arXiv:2303.08202v2 [econ.TH] 9 Dec 2023

测量随机理性*

Efe A. Ok† Gerelt Tserenjigmid‡

2023年12月13日

摘要

我们的目标是提出一种偏序方法，根据随机选择函数的个体理性对其进行比较。为此，我们为任意随机选择函数指定一个由单一参数索引的确定性选择对应类，然后针对每个参数值检验这些对应是否理性（按照显示偏好的含义）。由此得到的序既能检测（随机）传递性的违反，也能识别从嵌套菜单中进行选择时出现的不一致。我们得到了一个无参数刻画，并将其应用于一些流行的随机选择模型。我们还通过两个知名选择实验提供了实证应用。

JEL 分类：D01, D11, D81, D91。关键词：随机选择、理性、不完备偏好、随机传递性、随机效用、Luce 模型、颤抖模型、选择实验。

*本文的早期版本曾以《随机选择行为的比较理性》为题流传。我们谨以本文纪念已故的 Peter Fishburn。Peter 是一位杰出的应用数学家，他在经济学和心理学领域的数理决策理论方面作出了开创性贡献，也是整个序理论领域的领军人物之一。事实上，本文牢牢建立在 Peter 于 1978 年提出、但大多已被遗忘的一项思想之上，即将确定性与随机选择理论联系起来。我们将深切怀念他。感谢 Paul Feldman、John Rehbeck、Mauricio Ribeiro、Gil Riella、John Quah，以及纽约大学和约翰斯·霍普金斯大学研讨会的与会者提出的建议和反馈。

† 纽约大学经济学系和库朗数学科学研究所。电子邮件：efe.ok@nyu.edu。

‡加利福尼亚大学圣克鲁兹分校经济学系。电子邮件：gtserenj@ucsc.edu。

1 引言

确定性与随机选择理论是刻画决策者选择行为的两大主要路径。确定性方法较为简单，并能清晰地判定一个人的选择行为何时是理性的，何时不是。[1] 然而，尽管这种方法由来已久，它却难以与实证选择数据相联系，也过于粗略，无法以统一的方式刻画实证中与偏好最大化相关的偏离。在这方面，随机选择理论具有显著优势。它可以根据一个人的重复选择轻易推断出来，而且足够丰富，能够捕捉选择异常。[2]然而，当我们将选择建模为随机事件时，何时可以将某个个体归类为“理性”，以及如何比较两个个体的“理性”程度，就不那么明晰了。例如，如果某人的选择行为符合随机效用模型（RUM），这个个体就必然是理性的吗？还是说，有些随机效用模型对应的行为比其他模型“更理性”？哪些限制不会削弱经典 Luce 模型的理性？当我们掌握了实验中两名受试者随机选择的实证记录时，该如何判断谁的行为更理性？

本文旨在介绍比较随机选择行为的方法，从而为这类问题提供具体答案。此外，我们希望这种方法在实证应用中计算上可行且易于实施。不过，在介绍我们的方法之前，我们应当强调，本文将随机选择函数仅仅视为个体决策单元的选择模型。这种解释与离散选择理论截然不同；在离散选择理论中，这类函数对应的是一个集体的行为，而集体成员是不同的个体，他们以确定性的方式做出选择。（关于这一点，详见第5.1节。）

我们的方法以如下思路为出发点：使用一个单参数的确定性选择对应族来近似随机选择函数。该方法由 Fish- burn（1978）提出。准确地说，对于任意随机选择函数 $\mathbb{P}$ 和 $\lambda \in (0,1]$, 我们定义 $C_{\mathbb{P},\lambda}$为一种选择对应：在菜单 S 中，它选择所有选择概率至少达到该菜单中选择的最大似然的 $100\times\lambda$ % 的备选项。（因此，当 λ足够小时，$C_{\mathbb{P},\lambda}$ 会选出在 S 中以正概率被选择的所有选项，而 $C_{\mathbb{P},1}$只会选出 S 中被选择的似然最高的选项。）我们将 $C_{\mathbb{P},\lambda}$ 视为 $\mathbb{P}$的确定性近似 。对于这种近似，先验上 并没有理由必须选取某个特定的λ 值；根据选择环境的具体情况，例如其

[1]“理性”一词含义颇多，经济学、哲学及其他领域的许多作者对它赋予了不同且往往相互冲突的含义。我们对这一概念采取务实的态度。我们所说的个体选择行为的“理性”，是指个体在较大菜单中的选择与两两选择情境中的选择相一致；这对应于偏好最大化行为。[2]关于前一点，参见 Balakrishnan、Ok 和 Ortoleva（2021）；关于后一点，参见 Gul、Natenzon 和 Pesendorfer（2014）、Manzini 和 Mariotti（2014）、Fudenberg、Iijima 和 Strzalecki（2015）、Aguiar（2017）、Echenique、Saito 和 Tserenjigmid（2018）以及 Natenzon（2019）等。

备选项空间的大小、做出决策所需的时间、背景噪声等，某些 λ 取值可能比其他取值更适用（Balakrishnan、Ok 和 Ortoleva（2021））。本文不采用任何特定的 λ值，而是研究整个族 $\{C_{\mathbb{P},\lambda}:\ 0<\lambda\leq 1\}$。

如上所述，确定性选择对应的“理性”很容易定义；如果某个选择对应是通过最大化某个（可能不完备的）偏好关系得出的，那么它就是理性的 。此外，文献提供了多种方法，可以借助显示偏好公设来识别这类选择对应。我们在此提出，通过比较与随机选择函数 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 相关联的 Fishburn 族中各成员的理性，来比较这两个随机选择函数的理性。具体而言，我们称 $\mathbb{P}$ 至少与.....同样理性 $\mathbb{Q}$，如果对于每个 $\lambda\in(0,1]$，只要 $C_{\mathbb{Q},\lambda}$具有理性，$C_{\mathbb{P},\lambda}$ 也具有理性；我们将这种情形记作 $\mathbb{P}\trianglerighteq_{\text{rat}}\mathbb{Q}$。在这种情况下，无论采用 Fishburn 族中的哪个成员来近似给定的随机选择函数，如果与 $\mathbb{Q}$相关联的成员来自某个偏好关系的最大化，那么与 $\mathbb{P}$ 相关联的成员也必然如此。正是在这个意义上，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 对随机选择函数的理性给出了明确但不完备的排序。若某个随机选择函数在所有随机选择函数中使 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 达到最大值，也就是说，它至少与任何随机选择函数同样理性，我们就称 $\mathbb{P}$ 为最大理性。在第 3.2 节中，我们将证明，这种选择行为与除最极端形式之外的所有随机传递性形式都相容。这表明，我们的理性排序旨在识别（随机）传递性的违背，以及嵌套菜单间选择不一致的情形。

虽然预序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 背后的动机相当清晰，而且它类似于经济学其他领域所使用的偏序方法（例如收入不平等测度中的经典洛伦兹排序），但仅凭其定义很难应用 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$。在第 2 节介绍个体选择理论的一些预备知识后，我们因此在第3节中得到了 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 的无参数刻画。这一刻画为每个随机选择函数 $\mathbb{P}$ 赋予一个集合 $\Lambda(\mathbb{P})$，并表明，当且仅当 $\Lambda(\mathbb{P})\subseteq\Lambda(\mathbb{Q})$ 时，$\mathbb{P}\trianglerighteq_{\text{rat}}\mathbb{Q}$ 成立。这不仅使运用 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 更加容易（正如我们后续的应用所展示的那样），还使我们能够定义一个与 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 一致的自然理性指数（通过使用 $\Lambda(\mathbb{P})$ 的大小）。我们将这一指数记为 I_{rat}，它量化了一个随机选择函数相较于另一个随机选择函数更具理性的程度。此外，对于任意两个恰好不可比较的随机选择函数，还可以借助 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 对它们进行排序（正如人们可以使用基尼指数比较两个洛伦兹曲线相交的收入分布一样）。

在第4节中，我们将方法专门应用于由二元选择数据（即从双元素菜单中进行选择）产生的随机选择函数。在这种适用于大多数重复／随机选择实验的情形下，序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 的适用性有所提高，并且

[3]许多专家认为，总的来说，偏好不完备并非非理性。（例如，参见冯·诺伊曼和摩根斯特恩（1947年）、Aumann（1962年）、Bewley（1986年）和Schmeidler（1989年）等人的研究。）正如我们稍后将讨论的，在随机选择环境中，允许偏好不完备甚至更具吸引力。

I_{rat} 更易于计算。本节还概述了一种用于在二元选择环境中计算 $\Lambda(\mathbb{P})$ 的算法；我们的应用表明，该算法速度相当快。

借助第3节和第4节所建立的理论，我们可以对上述问题进行形式化探讨，有时还能得到并非显而易见的答案。在第一个应用中（第5.1节），我们考察随机效用模型的个体理性。这类模型是经典（确定性）理性选择模型的随机扩展。或许正因如此，许多决策理论家似乎认为，任何随机效用模型都对应于理性个体的随机选择行为。然而，仔细审视后，这种看法就值得怀疑了。例如，传递性是理性（确定性）选择模型的关键性质，而随机效用模型甚至可能不满足最弱形式的随机传递性。[4] 同样，尽管前一种模型的公理基础很大程度上建立在理性公理（例如显示偏好弱公理）之上，但目前已知的随机效用模型公理中，没有一条具备理性判据的性质。

事实上，即使不是专家，也能看出某些随机效用模型的“理性”并非无可指摘。每当表达意见时，如果一位政治家总是毫不动摇地以共和党人的立场行事，或总是以精明的社会主义者立场行事，且两种情况各有一半概率，我们大多数人都不会认为他是“理性”的。[5] 尽管序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 的要求很高，却准确地捕捉到了这种直觉。事实上，我们发现，根据 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$，一个随机效用模型甚至可能是最小程度上理性的。关键在于，要满足个体理性，随机效用模型的效用函数集合在某种意义上应当协调一致。在第5.1节中，我们刻画了这对具有两个效用函数的随机效用模型意味着什么。事实上，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 能够对任何两个这样的随机效用模型进行排序，并将任何满足这一一致性条件的此类模型归类为最大理性。因此，我们的方法能够根据理性程度，在行为层面区分各种随机效用模型。

Luce 型模型也会出现类似的情况。首先，很容易验证，经典 Luce 模型具有最大理性。另一方面，一般 Luce 模型（即个体仅在给定菜单的某个（考虑）子集上使用 Luce 规则）甚至可能只有最小理性。然而，我们在第5.2节证明，只要满足一个简单的一致性条件，每个两阶段 Luce 规则都具有最大理性。

这些观察结果表明，若要在经济学应用中采用随机效用模型或一般的 Luce 型模型，并探究理性但随机的选择行为所带来的后果，就需要对这些模型的原始要素施加适当的一致性条件

[4]这并非理论上的反常现象。在第 5.4 节的实证应用中，我们发现，26 名受试者中有 4 人（分别有 7 人）表现出弱（分别为中度）随机 *non*传递行为，但这种行为仍与随机效用模型相一致。[5]需要明确的是，问题不在于一个人的偏好，而在于这些偏好的 *consistency* 。毕竟，这位政治家的行为与一半议题上表现得像共和党人、另一半议题上表现得像社会主义者截然不同。显然，后一种行为并无非理性或随机之处。相反，此人以相同的概率，在这组 *same* 议题上采取相互正交的意识形态立场。（例如，某一天他们主张将所有堕胎行为定为非法，第二天又主张拨出大量预算开设联邦资助的堕胎诊所， *on the basis of a coin toss*。）我们认为，大多数人会称此人“前后不一”或“非理性”，尽管其行为完全符合随机效用模型。

。预序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$， 以及指标 I_{rat}，都可用于识别所需的一致性条件。更妙的是，这些测度还能用于开展比较静态分析，研究随着所采用的随机选择模型变得更加理性，经济学应用的结果会如何变化。这正是我们的理论贡献可应用于应用微观经济学建模的方式。

我们的第三个应用涉及颤抖选择模型（第 5.3 节）。我们发现，任何两个颤抖概率不同的此类模型都无法通过 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 进行比较。相反，我们使用指标 I_{rat} 来比较此类随机选择模型的理性程度。我们发现，对于低于某一阈值的颤抖概率，随着颤抖发生的似然降低，颤抖模型会变得更加理性（相对于 I_{rat} 而言）。当这种似然趋于零时，该模型便成为标准的效用最大化模型，后者当然是最大理性的。不过，这只适用于颤抖概率足够小的情况。当颤抖概率高于上述阈值时，结论则恰恰相反。在这种情况下，我们的测量方法捕捉到这样一个事实：当颤抖频繁发生时，没有理由将其视为“错误”。当颤抖概率足够大时，进一步提高该概率会使模型更接近这样一种模型：它在每个菜单中都以相同的概率选择所有备选项，从而提高其理性程度（至少在 I_{rat} 看来如此）。这完全合乎情理，因为后一种模型是最大理性的，它对应的不过是一位对所有备选项都无差异的效用最大化者的行为。

在第 5.4 节中，我们给出两项实证应用。首先，我们使用 Tversky（1969）以及 Regenwetter、Dana 和 Davis-Stober（2011）的合并选择数据，根据我们的理性排序，确定其中哪些受试者具有最大理性。我们还利用序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$对这些受试者进行理性比较，并确定每位受试者的 I_{rat} 值。其次，我们考察 Feldman 和 Rehbeck（2022）二元选择实验的大型数据集，并展示我们的算法在计算 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 和 I_{rat}方面的计算优势。在这两项实证应用中，我们发现，我们的方法能从数据中揭示新的见解，并凸显以往未曾显现的细微之处。此外，尽管 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 并不完备，我们观察到它仍能对数据中的大量对象进行比较。

第 6 节对论文作出总结，并简要讨论未来研究。

相关文献。 关于衡量确定性选择行为理性的文献相当丰富。Afriat（1973）在消费者需求理论的背景下研究了这一问题，随后 Varian（1990）、Echenique、Lee 和 Shum（2011）、Dean 和 Martin（2016），以及 Aguiar 和 Serrano（2017）的研究进一步推进了这一领域。尽管这些论文是在特定的经济环境中开展研究，但也有一些研究探讨了如何在一般环境中衡量选择行为的理性；例如，等等，Houtman 和 Maks（1985）、Apesteguia 和 Ballester（2015）、Caradonna（2020）以及 Ribeiro（2021）。

除了 Ribeiro（2021）之外，这些论文都没有采用偏序方法；除了 Apesteguia 和 Ballester（2015）之外，这些论文也都不适用于随机选择的情境

函数。即使是 Apesteguia 和 Ballester（2015）的重要研究，虽然适用于随机选择领域，但其主要研究对象仍是确定性选择函数。与我们的方法不同，该方法不允许存在无差异或不可比性，因此得出的结论是，由无差异导致的均匀随机化是最理性的随机选择。此外，Apesteguia-Ballester 测度无法检测随机传递性的违背，也并非为此而设计。后文将对此详加讨论。

总而言之，尽管我们的总体目标相同，但我们未能发现本文与以往关于衡量理性的文献之间存在紧密联系。一方面，我们的方法不适用于比较确定性选择行为的理性。若将我们的理性排序限定于确定性情境，就会得到一种极其粗略的排序：当且仅当一个选择对应是理性的（即符合偏好最大化的意义），而另一个不是时，前者才比后者更理性。简言之，我们的方法不适用于研究确定性选择行为的比较理性。另一方面，关于确定性选择情境下理性衡量的文献并不适用于本文所讨论的随机选择情境。不过，尽管如此，我们仍可将本文提出的偏序方法与早期文献中的确定性方法结合起来，从而获得一种全面衡量决策中理性的方法。我们将在第3节讨论这种可能性。

正如 de Clippel 和 Rozen（2023）以及 Strzalecki（2023）最近所综述的，随机选择文献十分活跃；过去十年间，研究者提出了约二十种新的随机选择模型。记录个体进行随机选择的实验文献也在不断增长。因此，显然亟需一种统一的方法，既能比较随机选择模型，也能比较实验中收集的个体 随机选择数据。本文旨在为这一领域作出贡献。

顺便提一下，Kitamura 和 Stoye（2018）提出了一种方法，用于在经典的消费者需求背景下检验随机效用模型。其方法可以扩展到离散选择的背景下，用于衡量给定随机数据集与所有随机效用模型构成的集合之间的“距离”。人们或许会想用这个距离作为理性指数。不幸的是，这种做法会面临严重的计算困难，因为 Kitamura-Stoye 检验随机效用模型的方法属于NP难问题。（据我们所知，即便对于规模如 Feldman 和 Rehbeck（2022）所研究的数据集，这种方法也无法实际实施。）更重要的是，这种做法会毫无根据地假设每个 随机效用模型都完全理性。正如我们上文所指出的，并将在第5.1节进一步讨论的那样，这种立场不可取。

关于随机性的来源。 人们偏离理性选择的原因有很多，包括有限注意力、现状偏差、参照依赖、情境依赖和复杂性等（de Clippel 和 Rozen（2023））。确定性选择文献中的大多数理性度量并未针对某一特定的有限理性来源。同样，根据随机选择理论文献，个体的选择之所以具有随机性，原因各不相同，例如感知／注意力不完善、错误，

以及对随机性的偏好等。本文遵循确定性选择文献的研究思路；我们的理性序并不依赖于某一特定的随机性来源。这样做的一个重要优点是，我们的理性序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 适用于每一种随机选择模型。然而，对于那些事先已知不确定性来源的模型而言，其结论可能相当粗略。在这种情况下，可以选择采用更精细的理性度量方法。

计算可行性。我们的比较方法在计算复杂度方面表现令人鼓舞。我们将第4.2节的算法应用于 Feldman 和 Rehbeck（2022）的实验数据，以计算 $\Lambda(\mathbb{P})$。在该研究中，选择备选项有27个，二元菜单有79个，受试者有144名；这是我们所知最大的随机选择数据集。在个人电脑上，我们的算法能在几分钟内计算 $\Lambda(\mathbb{P})$，并据此使用 I_{rat}进行理性比较。

直到最近，这个问题才开始受到经济学文献的关注，但它仍然相当重要，尤其是随着在线实验以及市场中产生的数字化选择观测不断带来大型数据集。利用如此庞大的数据集来测量相对于特定随机选择模型的偏离，可能是一项艰巨的任务。例如，即使对于二元菜单，当菜单数量很大时，我们也不知道有任何计算上可行的方法能够测量相对于随机效用模型的偏离。

2 理性与选择

在本文中，除非另有明确说明，X 均表示一个非空有限集，且 $|X| \geq 3$；$\mathfrak{X}$ 表示 X.的所有非空有限子集构成的集合

2.1 确定性选择

偏好关系。定义在 X 上的预序 $\succsim$ 是 X.上的自反且传递的二元关系（ $\succsim$ 的非对称部分记为 $\succ$，对称部分记为 $\sim$）。对于任意 $S \in \mathfrak{X}$，我们将 S 中所有关于 $\succsim$的极大元素构成的集合记为 $\mathrm{MAX}(S, \succsim)$，即 $x \in \mathrm{MAX}(S, \succsim)$ 当且仅当 $x \in S$，且不存在 $y \in S$ 使得 $y \succ x$. 。如果 $\succsim$ 还是全序，也就是说，对于每个 x、$y \in X$，要么 $x \succsim y$，要么 $y \succsim x$，则称 $\succsim$ 是 X. 上的完全预序。在这种情况下，S中的元素 x关于 $\succsim$是极大元素，当且仅当它是 $\succsim$的最大元素，也就是说，$\mathrm{MAX}(S, \succsim) = \max(S, \succsim) := \{x \in S : \text{对所有 } y \in S\}.$，$x \succsim y$

本文中，X上的**偏好关系**仅指X. 上的预序。因此，按本文对该术语的用法，偏好关系总是具有传递性的，但不一定是完备的。

选择对应。我们将 $\mathfrak{X}$ 上的**选择对应**定义为满足以下条件的集值映射$C : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$： $C(S) \subseteq S$. 对于任意此类函数 C 和任意 $S \in \mathfrak{X}$，集合 $C(S)$ 被解释为 S 中所有可行备选项的集合；决策者（其选择行为由 C 建模）认为这些备选项值得选择。

选择对应的理性。 如果一个人在任何给定的可行菜单中，只认为那些按照某种一致排序并未被支配的项目可以选择，我们就认为此人的选择是“理性”的。这里所说的排序“一致”，是指其具有传递性。因此，这种看法意味着：若存在 X 上的预序 $\succsim$，使得对于每个 $S \in \mathfrak{X}$， $C(S)$ 都等于 S 中所有 $\succsim$- 极大元素的集合，那么我们就称 X 上的选择对应 C 是“ 理性 ”的，。因此：

DEFINITION. 设 C 是 $\mathfrak{X}$. 上的一个选择对应。我们称 C 是**理性的**，如果存在 X 上的一个预序 $\succsim$，使得 $C = \textsc{max}(\cdot, \succsim)$。我们将 $\succsim$ 称为能够理性化 C 的**偏好关系**。[6]

顺便强调一下，我们并不要求理性化某个选择对应的偏好关系是完备的。偏好关系的完备性关乎其是否具有决断性，这是一种行为概念，与始终如一地做出决定截然不同。毕竟，理性的人可能会因信息不足、感知困难（例如最小可觉差），或与选择相关的属性过多，而无法比较两个选项。（事实上，这很可能就是人们采取随机选择行为的原因；参见 Ok 和 Tserenjigmid（2022）。）我们在此不再进一步讨论这一点。许多学者，如 Aumann、Bewley、Luce、Raiffa 和 Schmeidler，都曾对此进行过深入研究；如今，决策理论中关于在不完备偏好下进行理性决策的文献已相当丰富。如需全面了解这一问题及相关参考文献，请参阅 Eliaz 和 Ok（2006）。

在本文的语境下，坚持要求理性化偏好具有完备性所带来的问题，远不止这些一般性的考量。事实上，正如我们在第3节末尾将要详细阐述的，这样做会对本文提出的测量方法产生不良后果。

理性选择对应的刻画。刻画理性选择对应有多种方法。我们采用 Ribeiro 和 Riella（2017年）的方法，该方法基于对 C 施加以下三个简单性质：

切尔诺夫公理。对于每个 S， $T \in \mathfrak{X}$，若 $S \subseteq T$，则有 $C(T) \cap S \subseteq C(S)$。

孔多塞公理。对于每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，若对所有 $y \in S$ 都有 $x \in C\{x, y\}$ ，则$x \in C(S)$。

无环公理。对于每个 x， y， $z \in X$， $\{x\} = C\{x, y\}$ 和 $\{y\} = C\{y, z\}$ 蕴含 $\{x\} = C\{x, z\}$.

这里无需讨论这些性质的含义。它们都是完全标准的，并且刻画了理性选择对应：

[6]这种关系并非唯一，但在所有能够理性化 C的关系中，存在一个唯一的偏好关系，其无差异部分与 C的行为无差异声明相匹配；参见 Eliaz 和 Ok（2006）。另一种处理这一问题的方法是允许选择延期（即允许 C 取空值）；参见 Gerasimou（2018）。

THEOREM 2.2. [Ribeiro 和 Riella, 2017] 如果一个定义在 $\mathfrak{X}$ 上的选择对应满足 *Chernoff* 公理、*Condorcet* 公理和无环公理，当且仅当它是理性的。

2.2 随机选择

随机选择函数。 我们将定义在 $\mathfrak{X}$ 上的 **随机选择函数** 称为满足以下条件的函数$\mathbb{P}$: $X \times \mathfrak{X} \to [0,1]$ 即若

$$\sum_{x \in S} \mathbb{P}(x,S) = 1 \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(y,S) = 0$$

对于每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $y \in X \backslash S.$，所有此类函数的集合记为 **随机选择函数(X)**。

对于任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(X)**和 $S \in \mathfrak{X}$，映射 $x \mapsto \mathbb{P}(x,S)$在 $S.$上定义了一个概率分布。本文从个体主义视角（而非离散选择文献的视角）考察这些分布。例如，我们可以设想，某人多次被观察到从可行菜单 S 中做出选择，而 $\mathbb{P}(x,S)$仅仅是她从 $S.$ 中选择 x 的次数所占的相对频率。这是 $\mathbb{P}$的经验 解释，与经典显示偏好理论非常一致。或者，我们可以假设个体的选择行为本质上是概率性的，或者其选择行为在 S上是确定性的，但建模者对其只有部分信息。因此， $\mathbb{P}(x,S)$被视为决策者从S中选择 x 的实际概率；这是 $\mathbb{P}$的理论解释。

λ-选择对应。 现在，我们转而讨论如何为给定的随机选择函数推导出一个确定性表示。这是发展测量随机理性方法的第一步。

对于任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(X)**，我们定义映射 $\mathbb{P}^*\colon X \times \mathfrak{X} \to [0,1]$ 如下:

$$\mathbb{P}^*(x,S) := \frac{\mathbb{P}(x,S)}{\max\limits_{\omega \in S} \mathbb{P}(\omega,S)}. \tag{1}$$

也就是说， $\mathbb{P}^*(x,\ S)$是备选项 x 在菜单 S 中被选择的似然，与该菜单中具有最大此类似然的备选项 S的似然之比。因此，例如，如果 $\mathbb{P}^*(x,\ S) < \frac{1}{10}$，我们就认为， S 中存在一个备选项，其被选择的可能性是 x的10倍。

接下来，对于任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(X)** 和 $\lambda \in [0,1]$，我们将由 $\mathbb{P}$ 诱导的 **λ-选择对应**定义为映射 $C_{\mathbb{P},\ \lambda}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$，满足

$$C_{\mathbb{P},\lambda}(S) := \{x \in S : \mathbb{P}^*(x,S) \geq \lambda\}$$

如果 $0 < \lambda \leq 1$，并且与

$$C_{\mathbb{P},\lambda}(S) := \{x \in S : \mathbb{P}(x,S) > 0\}$$

如果 $\lambda = 0$. 我们将 $\{C_{\mathbb{P},\lambda} : \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 称为与 $\mathbb{P}$ 相关的**Fishburn族**。[7] Balakrishnan、Ok 和 Ortoleva（2021）最近利用这一族从 $\mathbb{P}$"推断"出一个确定性选择对应，并为其提供了公理化刻画。[8]

直观地说，我们的目标是用确定性选择对应来近似给定的随机选择函数 $\mathbb{P}$，其定义在$\mathfrak{X}$上。为了使这种近似在行为视角下有意义，我们希望使用一个选择对应 $C_{\mathbb{P}}$，使得对于任意菜单 S，集合 $C_{\mathbb{P}}(S)$包含 S 中所有在 S中被选择的概率"显著"的项目，从而排除那些因失误、匆忙等原因而被选择的项目。不幸的是，并不存在唯一最佳的做法。如果 $\mathbb{P}(x, \ \{x,y\}) = \frac{99}{100}$，那么使用$C_{\mathbb{P},\ 1}\{x,y\} = \{x\}$ 来确定性地表示决策者的选择或许很有道理；但如果 $\mathbb{P}(x, \ \{x,y\}) = \frac{51}{100}$，那么使用$C_{\mathbb{P},\ 1}$就很难说得过去；在这种情况下，使用$C_{\mathbb{P},\ 0}\{x,y\} = \{x,y\}$来实现这一目的似乎更有意义。从概念上说，这就是 Fishburn 不得不考虑多种近似方式的原因。

—

换言之，$C_{\mathbb{P},\ \lambda}(S)$由 S 中所有可行项目组成，其中不存在任何备选项在 S. 中被选择的可能性高出 $\frac{1}{\lambda}$ 倍。对于接近 1 的 λ，将$C_{\mathbb{P},\ \lambda}(S)$中的元素视为决策者从 S，中潜在的"选择"，似乎无可厚非；反之，对于接近 0 的 λ，理所当然会将$S\backslash C_{\mathbb{P},\ \lambda}(S)$中的元素视为仅因失误而被选中的对象。本文不讨论如何选择合适的λ。相反，我们采用偏序方法，同时使用所有 $C_{\mathbb{P},\ \lambda}$。

顺便指出，$\lambda \mapsto C_{\mathbb{P},\ \lambda}$ 是定义在 $[0,1]$, 上的递减映射，即:

$$\alpha > \beta \quad \text{implies} \quad C_{\mathbb{P},\alpha}(S) \subseteq C_{\mathbb{P},\beta}(S) \text{ for every } S \in \mathfrak{X}.$$

特别是,

$$C_{\mathbb{P},1}(S) \subseteq C_{\mathbb{P},\lambda}(S) \subseteq C_{\mathbb{P},0}(S)$$

对于每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $\lambda \in [0,1]$. ，此外，$\lambda \mapsto C_{\mathbb{P},\ \lambda}$ 在 0 处连续（无论如何为此映射的陪域赋予拓扑）。事实上，由于 X 是有限的，$\lambda(\mathbb{P}) := \min \mathbb{P}^*(x, \ S)$，其中最小值取遍所有满足 $\mathbb{P}(x, \ S) > 0$的（$x, \ S$），是一个（定义良好的）正数，并且对于每个 $0 \leq \lambda \leq \lambda$，$C_{\mathbb{P},\ 0} = C_{\mathbb{P},\ \lambda}(\mathbb{P})$。特别是，任何关于$C_{\mathbb{P},\ \lambda}$且"对所有 $\lambda \in (0,1]$"成立的陈述，也"对所有 $\lambda \in [0,1]$."成立。

λ-理性随机选择函数。对于任意固定的 λ，我们将$C_{\mathbb{P},\ \lambda}$ 视为一种确定性选择对应，它在行为意义上近似于 $\mathbb{P}$。只要这种确定性

[7] λ由 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X)诱导的选择对应最早由 Fishburn（1978）研究，他旨在刻画 $\mathbb{P}$，使得对于每个 $\lambda \in [0,1]$，都存在一个（效用）函数 $u_\lambda : X \to \mathbb{R}$ 满足$C_{\mathbb{P},\ \lambda}(S) = \arg\max u_\lambda(S)$，对每个 $S \in \mathfrak{X}$均成立。Ok 和 Tserenjigmid（2022）通过研究选择对应$C_{\mathbb{P},\ 0}$ 和$C_{\mathbb{P},\ 1}$的性质，提出了判断随机选择模型是否以及何时可被视为源于无差异、不可比性或实验的方法。[8]对于任意 λ，还可以将$C_{\mathbb{P},\ \lambda}$ 刻画为相对于 $\mathbb{P}$ 而言、在**随机选择函数**(X)上某个合适度量下最近的（确定性）选择对应。不过，这与本文当前的研究目的关系不大，因此我们不在本文中探讨这一技术性问题。

近似被认为是可接受的，只要$C_{\mathbb{P},\lambda}$是理性的，将 $\mathbb{P}$ 称为"理性"就是合理的。这引出了：

Definition. 对于任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(**X**)** 和 $\lambda \in [0,1]$，我们称 $\mathbb{P}$ 是 **λ-理性的**，如果$C_{\mathbb{P},\lambda}$是理性的 1.

鉴于定理 2.2 以及$C_{\mathbb{P},\lambda}$的定义， λ-理性这一概念可通过以下关于 $\mathbb{P}$ 的行为条件轻松刻画：

λ-随机切尔诺夫公理。对于每个 S， $T \in \mathfrak{X}$ 满足 $S \subseteq T$，且 $x \in S$,

$$\mathbb{P}^*(x,T) \geq \lambda \quad \text{implies} \quad \mathbb{P}^*(x,S) \geq \lambda.$$

λ-随机孔多塞公理。对于每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，只要对每个 $y \in S$. 都有 $\mathbb{P}^*(x, \{x,y\}) \geq \lambda$，就有 $\mathbb{P}^*(x, S) \geq \lambda$

λ-随机传递性。对于每个 x， y， $z \in X$,

$$\mathbb{P}^*(y,\{x,y\}) < \lambda \quad \text{and} \quad \mathbb{P}^*(z,\{y,z\}) < \lambda \quad \text{imply} \quad \mathbb{P}(z,\{x,z\})^* < \lambda.$$

值得注意的是，前两项性质要求随机选择在嵌套菜单之间保持一致。相比之下，第三项性质仅适用于两两选择情境，并要求选择频率以某种方式呈现传递性，而这种传递性取决于参数 λ. 。对于 $\lambda = 1$，这一性质正是弱随机传递性（严格版本），也是随机选择函数中最常用的传递性概念。

很容易验证， $\mathbb{P}$ 满足 λ-随机切尔诺夫公理，当且仅当$C_{\mathbb{P},\lambda}$满足切尔诺夫公理。类似地， $\mathbb{P}$ 满足 λ-随机孔多塞公理（分别为传递性公理），当且仅当$C_{\mathbb{P},\lambda}$满足孔多塞公理（分别为无循环公理）。（我们省略直接的证明。）因此，立即应用定理 2.2 可得：

Theorem 2.3. 对于任意 $\lambda \in (0,1],$，若定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数是 λ-理性的，当且仅当它满足 λ-随机切尔诺夫公理、孔多塞公理和传递性公理。

首先需要指出， λ-理性的概念并非关于 λ单调。作为定理 2.3 的第一个应用，我们将对此加以说明。

Example 2.1。其中 $X := \{x,y,z\}$，令 $\mathbb{P}$为定义在 $\mathfrak{X}$上的随机选择函数，其满足

$$\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = \tfrac{4}{5},\ \mathbb{P}(y,\{y,z\}) = \mathbb{P}(z,\{x,z\}) = \tfrac{2}{3},\ \text{and}\ \mathbb{P}(x,X) = \mathbb{P}(z,X) = \tfrac{6}{13}.$$

使 $\mathbb{P}$ 具有 λ-理性的 λ 集合为 $(0, \frac{1}{6}] \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$。因此， $\mathbb{P}$ 是 0-理性且 $\frac{1}{2}$-理性的，但不是 $\frac{1}{5}$-理性的。此外，当 $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$时， $\mathbb{P}$ 不满足 λ–随机传递性公理，这表明随机传递性的最弱形式遭到违反。而且，当 $\lambda \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$时， $\mathbb{P}$ 不满足 λ–随机孔多塞公理，这反映了嵌套菜单中的选择存在不一致。 □

3 RandomChoice 的比较理性

3.1 一般情形

比较理性序。 以下定义引入了本研究的核心对象。

Definition. 比较理性序是 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 在**随机选择函数(**X**)** 上的二元关系，满足

$$\mathbb{P} \trianglerighteq_{\text{rat}} \mathbb{Q} \quad \text{iff} \quad \mathbb{P} \text{ is } \lambda\text{-rational for every } \lambda \in (0,1] \text{ for which } \mathbb{Q} \text{ is } \lambda\text{-rational.} \tag{2}$$

当 $\mathbb{P} \trianglerighteq_{\text{rat}} \mathbb{Q}$，我们称 $\mathbb{P}$ 至少与 $\mathbb{Q}$.同样理性

容易验证， $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 是**随机选择函数(**X**)** 上的预序。下面的例子表明，关于该预序，**随机选择函数(**X**)** 中存在最大元素和最小元素。

Example 3.1。设 $\mathbb{P}$ 是定义在 $\mathfrak{X}$上的 $\{0,1\}$值随机选择函数。那么，对于每个 $\lambda \in$ ，$C_{\mathbb{P},\lambda} = C_{\mathbb{P},1}$ $(0,1]$, ，因此可知，对于每个 $\lambda \in$ ， $\mathbb{P}$ 是 λ理性的 $(0,1]$ 当且仅当 $C_{\mathbb{P},1}$ 是理性的。因此，任何满足 $C_{\mathbb{P},1}$ 为理性的**随机选择函数(**X**)**，至少与定义在 $\mathfrak{X}$. 上的任意随机选择函数同样理性。反过来，任何满足 $C_{\mathbb{P},1}$ 非理性的**随机选择函数(**X**)**，对于任意 $\lambda \in [0,1]$都不是 λ理性的，因此，对所有**随机选择函数(**X**)**， $\mathbb{Q} \trianglerighteq_{\text{rat}} \mathbb{P}$ 均成立。[9] □

对 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$的刻画。尽管 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 背后的动机相当直观，但这个预序并不容易应用，因为它依赖于一个连续参数，即 λ.因此，我们首先要寻找一种无需参数的方法来检验 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$是否适用。为此，对于任意给定的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(**X**)**，我们定义以下三个实数集合：

$$\text{Ch}(\mathbb{P}) := \bigcup_{\substack{S,T \in \mathfrak{X} \\ S \subseteq T \\ x \in S}} (\mathbb{P}^*(x,S), \mathbb{P}^*(x,T)], \qquad \text{Con}(\mathbb{P}) := \bigcup_{\substack{S \in \mathfrak{X} \\ x \in S}} (\mathbb{P}^*(x,S), \min_{y \in S} \mathbb{P}^*(x,\{x,y\})],$$

and

$$\text{ST}(\mathbb{P}) := \bigcup_{x,y,z \in X} (\max\{\mathbb{P}^*(y,\{x,y\}), \mathbb{P}^*(z,\{y,z\})\}, \mathbb{P}^*(z,\{x,z\})]. \tag{3}$$

我们分别将它们称为 $\mathbb{P}$的**Chernoff**集、**Condorcet** 集和**随机传递性** 集。最后，我们定义

$$\Lambda(\mathbb{P}) := \text{Ch}(\mathbb{P}) \cup \text{Con}(\mathbb{P}) \cup \text{ST}(\mathbb{P}).$$

对于任意 $\lambda \in$ $(0,1]$, 定理 2.3 表明， $\mathbb{P}$ 不是 λ-理性的，当且仅当它至少违反以下λ随机切尔诺夫公理、孔多塞公理和传递性公理中的一条。反过来，很容易验证 $\mathbb{P}$

[9] 本例中考察的随机选择规则表明，max**(随机选择函数(**X**)** $\trianglerighteq_{\text{rat}}$**)** 和 min**(随机选择函数(**$X$**)** $\trianglerighteq_{\text{rat}}$**)** 是非空集合，但它们确实显得有些人为。我们将在第 5 节中遇到更多有趣的、属于这些集合的随机选择函数。

违反 λ-随机切尔诺夫公理，当且仅当 $\lambda \in \mathsf{Ch}(\mathbb{P})$。同样， $\mathbb{P}$ 违反 λ-随机孔多塞公理（分别为传递性公理），当且仅当 $\lambda \in \mathsf{Con}(\mathbb{P})$（分别为 $\lambda \in \mathsf{ST}(\mathbb{P})$）。因此，

$$\Lambda(\mathbb{P}) = \{\lambda \in (0,1] : \mathbb{P} \text{ is not } \lambda\text{-rational}\},$$

并且以下结论可由这一观察直接推出：

THEOREM 3.1. 对于任意 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$，只要它们属于 **随机选择函数**(X)，

$$\mathbb{P} \trianglerighteq_{rat} \mathbb{Q} \quad \textit{if and only if} \quad \Lambda(\mathbb{P}) \subseteq \Lambda(\mathbb{Q}).$$

这是对我们的比较理性序的无参数刻画。在本文余下部分，我们将基于这一刻画展开讨论；不过，下面先立即举例说明它的用途。

EXAMPLE 3.2。考虑定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数 $\mathbb{P}$，满足 $\mathbb{P}(x,S) := \frac{1}{|S|}$ 对每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$都成立。那么，对每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$， $\mathbb{P}^*(x,S) = 1$，因此集合 $\mathsf{Ch}(\mathbb{P})$、$\mathsf{Con}(\mathbb{P})$ 和 $\mathsf{ST}(\mathbb{P})$ 均为空。由定理 3.1 可知， $\mathbb{P}$ 至少与定义在 $\mathfrak{X}$上的任意随机选择函数一样理性。 □

理性指数。 理性序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 是一种支配排序，因此要求相当严格。事实上，后文将会看到一些例子，在这些例子中， $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 无法对不同的随机选择函数进行排序。此外，即使 $\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q}$，我们目前也无法量化 $\mathbb{P}$ 对 $\mathbb{Q}$的支配程度。幸运的是，定理 3.1 提供了一种同时解决这两个问题的方法：比较 $\Lambda(\mathbb{P})$和 $\Lambda(\mathbb{Q})$的大小。 由于 $\Lambda(\mathbb{P})$是有限个子区间的并集，且这些子区间包含于 $(0,1]$, ，因此它是一个博雷尔集。为此，我们可以使用勒贝格测度 $\mathrm{Leb}(\cdot)$，并定义一个理性指数 I_{rat} :**随机选择函数**$(X) \to [0,1]$，其定义如下：

$$I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) := 1 - \mathrm{Leb}(\Lambda(\mathbb{P})).$$

根据定理 3.1，这个指标与 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 一致。此外，正如我们马上将看到的，$\mathbb{P}(=1)$ 当且仅当 $\mathbb{P}$ 的理性至少不低于**随机选择函数**(X)中的任何一个。

EXAMPLE 2.1 [CONTINUED]。对于例 2.1 中的随机选择函数，我们有 $\mathsf{Ch}(\mathbb{P}) = \varnothing$，$\mathsf{Con}(\mathbb{P}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$且 $\mathsf{ST}(\mathbb{P}) = (\frac{1}{2}, 1]$.因此， $\Lambda(\mathbb{P}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{2}, 1]$且 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = \frac{5}{12}$。 —

3.2 最大理性

最大理性与最小理性。如果随机选择函数 $\mathbb{P}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上满足： $\mathbb{P}$ 的理性至少不低于**随机选择函数**(X)中的任何一个，那么我们称其为**最大理性**，即

$$\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q} \quad \text{for every } \mathbb{Q} \in \mathsf{scf}(X).$$

显然，如果对每个 $\lambda \in [0,1]$， $\mathbb{P}$ 都是 λ-理性的，那么它就是最大理性的。反过来也成立，因为正如我们上文所见，存在定义在

$\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数，对每个 $\lambda \in [0,1]$. 都是 λ-理性的。换句话说， $\mathbb{P}$ 是最大理性的，当且仅当 $\Lambda(\mathbb{P}) = \varnothing$。进而，后一个条件显然蕴含 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = 1.$ 。反过来，由于 $\Lambda(\mathbb{P})$ 是 $(0,1]$，中有限个子区间的并集，若它非空，就必定包含一个非退化区间，这意味着 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) < 1.$ 。因此：

PROPOSITION 3.2. 对于任意 $\mathbb{P}$ 属于**随机选择函数**(X)的情形，以下条件等价：

a. $\mathbb{P}$ 是最大理性；*b.* $\mathbb{P}$ 对每个 $\lambda \in (0,1]$；都是 λ-理性的；*c.* $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = 1.$

对偶地，如果对于每个 $\mathbb{Q} \in$ **随机选择函数**(X)， $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X) $\mathbb{Q} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{P}$ ，则称其为**最小理性** 。这等价于说，对于任意 $\lambda \in [0,1]$， $\mathbb{P}$ 都不是 λ-理性的，并且 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = 0.$

随机传递性的概念。 传递性是理性的一个关键属性。在确定性选择的语境中，该属性涉及显示偏好关系，并且可由基本理性公理（例如弱公理）推导出来。在随机选择的语境中，该属性的各种形式都直接根据随机选择函数来表述。为简洁起见，我们将"随机传递性"简称为"s-传递性"，接下来回顾这些属性的定义。

若 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) \geq \frac{1}{2}$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) \geq \frac{1}{2}$ 蕴含，则称随机选择函数 $\mathbb{P}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上**弱 s-传递** –

$$\mathbb{P}(x,\{x,z\}) \geq \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

对每个 $x,y,z \in X$ 都成立；若式 (4) 对每个满足 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) > \frac{1}{2}$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) > \frac{1}{2}$ 的 $x, y,z \in X$ 都成立，则称其**几乎弱 s-传递**。-反过来，若 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) \geq \frac{1}{2}$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) \geq \frac{1}{2}$ 蕴含，则称 $\mathbb{P}$ 为**中度 s-传递** –

$$\mathbb{P}(x,\{x,z\}) \geq \min\{\mathbb{P}(x,\{x,y\}),\mathbb{P}(y,\{y,z\})\} \tag{5}$$

对每个 $x,y,z \in X$ 都成立；若式 (5) 对每个满足 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) > \frac{1}{2}$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) > \frac{1}{2}$ 的 $x,y, z \in X$ 都成立，则称其为**几乎中度 s-传递**。显然，弱和中度 s-传递性的"几乎"版本只是对这些随机传递性概念的轻微弱化。最后，若 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) \geq \frac{1}{2}$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) \geq \frac{1}{2}$ 蕴含，则称 $\mathbb{P}$ 为**强 s- 传递** – –

$$\mathbb{P}(x,\{x,z\}) \geq \max\{\mathbb{P}(x,\{x,y\}),\mathbb{P}(y,\{y,z\})\}$$

对每个 x， y， $z \in X$。

最大理性与随机传递性。 由于每个最大理性的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X) 都是 1-理性的，因此每个这样的随机选择函数都几乎弱 s-传递。以下更强的结果则不那么显然。

PROPOSITION 3.3. 每个最大理性的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**（X）都是几乎中度 *s*-传递的。

Proof. 参见附录。

这一观察印证了这样一种观点：理性排序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 能够检测出对随机传递性的违反。显然，任何不满足几乎中度 s-传递性的随机选择函数，更不用说不满足几乎弱 s-传递性的随机选择函数，都不可能是最大理性的。由此很容易得出，并非所有随机效用模型都是最大理性的。

Remark. 命题 3.3 的逆命题不成立，因为一个几乎中度 s-传递的随机选择函数仍可能在嵌套菜单之间表现出不一致的选择，从而对某些 λ. 违反 λ-随机切尔诺夫公理或 λ-随机孔多塞公理。不过，正如我们将在第 4.1 节看到的，如果将注意力限定在两两选择集上（被试内选择实验中通常如此），那么每个中度 s-传递的随机选择函数必然都是最大理性的。

Remark. 最大理性的随机选择函数不一定是强 s-传递的。这并不是什么值得担忧的问题。正如 He 和 Natenzon（2023）详尽讨论的那样，强 s-传递性是一项要求极高的条件。不仅大多数随机选择模型都不满足这一条件，而且大量实验结果也对其提出了实证反证。此外，也有一些相当直观的例子说明，“理性”行为未必遵守这一条件。我们将在下文的例 3.5 中考察这样一个例子。

3.3 补充评论

与 Apesteguia-Ballester 交换指数的比较。据我们所知，文献中唯一适用于随机选择函数的理性度量是 Apesteguia 和 Ballester（2015）的交换指数 。在当前框架下，我们可以将该指数定义为映射 I_{swap} **: 随机选择函数(**X**)** $\to [0,\infty)$，其中

$$I_{\text{swap}}(\mathbb{P}) := \min \sum_{S\in\mathfrak{X}} \sum_{x\in S} \mathbb{P}(x,S)\,|\{w\in S : w \succ x\}|$$

其中，最小值是在所有关于 X. 的线性序 $\succcurlyeq$ 中取到的（I_{swap} 是一个不理性ir指标；$I_{\text{swap}}(\mathbb{P})$ $> I_{\text{swap}}(\mathbb{Q})$意味着 $\mathbb{P}$ 的理性程度低于 $\mathbb{Q}$。）

Apesteguia 和 Ballester（2015）为交换指数I_{swap}提供了公理化刻画，并给出了很好的例子，说明在 I_{swap} 的定义中使其达到最小值的线性序 $\succcurlyeq$完全可以被视为该个体的福利标准。然而，该指数以及该论文所采用的一般方法，都忽略了无差异和犹豫不决等议题，而这些因素很可能才是一个人随机选择行为背后的真正原因。阐释这一点最直接的例子，或许就是下面这个例子。

Example 3.3。令 $X := \{x, y\}$ ，并考虑这样一个个体：他对选项 x 和 y. 无差异（或无法决定）。这是一个标准情形，当然，该个体

必然在确定性意义上是理性的。现在，这一个体通过公平抛硬币来最终决定在 x 和 y 之间的选择，自然是顺理成章的。这意味着，她在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数 $\mathbb{P}$ 具有如下形式： $\mathbb{P}(x, \{x,y\}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(y, \{x,y\})$。显然，这个$\mathbb{P}$ 是最大理性的（根据 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$）。然而，此处的 $I_{\text{swap}}(\mathbb{P}) = \frac{1}{2}$ 是 I_{swap} 中的最大值（**随机选择函数(X)**）。因此， I_{swap} 认为，在这个例子中， $\mathbb{P}$ 的随机选择行为是理性程度最低的。 □

我们的研究方法与 Apesteguia 和 Ballester（2015）不同的另一点是：我们的理性排序/指数旨在检测随机传递性的违背，而交换指数在很大程度上忽略了这一问题。事实上，交换指数完全可能认为一个强 s-传递的随机选择函数不如一个甚至不是弱 s-传递的随机选择函数理性。下面的例子对此作了说明。

Example 3.4。令 $X := \{x,y,z\}$，并定义 $u: X \to \mathbb{R}$，使得 $u(x) := 20$， $u(y) := 19$，且$u(z) := 18.$。令 $\mathbb{P} \in \text{scf}(X)$ 为由 u 导出的 Luce模型，即对任意 $a \in S$，有 $\mathbb{P}(a,S) := u(a) / \sum_{b\in S} u(b)$。于是， $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = \frac{20}{39}$， $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) = \frac{19}{37}$，且 $\mathbb{P}(z,\{x,z\}) = \frac{18}{38}$。众所周知，Luce模型是强 s-传递的。现在任取定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数 $\mathbb{Q}$，使得 $\mathbb{Q}(x,\{x,y\}) = \mathbb{Q}(y,\{y,z\}) = \mathbb{Q}(z,\{x,z\}) = 0.7.$。那么， $\mathbb{Q}$ 甚至不是弱 s-传递的，但交换指数却认为 $\mathbb{Q}$ 比 $\mathbb{P}$“更理性”。相比之下，我们有 $\mathbb{P} \rhd_{\text{rat}} \mathbb{Q}.$。事实上，正如我们将在第5.2节中看到的，每个 Luce模型都是最大理性的。 □

这些例子表明，理性排序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 和指数 I_{rat} 衡量的理性方面不同于交换指数。我们旨在了解个体的选择概率在多大程度上是一致地生成的（也就是说，这种行为的任何确定性体现都显得理性）。正如定理 2.3 所示，这意味着违反随机传递性和/或选择概率在嵌套菜单之间不一致，都会降低给定随机选择函数的理性排名。相比之下， I_{swap} 考察的是这些概率在多大程度上使我们偏离标准意义上理性的确定性选择行为（但不允许无差异或不可比性）。因此，Apesteguia-Ballester 方法似乎最适合用于研究确定性选择程序的理性。毕竟，随机选择函数 $\mathbb{P}$ 要被I_{swap} 判定为最大理性的一个必要条件是， $\mathbb{P}$ 必须是 $\{0,1\}$值的。换言之， I_{swap} 绝不会将对菜单中两个不同选项赋予正概率的随机选择规则视为完全理性。[10]

[10]研究交换指数的一种变体或许很有意思：将最小值改为在 X 上的所有预序中取（而非在线性序中取）。好处是，这样可以允许备选项之间存在无差异和不可比性，也能让 Apesteguia-Ballester 方法更适用于随机选择规则。坏处是，这会带来严重的计算困难。交换指数本身已经很难计算；当X 有 k 个元素时， I_{swap} 定义中的最小值是在 $k!$ 个线性序中取的。如果允许预序，这个数量就会增加到所谓的第 k 个有序贝尔数。对于 $k \geq 15$，这个数量约为 $k_{!}\ 2(\log 2)^{k+1}$，比 $k!$ 大一个指数因子。

关于 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$的变体。我们的理性排序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 基于两个前提：（1）为每个 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数(**X**)** 赋予其对应的 Fishburn 族；（2）通过比较 $C_{\mathbb{P},\,\lambda}$ 与 $C_{\mathbb{Q},\,\lambda}$ 对任意两个 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 在**随机选择函数(**X**)**中的理性程度进行比较，其中每个 $\lambda \in (0,\ 1]$. 都如此。改变（1）和（2）中采用的设定，会产生新的理性比较方法。首先，可以选择使用不同于 Fishburn 族的族来"近似"随机选择函数 $\mathbb{P}$ 。只要采用合理的"近似"概念，这或许能产生有用的测量程序，但本文不探讨这一方向。其次，可以保持（1）不变，但采用更复杂的方法来比较 $C_{\mathbb{P},\,\lambda}$ 与 $C_{\mathbb{Q},\,\lambda}$ 对每个 $\lambda \in (0, 1]$, 的理性程度（借鉴理性比较测量领域关于确定性选择对应的文献）。举例来说，我们可以为此使用 Houtman-Maks 指数。该指数记为 $I_{\text{H-M}}$，它为 $\mathfrak{X}$ 上的任意选择对应 C 赋值：为确保 C 具有理性，所需删除的菜单的最少数量，[11] 也就是说，

$$I_{\text{H-M}}(C) := \min\{|\mathfrak{Y}| : \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \text{ and } C|_{\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{Y}} \text{ is rational}\}.$$

我们可以将这一指标与偏序方法结合，定义一个关于**随机选择函数(**X**)**的新预序$\trianglerighteq'_{\text{rat}}$，使得

$$\mathbb{P} \trianglerighteq'_{\text{rat}} \mathbb{Q} \quad \text{iff} \quad I_{\text{H-M}}(C_{\mathbb{P},\lambda}) \leq I_{\text{H-M}}(C_{\mathbb{Q},\lambda}) \text{ for every } \lambda \in (0, 1].$$

本文不探讨这些混合排序的应用。不过，我们注意到，与本文提出的方法相比，这种方法得到的排序更粗略。也就是说，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 包含 $\trianglerighteq'_{\text{rat}}$，但反之则不成立。

偏好的完备性与 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$。回想一下，本文将能够由一个可能不完备的偏好关系理性化的选择对应定义为理性的。如前所述，在当前框架下，采用不完备偏好尤为相关，因为理性个体的概率选择行为很可能源于其对各种结果吸引力的犹豫不决（Ok 和 Tserenjigmid（2022））。为强调这一点，我们称 $\mathfrak{X}$ 上的选择对应 C 为完全理性的，如果存在 X 上的完备偏好关系 $\succsim$，使得 $C = \max(\cdot,\ \succsim)$，并定义关于**随机选择函数(**$X$**)**的预序 $\trianglerighteq''_{\text{rat}}$，其中 $\mathbb{P} \trianglerighteq''_{\text{rat}} \mathbb{Q}$ 当且仅当

$$C_{\mathbb{P},\lambda} \text{ is totally rational for every } \lambda \in (0, 1] \text{ for which } C_{\mathbb{Q},\lambda} \text{ is totally rational.}$$

这个预序与 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 不构成嵌套，而且乍看之下，它似乎是一个合理的备选项，可以替代$\trianglerighteq_{\text{rat}}$。不过，下面的例子提醒我们不要持有这种看法。

Example 3.5。我们借用了 Tversky（1972）对这个例子的寓言式描述。一位住在纽约的人必须在去巴黎旅行（x）和去罗马旅行（y）之间做出选择。假设

[11]我们对"理性"的定义与 Houtman 和 Maks（1985）的定义不同；他们使用这个术语时，指的是对某个 *complete* 偏好关系进行最大化。不过，这一点并不影响我们在此想要阐明的观点。

此人在这些备选项之间犹豫不决，甚至愿意通过公平抛硬币来解决这个问题： $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = \frac{1}{2}$。接下来，假设此人又有了一个新的备选项 x_+，即以 1 美元的折扣去巴黎旅行。显然，他们可以确定无疑地认为 x_+ 优于 x： $\mathbb{P}(x_+,\{x_+,x\}) = 1$。然而，1 美元的折扣并不能缓解决策者对这两趟旅行的纠结。看来，他们自然会以与先前解决 x和 y之间的问题完全相同的方式，在 x_+ 和 y 之间做出选择，也就是通过公平抛硬币： $\mathbb{P}(x_+,\{x_+,y\}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(y,\{x_+,y\})$。[12] 这种随机选择行为似乎相当合理；看起来并没有什么"非理性"之处。然而，我们有$C_{\mathbb{P}}$, $\lambda\{x,y\} = \{x,y\}$, $C_{\mathbb{P},\lambda}\{x,x_+\} = \{x\}$，并且$C_{\mathbb{P},\lambda}\{x_+,y\} = \{x_+,y\}$，因此，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$C_{\mathbb{P},\lambda}$都不完全理性。由此可见， $\trianglerighteq''_{\text{rat}}$ 判定 $\mathbb{P}$ 不如定义在 $\mathfrak{X}$上的任何随机选择函数理性，这是一个荒谬的结论。[13]

值得注意的是，在这个例子中， $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 的结论与 $\trianglerighteq''_{\text{rat}}$ 的结论截然不同。事实上，对于每个 $\lambda \in (0,1]$，都可以轻易地用 $\{x,x_+,y\}$ 上的偏好关系 $\succsim$（它表示$x_+ \succ x$，但不比较 x 与 y，，也不比较 x_+ 与 y，）来理性化$C_{\mathbb{P},\lambda}$。因此， $\trianglerighteq_{\text{rat}}$将 $\mathbb{P}$ 判定为最大理性，这在此例中似乎完全合理。[14] □

() 的简化。对于某些类型的模型 $\mathbb{P}$，构成 Λ（$\mathbb{P}$）的集合中有一个或多个为空，因此计算 Λ（$\mathbb{P}$）会更加简单。例如，对于中度 s-传递随机选择函数，根据以下观察，中度 s-传递随机选择函数的 λ-理性分析可以简化：

LEMMA 3.4. $\mathrm{ST}(\mathbb{P}) = \varnothing$ 适用于每个中度 *s*-传递的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X)。

PROOF. 见附录。

这一观察将中度 s-传递 $\mathbb{P}$的 Λ（$\mathbb{P}$）计算简化为 Ch（$\mathbb{P}$）和 Con（$\mathbb{P}$）的计算。例如，它适用于所有费希纳模型（如具有独立同分布误差的任何随机效用模型，以及 Fudenberg、Iijima 和 Strzalecki（2015年）的弱 APU 模型）。[15] 在非费希纳模型中，引理 3.4也适用于许多著名的随机效用模型特例，例如 Probit 模型、嵌套 Logit 模型、颤抖模型和 Tversky 的按属性消除模型。

对于下一个简化，我们约定：若任意 $S,T \in \mathfrak{X}$ 满足 $S \subseteq T$且 $x,y \in S$,，则称 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X)**关于收缩具有选择性**

$$\mathbb{P}(x,T) > \mathbb{P}(y,T) \quad \text{implies} \quad \frac{\mathbb{P}(y,T)}{\mathbb{P}(x,T)} \geq \frac{\mathbb{P}(y,S)}{\mathbb{P}(x,S)},$$

且**关于扩张具有选择性**，若对任意 S， $T \in \mathfrak{X}$ 满足 $S \subseteq T$且 x， $y \in S$,

$$\mathbb{P}(x,S) > \mathbb{P}(y,S) \quad \text{implies} \quad \frac{\mathbb{P}(y,S)}{\mathbb{P}(x,S)} \geq \frac{\mathbb{P}(y,T)}{\mathbb{P}(x,T)}.$$

[12]关于从集体选择的角度为这一随机选择函数提供依据的另一个寓言，参见 Eliaz 和 Ok（2006）。[13]事实上，即使 $\mathbb{P}(x_+,\{x_+,y\}) > \frac{1}{2}$，我们也能得到非常相似的结论。[14]在这个例子中， $\mathbb{P}$并非强 s-传递。这不仅表明最大理性的选择行为未必强 s-传递，也表明这是有充分理由的。He 和 Natenzon（2023）回顾了文献中的其他类似例子。[15] $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X)称为**费希纳型**，如果存在一个递增的 $F\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 和一个（效用）函数$u\colon X \to \mathbb{R}$，使得对每个 $x,y \in X$，均有 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = F(u(x) - u(y))$。

例如，Luce模型关于收缩和扩张都具有选择性。此外，任何颤抖选择模型都关于扩张具有选择性，而许多弱APU模型——例如，成本函数的导数具有对数凸逆函数的那些模型——关于收缩具有选择性。以下观察简化了此类模型的 λ-理性分析。

LEMMA 3.5. $\mathrm{Con}(\mathbb{P}) = \varnothing$ 对于每个关于收缩具有选择性的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X) 。

LEMMA 3.6. $\mathrm{Ch}(\mathbb{P}) = \varnothing$ 对于每个关于扩张具有选择性的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X) 。

这些结果的证明可直接从定义中例行推出，因此省略。

关于使用不同 λs 的意义。对于我们的理性序而言，使用 (λ 中的所有取值至关重要，才能捕捉由嵌套菜单间选择不一致以及随机传递性失效所导致的理性违背。我们给出两个例子来说明这一点。

令 $X := \{x, y, z\}$. 考虑定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数 $\mathbb{P}$，使得 $\mathbb{P}(x, X) = 1-\varepsilon$，$\mathbb{P}(y, X) = \varepsilon$，并且 $\mathbb{P}(x, \{x, y\}) = \mathbb{P}(y, \{y, z\}) = \mathbb{P}(x, \{x, z\}) = 1$，其中 ε 是一个较小的正数。直观而言，x 和 z 分别是相关个体最优和最差的选项，而第二优选项 y 从 X 中被选中的概率为 ε。容易发现，$\Lambda(\mathbb{P}) = (0, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}]$. 因此，在这个例子中，$\lambda$ 的较小取值刻画了不同菜单间选择可能存在的不一致性。

接下来考虑一个人的随机选择函数 $\mathbb{Q}$，其定义在 $\mathfrak{X}$ 上，满足 $\mathbb{Q}(x, X) = \mathbb{Q}(y, X) = \frac{1}{3}$ 且 $\mathbb{Q}(x, \{x, y\}) = \mathbb{Q}(y, \{y, z\}) = \mathbb{Q}(z, \{x, z\}) = \frac{1}{2} + \varepsilon$。直观而言，三个备选项同样好，但 x （分别地，y 和 z）被选择的频率高于 y （分别地，高于 z和 x），其概率为 ε，因此 $\mathbb{Q}$违反了弱 s-传递性。于是，$\Lambda(\mathbb{Q}) = (\frac{.5-\varepsilon}{.5+\varepsilon}, 1]$.因此，在这个例子中，$\lambda$的较大取值反映了对 s-传递性的违反。

关于平局打破规则的一致性。我们认为，在无差异备选项之间进行均匀随机化应被视为理性；我们的理性序也得出了相同结论（例 3.2）。另一方面，决策者可能会使用某种（随机或非随机的）平局打破规则，来最终确定其在无差异备选项之间的选择。这可能会改变其随机选择行为的结构，并降低其理性程度。特别是，本文用于测量随机理性的方法要求平局打破规则在嵌套菜单之间保持一致（如 Luce模型所示）。如果 x和 y 无差异，且在较大的菜单中，x 比 y 更常被选中，那么最大理性要求在较小的菜单中，x 也比 y 更常被选中。

4 两两选择情境

4.1 二元选择数据下的比较理性

到目前为止，我们一直采用随机选择理论的标准框架，该框架假定分析者掌握个体在每个可行菜单中的选择概率／频率。这个框架适用于比较随机选择理论模型的理性程度，但在实验应用中要求过高，因为此类应用往往只有有限的数据集。毕竟，即便只有 10 个备选项，想要收集涵盖所有可能菜单的选择数据，也基本上是不可能的。事实上，除极少数例外，所有被试内重复／随机选择实验都只使用仅含两个选项的菜单集合（即二元菜单）。[16] 值得庆幸的是，我们在第3节介绍的方法不仅可以轻松适用于这种情况，而且实际上更易于应用。

二元菜单集合上的选择。令 $\mathfrak{X}_2$ 表示 X的所有二元菜单组成的集合， $\mathfrak{Y}$ 为 $\mathfrak{X}_2$的任意非空子集。我们将定义在$\mathfrak{Y}$, 上的**选择对应** 称为一个集值映射 C: $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ ，满足对于每个 $S \in \mathfrak{Y}$, $C(S) \subseteq S$ 。一旦我们将 $\mathfrak{X}$ 替换为 $\mathfrak{Y}$，理性的概念便可原封不动地应用于此类对应，而切尔诺夫公理和孔多塞公理则显然成立。然而，对于这种受限域，我们需要对无环公理作如下修改:

无环性。 对于每个满足$\{x_i, x_{i+1(\mathrm{mod\ n})}\} \in \mathfrak{Y}$ 的 $x_1, \ldots, x_n \in X$，其中所有 $i = 1, ..., n$,

$$C(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\},\ \ldots\ldots,\ C(\{x_{n-1}, x_n\}) = \{x_{n-1}\} \quad \text{意味着} \quad C(\{x_1, x_n\}) = \{x_1\}.$$

这是一项简单的练习，可以证明该性质刻画了理性；我们省略证明。 of.

PROPOSITION 4.1. 定义在 $\mathfrak{Y}$ 上的选择对应是理性的，当且仅当它满足无环性。

我们将定义在 $\mathfrak{Y}$, 上的**随机选择函数** 称为函数 $\mathbb{P}$: $X \times \mathfrak{Y} \to [0, 1]$ ，满足$\mathbb{P}(x,\ \{x, y\})$ $+ \mathbb{P}(y,\ \{x, y\}) = 1$ 且 $\mathbb{P}(z,\ \{x, y\}) = 0$ ，对每个 $\{x, y\} \in \mathfrak{Y}$ 和 $z \in X \backslash \{x, y\}$.均成立。所有此类函数的集合记作**随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$。反过来，对于任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$ 和 $\lambda \in (0, 1],$), 我们称 $\mathbb{P}$ 是 **λ-理性的** ，如果选择对应 $C_{\mathbb{P},\ \lambda}$ 定义在 $\mathfrak{Y}$ 上且是理性的。鉴于命题 4.1，要对其进行刻画，需要如下修改 λ-随机传递性公理:

λ-无环性。 对于每个 $x_1, \ldots, x_n \in X$，使得 $\{x_i, x_{i+1(\mathrm{mod\ n})}\} \in \mathfrak{Y}$ 对于所有 $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}^*(x_2, \{x_1, x_2\}) < \lambda,\ \ldots,\ \mathbb{P}^*(x_n, \{x_{n-1}, x_n\}) < \lambda$$

[16]参见 Hey 和 Orme（1994）、Hey（2001）、Agranov 和 Ortoleva（2017年）以及 Feldman 和 Rehbeck（2022年）等诸多研究。

推出 $\mathbb{P}^*(x_n, \{x_1, x_n\}) < \lambda$.

接下来，我们对定理 2.3 作如下修改，该修改可直接从定义得出。

PROPOSITION 4.2. 对于任意 $\lambda \in (0,1],$ ，若 $\mathfrak{Y}$ 上的随机选择函数是 λ-理性的，当且仅当它满足 λ-无环性。

接下来，我们根据式 (2) 在 **随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$ 上定义**比较理性序** $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$。此外，命题 4.2 提示我们将 $\mathbb{P}$ 的**无环性集合** 定义为

$$\mathrm{AC}(\mathbb{P}) := \bigcup \left(\max_{i=1,\dots,n-1} \mathbb{P}^*(x_{i+1}, \{x_i, x_{i+1}\}, \mathbb{P}^*(x_n, \{x_1, x_n\}) \right], \tag{6}$$

其中，并集遍历所有满足条件的整数 $n \geq 2$ 和 $x_1, \dots, x_n \in X$，使得 $\{x_i, x_{i+1(\mathrm{mod\ n})}\} \in \mathfrak{Y}$ 对每个 $i = 1, ..., n.$ 均成立。由此得到以下刻画：

$$\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q} \quad \text{iff} \quad \mathrm{AC}(\mathbb{P}) \subseteq \mathrm{AC}(\mathbb{Q})$$

对每个 $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$ 均成立。进而，我们的理性指数可写为

$$I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) := 1 - \mathrm{Leb}(\mathrm{AC}(\mathbb{P}))$$

对每个 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$ 均成立。

这些观察表明，我们的测量方法可直接应用于实验数据集：受试者从多个二元菜单中进行选择，无论这些选择是随机作出的还是重复进行的。第 5.4 节将对此作出说明。

所有二元菜单下的选择。当选择数据涵盖所有两两选择情境时，即 $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_2$，所要进行的分析便大大简化。在这种情况下，命题 4.1 可表述如下：定义在 $\mathfrak{X}_2$ 上的选择对应是理性的，当且仅当它满足无环公理。同样，命题 4.2 可表述为：对于任意 $\lambda \in (0,1]$, 定义在 $\mathfrak{X}_2$ 上的随机选择函数 λ是 λ-理性的，当且仅当它满足 λ-随机传递性公理。换言之，当 $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_2$ 时，无环性集与随机传递性集重合，因此

$$\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q} \quad \text{iff} \quad \mathrm{ST}(\mathbb{P}) \subseteq \mathrm{ST}(\mathbb{Q}),$$

且 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = 1 - \mathrm{Leb}(\mathrm{ST}(\mathbb{P}))$，对于定义在 $\mathfrak{X}_2$ 上的每个随机选择函数 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 均成立。由于对于每个中度 s-传递的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{x}_2(X)$，$\mathrm{ST}(\mathbb{P}) = \varnothing$，因此这类函数自动具有最大理性。此外，命题 3.3 背后的推理无需任何修改即可应用于这一受限域。因此：

中度 s-传递性 $\Longrightarrow$最大理性 $\Longrightarrow$ 几乎中度 s-传递性

对于每个 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{x}_2(X)$。这表明，在两两选择情境下，最大理性与中度 s-传递性之间的差异确实很小。以下是这一观察的直接应用。

EXAMPLE 4.1。He 和 Natenzon（2023）的**中度效用模型**（MUM）是定义在 $\mathfrak{X}_2$ 上的、形式如下的任意随机选择函数 $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = F\left(\frac{u(x)-u(y)}{d(x,y)}\right), \qquad x,y \in X,$$

其中 $F\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 是一个严格递增函数，对于每个 $t \in \mathbb{R}$,u，都有 $F(t) = 1 - F(-t)$；$X \to \mathbb{R}$ 是一个（效用）函数，而 d 是 X. 上的任意度量。不难证明，任何 MUM 都是中度 s-随机的。（He 和 Natenzon（2023）事实上证明了其逆命题也成立，即每个中度 s-随机的 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$_2(X)$ 都是一个 MUM。）因此，鉴于上述讨论，我们得出结论：*每个 MUM 都是最大理性的。*

因此，所有费希纳模型（例如，具有独立同分布误差的随机效用模型和弱 APU 模型）以及许多知名的随机效用模型（例如，Probit 模型、嵌套 Logit 模型、颤抖模型和 Tversky 的按属性消除模型）在 $\mathfrak{X}_2$ 上都是最大理性的，因为它们是 MUM 的特殊实例。 □

4.2 无环性集合的计算

由于潜在循环的数量会随备选项数量呈指数级增长，人们可能会担心，无法高效地计算某个随机选择函数 $\mathbb{P}$ 在某个 $\mathfrak{Y}$ 上的 AC($\mathbb{P}$)。就实验室中的选择实验而言，这并不值得担忧。由于必须在有限时间内记录受试者的选择，这类实验无一例外地会将二元菜单的数量，也就是 $|\mathfrak{Y}|$，控制在较小范围内，通常少于 25。反过来，这就严格限制了备选项和潜在循环的数量。[17] 因此，与衡量偏离随机效用模型的程度不同，即使通过穷举计算无环性集合，对于实验数据集而言，在计算上也是可行的。

接下来，我们介绍一种算法，用于计算任意 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**$\mathfrak{Y}(X)$ 的 AC($\mathbb{P}$)。即使 X 和 $\mathfrak{Y}$ 相当大，该算法的运行速度也出乎意料地快。在下一节中，我们将在 Feldman 和 Rehbeck（2022）的实验中使用该算法；据我们所知，他们提供了规模最大的随机选择数据集。

用于计算AC($\mathbb{P}$)。在重复选择实验中，经验选择概率必然是有理数。另一方面，在随机选择实验中，实验者会给受试者一组概率，让他们为菜单中的每个备选项分配一个概率；这些潜在概率自然由实验者选定为介于 0 和 1 之间的有理数。因此，无论相关选择实验的具体性质如何，观察到的选择概率，以及由此得到的任何受试者的 $\mathbb{P}$*值，都来自一个有限集合

[17]当 $|X| \leq 10$ 时，不存在计算方面的问题，因为潜在循环至多有 $10!/2$ 个。不过，即使 $|X| > 10$，只要 $|\mathfrak{Y}|$ 低于 30，计算无环性集合也并不困难，因为在这种情况下，潜在循环至多有 1 亿个。事实上，在实验中，潜在循环的数量要少得多。例如，在 Hey 和 Orme（1994）中，潜在循环只有 50 个，因为有 25 个菜单，且每个备选项只出现两次。

中的有理数。在 $[0,1]$中，我们将所有观察到的 $\mathbb{P}^*$ 值组成的集合定义为 Θ，即

$$\Theta := \{\mathbb{P}^*(x,\{x,y\}) : \{x,y\} \in \mathfrak{Y}\}.$$

实验者可以通过设计来控制该集合的大小。

我们算法的初始阶段关于 Θ. 是参数化的。对于每个（固定的） $\theta \in \Theta$，算法按如下方式进行：

[步骤 1.θ] 令 G_θ 为有向图，其顶点集为 X，且当且仅当 $\mathbb{P}^*(a,\ \{a,b\}) \leq \theta$ 时，顶点 x 与 y 之间存在一条有向边。对于任意 $x \in X$，我们用 $R_\theta(x)$ 表示所有可从 x 到达的 $y \in X$ 的集合（也就是说，在 G_θ 中存在一条从 x 到 y 的有向路径）。算法的第一步是计算每个可达集 $R_\theta(x)$。有多种高效的计算方法。例如，深度优先搜索算法常用于此目的。

[步骤 2.θ] 任取满足 $\{x,y\} \in \mathfrak{Y}$ 且 $\mathbb{P}^*(x,\{x,y\}) > \theta$. 的 $x,y \in X$。（如果不存在这样的 x 和 y，则令 $J_\theta = \varnothing$，这意味着本步骤不产生输出并停止。）现在，对于每一组满足 $\{a,b\} \in \mathfrak{Y}$ 且 $\mathbb{P}^*(a,\{a,b\}) = \theta$ 的 $a,b \in X$，我们检查 $a \in R_\theta(x)$ 和 $y \in R_\theta(b)$ 是否成立。如果不存在这样的 a 和 b，则令 $J_\theta(x,y) = \varnothing$。否则，令 $J_\theta(x,y) = (\theta, \mathbb{P}^*(x,\{x,y\}))$，它必包含于 $\mathrm{AC}(\mathbb{P})$ 中。我们通过收集以此方式得到的所有区间来完成这一步，也就是记录

$$J_\theta = \bigcup \{J_\theta(x,y) : \{x,y\} \in \mathfrak{Y} \text{ and } \mathbb{P}^*(x,\{x,y\}) > \theta\}.$$

[步骤 3]在算法的最后阶段，我们只需将步骤 2 中找到的区间θ 对所有 $\theta \in \Theta$合并起来，即可得到我们所需的无环性集合：

$$\mathrm{AC}(\mathbb{P}) = \bigcup_{\theta \in \Theta} J_\theta.$$

尽管该算法包含一些蛮力操作，但仍可在多项式时间内执行。实际上，其时间复杂度仅为 $O(|\Theta| \times |\mathfrak{Y}|^2)$。

在第5.4.2节中，我们将把该算法应用于 Feldman 和 Rehbeck（2022）提供的实验数据。在该实验中，备选项的数量为 27（即 $|X| = 27$），二元菜单的数量为 79（即 $|\mathfrak{Y}| = 79$）。此外，Θ 是所有分数 $\frac{k-1}{101-k}$的一个子集，其中 $k = 1,$ .....50，因此 $|\Theta| \leq 50$。Feldman 和 Rehbeck 提供的数据集是迄今为止最大的随机选择数据集，但我们的算法只需很少的计算能力便可处理它。

5 应用

5.1 随机效用模型

作为离散选择理论和实证产业组织领域的主力模型，随机效用模型（RUM）是经济学中最知名的随机选择模型。然而，

在这种应用中，RUM 并非个体决策理论，因为它使用的是汇总后的选择数据。它假定社会以某种方式划分为若干群体，使得同一群体中的任意两个个体具有相同的（确定性）效用函数，并且这些群体的相对规模已知。进而，它记录每个给定菜单下，个体作出效用最大化选择的相对频率。因此，从这个角度来看，该模型的“随机”性质仅适用于社会中随机抽取的个体，而不适用于任何一个特定的人。毕竟，社会中的每个个体都被视为标准确定性意义上的理性人。或许正因如此，许多经济学家将 RUM 视为一种“理性”选择模型。[18]

当我们将随机效用模型视为个体决策模型时，情况就不同了。届时，将任何此类模型视为对应于理性个体的行为，并非不言自明。正如引言中所讨论的，我们很容易编出令人信服的故事（例如“疯狂政客”的寓言），说明某些类型的随机效用模型所生成的行为看起来完全不理性。事实上，随机效用模型的公理基础与确定性理性选择模型截然不同。这些基础以布洛克-马沙克不等式（Falmagne（1978））或随机显示偏好公理（McFadden（2005））的形式出现，但这些性质的行为解释远非显而易见。[19] 更糟的是，众所周知，随机效用模型甚至可能不满足弱 s-传递性，而这是文献中讨论的最基本的随机传递性要求。

这些观察并非意在批评随机效用模型。若要说它们说明了什么，那就是，作为个体的决策模型，随机效用模型或许足够灵活，也能刻画有限理性选择行为。此外，显然，这番讨论并不意味着没有任何随机效用模型可以被视为理性。它只是提出了一个问题：哪些类型的随机效用模型可以被认为是理性的。下文中，我们将运用第3节介绍的测量方法，严谨地考察这一问题，并依据理性排序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$，探究随机效用模型在何种情况下被视为理性、何种情况下不被视为理性。我们首先考察具有两个效用函数的随机效用模型，因为这种情况下的结果尤为清晰。随后再讨论一般情形。

5.1.1 均匀双重随机效用模型

设 u 和 v 是定义在 X 和 θ 上的两个单射实值映射：$\mathfrak{X} \to [0,1]$ 是任意函数。由 (u, v, θ) 诱导的**双重随机效用模型 (dRUM)** 是随机选择函数 $\mathbb{P} \in$

[18]从这种聚合选择的视角考察随机效用模型时，对其理性提出的问题便转化为对整个社会理性的探讨，因此并无太大意义。当然，这并非一种新颖的观点。例如，Buchanan（1954）曾著名地指出，由于社会并非一个“有机实体”，探讨社会的（集体）理性毫无意义。[19]文献充分认识到了这一难题，因此许多决策理论家转而刻画随机效用模型的特殊情形，这些情形源自更简单的行为特性。例如，可参见 Gul 和 Pesendorfer（2004），以及 Apestguia、Ballester 和 Lu（2014）。

随机选择函数(X),
其中

$$\mathbb{P}(\cdot, S) = \theta(S)\,\mathbf{1}_{\arg\max u(S)} + (1-\theta(S))\,\mathbf{1}_{\arg\max v(S)}$$

对每个 $S \in \mathfrak{X}$。此处当 θ 是常函数时，也就是说，

$$\mathbb{P}(x, S) = \theta\,\mathbf{1}_{\arg\max u(S)}(x) + (1-\theta)\,\mathbf{1}_{\arg\max v(S)}(x)$$

对每个 $x \in X$ 和 $S \in \mathfrak{X}$，我们将由 $(u,\ v,\ \theta)$ 诱导的模型称为**均匀 dRUM** 。（若 $\theta \in (0,$ 1)，则称此模型为非退化 。）Manzini 和 Mariotti（2018）对这些模型给出了非常精妙的刻画。

设 $\mathbb{P}$ 是由 (u, v, θ) 诱导的均匀 dRUM，必要时重新标记后，不妨假设$\theta \geq \frac{1}{2}$。那么，对于任意 $x \in X$ 和 $S \in \mathfrak{X}$，$\mathbb{P}^*(x, S)$ 可能等于0、$\frac{1-\theta}{\theta}$ 或 1。现在不难验证，$\mathrm{Ch}(\mathbb{P}) = \varnothing$。此外，若 $\theta > \frac{1}{2}$，则 $\mathbb{P}$ 是中度 s-传递的，因此由引理 3.4 可得 $\mathrm{ST}(\mathbb{P}) = \varnothing$。若 $\theta = \frac{1}{2}$，则 $\mathbb{P}^*$ 取值于 $\{0, 1\}$，因此对于任意 x、y、$z \in X$，区间 $(\max\{\mathbb{P}^*(y, \{x, y\})\ \mathbb{P}^*(z, \{y, z\})\},$ $\mathbb{P}^*(z, \{x, z\})]$ 非空的唯一可能是 $\mathbb{P}^*(y, \{x, y\})$ 和 $\mathbb{P}^*(z, \{y, z\})$ 均为零；但后者意味着 $u(x)$ $> u(y) > u(z)$ 且 $v(x) > v(y) > v(z)$，由此 $\mathbb{P}^*(z, \{x, z\}) = 0$，所以该区间必为空。因此，当$\theta = \frac{1}{2}$ 时，我们也有 $\mathrm{ST}(\mathbb{P}) = \varnothing$。

–

由此可知，对于均匀 dRUM，基于 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 进行的理性比较只取决于相关的孔多塞集合。为理解这些集合的结构，我们引入以下概念：若实值映射 u 和 v 定义在 X 上，且不存在三个备选项 x、y 和 z 属于 X，使得

$$u(x) > u(y) > u(z) \quad \text{and} \quad v(z) > v(y) > v(x). \tag{7}$$

由此得到以下结果：

Proposition 5.1. 设 $\mathbb{P}$ 为由(u, v, θ) 诱导、定义在 $\mathfrak{X}$ 上的均匀 *dRUM*，且满足 $\theta \geq \frac{1}{2}$。若 u 和v 三元组一致，则 $\mathbb{P}$ 是最大理性的。若 u和 v 不三元组一致，则 $\Lambda(\mathbb{P}) = (0, \frac{1-\theta}{\theta}]$.

——

Proof. 见附录。

这一发现带来了不少结论。设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是定义在 $\mathfrak{X}$上的两个均匀 dRUM，分别由 (u, v, α) 和 (f, g, β) 诱导。若 u 和 v 三元组一致，则 $\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q}$；若 f 和 g 三元组一致，则 $\mathbb{Q} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{P}$。另一方面，若 u 和v不三元组一致，且 f和 g也不三元组一致，则 $\max$ $\{\alpha, 1-\alpha\} \geq \max\{\beta, 1-\beta\}$ 意味着 $\mathbb{P} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{Q}$，而反向不等式则意味着 $\mathbb{Q} \trianglerighteq_{\mathrm{rat}} \mathbb{P}$。特别是，我们发现，在所有定义于 $\mathfrak{X}$. 上的均匀 dRUM 类中，理性排序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 是完备的。此外，若均匀 dRUM $\mathbb{P}$ 由 (u, v, θ) 诱导，则只要 $\theta \in \{0, 1\}$，或 u和 v 三元组一致，它就是最大理性的。反过来，若 u 和 v 不三元组一致，且 $\theta = \frac{1}{2}$，则 $\mathbb{P}$ 是最小理性的。总之：

–

Corollary 5.2. *a.* 任意两个定义在 $\mathfrak{X}$ 上的均匀 *dRUM* 都是 $\trianglerighteq_{rat}$-可比较的。

b. 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别是由(u, v, θ) 和(u, v, θ')诱导的均匀 *dRUM*。若 $\theta \geq \theta'$，则 $\mathbb{P} \trianglerighteq_{rat} \mathbb{Q}$。 *c.* 任何由三元组一致的效用函数诱导的均匀 *dRUM* 都是最大理性的。 *d.* 如果一个非退化的均匀 *dRUM* 是由不满足三元组一致的效用函数诱导的，那么它就不是最大理性的。 *e.* 任何由$(u, v, 1\,2)$ 诱导的均匀 *dRUM*，其中 u 和 v 不满足三元组一致，都是最小理性的。

推论 5.2 的最后两部分与“每个随机效用模型都是‘理性’的”这一传统观点背道而驰。推论 5.2.d 指出，均匀 dRUM 的理性程度可能严格低于某些其他随机选择函数。事实上，由 (u, v, θ), 诱导的 dRUM 中，u 和 v 不满足三元组一致性；随着 $\theta > \frac{1}{2}$，递减至 $1\,2$，其理性程度会越来越低。其理性程度的下限在 $\theta = \frac{1}{2}$ 处达到。

由此可见，某些类型的随机效用模型可能在非常强的意义上不具备理性。除非它所诱导的效用函数满足适当的一致性条件，否则这类模型的理性程度可能低于任何其他随机选择模型（根据 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$）。因此，如果希望通过随机效用模型，以随机方式刻画理性决策者的行为，就应考虑对效用函数集合施加这样的一致性条件。

5.1.2 随机效用模型

取任意整数 $n \geq 2$，并令 $N := \{1, ..., n\}$. 对于每个 $i \in N$，令 u_i 为定义在 X 上的单射实值映射，并令 θ_i 为满足以下条件的正数： $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 1$. 由 $(u_i,\ \theta_i)_{i \in N}$ 导出的**随机效用模型**（RUM）是随机选择函数 $\mathbb{P} \in$ **随机选择函数**(X)，其中

$$\mathbb{P}(x, S) = \sum_{i \in N} \theta_i \mathbf{1}_{\arg\max u_i(S)}(x)$$

对每个 $x \in X$ 和 $S \in \mathfrak{X}$ 均成立。必要时重新标记，将 θ_i 按递减顺序排列，即在下文中假定 $1 > \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n > 0$.

为了推广上一小节的结果，我们需要将“在三元组上的一致性”这一概念扩展到多于两个效用函数的情形。为此，我们将使用两个性质。首先，若不存在 $n+1$ 个备选项 x，x_1，... ...，$x_n \in X$ 使得以下条件成立，我们就称 u_1，.....，u_n 在 $(n+1)$ 元组上保持一致

$$u_j(x_j) > u_j(x) > \max_{i \in N \setminus \{j\}} u_j(x_i) \quad \text{for each } j = 1, ..., n. \tag{8}$$

其次，如果不存在三个备选项 x，y，以及 z，属于 X，使得.....那么我们称 u_1 与 u_2，.....，u_n **在三元组上一致**

$$u_1(x) > u_1(y) > u_1(z) \quad \text{and} \quad u_i(z) > u_i(y) > u_i(x) \text{ for each } i = 2, ..., n. \tag{9}$$

我们注意到，当$n = 2$时，这两个概念都与“三元组一致性”相同

以下结果推广了命题 5.1 的第二部分。

PROPOSITION 5.3. *Let $\mathbb{P}$ be the RUM on $\mathfrak{X}$ induced by $(u_i, \theta_i)_{i \in N}$ with $1 > \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n > 0$*

a. 如果 $\frac{1}{2} \geq \theta_1$ 和 $u_1, ..., u_n$ 在$(n+1)$-元组上不相容，那么 $\mathbb{P}$ 是最小理性的；

b. 如果 $\theta_1 > \frac{1}{2}$ 和 u_1 与 $u_2, ..., u_n$ 在三元组上不相容，那么 $\Lambda(\mathbb{P}) = (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$. ——

下面的例子说明，命题 5.3 中使用的两个一致性条件不足以保证最大理性。

EXAMPLE 5.1. 令 $X := \{x, y, z\}$，取 X 上任意的映射 u_1、u_2 和 u_3，满足 $u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$、$u_2(y) > u_2(x) > u_2(z)$ 以及 $u_3(z) > u_3(x) > u_3(y)$，并令 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$。若 $\mathbb{P}$ 是由 $(u_i, \theta_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上诱导的随机效用模型，则 $\Lambda(\mathbb{P}) = (1 5, \frac{1}{4}]$. 由命题 3.2 可知，$\mathbb{P}$ 并非最大理性。 □

我们的下一个结果给出了随机效用模型具有最大理性的一项充分条件。

PROPOSITION 5.4. 令 $\mathbb{P}$ 为由$(u_i, \theta_i)_{i \in N}$及 $1 > \theta_1 > \frac{1}{2}$在 $\mathfrak{X}$上诱导的随机效用模型。*If*

$$u_1(x) > u_1(y) > u_1(z) \quad \textit{implies} \quad u_i(x) > u_i(z) \textit{ for all } i \in N$$

对于每个 x、y、$z \in X$，则 $\mathbb{P}$是最大理性的。

PROOF. 参见附录。

对于具有三个或更多效用函数的所有最大理性随机效用模型，获得完整刻画仍是一个开放问题。

5.2 Luce 型模型

本节中，除非另有说明，$u: X \to (0, \infty)$ 是任意函数，而 $\Gamma : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 是满足对每个 $S \in \mathfrak{X}$，$\Gamma(S) \subseteq S$ 的任意函数。

5.2.1 一般Luce模型

由 (u, Γ) 诱导的**一般 Luce 模型** 是定义在 $\mathfrak{X}$ 上的随机选择函数 $\mathbb{P}$，使得

$$\mathbb{P}(x, S) := \frac{u(x)}{\sum_{\omega \in \Gamma(S)} u(\omega)} \quad \text{for any } x \in \Gamma(S),$$

且对于任意 $x \in X \backslash \Gamma(S)$，均有 $\mathbb{P}(x, S) := 0$。我们将 Γ 称为该模型的**约束对应**。

该模型由 Ahumada 和 Ulku（2018）以及 Echenique 和 Saito（2019）提出。我们可以将 $\Gamma(S)$ 理解为经过初步筛除阶段后保留下来的备选项集合，也可以将其理解为可行菜单 S 中所有备选项的集合，而决策者会以某种方式将注意力限制在这些备选项上。第一种解释为 Echenique 和 Saito（2019）所推崇，与两阶段选择程序（如 Manzini 和 Mariotti（2009）提出的程序）相符；第二种解释则更符合 Masatlioglu、Nakajima 和 Ozbay（2012）的显示注意力模型。

一个自然的问题是：对于具有相同效用函数 u，的两个一般 Luce 模型，约束对应更严格的模型是否必然比另一个模型理性程度更低。以下两个例子共同表明，事实未必如此。

EXAMPLE 5.2. 令 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 并定义 $\Gamma\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 为 $\Gamma(S) := \arg\max f(S)$。那么，任何约束对应为 Γ的一般 Luce 模型都是最大理性的。 □

EXAMPLE 5.3. 令 $X := \{x, y, z\}$， $u(x) > u(y) > u(z)$ $\Gamma\{x, y\} = \{y\} = \Gamma\{y, z\}$， 并令$\Gamma(X) := \{x, z\}$. 若 $\mathbb{P}$ 是由 (u, Γ) 诱导的一般 Luce 模型，则 $\mathrm{Con}(\mathbb{P}) = (0, 1]$. 由定理 3.1可知， $\mathbb{P}$ 是最小理性的。 □

5.2.2 两阶段 Luce模型

著名的 Luce 规则具有最大理性，但这不过是冰山一角。令$u\colon X \to (0, \infty)$为任意函数， $\succcurlyeq$ 为 X. 上的一个偏序。定义映射 $\mathbb{P}\colon X \times \mathfrak{X} \to [0, 1]$如下：

$$\mathbb{P}(x, S) := \frac{u(x)}{\sum_{\omega \in \mathrm{MAX}(S, \succcurlyeq)} u(\omega)} \quad \text{for any } x \in \mathbf{MAX}(S, \succcurlyeq),$$

且对任意$x \in X \backslash \mathbf{MAX}(S, \succcurlyeq)$, , $\mathbb{P}(x, S) := 0$ 是 $\mathfrak{X}$. 上的随机选择函数。此映射称为由（$u, \succcurlyeq$）诱导的**两阶段 Luce 模型**。该模型假设决策者心中存在某种支配关系 $\succcurlyeq$ ，并且不会注意菜单中按照这种关系受到支配的备选项。对于任何可行菜单，她首先通过剔除受支配的备选项来缩减菜单，然后按照 Luce 模型从所得子菜单中进行选择。（如果 $\succcurlyeq$ 是等号关系，那么该模型就退化为经典 Luce 模型。）根据这一解释， u 和 $\succcurlyeq$ 自然是一致的。因此，若 u 相对于 $\succ$ 递增，我们就称该模型为**适当的**；也就是说，当 $x \succ y$时， $u(x) > u(y)$。结论是，任何这样的随机选择函数至少与任何随机选择函数一样理性：

PROPOSITION 5.5. 任何适当的两阶段 *Luce* 模型都是最大理性的。
PROOF. 参见附录。

[20]所有两阶段 Luce 模型构成的类别也由 Echenique 和 Saito（2019）刻画。此外，Horan（2021）刻画了该类别中支配关系为 X上（某些类型的）半序的成员。Horan（2021）刻画的类别中的所有成员都是 proper。

由于某些适当的两阶段 Luce 模型并非随机效用模型，命题 5.3 和 5.5 表明，随机效用模型既不是最大理性的必要条件，也不是充分条件。

5.3 选择颤动模型

在选择颤动模型中，个体的随机选择行为被视为源于潜在错误。在这类模型最简单的版本中，假定个体具有一个定义良好的单射效用函数 u，定义在 X 上，用以表示其确定性偏好。以概率 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$，他们会按照这一排序选择菜单 S 中最优的备选项；以概率 $1-\alpha$，他们会犯错——在选择时手会“颤动”——因此可能以相等的概率选择菜单中的任何一个选项。形式化地说，若随机选择函数 $\mathbb{P} \in \mathbf{scf}(X)$ 是由 (α, u) 诱导的**颤抖模型**，则

$$\mathbb{P}(x, S) = \alpha \mathbf{1}_{\arg\max u(S)} + (1-\alpha)\tfrac{1}{|S|}$$

对每个 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$.[21] 我们将这里的 α 称为该模型的**颤动概率**。

设 $\mathbb{P}_\alpha$ 是由 (α, u) 诱导的颤抖模型。显然，$\mathbb{P}_0$ 和 $\mathbb{P}_1$ 是最大理性的（例 3.1 和 3.2），因此我们考虑 $0 < \alpha < 1$. 的情形。由于 $\mathbb{P}_\alpha$ 关于扩张具有选择性，$\mathrm{Ch}(\mathbb{P}_\alpha) = \varnothing$（引理 3.6）；又由于它也是中度 s-传递的，$\mathrm{ST}(\mathbb{P}_\alpha) = \varnothing$（引理 3.4）。接下来，任取 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，并将区间 $[\mathbb{P}^*_\alpha(x, S), \min_{y \in S} \mathbb{P}^*_\alpha(x, \{x, y\})]$ 记为 I。若对每个 $y \in S$，都有 $u(x) > u(y)$，则 I 的左端点为 1，因此 $I = \varnothing$。于是，假设对某个 $y \in S.$，有 $u(y) > u(x)$。那么，简单计算可得，I 等于 $(\frac{1-\alpha}{1+(|S|-1)\alpha}, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}]$.。由于该区间的左端点随 S 的大小增大而减小，此处可得到的最小左端点为 $\frac{1-\alpha}{1+(k-1)\alpha}$，其中 $k := |X|$。因此，根据定理 3.2，我们得出 $\Lambda(\mathbb{P}_\alpha) = (\frac{1-\alpha}{1+(k-1)\alpha}, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}]$.

现在，$\alpha \mapsto \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ 和 $\alpha \mapsto \frac{1-\alpha}{1+(k-1)\alpha}$ 是定义在 (0,1). 上的严格递减映射。因此，对于任意不同的 $\alpha, \beta \in (0, 1)$，$\mathbb{P}_\alpha$ 和 $\mathbb{P}_\beta$ 都不具有 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$-可比性，这与均匀 dRUM（推论 5.2.a）形成鲜明对比。为考察此类情形下的比较理性，我们因而使用理性指数 I_{rat}。可以证明，$\alpha \mapsto I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}_\alpha) = 1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{(k-2)\alpha}{(1+(k-1)\alpha)}$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的严格凸映射，其全局最大值在 0 和 1 处取得——我们有 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}_0) = 1 = I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}_1)$——而其全局最小值在 (0,1) 内取得。因此，我们的理性指数 I_{rat} 表明：对于具有足够小（分别为足够大）颤抖概率的两个颤抖模型，颤抖概率较小（分别为较大）的那个更具理性。

总而言之：

PROPOSITION 5.6. *a.* 不存在两个颤抖概率不同且可按 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 比较的颤抖模型；

[21] 据我们所知，Harless 和 Camerer（1994）最早研究了这类随机选择函数。

b. 存在一个阈值 $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$，使得对于 $\mathfrak{X}$ 上的任何颤抖模型，若其颤抖概率小于（大于） α_0，则随着颤抖概率降低（升高），根据 I_{rat}，该模型会变得更加理性。

如果我们将颤抖理解为效用最大化者在做出选择时犯下的“错误”，那么选择行为就应当真实地反映其主要来源，即效用最大化，因此，随着颤抖的似然降低，选择行为应显得更加理性。当这一似然为零时，模型便成为经典效用最大化模型，这当然是最大理性的。命题 5.6 刻画了这一观点，但也提醒我们，只有当颤抖概率足够小时，这一直觉才成立；当这些概率足够大时，结论则会反转。仔细考察后会发现，这一点同样符合直觉。如果 α 很小，就没有理由将颤抖视为“错误”。在这种情况下，决策者选择菜单中所有选项的主要驱动力，是以相同概率在所有选择选项之间随机选择；而对 u的最大化只是事后考虑，且很少发生。由于在每个菜单中都以相同概率选择所有选项是一种最大理性的行为（例 3.2）——毕竟，这很可能对应于一个对 X 中的所有备选项都无差异的效用最大化者的行为——因此在这种情况下，增加颤抖概率会使模型更加理性；而在极限情况下（当 $\alpha = 0$时），我们就会得到上述最大理性的随机选择模型。不过值得注意的是，依据我们的理性排序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$，这些结论并不能成立。上述命题的第一部分指出，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 无法比较这类随机选择函数；相反，上述直觉是由指标 I_{rat} 体现的。

5.4 实证应用

本节旨在说明如何在被试内选择实验中使用我们的测量方法。

5.4.1 Tversky（1969）和 Regenwetter 等人（2011）的实验)

我们首先考虑 Tversky（1969年）的实验1，该实验最初旨在检验弱随机传递性。实验记录了每位受试者在5种赌博选项的所有两两组合中的选择，每个试次重复20次（期间还穿插了额外的“诱饵”选择），由此生成了样本随机选择数据。最初，该实验只有8名受试者；后来，Regenwetter等人（2011）用18名额外受试者重复了同一实验。[22] 与 Balakrishnan、Ok和 Ortoleva（2021）一样，我们在此合并这两个数据集，得到包含26个个体的选择数据集（其中受试者19至26来自 Tversky 最初的实验）。不过，由于这只是一个示例，我们忽略抽样误差，并将受试者在每个两两菜单中的相对选择频率视为其在该菜单中的选择概率。

[22]重复实验的唯一差异在于使用了计算机和更新后的收益（因为几十年已经过去），以及仅在一个实验场次中实施实验（而不是像 Tversky 那样进行五个实验场次）。

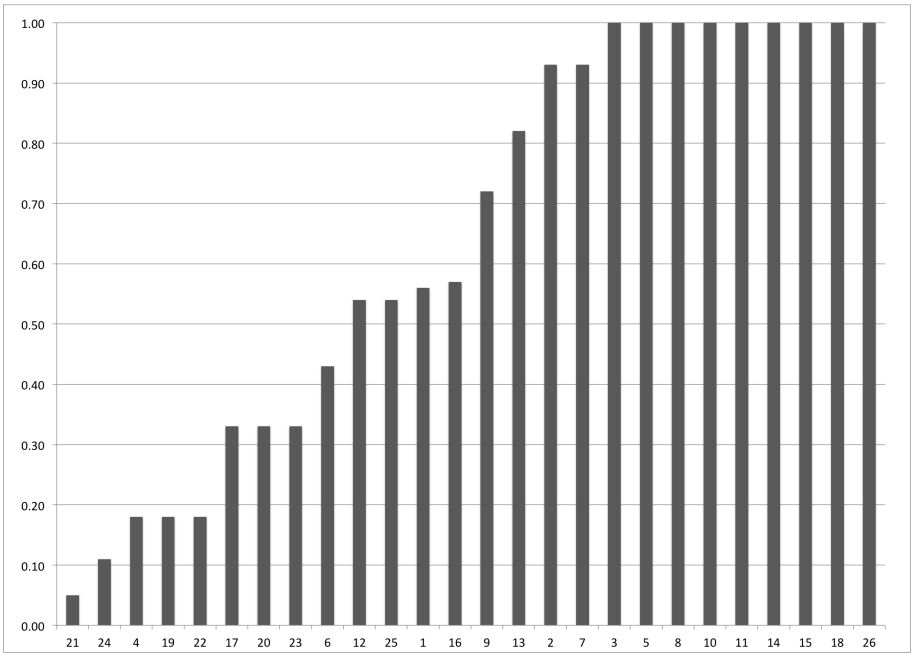

图1：理性指数的值分布

图1按递增顺序报告了全部26名受试者的理性指数值 I_{rat}。（例如，根据 I_{rat}，受试者21的理性程度最低，而受试者3、5、…、26的理性程度最高。）我们发现，26名受试者中有9名达到最大理性；也就是说，他们的理性指数等于1。[23] 此外， I_{rat} 受试者2和7（他们也满足弱随机传递性）的数值都非常接近1（均为0.93），因此，如果允许存在抽样误差（并将 $I_{\mathrm{rat}}(\mathbb{P}) = 1$ 设为原假设），我们也会判定这两名受试者达到最大理性。事实上，只要快速查看图1，就会发现整个群体中理性程度出乎意料地高，至少就 I_{rat}所衡量的情况而言。话虽如此，仍有五名受试者的表现与理性标准相去甚远。（例如，受试者21、24和4的 I_{rat} 数值低于0.2。）

现在，我们使用序$\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$来比较不同受试者的理性程度。考虑到该序并不完备，我们原本不确定先验地</style， $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 是否会得出任何非平凡的比较。令我们有些惊讶的是，结果确实如此。鉴于数据具有成对性质（第3.4节），此处的 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 仅取决于随机传递性集。因此，我们计算了每位受试者的这些集合，并按照其理性指数的顺序将其列于图2中。（由于9位最大理性主体的随机传递性集为空，我们仅展示其余17位受试者的集合。）

令 $\mathbb{P}_i$ 表示受试者 i的随机选择函数。图2的一大亮点是，可以借助 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$比较许多受试者的理性程度。事实上，每位受试者的理性程度都至少高于或低于另一位受试者。例如，$\Lambda(\mathbb{P}_{21}) = (0.05, 1]$ 而受试者21的理性程度低于除受试者16之外的所有其他受试者，

[23]相比之下，12位受试者是弱s-理性的，其中8位是中度s-理性的。

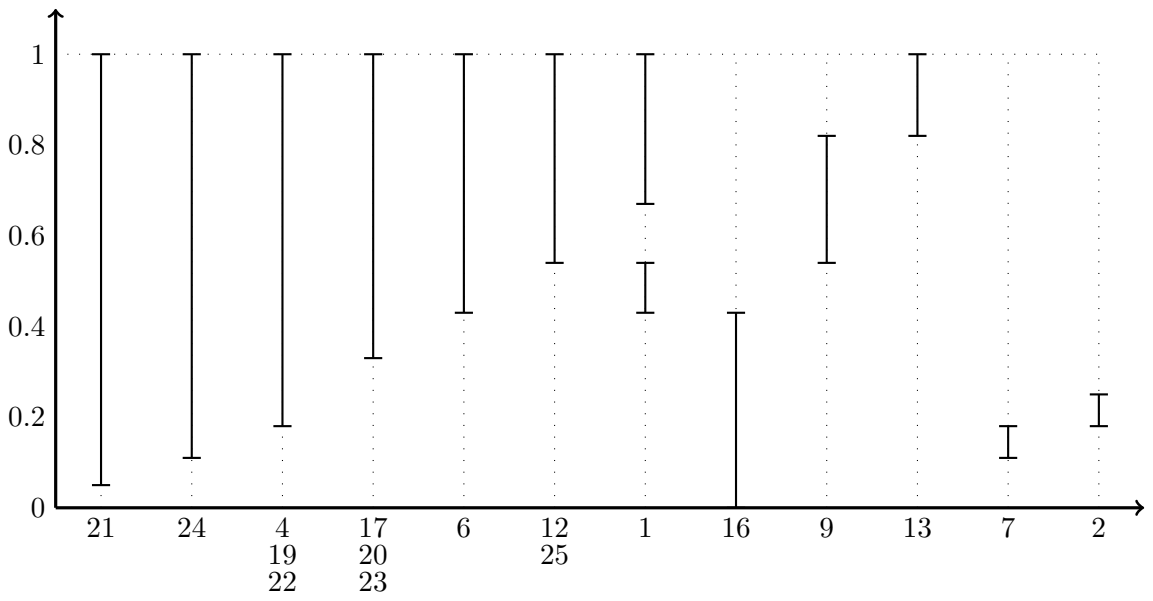

图2：Tversky（1969年）的 Λ-集分布

也就是说，对于所有不等于16的 i ，都有 $\mathbb{P}_i \trianglerighteq_{\text{rat}} \mathbb{P}_{21}$ ；而受试者16的理性程度低于受试者2和7。此外， $\Lambda\left(\mathbb{P}_1\right) = (0.43, 0.54] \cup (0.67, 1]$。因此，受试者1的理性程度低于受试者13，但他们的理性程度都高于所有 I_{rat} 值严格低于受试者12的受试者。（例如， $\mathbb{P}_1 \trianglerighteq_{\text{rat}} \mathbb{P}_6$。）图2还清楚地表明，存在三组理性程度相同的受试者。例如，受试者12和15的随机传递性集完全相同。最后值得注意的是，受试者2和7的理性指数相同，但无法通过 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$对二者进行比较。

偏好最大化或随机传递性等标准检验都是二分式的：受试者的选择数据要么通过所采用的检验，要么不通过。然而，人们往往关心理性被违反的程度。（例如，在消费者理论的确定性情境中，Afriat效率指数及后续的理性指数正是为了测度违反广义显示偏好公理的严重程度而提出的。）我们的理性指数 I_{rat} 和理性序 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 的一大优势在于，它们使分析者能够在任何随机选择环境中测度理性遭到违反的程度。例如，Tversky在其原始研究中得出结论，受试者21和25都违反了弱随机传递性（即使考虑抽样误差也是如此）。 I_{rat}和 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 通过表明受试者21实际上远不如受试者25理性，提供了更多关于这一情况的信息。

顺带一提，将我们的方法与使用随机效用模型（RUM）评估这些实验选择数据的方法进行比较，或许会有所裨益。一般而言，检验二元选择是否符合随机效用模型（RUM）向来十分困难。（有关这一问题的最新讨论，参见 Sprumont（2022年）。）幸运的是，当备选项总数不超过 5 时，也就是说， $|X| \leq 5$，Fishburn（1992年）的定理1

指出，为此我们只需检验以下三角条件：

$$\mathbb{P}(x,\{x,y\})+\mathbb{P}(y,\{y,z\})+\mathbb{P}(z,\{x,z\})\leq 2$$

对于每个 $x,\ y,\ z\in X$. 事实证明，最大理性蕴含这一条件。因此，我们可以轻易得出结论：实验中的9位最大理性受试者必定与随机效用模型一致。此外，直接运用 Fishburn 条件，我们发现受试者2、7、13、9、1、12和25也与随机效用模型一致。值得注意的是，这些受试者中有四位，即 S13、S1、S12 和 S25，违反了弱 s-传递性。这正是随机效用模型不必满足弱 s-传递性的一个经验例证。此外，这也表明，随机效用模型无法区分 S1、S12 和 S25 与满足弱 s-传递性的 S2、S7 和 S9 的选择行为。相比之下，正如我们在图2中所见，本文衡量随机理性的方法能够进行更细致的比较。例如，根据图2，就 I_{rat} 而言，S2、S7 和 S9 中的任何一位都比 S1、S12 和 S25 更理性。事实上，即使相对于 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$，S9 也比 S12 和 S25 更理性。

5.4.2 Feldman 和 Rehbeck（2022）的实验

为展示我们的算法在计算 $\Lambda(\mathbb{P})$ 方面的可行性，我们接下来考察 Feldman 和 Rehbeck（2022）的实验。在这些实验中，受试者在风险选择的情境下使用线性凸预算界面。作者发现，在 144 名受试者中，有 56 名在面对的 79 个菜单中，超过一半的菜单上做出了非退化随机选择；其中有 36 名受试者在超过三分之二的菜单上做出了这种选择。

使用我们在第4.2节介绍的算法，我们只用了不到十分钟，就在个人电脑上计算出了所有受试者的全部无环性集合。我们发现，只有1名受试者达到最大理性，而有122名受试者处于最小理性。在大多数现有的实验研究中，受试者面对的菜单至多为25个。例如，在 Tversky（1969）中，受试者只面对10个菜单；而在 Choi 等（2007）的凸预算实验及受其启发开展的后续研究中，受试者面对的菜单为20至25个。由于理性指数的值自然会随菜单数量增加而降低，因此，Feldman 和 Rehbeck（2022）中的受试者总体理性低于其他实验研究中的受试者，并不令人意外。然而，我们观察到如此低的理性水平，也可能有其他原因。如果受试者的选择是确定性的，那么按照我们的理性序，他们要么是最大理性，要么是最小理性。事实上，122名最小理性的受试者中，大多数在实验中倾向于选择退化随机化，这导致其理性程度大幅下降。具体而言，受试者1的选择呈现出以下确定性循环：$\mathbb{P}(a_2,\ \{a_2,a_{11}\})\ =\ \mathbb{P}(a_{11},\ \{a_1,a_{11}\})\ =\mathbb{P}(a_1,\ \{a_1,a_{12}\})\ =\ 1$ 和 $\mathbb{P}(a_2,\ \{a_2,a_{12}\})\ =\ 0$，其中备选项记作 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{27}$。理性程度处于中间水平的受试者往往更倾向于随机选择。在21名既非最小理性也非最大理性的受试者中，有19名的选择超过三分之二是随机的。（这是数据本身的特征，并非我们的测度所致。）

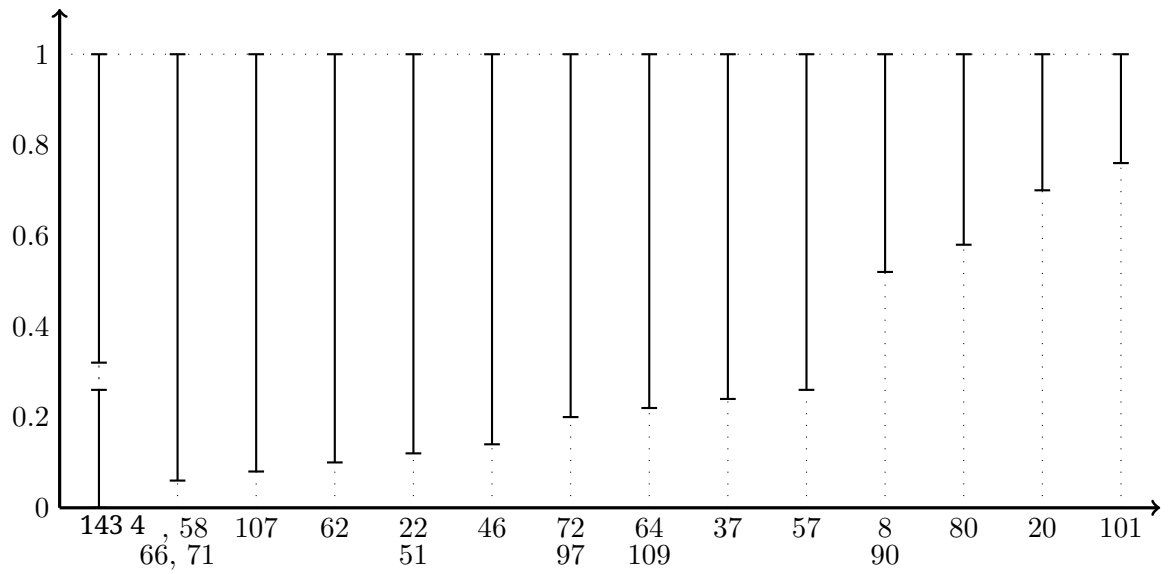

图 3：Feldman 和 Rehbeck（2022）的 Λ集合分布

尽管如此，在表现出随机选择的受试者中，相当一部分仍处于最小理性。这似乎与 Nielsen 和 Rigotti（2023）的实验发现一致：他们提出了一种检测偏好不完备性的新方法，并发现其实验中的许多受试者都表现出偏好不完备性。[24] 值得注意的是，Nielsen 和 Rigotti 观察到，当受试者被迫作出选择时（正如大多数现有实验研究，以及 Feldman 和 Rehbeck（2022）的研究中那样），与非强迫情境相比，观察到的选择表现出更多的不一致。

图 3 展示了 21 位理性水平不极端的受试者的无环性集合；我们根据这些受试者的 I_{rat} 值，从低到高排列。（例如，根据I_{rat}，受试者 143 的理性水平最低，受试者 101 的理性水平最高。）受试者 143 的无环性集合为 $(0,\ 0.3] \cup (0.32,\ 1]$，而其他受试者的无环性集合均为 $(\lambda,\ 1]$，即包含 1 的单一区间。因此，除受试者 143 外，任意两位受试者都可以通过 $\trianglerighteq_{\text{rat}}$进行比较；对于这些受试者，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$和 I_{rat} 的选择几乎完全相同。因此，我们观察到，$\trianglerighteq_{\text{rat}}$ 也能够在当前数据集中进行许多比较。

6 结论

绝大多数经济模型都假定，个体以理性的方式做出选择。视具体语境而定，“理性”一词有不同含义，但其定义几乎总是包括：相对于某种传递（且通常完备）的偏好关系，成为偏好最大化者——

[24]请注意，许多经济学家认为，偏好的不完备性与随机选择之间存在更深层的联系，例如 Ok 和 Tserenjigmid（2022年）以及 Agranov 和 Ortoleva（2023）。

此外，选择理论还从行为角度提供了多种方法，通过（可检验的）显示偏好公理来刻画这一性质；近期文献也发现了比较不同（确定性）选择行为之理性程度的方法。然而，当个体的选择行为被建模为随机时，确定哪些模型是理性的便成了一件非同寻常的事。文献似乎将随机效用模型视为标准效用最大化模型的对应物，因而把该模型看作典型的“理性”随机选择函数。但正如我们在第1节和第5.1节所讨论的，如果模型中的效用之间缺少适当的一致性条件，这种观点就并非无可非议。[25]

因此，在本文中，我们建立了一种严谨的方法，用于比较任意两个随机选择模型的理性程度，无论它们是经验模型还是理论模型，从而为这类模型的最大理性和最小理性提出了判据。基本思路是用一个确定性选择对应来“近似”给定的随机选择函数，并检验该对应是否具有理性。这使我们能够运用广为人知的（确定性）显示偏好方法，评估近似所得选择对应的理性。但这一思路马上就遇到了一个难题：似乎无法就某一种特定近似达成一致，因为它可能会造成过多的信息损失。为缓解这一问题，我们考察了一类由一个参数刻画、具有直观吸引力的候选近似（Fishburn族），并使用这一类中的所有 成员来比较任意两个随机选择模型的理性。由此，我们得到了一个支配排序 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$。随后，我们给出了这一排序的无参数刻画，并据此提出了一个自然的理性指数 I_{rat}，它与 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$完全一致。

借助这一方法，我们重新审视了随机效用模型，并发现（这一次是通过形式化分析）此类模型是否会被 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 视为最大理性，取决于模型中效用函数的结构。当模型中存在两个效用函数时，我们发现 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$ 能够对所有此类模型进行排序，并通过一个简单的一致性条件刻画出最大理性的模型。我们还将测量方法应用于其他一些模型，例如广义Luce模型和颤抖模型，并展示了如何利用重复进行的选择实验以及随机选择实验所产生的选择数据，在实证研究中运用这一方法。

仍有若干研究方向值得探索。首先，本文促使我们认真研究如何用确定性选择对应来近似给定的随机选择函数。Fishburn 族直观且便于使用，但绝非唯一可选方案。可以／应该通过公理化方法或度量投影方法（例如沿着 Apesteguia 和 Ballester（2021）的思路）来处理这一

[25] 人们可能会认为，刻意随机选择模型（例如 Machina（1985）、Fudenberg、Iijima 和 Strzalecki（2015）以及 Cerreia-Vioglio、Dillenberger、Ortoleva 和 Riella（2019）所研究的模型）显然是最大理性的，因为在这些模型中，决策者会最大化其对备选项上的概率分布的偏好。然而，根据 $\trianglerighteq_{\mathrm{rat}}$，刻意随机选择模型未必是最大理性的，因为一般而言，对概率分布的偏好与对备选项的偏好并不一定彼此一致。此外，正如 Cerreia-Vioglio、Dillenberger、Ortoleva 和 Riella（2019）所示，一些刻意随机选择模型可能违反弱随机传递性。

一般近似问题，并找出其他可行的备选方案。其次，即使直接采用 Fishburn 类，也可以研究选择对应排序的其他方法，以获得更精细的理性排序。与许多其他问题一样，这些问题留待未来研究。

附录：证明

Proof of Proposition 3.3. 任取 $x,\ y,\ z \in X$ 使得 $a := \mathbb{P}(x,\ \{x,y\}) > \frac{1}{2}$ 且 $b := \mathbb{P}(y,\ \{y,z\}) > \frac{1}{2}$。令 $c := \mathbb{P}(x,\ \{x,z\})$；我们需要证明 $c \geq \min\{a,b\}$. 由于 $a > \frac{1}{2}$，我们有 $\frac{1-a}{a} < 1$，类似地，$\frac{1-b}{b} < 1$. 任取实数 λ，使得

$$\max\left\{\frac{1-a}{a}, \frac{1-b}{b}\right\} < \lambda \leq 1.$$

于是，$1-a < \lambda a$，也就是说，$\mathbb{P}(y,\ \{x,y\}) < \lambda\mathbb{P}(x,\ \{x,y\})$，类似地，$\mathbb{P}(z,\ \{y,z\}) < \lambda\mathbb{P}(y,\ \{y,z\})$。由于$\mathbb{P}$是最大理性的，因此它是 λ-随机传递的（命题 3.2），由此可得 $\mathbb{P}(z,\ \{x,z\}) < \lambda\mathbb{P}(x,\ \{x,z\})$，也就是说，$\frac{1-c}{c} < \lambda$. 令 $\lambda \downarrow \max\left\{\frac{1-a}{a}, \frac{1-b}{b}\right\}$，则得到

$$\frac{1-c}{c} \leq \max\left\{\frac{1-a}{a}, \frac{1-b}{b}\right\},$$

也就是说，要么是 $\frac{1-c}{c} \leq \frac{1-a}{a}$，要么是 $\frac{1-c}{c} \leq \frac{1-b}{b}$。由于 $t \mapsto \frac{1-t}{t}$ 是 $(0,1]$，上的严格递减函数，因此我们得出 $c \geq a$ 或 $c \geq b$，正如我们所寻求的。 ■

Proof of Lemma 3.4. 设 $\mathbb{P}$ 是定义在 $\mathfrak{X}$ 上的中度随机传递随机选择函数，且 $\mathrm{ST}(\mathbb{P}) \neq \varnothing$。那么，必定存在 $x,\ y,\ z \in X$，使得

$$\mathbb{P}^*(z,\{x,z\}) > \mathbb{P}^*(y,\{x,y\}) \quad \text{and} \quad \mathbb{P}^*(z,\{x,z\}) > \mathbb{P}^*(z,\{y,z\}). \tag{10}$$

由这两个不等式中的第一个可得，$\mathbb{P}^*(y,\ \{x,y\}) < 1$，这当且仅当 $\mathbb{P}(x,\ \{x,y\}) > \frac{1}{2}$ 时才可能成立。同理，(10) 中的第二个不等式意味着 $\mathbb{P}(y,\ \{y,z\}) > \frac{1}{2}$。于是，根据中度随机传递性可得 $\mathbb{P}(x,\ \{x,z\}) > \frac{1}{2}$。因此，(10) 变为

$$\frac{1-\mathbb{P}(x,\{x,z\})}{\mathbb{P}(x,\{x,z\})} > \frac{1-\mathbb{P}(x,\{x,y\})}{\mathbb{P}(x,\{x,y\})} \quad \text{and} \quad \frac{1-\mathbb{P}(x,\{x,z\})}{\mathbb{P}(x,\{x,z\})} > \frac{1-\mathbb{P}(y,\{y,z\})}{\mathbb{P}(y,\{y,z\})},$$

也就是说，$\mathbb{P}(x,\{x,y\}) > \mathbb{P}(x,\{x,z\})$ 且 $\mathbb{P}(y,\{y,z\}) > \mathbb{P}(x,\{x,z\})$。由于 $\mathbb{P}(x,\{x,y\})$ 和 $\mathbb{P}(y,\{y,z\})$ 均大于 $\frac{1}{2}$，这与 $\mathbb{P}$ 是中度随机传递的相矛盾。 ■

Proof of Proposition 5.1. 对于任意$S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，我们将区间 $(\mathbb{P}^*(x,S), \min_{y\in S}\mathbb{P}^*(x,\{x,y\})]$ 记作 $I_{S,x}$。我们注意到，如果 $\theta > \frac{1}{2}$，且此类区间 $I_{S,x}$ 的右端点为 1，那么$I_{S,x} = \varnothing$。（事实上，当 $\theta > \frac{1}{2}$ 时，$I_{S,x}$ 的右端点为 1，当且仅当对所有 $y \in S$，$u(x) > u(y)$，这意味着 $\mathbb{P}^*(x,S) = 1$，也就是说，$I_{S,x} = \varnothing$。）

假设 u 和 v 不满足三元组一致，因此对某些 $x,y,z \in X.$，(7) 成立。于是，对于$T := \{x,y,z\}$，有 $\mathbb{P}^*(y,T) = 0$，而 $\mathbb{P}^*(y,\{x,y\}) = \frac{1-\theta}{\theta}$ 且 $\mathbb{P}^*(y,\{z,y\}) = 1$，由此可得$I_{T,y} = (0, \frac{1-\theta}{\theta}] \subseteq \mathrm{Con}(\mathbb{P})$。若 $\theta = \frac{1}{2}$，则显然有反向包含。若 $\theta > \frac{1}{2}$，那么正如我们在上一段所指出的，对于任意 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $w \in S$，$I_{S,w}$ 的右端点不可能为 1，除非该区间为空。由于 $\mathbb{P}^*$ 的取值属于 $\{0, \frac{1-\theta}{\theta}, 1\}$，因此我们可以得出：若 u 和 v 不满足三元组一致，则 $\Lambda(\mathbb{P}) = (0, \frac{1-\theta}{\theta}]$.

接下来假设 u 和 v 满足三元组一致。任取 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$。为导出矛盾，假设 $I := I_S$, $_x \neq \varnothing$ （这显然意味着该区间的右端点非零）。如上所述， $\theta > \frac{1}{2}$ 意味着 I 的右端点不可能为 1。因此，当 $\theta > \frac{1}{2}$时，$\min_{y \in S} \mathbb{P}^*(x, \{x, y\}) = \frac{1-\theta}{\theta}$。对于 $\theta = \frac{1}{2}$，这一结论同样成立，因为此时 $\mathbb{P}^*$的取值属于 $\{0, 1\}$。由此可得，x 在 S上并未使 u 达到最大值，因此存在一个 $y \in S$，使得$u(y) > u(x)$。于是必有 $v(x) > v(y)$，否则 I 的右端点便为零。此外，若 $v(x) = \max v(S)$，则 $\mathbb{P}^*(x, S) = \frac{1-\theta}{\theta}$，因此 $I = \varnothing$，矛盾。否则，存在一个 $z \in S$，使得$v(z) > v(x)$。若 $u(z) > u(x)$，则 $\mathbb{P}(x, \{x, z\}) = 0$, 这与 $\min_{y \in S} \mathbb{P}^*(x, \{x, y\}) = \frac{1-\theta}{\theta}$ 矛盾。另一方面，若 $u(x) > u(z)$，则 u 和 v 不满足三元组一致，矛盾。结论：若 u 和 v 满足三元组一致，则 $\Lambda(\mathbb{P}) = \varnothing$，也就是说， $\mathbb{P}$ 是最大理性的。■

Proof of Proposition 5.3. (a) 令 $\frac{1}{2} \geq \theta_1$，并取任意满足 (8) 的 x， x_1，……， $x_n \in X$。于是，$\mathbb{P}(x, \{x, x_j\}) = 1 - \theta_j \geq \frac{1}{2}$，从而 $\mathbb{P}^*(x, \{x, x_j\}) = 1$，对所有 $j \in N$，均成立，而 $\mathbb{P}^*(x, \{x, x_1, ..., x_n\}) = 0.$。由 $\mathbb{P}$ 的孔多塞集合定义可知，$\mathrm{Con}(\mathbb{P}) = (0, 1].$。因此： $\Lambda(\mathbb{P}) = (0, 1].$

(b) 令 $\theta_1 > \frac{1}{2}$，并取任意满足 (9) 的 x， y， $z \in X$。于是， $\mathbb{P}^*(y, \{x, y\}) = \frac{1-\theta_1}{\theta_1}$，且 $\mathbb{P}^*(y, \{y, z\}) = 1$，而 $\mathbb{P}^*(y, \{x, y, z\}) = 0.$。由 $\mathbb{P}$ 的孔多塞集合定义可知，$(0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}] \subseteq \mathrm{Con}(\mathbb{P}) \subseteq \Lambda(\mathbb{P})$。

为简化后续论证，我们定义测度 μ on 2^N by $\mu(\varnothing) = 0$ and $\mu(A) := \sum_{i \in A} \theta_i$。

断言 1. $\mathrm{Ch}(\mathbb{P}) \subseteq (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$。为此，任取 $S, T \in \mathfrak{X}$ and $x \in S$ with $S \subseteq T$ and $\mathbb{P}^*(x, T) > \mathbb{P}^*(x, S)$。令 $A := \{i \in N : u_i(x) = \max u_i(S)\}$ and $B := \{i \in N : u_i(x) = \max u_i(T)\}$. 显然， $B \subseteq A$. 此外，由于 $1 > \mathbb{P}^*(x, S)$ x 不会使 u_1 在 S 上达到最大值，因此 $\mu(A) \leq 1 - \theta_1$。由于 x 不会使 u_1 在 T 上达到最大值（因为 $S \subseteq T$）且 $\theta_1 > \frac{1}{2}$，我们还有 $\max_{w \in S} \mathbb{P}(w, T) \geq \theta_1$。但于是

$$\mathbb{P}^*(x, T) \leq \frac{\mu(B)}{\theta_1} \leq \frac{\mu(A)}{\theta_1} \leq \frac{1-\theta_1}{\theta_1},$$

我们的主张由 $\mathrm{Ch}(\mathbb{P})$ 的定义得出。

主张 2. $\mathrm{Con}(\mathbb{P}) \subseteq (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$. 为了证明这一点，任取 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S.$。按照上一段中的定义，设 A，并令 z 为 S 中的一个备选项，满足 $\mathbb{P}(z, S) = \max_{w \in S} \mathbb{P}(w, S)$。我们令 $C := \{i \in N : u_i(z) = \max u_i(S)\}$，使得 $\mathbb{P}(z, S) = \mu(C)$。由于 $\theta_1 > \frac{1}{2}$，我们有 $1 \in C.$。但接着 $\mathbb{P}^*(x, S) = \frac{\mu(A)}{\mu(C)}$，并且

$$\min_{y \in S} \mathbb{P}^*(x, \{x, y\}) \leq \mathbb{P}^*(x, \{x, z\}) \leq \frac{1-\mu(C)}{\mu(C)} \leq \frac{1-\theta_1}{\theta_1},$$

根据 $\mathbb{P}$ 的孔多塞集合的定义可得 $\mathrm{Con}(\mathbb{P}) \subseteq (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$.

主张 3. $\mathrm{ST}(\mathbb{P}) \subseteq (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$. 为了证明这一点，任取 $x, y, z \in X$，使得 $\mathbb{P}^*(y, \{x, y\}) < \mathbb{P}^*(z, \{x, z\})$ 且 $\mathbb{P}^*(z, \{y, z\}) < \mathbb{P}^*(z, \{x, z\})$。那么， $u_1(y) > u_1(x)$ 不可能成立，否则 $\mathbb{P}^*(y, \{x, y\}) = 1$。同理， $u_1(z) > u_1(y)$, 否则 $\mathbb{P}^*(z, \{y, z\}) = 1$。因此： $u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$。由此可得$\mathbb{P}(z, \{x, z\}) \leq 1 - \theta_1$，所以 $\mathbb{P}^*(z, \{x, z\}) \leq \frac{1-\theta_1}{\theta_1}$，我们的主张由 $\mathrm{ST}(\mathbb{P})$ 的定义得出。

主张 1–3 共同推出 $\Lambda(\mathbb{P}) \subseteq (0, \frac{1-\theta_1}{\theta_1}]$，从而完成了我们的证明。 ■

Proof of Proposition 5.4. 断言 1. $\mathrm{Ch}(\mathbb{P}) = \varnothing$。为此，任取 S、$T \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，使得$S \subseteq T$。假设 $I := (\mathbb{P}^*(x, S)\ \mathbb{P}^*(x, T)]$ 非空。那么， $u_1(x) < \max u_1(S)$，否则 $\mathbb{P}^*(x, S) = 1$ （鉴于 $\theta_1 > \frac{1}{2}$）。若存在一个 $z \in T$，使得 $u_1(y) = \max u_1(T) > u_1(z) > u_1(x)$，则根据假设，对所有 $i \in N$，都有 $u_i(z) > u_i(x)$，从而 $\mathbb{P}^*(x, T) = 0$，这与 I非空相矛盾。因此，假设对每个 $z \in T \setminus \{x, y\}$，都有 $u_1(y) > u_1(x) > u_1(z)$。那么，必有 $y \in S$。此外，根据假设，对所有 $i \in N$和 $z \in T \setminus \{y\}.$，都有 $u_i(y) > u_i(z)$。最后，容易验证 $\mathbb{P}(y, \{x, y\}) =$

$\mathbb{P}(y,\ S) = \mathbb{P}(y,\ T)$，且 $\mathbb{P}(x,\ \{x,y\}) = \mathbb{P}(x,\ S) = \mathbb{P}(x,\ T)$，这意味着 I为空，矛盾。因此，根据 Ch($\mathbb{P}$) 的定义，断言得证。

主张 2. Con($\mathbb{P}$) $= \varnothing$。为证明这一点，任取 $S \in \mathfrak{X}$ 和 $x \in S$，并令 I 表示区间 $(\mathbb{P}^*(x,S), \min_{w\in S}\mathbb{P}^*(x,\{x,w\})]$. 假设 $I \neq \varnothing$。那么，$\mathbb{P}^*(x,S) < 1$，因此，由于 $\theta_1 > \frac{1}{2}$，存在一个 $y \in S$ 使得 $u_1(y) = \max u_1(S) > u_1(x)$。若存在一个 $z \in S$ 满足 $u_1(y) > u_1(z) > u_1(x)$，则命题的假设意味着对于所有 $i \in N$，$u_i(y) > u_i(x)$，因此 I 的右端点为 0，这与 I非空矛盾。于是，假设对于所有 $z \in S\backslash\{x,y\}.$，$u_1(y) > u_1(x) > u_1(z)$。那么，根据假设，对于所有 $i \in N$，$u_i(y) > u_i(z)$，并且 $z \in S\backslash\{y\}.$。很容易验证，$\mathbb{P}(y,\{x,y\}) = \mathbb{P}(y,S)$ 且 $\mathbb{P}(x,\{x,y\}) = \mathbb{P}(x,S)$，这意味着 $I = \varnothing$，矛盾。由此，根据 $\mathbb{P}$ 的孔多塞集合的定义，可得 Con($\mathbb{P}$) $= \varnothing$。

主张 *3.* ST($\mathbb{P}$) $= \varnothing$。为此，任取 $x,y,z \in X$ 满足 $\mathbb{P}^*(y,\{x,y\}) < 1$ 且 $\mathbb{P}^*(z,\{y,z\}) < 1$。由于 $\theta_1 > \frac{1}{2}$，于是 $u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$, 因此根据假设，对所有 $i \in N$，$u_i(x) > u_i(z)$, 从而$\mathbb{P}^*(z,\{x,z\}) = 0.$。因此，我们的主张由 ST($\mathbb{P}$) 的定义得出。

主张 1–3 合起来推出 $\Lambda(\mathbb{P}) = \varnothing$, 至此证明完成。 ■

Proof of Proposition 5.5.[26] 任取 $u: X \to (0,\infty)$ 以及 X 上的一个偏序，并令 $\mathbb{P}$ 为由 $(u,\succcurlyeq)$ 诱导的真两阶段 ***Luce*** 模型。固定任意一个 $(0,1]$, 中的 λ，并在 X 上定义偏序$\succcurlyeq_\lambda$：当且仅当 $x = y$ 或 $\lambda u(x) > u(y)$. 容易验证，$\succcurlyeq_\lambda$ 是 $\succcurlyeq$传递的，也就是说，

$$\text{either } x \succ_\lambda y \succcurlyeq z \text{ or } x \succcurlyeq y \succ_\lambda z \text{ implies } x \succ_\lambda z \tag{11}$$

对每个 $x,\ y,\ z \in X$，以及

$$C_{\mathbb{P},\lambda}(S) = \mathbf{MAX}(S,\succcurlyeq_\lambda) \cap \mathbf{MAX}(S,\succcurlyeq) \tag{12}$$

对每个 $S \in \mathfrak{X}$. 作为此刻画的一个直接推论，我们发现 $C_{\mathbb{P},\lambda}$ 满足切尔诺夫公理和孔多塞公理。为验证无环公理，任取 $x,y,z \in X$，使得 $\{x\} = C_{\mathbb{P},\lambda}\{x,y\}$且 $\{y\} = C_{\mathbb{P},\lambda}\{y,z\}$。由式 (12) 可知，第一个等式意味着 $x \succ y$ 或 $x \succ_\lambda y$，而第二个等式意味着 $y \succ z$ 或 $y \succ_\lambda z$。然后利用式 (11)，我们得到 $x \succ_\lambda z$，也就是说，MAX($\{x,z\},\succcurlyeq_\lambda$) $= \{x\}$. 此外，$x \in$MAX($\{x,z\},\succcurlyeq$)，因为否则 $z \succ x$，因此 $\mathbb{P}$ 的适当性意味着 $u(z) > u(x) > \lambda u(x)$，所以非 $x \succ_\lambda z$，矛盾。于是由式 (12) 可得 $\{z\} = C_{\mathbb{P},\lambda}\{x,z\}$. 结论：$C_{\mathbb{P},\lambda}$ 满足无环公理。因此，根据定理 2.2，$C_{\mathbb{P},\lambda}$ 是理性的。 ■

参考文献

Afriat, S.，《需求分析中不等式系统：经典方法的扩展》，《国际经济评论》14 (1973), 460-472.

Aguiar, V.，《随机分类与有限理性》，《经济学快报》159 (2017), 46-52.

Aguiar, V.，和 R. Serrano，《斯卢茨基矩阵范数：有限理性的程度、分类与比较静态分析》，《经济理论杂志》172 (2017), 163-201.

Agranov, M.，和 P. Ortoleva，《随机选择与随机化偏好》，《政治经济学杂志》，125 (2017), 40-68.

Agranov, M.，和 P. Ortoleva，《随机化范围》，《经济与统计评论》，即将出版，2023.

Apesteguia, J. 和 M. Ballester，理性与福利的度量，《政治经济学杂志》123 (2015)，1278-1310。

[26]Gil Riella 向我们提出了这个证明思路。

Apesteguia, J. 和 M. Ballester，区分预测随机性与残余行为，*J. Europ.Econ. Assoc.* 19 (2021)，1041-1076。Apesteguia, J.、M. Ballester 和 J. Lu，单交叉随机效用模型，《计量经济学》85 (2017)，661-674。Ahumada, A. 和 L. Ulku，有限考虑下的 Luce 规则，*Math. Soc. Sci.* 93 (2018)，52-56。Aumann, R.J.，没有完备性公理的效用理论，《计量经济学》30 (1962)，445-462。Balakrishnan, N.、E. A. Ok 和 P. Ortoleva，推断选择理论，论文，普林斯顿大学，2021。Bewley, T.F.，奈特式决策理论：第一部分，考尔斯基金会讨论论文第807号，1986年。Buchanan, J.，社会选择、民主与自由市场，《政治经济学杂志》62 (1954)，114-123。Caradonna, P.，实验设计对选择数据的影响，论文，乔治城大学，2020。Cerreia-Vioglio, S.、D. Dillenberger、P. Ortoleva 和 G. Riella，刻意随机，*Amer. Econ.Rev,* 109 (2019)，2425-2445。Choi, S.、R. Fisman、D. Gale 和 S. Kariv，不确定性下个体行为的一致性与异质性，*Amer. Econ. Rev,* 97 (2007)，1921-1938。de Clippel, G. 和 K. Rozen，选择中的有限理性：综述，*J. Econ. Lit.* 即将出版，2023。Dean, M. 和 D. Martin，以显示偏好关系的最低成本衡量理性，《经济与统计评论》98 (2016)，524-534。Echenique, F.、S. Lee 和 M. Shum，金钱泵作为显示偏好违背的度量，《政治经济学杂志》119 (2019)，1201-1223。Echenique, F. 和 K. Saito，一般 Luce 模型，《经济理论》68 (2019)，811-826。Echenique, F.、K. Saito 和 G. Tserenjigmid，感知调整卢斯模型，*Math. Soc. Sci.*93 (2018)，67-76。Eliaz, K. 和 E. A. Ok，无差异还是犹豫不决：不完备偏好的选择理论基础，*Games Econ. Behav.*56 (2006)，61-86。Falmagne, J.，有限随机尺度系统的表示定理，《数学心理学杂志》18 (1978)，52-72。Feldman, P. 和 J. Rehbeck，揭示对混合物的偏好：一项风险实验研究，*Quant. Econ.* 13 (2022)，761-786。Fishburn, P.，选择概率与选择函数，《数学心理学杂志》18 (1978)，201-219。Fishburn, P.，诱导二元概率与线性排序多面体：现状报告，*Math.Soc. Sci.* 23 (1992)，67-80。Fudenberg, D.、R. Iijima 和 T. Strzalecki，随机选择与显示扰动效用，《计量经济学》83 (2015)，2371-2409。Gerasimou, G.，通过延迟选择揭示犹豫不决、不受欢迎性与过载《经济学杂志》128 (2018)，2450-2479。Gul, F. 和 W. Pesendorfer，将随机选择视为行为优化，《计量经济学》82 (2014)，1873-1912。Gul, F.、P. Natenzon 和 W. Pesendorfer，将随机选择视为行为优化，《计量经济学》82 (2014)，1873-1912。

Harless, D., and C. Camerer, 广义期望效用理论的预测效用，《计量经济学》62 (1994), 1251-1289. He, J., and P. Natenzon, 中度效用，《美国经济评论：洞见》，即将刊出，2023年. Hey, J., 重复是否能提高一致性？《实验经济学》, 4 (2001), 5-54. Hey, J., and C. Orme, 使用实验数据研究期望效用的推广形式，《计量经济学》, 62 (1994), 1291-1326. Horan, S., 随机半序，《经济理论杂志》192 (2021), 1051-71. Houtman, M., and J. Maks, 确定所有与显示偏好一致的极大数据子集，《定量方法》6 (1985), 89-104. Kitamura, Y., and J. Stoye, 随机效用模型的非参数分析，《计量经济学》86 (2018), 1883-1909. Luce, D.,《个体选择行为：理论分析》，纽约，Wiley，1959. Machina, M., 由彩票上的确定性偏好生成的随机选择函数，《经济学杂志》95 (1985), 575-594. Manzini, P., and M. Mariotti, 序贯可理性化选择，《美国经济评论》97 (2007), 1824- 1839. Manzini, P., and M. Mariotti, 随机选择与考虑集，《计量经济学》82 (2014), 1153- 1176. Manzini, P., and M. Mariotti, 对偶随机效用最大化，《经济理论杂志》177 (2018), 162-182. Masatlioglu, Y., D. Nakajima, and E. Ozbay, 显示注意力，《美国经济评论》102 (2012), 2183-2205. McFadden, D., 显示随机偏好：综合，《经济理论》26 (2005), 245-264. Natenzon, P., 随机选择与学习，《政治经济学杂志》127 (2019), 419-457. Nielsen, K., and L. Rigotti, 显示不完备偏好，$mimeo$，加州理工学院，2023。Ok, E. A., and G. Tserenjigmid, 无差异、犹豫不决、实验与随机选择，《理论经济学》17 (2022), 378-413. Regenwetter, M., J. Dana, and C. Davis-Stober, 偏好的传递性，《心理学评论》118 (2011), 42-56. Ribeiro, M., and G. Riella, 正则预序与行为无差异，《决策理论》82 (2017), 1-12. Ribeiro, M., 比较理性，$mimeo$，纽约大学，2021。Schmeidler, D., 无可加性的主观概率与期望效用，《计量经济学》57 (1989), 571-587. Sprumont, Y., 正则随机选择与三角不等式，《数学心理学杂志》110 (2022), 102710. Strzalecki, T., 随机选择理论，$mimeo$，哈佛大学，2023。Tversky, A., 偏好的非传递性，《心理学评论》76 (1969), 31-48. Tversky, A., 按方面淘汰：一种选择理论，《心理学评论》. 79 (1972), 281-299. Varian, H., 优化模型的拟合优度，《计量经济学杂志》46 (1990), 125-140. von Neumann, J., and O. Morgenstern,《博弈论与经济行为》，普林斯顿大学出版社，1947年。