。《代数与分析》（托木斯克, 1989）55-80.[15] Kaygorodov I. (2017). Jordan括号代数与广义泊松代数。线性与多重线性代数 65(6):1142-1157. 数字对象标识符: 10.1080/03081087.2016.1229257.[16] Kaygorodov I., Khrypchenko M. (2021). 有限关联代数上的泊松结构。代数学杂志 578(1):402-420. 数字对象标识符: 10.1016/j.jalgebra.2021.03.011.[17] Kaygorodov I., Khrypchenko M. (2023). Block Lie 代数与超代数上的转置泊松结构。线性代数及其应用 656:167-197. 数字对象标识符: 10.1016/j.laa. 2022.09.024.[18] Kaygorodov I., Lopatkin V., Zhang, Z. (2023). 伽利略李代数与可解李代数上的转置泊松结构。几何与物理杂志 187: 104781. 数字对象标识符: 10.1016/j.geomphys.2023.104781.[19] Kaygorodov I., Khrypchenko M. (2023). Witt型代数上的转置泊松结构。线性代数及其应用 665:196-210. 数字对象标识符: 10.1016/j.laa.2023.02.003.[20] Kaygorodov I., Shestakov I., Umirbaev U. (2017). 自由泛泊松域与代数。代数学通讯 46(4):1799-1812. 数字对象标识符: 10.1080/00927872.2017.1358269.[21] Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. (2014). 一般泊松代数的自由定理。SIGMA 10(论文115):15页。数字对象标识符: 10.3842/sigma.2014.115.[22] Liu, G., Li, Y., Wang, K. (2021). (n ＋1)维时空中薛定谔李代数的不可约权模。代数学杂志 575:1-13. 数字对象标识符: 10.1016/j.jalgebra.2021.01.034.[23] Liu J., Bai C., Sheng Y. (2020). 非交换泊松双代数。代数学杂志 556(1):35-66. 数字对象标识符: 10.1016/j.jalgebra.2020.03.009.[24] Ni X., Bai C. (2013). 泊松双代数。数学物理学杂志 54(2):023515. 数字对象标识符: 10.1063/1.4792668.[25] Perroud, M. (1997). 薛定谔群的射影表示。Helv. Phys. Acta. 50(2):233-252.[26] Van den Bergh, M. (2008). 双泊松代数。美国数学会汇刊 360(11):5711-5769. 数字对象标识符: 10.1090/s0002-9947-08-04518-2.[27] Wu, Q., Tang, X. (2022). (n ＋1)维时空中薛定谔代数的导子与双导子。线性与多重线性代数 数字对象标识符: 10.1080/03081087.2022.2050884.[28] Wu, Y., Zhu, L. (2013). 薛定谔代数的简单权模。线性代数及其应用 438(1):559-563. 数字对象标识符: 10.1016/j.laa.2012.07.029. 16[29]Xu, P. (1994). 非交换泊松代数。美国数学杂志 116(1):101-125. 数字对象标识符: 10.2307/2374983.[30]Xu, X. (1997). Novikov-泊松代数。代数学杂志 190(2):253-279. 数字对象标识符: 10.1006/jabr. 1996.6911.[31] Yang, Y., Tang, X. (2018). 薛定谔代数的导子及其应用。应用数学与计算 58(1-2):567-576. 数字对象标识符: 10.1007/s12190-017-1157-5.

[32] Yuan, L., Hua, Q.（2021年）。1 2-（双）导子与李代数上的转置泊松代数结构。线性与多重线性代数数字对象标识符：10.1080/03081087.2021.2003287。[33] Zhang, X., Cheng, Y.（2015年）。在正部分上局部有限的简单薛定谔模。纯粹与应用代数杂志219(7):2799-2815。数字对象标识符：10.1016/j.jpaa.2014.09.029。[34] Zusmanovich, P.（2021年）。关于张量积上的接触括号。线性与多重线性代数数字对象标识符：10.1080/03081087.2021.1895049。