arXiv:2303.08267v2 [math.RT] 1 Apr 2024

Coxeter 群的 Koszul 对偶

西蒙·里什 和 克里斯蒂安·韦

摘要。我们构造了一种“Koszul 对偶”等价，将与一个考克斯特系统及其给定实现相关联的（图示）Hecke 范畴，与同一考克斯特系统及其对偶实现相关联的 Hecke 范畴联系起来。这推广了 Be˘ılinson–Ginzburg–Soergel [BGS]和 Bezrukavnikov–Yun [BY]在几何背景下的构造，也推广了第一作者与 Achar、Makisumi 和 Williamson [AMRW2]的构造。作为应用，我们证明，[ARV]中研究的“倾斜反常层”的组合学，由与对偶实现相关的（W, S）的 Hecke代数典范基的组合学所编码。

1. 引言

1.1. 一般 Coxeter 群的 Koszul 对偶。Koszul 对偶在表示论中的作用，最早由 Be˘ılinson–Ginzburg–Soergel [BGS] 在 Kazhdan–Lusztig猜想的背景下得到强调；该猜想涉及复半单李代数的简单最高权模的特征。在本文中，作者特别阐释了这一构造与约化代数群旗簇上 ℓ-进反常层的某些“混合”性质之间的关系。此后，Bezrukavnikov–Yun [BY], 将这一 Koszul 对偶的修正版推广到旗簇上的可构造层和 Kac–Moody群，从而解释了 Bezrukavnikov 与多位合作者构造的若干范畴等价之间的关系；这些等价还与局部几何朗兰兹对偶以及单位根处量子群的表示相关。

最近，作为一项旨在推广 Bezrukavnikov 在正特征域上的约化代数群情形下所建立的若干等价关系的计划的一部分，第一作者与 Achar、Makisumi 和 Williamson 在 [AMRW2] 中建立了 [BY] 的一种 Koszul 对偶版本。这一构造比 [BY] 中的构造更偏形式化、较少依赖几何；具体而言，它涉及与 Achar 共同构造的“混合导出范畴”（见 [AR]），这些范畴虽有用处，却相当临时拼凑。对于这一构造而言，更自然的框架似乎是与考克斯特系统及其给定实现相联系的 Elias–Williamson 的 Hecke 范畴 [EW2] 。尽管最终的 Koszul 对偶构造仅限于晶体考克斯特系统的嘉当实现这一情形，也就是说，仅限于能够通过 Kac–Moody 群旗簇上的奇偶复形从几何角度描述 Hecke 范畴的情形，但其中涉及的部分构造已在 [AMRW1] 中以完全一般的形式进行了处理。

本项目获得欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助（S.R.，资助协议编号：101002592）。C. V. 部分获得 CONICET PIP 11220200102916CO、Foncyt PICT2019-3660 和 Secyt (UNC) 的资助。

这引出了一个问题：在 [EW2], 的一般框架下，尤其是涉及一般考克斯特系统时，是否存在一种 Koszul 对偶版本。[1] 本文的主要结果是在某些技术条件下实现了这一想法，其依据是此前与 Achar 合作的工作 [ARV], ；这些技术条件将在下文 §1.4 中讨论。

1.2. **陈述**。设我们考虑一个考克斯特系统 (W,S)，以及其在域 $\Bbbk$ 上的一个实现 $\mathfrak{h}$ of (W,S)，满足适当的假设（见 §1.4）。Elias–Williamson 根据这些数据定义了一个 $\Bbbk$-线性的幺半范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，该范畴带有一个由生成元与关系定义的“移位”自等价 (1)，其分裂 Grothendieck 群与考克斯特系统 (W,S) 的 Hecke代数相同。对于 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 中的任意对象 X和 Y，向量空间 $\Bbbk$

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y(n))$$

具有对称代数 R ofV^*上的分次双模的典范结构，其中 V是 $\mathfrak{h}$所依托的表示；通过“消去”该代数的左作用或右作用，分别得到范畴 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$。接着，我们引入与 $(\mathfrak{h},W)$ 相关的“双等变”、“右等变”和“左等变”范畴，定义如下

$$\begin{aligned}
\mathsf{BE}(\mathfrak{h},W) &= K^{\mathrm{b}}\mathscr{D}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W),\\
\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W) &= K^{\mathrm{b}}\overline{\mathscr{D}}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W),\\
\mathsf{LE}(\mathfrak{h},W) &= K^{\mathrm{b}}\underline{\mathscr{D}}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)
\end{aligned}$$

其中下标“$\oplus$”表示加性包。（这一术语取自 [AMRW1], ，其灵感来自这样一个特殊情形：Hecke 范畴可以用可构造层来描述；双等变范畴涉及群上的层，这些层在左右两侧都关于 Borel子群等变；而右等变范畴和左等变范畴则分别涉及关于右作用和左作用等变的层。）

采用这一记号，在文中所讨论的特殊情形下， [AMRW2] 中的一种 Koszul 对偶形式是三角化范畴之间的等价

$$\kappa : \mathsf{RE}(\mathfrak{h},W) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$$

其满足 $\kappa\circ(1) = (-1)[1]\circ\kappa$，其中 $\mathfrak{h}^*$ 是对偶实现（通过交换根与余根得到；在几何相关的情形下，这相当于 Langlands 对偶）。要陈述这一等价的更多性质，需要回顾 $\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$ 范畴具有规范的“perverse” t-结构（这一术语同样源自几何），其心具有规范的最高权结构。更确切地说，在撰写 [AMRW1、AMRW2] 时，这一构造仅在晶体考克斯特系统的嘉当实现情形下为人所知；不过后来，这一构造已在 [ARV] 中推广到一般情形。与任何最高权范畴一样，可以考察这些范畴中的不可分解倾斜对象；Koszul 对偶的主要性质大致可以表述为：它将 $\overline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$（分别为 $\underline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$ 的 Karoubi 包络）中的不可分解对象，与 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$ （分别为 $\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)$ ）上 perverse t- 结构之心中的不可分解倾斜对象相互交换。

[1]关于这种构造存在性的初步设想可见于 [EW2，注 3.5]。

本文的主要结果之一，是将这一陈述推广到一般 Coxeter 群的一般实现情形，见定理 7.4。

1.3. **策略**。我们的证明所采用的主要策略与 [AMRW2] 中的方法类似（而该方法本身改编自 [BBM、BGS、BY、S1] 中讨论的构造）。具体而言，我们不直接构造等价 κ，而是先考虑一种“自由单值化”变体，再通过从态射上“消去”一个左 R-作用，基本上得到 κ 的逆。关键在于，在这种设定下，我们研究的是幺半范畴，因此可以充分利用通过生成元与关系定义 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 的方法。

因此，我们构造一个附属于 $(\mathfrak{h}, W)$ 的“自由单值化倾斜对象”范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$，然后构造一个幺半范畴等价

$$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W) \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W),$$

参见定理 7.1。主要困难在于定义这样的函子；一旦定义了它，就可以沿用 [AMRW2] 中的相同论证来证明它是等价。为了定义这个函子，根据 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的定义，我们需要描述生成态射的像，然后检验这些像满足 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中规定的关系。仅涉及一种颜色的所有态射的构造可以照搬 [AMRW2],，但其中对应于双色生成元的态射定义部分依赖于几何。这里我们在第 6 节给出这一态射的一种不同且一般的构造。

这一构造依赖于先前在 W为有限时构造的“函子 $\mathbb{V}$”，相关说明见第 5 节。这一构造与 [AMRW2],中的构造类似，但有一个显著的例外：在 [AMRW2] 中，该函子取值于“通常的”Soergel 双模，因此需要对 $\Bbbk$的特征施加技术性假设；本文稍后利用一些仅适用于 Cartan 实现的标量变换论证，去除这些假设。这里我们使用 Abe [A1],在此期间发展的一种 Soergel 双模构造的变体，从而完全避免这些技术性假设。

证明这些态射满足所需关系的方法，与 [AMRW2], 中相应部分的方法类似，但使用的是 Abe 的双模范畴，而非普通双模。

1.4. **假设**。我们必须对实现 $\mathfrak{h}$施加的假设，在 §2.1、§2.3 和 §4.9 中有详细说明。§§2.1–2.3 中的假设是“标准”假设，是 [EW2] 和 [A1] 中的理论要恰当运作所必需的。众所周知，这些假设在自然出现的主要实现例子中成立，即晶体型考克斯特系统的 Cartan 实现，以及不涉及类型 H_3的任意考克斯特系统的几何实现（及 Soergel 所考虑的变体）。

§4.9 的假设性质不同：在 [AMRW1] 中，[BY] 在图解框架下构造了一个“自由单值完备范畴”的临时版本。该范畴（或其某个子范畴）应当是幺半的，涉及的所有结构也确实都可以构造出来，但这些结构是否满足恰当的“交换律”仍未解决。这里我们假设这一性质对恰当的对象成立。Hogancamp 和 Makisumi 已宣布证明这一结论在完全一般的情形下确实成立，但截至目前，他们的工作尚未发表。在 [AMRW1] 中已证明

这一性质对结晶型考克斯特系统的 Cartan 实现成立；我们还指出，同样的方法结合 [ARV], 的结果，也适用于满足某些技术假设的情形，而几何实现和 Soergel 实现满足这些假设。

特别是，目前已有的文献足以证明，我们的所有陈述至少对已知的两大类考克斯特系统实现的例子都成立。

1.5. **应用**。 作为一项应用，我们在 §7.7 中证明，RE($\mathfrak{h}, W$) 中不可分解倾斜对象的组合学（构造见 [ARV]）由与对偶实现相关联的“典范基”的组合学所支配。特别地，对于 Soergel 实现，这种组合学由 Kazhdan–Lusztig 多项式所支配（见例 7.6）；而 RE($\mathfrak{h}, W$) 上的周 perverse t-结构的心等价于有限维 Koszul 环上的有限维分次模范畴（见注 7.7）。

1.6. **致谢**。 本文的结果是一个项目的实现，该项目最初由我们与 Pramod Achar、Shotaro Makisumi 和 Geordie Williamson 共同发起。我们感谢他们在项目完成的各个阶段所进行的宝贵讨论，也感谢他们对若干关键思想的构思所作的贡献。这项工作也深受 Noriyuki Abe [A1,A2], 的研究成果启发，该成果为推广 [AMRW2] 中采用的方法提供了必要要素。我们感谢一位匿名审稿人提出的有益意见。

我们的大部分工作是在第二作者访问克莱蒙费朗期间完成的，此次访问由 CIMPA-ICTP 的“合作研究”奖学金项目和欧洲研究理事会资助。

2. 预备知识

2.1. **约定与假设**。 在全文中，(W, S) 表示一个有限的考克斯特系统。（照例，我们通常只在记号中标明 W，尽管我们所考虑的所有结构也取决于 Coxeter 生成元 S 的选取。）我们在 W 上考虑 Bruhat 序 $\leq$ 和长度函数 ℓ。我们将采用关于 Coxeter 系统的标准术语，例如 [ARV 第 3 节1] 中回顾的术语。特别地，一个表达式 是 S 中的一个词 $\underline{w} = (s_1, \dots, s_n)$，而 $\pi(\underline{w}) = s_1 \cdots s_n$ 表示由 $\underline{w}$ 表达的 W 中的元素。表达式集合记为 Exp(W)。一个表达式 $\underline{w}$ 的长度 是它作为一个词的长度；记作 $\ell(\underline{w})$。为方便起见，我们会将简单反射与相应的单字母表达式视为相同。给定一对简单反射 (s, t)，我们用 $m_{s,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ 表示 st 在 W 中的阶，并用 $\langle s, t \rangle$ 表示由 s 和 t 生成的子群。

我们固定一个域 $\Bbbk$ 和一个实现

$$\mathfrak{h} = \big(V, (\alpha_s^\vee : s \in S), (\alpha_s : s \in S)\big)$$

按照 Elias–Williamson [EW2，定义 3.1] 的意义，(W, S) 在 $\Bbbk$ 上。特别地，V 是一个有限维 $\Bbbk$-向量空间，$(\alpha_s^\vee : s \in S)$ 是 V 中的向量集，$(\alpha_s : s \in S)$ 是 $V^* := \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, \Bbbk)$ 中的向量集，并且存在 W 在 V 上的作用，使得对于 $s \in S$ 和 $v \in V$，我们有

$$s \cdot v = v - \langle \alpha_s, v \rangle \alpha_s^\vee.$$

通过简单地忽略元素 α_s 和 $\alpha_s^\vee$ 的一部分，可以将实现限制到 (W,S) 的抛物子系统上：如果 $S'\subset S$ 是一个子集，且 $W'\subset W$ 是由 S' 生成的子群，我们将 (W',S') 的实现 $(V,(\alpha_s^\vee:\ s\in S'),(\alpha_s:\ s\in S'))$ 记作 $\mathfrak{h}_{|W'}$。

除了定义中出现的条件之外，最近在 [EW3] 中还说明，为了使 [EW2] 中发展的理论按预期运行，还必须施加一些额外限制；其中大多数限制已在 [Ha] 中得到更明确的阐述。本文假设以下条件均成立。

(1) 实现是平衡的（参见 [EW2，定义 3.7]），并满足 Demazure 满射性（参见 [EW2，假设 3.9]）。(2) 若 W 存在一个 H_3，型的抛物子群，我们假设存在一个如 [EW2，公式 (5.12)] 中所示的图的线性组合，经 [EW3，§2] 中所述的运算后映为 0。(3) 对于任意一对不同的简单反射 (s,t)，只要 $m_{s,t}<\infty$，就有

$$\begin{bmatrix} m_{s,t} \\ k \end{bmatrix}_s (\langle\alpha_s^\vee,\alpha_t\rangle,\langle\alpha_t^\vee,\alpha_s\rangle) = \begin{bmatrix} m_{s,t} \\ k \end{bmatrix}_t (\langle\alpha_s^\vee,\alpha_t\rangle,\langle\alpha_t^\vee,\alpha_s\rangle) = 0$$

对所有整数 $1\le k\le m_{st}-1$ 均成立，其中我们使用 [Ha] 中的记号。

(1) 中的假设是该理论中的标准假设。第二个假设确实是必要的；第一个通常可以放宽，代价是组合学变得更加复杂（例如参见 [EW3, §7]），但这里不讨论这个问题。(2) 和 (3) 中的假设对于 [EW2]，理论也是必要的，因此对于其所有应用也同样必要，尽管在 [EW3, Ha] 之前，这一点并未明确说明。（特别是，[AMRW1] 和 [ARV] 中也应施加这些假设。）根据 [Ha]，的主要结果，(3) 意味着 Jones–Wenzl 投影算子的存在性及其可旋转性；正如 [EW3] 中所解释的那样，这在此处的讨论中起着关键作用。注意，(3) 也是 [A2] 中施加的技术条件，以确保 [A1] 理论适用。

需要注意的是，如果某个实现满足假设 (1)–(3)，那么它在 (W,S) 的任意抛物子系统上的限制也满足这些假设。§2.3 和 §4.9 中还将提出并讨论其他假设；它们在限制到抛物子系统时也保持成立。

例2.1。读者可以牢记的上述数据的主要例子如下。

(1) 设 $A=(a_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$ 是一个广义 Cartan 矩阵。与 A 相关联的 ***Kac–Moody*** 根数据 是一个三元组

$$(\mathbf{X},(\alpha_i:i\in I),(\alpha_i^\vee:i\in I))$$

其中，X 是一个有限自由 $\mathbb{Z}$-模，$(\alpha_i:\ i\in I)$ 是 X 中元素构成的族，而 $(\alpha_i^\vee:\ i\in I)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$(X $\mathbb{Z}$) 中元素构成的族，使得$\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{i,\ j}$对任意 $i,j\in I$ 都成立。对于 A，可以关联一个考克斯特系统 (W,S)，其中 S 与 I 存在双射（通过映射 $s\mapsto i_s$），而 st 的阶$m_{s,\ t}$ 由下述方式确定：

$$m_{s,t}=\begin{cases} 2 & \text{if } a_{i_si_t}a_{i_ti_s}=0;\\ 3 & \text{if } a_{i_si_t}a_{i_ti_s}=1;\\ 4 & \text{if } a_{i_si_t}a_{i_ti_s}=2;\\ 6 & \text{if } a_{i_si_t}a_{i_ti_s}=3;\\ \infty & \text{if } a_{i_si_t}a_{i_ti_s}\ge 4. \end{cases}$$

对于任意域 $\Bbbk$，通过令 $V := \Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X\ \mathbb{Z})$，并分别取 $(\alpha_s^\vee : s \in S)$ 和 $(\alpha_s : s \in S)$ 为 $(\alpha_i^\vee : i \in I)$ 和 $(\alpha_i : i \in I)$ 在 V 和 V^* 中的像，可以将 $(X, (\alpha_i : i \in I), (\alpha_i^\vee : i \in I))$ 与 (W, S) 的一个实现关联起来。

这类实现称为晶体学 *Coxeter* 群的 *Cartan* 实现。[R4 第 II 章 §2.4 和 §3.2]详细讨论了上述假设对于这类实现是否成立。关于 (1)，这类实现总是平衡的；当 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ 时，它们满足 Demazure 满射性。假设 (2) 无关紧要，因为晶体学 Coxeter 群不含 H_3 型抛物子群。假设 (3) 自动成立。

晶体学 Coxeter 群的 Cartan 实现，是 [AMRW1 第 10 章至 11] 以及 [AMRW2] 中所考虑的实现（其中允许更一般的系数环）。对于这类实现，相应的 Hecke 范畴（见 §3.1）可以几何地实现为与 $(X, (\alpha_i : i \in I), (\alpha_i^\vee : i \in I))$ 相关联的卡茨–穆迪群的旗簇上的奇偶复形范畴；详情见 [RW 第 III 部分]。

(2) 在 A 是嘉当矩阵这一特殊情况下，A 的 Kac–Moody 根数据与具有相关嘉当矩阵 A 的带基根数据等价。在这种情况下，W 是相关连通约化代数群（定义在任意代数闭域上）的韦伊群。

(3) 现在设 (W, S) 是一个任意的、S 有限的考克斯特系统。令 V 为 W 的相关几何表示；它是定义在 $\mathbb{R}$ 上的表示，并带有一个由 S 索引的基 $(e_s : s \in S)$ 及双线性形式 $\langle -, - \rangle$。通过令 $\alpha_s^\vee := e_s$ 和 $\alpha_s := 2\langle e_s, - \rangle$，可以将此表示“升级”为 (W, S) 在 $\mathbb{R}$ 上的一个实现，称为几何实现。如 [R4，第 II 章 §2.4 和 §3.2]，所述，对于这一实现，我们的假设 (1) 和 (3) 均成立。假设 (2) 的情况（当 (W, S) 含有一个 H_3 型的抛物子系统时）尚不明确。

(4) 对于任意一个 S 有限的考克斯特系统 (W, S)，还可以考虑 Soergel 在 [S3], 中研究的几何实现的变体，[例如参见 R4，第 II 章，第 1.2 节。2]。具体而言，考虑一个向量空间 V，它带有两组线性无关的向量族 $(e_s : s \in S)$（属于 V）和 $(e_s^* : s \in S)$（属于 V^*），使得

$$\langle e_t, e_s^* \rangle = -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right)$$

其中 $m_{s,t}$ 是 W 中 st 的阶。（我们采用约定 $\frac{\pi}{\infty} = 0$。还请注意，这样的数据总是存在的。）那么 $(V, (e_s : s \in S), (e_s^* : s \in S))$ 是 (W, S) 的一个实现，见 [R4，第 II 章，注 2.7]。这些实现称为 Soergel 实现。（注意，若 W 有限，则几何实现就是 Soergel 实现的一个例子。）在这种情况下，假设 (1) 和 (3) 仍然成立（见 [R4，第 II 章，§2.4 和 §3.2]），但我们不清楚假设 (2) 是否成立（当 (W, S) 有一个 H_3 型的抛物子系统时）。对于这样的实现，根据 [EW2，§6.7]，Hecke 范畴等价于相应的 Soergel 双模范畴。

2.2. **分次**。 所谓“分次”（相应地，“双分次”）向量空间，是指一个 $\mathbb{Z}$-分次（相应地， $\mathbb{Z}^2$-分次）向量空间。在方便时，我们会将分次向量空间视为在所有属于 $(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ 的次数上均为零的双分次向量空间。若 M 是分次的（相应地，双分次的），则其次数为 n（相应地，双次数为 (n,m)）的分量记作 M_n（相应地，M^n_m）。双分次向量空间 $M=\oplus_{i,j\in\mathbb{Z}}M^i_j$ 上的分次平移函子 (1) 定义为

$$M(1)^i_j=M^{i+1}_{j+1}.$$

我们还有平移函子 $[1]$ 和 $\langle 1\rangle:=(-1)[1]$，它们满足 $(M[1])^i_j=M^{i+1}_j$ 和 $(M\langle 1\rangle)^i_j=M^i_{j-1}$。注意，$\langle 1\rangle$ 稳定分次向量空间。

我们将 ll work 特别是 l与 h th对称的 a lgebras

$$R:=\mathrm{Sym}(V^*),\quad R^\vee:=\mathrm{Sym}(V),\quad R^\wedge:=\mathrm{Sym}(V),$$

视为分次环，其中 $V^*\subset R$ 的次数为 2， $V\subset R^\vee$ 的次数为 -2，而 $V\subset R^\wedge$ 的次数为 2。我们还将考虑环 R 关于由 $\{w(\alpha_s):\ s\in S,\ w\in W\}$ 生成的乘法子集的局部化 Q；该环具有自然分次，其中元素 $\overline{w^{-1}(\alpha_s)}$ 的次数为 -2。类似地，我们用 $Q^\vee$ 和 $Q^\wedge$ 表示 $R^\vee$ 和 $R^\wedge$ 的相应局部化。

令 $R^\vee$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\vee$ 表示分次 $R^\vee$-双模的范畴，并类似地定义 $R^\wedge$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\wedge$。于是 $\langle 1\rangle$ 诱导这些范畴的自等价，并以类似方式记之。若 M 属于 $R^\vee$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\vee$，则令 $M^\wedge$ 为分次 $R^\wedge$-双模，它作为未分次双模与 M 相同，其齐次分量为 $(M^\wedge)_i=M_{-i}$，$i\in\mathbb{Z}$。这诱导出一个从 $R^\vee$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\vee$ 到 $R^\wedge$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\wedge$ 的函子，并满足

$$(M\langle 1\rangle)^\wedge=M^\wedge\langle -1\rangle. \tag{2.1}$$

给定一个有限秩的分次自由右 $R^\vee$-模（或向量空间） $M\simeq\oplus_i R^\vee\langle n_i\rangle$（或 $M\simeq\oplus_i\Bbbk\langle n_i\rangle$），我们定义

$$\mathrm{grk}_{R^\vee}M:=\sum_i v^{-n_i},\quad \text{resp.}\quad \mathrm{grk}_{\Bbbk}M:=\sum_i v^{-n_i},$$

视为 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ 中的元素，其中 v 是不定元。（换言之，若 V是有限维 $\Bbbk$-向量空间，则有 $\mathrm{grk}(V)=\sum_n\dim(V_{-n})v^n$。）当然，若 M、N 是有限秩的分次自由右 $R^\vee$-模，则 $M\simeq N$ 当且仅当 $\mathrm{grk}_{R^\vee}M=\mathrm{grk}_{R^\vee}N$。我们类似地定义函数 $\mathrm{grk}_{R^\wedge}$。注意，若 M 是分次自由右 $R^\vee$-模，则 $M^\wedge$ 是分次自由右 $R^\wedge$-模，并且有

$$\mathrm{grk}_{R^\wedge}M^\wedge=\overline{\mathrm{grk}_{R^\vee}M} \tag{2.2}$$

其中 $\overline{\cdot}$ 是 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ 的唯一环自同构，满足 $\overline{v}=v^{-1}$。

下面我们将用到分次中山引理的以下应用，其中我们将 $\Bbbk$ （集中于次数 0）视为分次 $R^\vee$-模，并令V 作用为零。

引理 2.2. 设 M 和 N 为有限秩分次自由右 $R^\vee$-模，且$f:\ M\to N$ 为分次 $R^\vee$-模之间的态射。若

$$f\otimes_{R^\vee}\Bbbk: M\otimes_{R^\vee}\Bbbk\to N\otimes_{R^\vee}\Bbbk$$

是单射（分别地，满射），则 f 是单射（分别地，满射）。

证明。令 C 表示该复形

$$\cdots 0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \cdots$$

其中 M 和 N 分别置于次数 -1 和 0。若 $f \otimes_{R^\vee} \Bbbk$ 是单射，则此复形满足 [AMRW1 引理 3.4.1] 的假设。特别地，可得 $H^{-1}(C) = 0$，也就是说，f 是单射。若 $f \otimes_{R^\vee} \Bbbk$ 是满射，则我们使用 [AMRW1 引理 3.4.1]，对同一复形作如下设置：M 和 N 分别置于次数 0 和 1，从而推出 f 也是满射。□

2.3. **对偶实现**。 我们还将考虑对偶实现

$$\mathfrak{h}^* = (V^*, (\alpha_s : s \in S), (\alpha_s^\vee : s \in S))$$

在 $\Bbbk$ 上的 (W, S)。显然，这个实现满足我们的假设 (1) 和 (3)。我们（尚）不清楚假设 (2) 是否自动成立；为保险起见，我们将假定 $\mathfrak{h}^*$ 也满足该假设。注意，对于 $\mathfrak{h}^*$ 而言，在 $\mathfrak{h}$ 中起到 R 所起作用的分次环是 $R^\wedge$。

例 2.3. (1) 在例 2.1(1) 的设定下，如果 (X, $(\alpha_i : i \in I)$, $(\alpha_i^\vee : i \in I)$) 是与广义 Cartan 矩阵 A相关联的 Kac–Moody 根数据，那么

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X}, \mathbb{Z}), (\alpha_i^\vee : i \in I), (\alpha_i : i \in I))$$

它是与广义 Cartan 矩阵${}^t A$相关联的 Kac–Moody 根数据。这些广义 Cartan 矩阵具有相同的关联考克斯特系统 (W, S)；对于任意域 $\Bbbk$，与 (X,$(\alpha_i : i \in I)$,$(\alpha_i^\vee : i \in I)$) 相关联的 $\Bbbk$ 上的实现的对偶，是与 (Hom$_{\mathbb{Z}}$(X $\mathbb{Z}$),$(\alpha_i^\vee : i \in I)$,$(\alpha_i : i \in I)$) 相关联的 $\Bbbk$ 上的实现。注意，在例 2.1(2) 的设定下，这种 Kac–Moody 根数据的“对偶”归结为朗兹对偶。

(2) 考虑例 2.1(4) 中的设定。根据定义，Soergel 实现的对偶也是一个 Soergel 实现。特别地，当 W 有限时，例 2.1(3) 中的几何实现是自对偶的。

3. Hecke 范畴的两种体现

我们继续采用第 2 节中的数据 (W, S) 和 $\mathfrak{h}$，它们满足 §2.1 和 §2.3 的条件。本节回顾与 $\mathfrak{h}$ 和 (W, S) 相关的 Elias–Williamson 图示范畴和 Abe 范畴的定义。

3.1. **Elias–Williamson 图示范畴**。 我们将记作

$$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$$

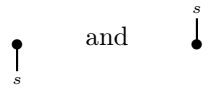
与 (W, S) 和 $\mathfrak{h}$ in [EW2, §5.2] 相关联的范畴（另见 [R4, Chap. II, §2.5]）。该范畴是一个 $\Bbbk$-线性幺半范畴，也可以等价地视为由分次向量空间富化，或赋有一个分次平移自同构等价（1）；见 [ARV, §2.1]。从第一种观点来看，$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的对象是 $B_{\underline{w}}$for $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$ 的符号。幺半积定义为 $B_{\underline{v}} \star B_{\underline{w}} = B_{\underline{vw}}$，其中 $\underline{vw}$ 是 $\underline{v}$ 与 $\underline{w}$ 的串接。态射由下文回顾的一些图表所描绘的态射生成（在水平和垂直串接以及 $\Bbbk$-线性组合下），并满足若干关系；相关内容参见 [EW2], [AMRW1, §2.3] 或 [R4]。生成态射如下（从下往上阅读）：

(1) 对任意齐次 $f \in R$，一个态射



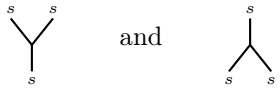
从 $B_\varnothing$ 到其自身，次数为 $\deg(f)$；

(2) 对任意 $s \in S$，“点”态射



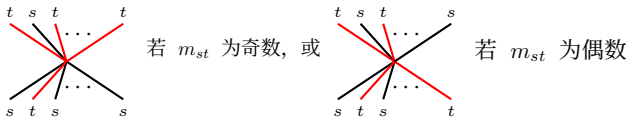
分别从 B_s 到 $B_\varnothing$ 以及从 $B_\varnothing$ 到 B_s，次数为 1；

(3) 对任意 $s \in S$，三价态射



分别从 B_s 到 $B_{(s,s)}$ 以及从 $B_{(s,s)}$ 到 B_s，次数为 -1；

(4) 对于任意一对不同的简单反射 (s,t)，若 st 在 W 中的阶有限 m_{st}，则存在一个态射



从 $B_{(s,t,\cdots)}$ 到 $B_{(t,s,\cdots)}$（其中每个表达式的长度为 m_{st}，且颜色交替），次数为 0。

从 $B_{\underline{w}}$ 到 $B_{\underline{v}}$ 的态射分次向量空间记作

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(B_{\underline{w}}, B_{\underline{v}}).$$

将 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 视为带有分次移位自等价 (1) 的范畴，其对象为符号 $B_{\underline{w}}(n)$，其中 $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$ 且 $n \in \mathbb{Z}$；从 $B_{\underline{w}}(n)$ 到 $B_{\underline{v}}(m)$ 的态射向量空间为 $\mathrm{Hom}^{m-n}_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(B_{\underline{w}}, B_{\underline{v}})$。这就是我们在下文中主要采用的观点。

更一般地，给定 X, Y in $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，我们定义

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X, Y(n)).$$

这个分次向量空间具有自然的分次 R-双模结构，其中 $f \in R_n$ 的左（分别为右）作用由在图表左侧（分别为右侧）添加一个标记为 f 的方框给出。借助这一结构，$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y)$ 作为左 R-模和右 R-模均为有限秩分次自由模，参见 [EW2，推论 6.14]。

我们将 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 记为 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的加性包，并将 $\mathscr{D}(\mathfrak{h},W)$ 记为 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的 Karoubi 包络。后一个范畴是 Krull–Schmidt 范畴，并且存在一族对象 $(B_w : w \in W)$ 属于 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，其定义见 [EW2，定理 6.26]；该定理还表明，映射 $(w,n) \mapsto B_w(n)$ 在 $W \times \mathbb{Z}$ 与 $\mathscr{D}(\mathfrak{h},W)$ 中不可分解对象的同构类集合之间诱导出一个双射。

我们还将考虑范畴 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，它与 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 具有相同的对象，并且从 X 到 Y 的态射空间是以下子空间：

分次向量空间中的 0 次元素

$$\Bbbk \otimes_R \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y)$$

（其中 $\Bbbk$ 的次数为 0，且 R 通过商 $R/V\cdot R = \Bbbk$ 作用）。函子 (1) 诱导出 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的一个自等价，仍记作同一符号；而 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 自然地是幺半范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的右模范畴。我们有一个自然函子

$$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W) \to \overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W); \tag{3.1}$$

$B_{\underline{w}}$ 在该函子下的像记作 $\overline{B}_{\underline{w}}$。对于 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，我们将 $\overline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 记为 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的加性包，并将 $\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 记为 $\overline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的 Karoubi 包络。

函子 (3.1) 诱导出一个函子 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W) \to \overline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，进而诱导出一个函子 $\mathscr{D}(\mathfrak{h},W)\to\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$。范畴 $\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 是 Krull–Schmidt 范畴，因为它是 Karoubian 的且具有有限维态射空间，参见 [CYZ，推论 A.2]。对于 $w\in W$，我们将 B_w 在 $\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 中的像记作 $\overline{B}_w$。于是 $\mathrm{End}^{\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)}(\overline{B}_w)$ 是 $\mathrm{End}^{\mathscr{D}(\mathfrak{h},W)}(B_w)$ 的一个商，因而是局部环，这意味着 $\overline{B}_w$ 是一个不可分解对象。使用这一点，很容易看出赋值 $(w,n)\mapsto \overline{B}_w(n)$ 在 $W\times\mathbb{Z}$ 与 $\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 中不可分解对象的同构类集合之间诱导出一个双射。

我们还将以 $\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$、$\underline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\underline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 表示通过相同方式，使用 R 上的张量积取右所得的范畴。这里，$\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 自然是 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 上的一个左模范畴，对于 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，也适用上述相同的考虑。我们将使用以上引入记号的显然变体；特别地，对于 $w\in W$，以及对于 $\underline{w}\in \mathrm{Exp}(W)$，我们分别以与 $\overline{B}_w$、$\overline{B}_{\underline{w}}$ 相同的方式定义对象 $\underline{B}_w\in\underline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\underline{B}_{\underline{w}}\in\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$。

注3.1。(1) 当然，也可以对 §2.3 的实现 $\mathfrak{h}^*$ 考虑上述所有构造，从而得到范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$ 及其所有类似范畴。为区分这两种情况，将与表达式 $\underline{w}$ 对应的 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$ 中的对象记为 $B^{\wedge}_{\underline{w}}$。对象 B_w、$\overline{B}_w$、$\underline{B}_w$ 也将采用类似的约定。(2) 一个标准事实是，范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 存在一个由沿竖轴反射图表所诱导的典范自等价。这个自等价交换多项式的左乘与右乘，因此在 $\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 与 $\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 之间诱导出一个等价。

3.2. **Abe 范畴**。下文中，我们还将使用与 (W,S) 和 $\mathfrak{h}$ 相关联的 Hecke 范畴的另一种形式，记作 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$。该形式由 Abe 在 [A1] 中引入。

注记 3.2. 虽然文中没有明确写出，[A1,A2] 中关于实现的约定与 [EW2,EW3]（本文采用的约定）不同。具体而言，在 [A1,A2] 中，实现是一个三元组 $(V,(\alpha_s\colon s\in S),(\alpha_s^\vee\colon s\in S))$，其中 $\alpha_s\in V$和$\alpha_s^\vee\in V^*$，而代数 R 定义为 V的对称代数。换言之，[A1, A2] 中的模“V”就是 [EW2, EW3]中的模“V^*”。本文决定采用 [EW2, EW3]的约定；因此，我们会将 [A1, A2] 中的所有结果和构造转换为这些约定。

为了构造范畴 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$，Abe 首先引入范畴$\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$（记作 $\mathcal{C}'$ 于 [A1,A2][2]），其对象为三元组

$$(M,(M_Q^w)_{w\in W},\xi_M)$$

其中，M是一个分次的 R-双模，每个 M_Q^w都是分次的(R,Q)-双模，使得对于任意 $m\in M_Q^w$和 $f\in R$，$m\cdot f=w(f)\cdot m$，且除有限多个 w外，这些双模均为 0，并且

$$\xi_M : M\otimes_R Q \to \bigoplus_{w\in W} M_Q^w \tag{3.2}$$

是分次(R,Q)-双模的一个同构。从对象$(M,(M_Q^w)_{w\in W},\xi_M)$到$(N,(N_Q^w)_{w\in W},\xi_N)$的 $\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$中的态射，是一个分次 R-双模的态射 $\varphi: M\to N$，满足

$$\left(\xi_N\circ(\varphi\otimes_R Q)\circ\xi_M^{-1}\right)(M_Q^w)\subset N_Q^w$$

对于任意 $w\in W$均成立。这个范畴具有由 $\otimes_R$诱导的自然幺半结构，其单位对象是 R-双模 R （以显然的方式将其提升为 $\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$的一个对象）。分次平移函子 $\langle 1\rangle$（见 §2.2）以自然的方式诱导出 $\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$的一个自等价，记号沿用原记号。为简便起见，我们常将$(M,(M_Q^w)_{w\in W},\xi_M)$记作 M。

对于 $s\in S$，令

$$R^s=\{f\in R\mid s\cdot f=f\}$$

为 R 中的 s-不变元素构成的子环，并选取元素 $\delta_s\in V^*$，使得 $\langle\delta_s,\alpha_s^\vee\rangle=1$。（由于假设我们的实现满足 Demazure 满射性，这样的向量存在。）通过如下定义，R-双模 $B_s=R\otimes_{R^s}R\langle -1\rangle$ 可提升为 $\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$ 中的一个对象

$$(B_s)_Q^e=Q(\delta_s\otimes 1-1\otimes s(\delta_s)),\quad (B_s)_Q^s=Q(\delta_s\otimes 1-1\otimes\delta_s) \tag{3.3}$$

并且对所有 $w\notin\{e,s\}$，$(B_s)_Q^w=0$；参见 [A1, §2.4] 或 [R4, 第 II 章，§3.1.4]。

范畴 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 定义为 $\mathscr{C}(\mathfrak{h},W)$ 中包含单位对象 R 和对象 $(B_s:\ s\in S)$，且在幺半积 $\otimes_R$ 和平移函子 $\langle 1\rangle$ 下封闭的最小全子范畴。换言之，$\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 中的对象具有如下形式

$$B_{s_1}\otimes_R\cdots\otimes_R B_{s_r}\langle n\rangle$$

其中有 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、s_1、$\cdots$、$s_r\in S$和 $n\in\mathbb{Z}$。与图示范畴中一样，我们令

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y\langle -n\rangle),$$

视为一个分次向量空间，其中 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(X,Y\langle -n\rangle)$ 位于次数 n。我们将 $\mathscr{A}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 记作 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的加性包，并将 $\mathscr{A}(\mathfrak{h},W)$ 记作 $\mathscr{A}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的 Karoubi 包络。

对于一个表达式 $\underline{w}=(s_1,\cdots,s_n)$，我们将 $B_{\underline{w}}$ 定义为 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 中的对象：

$$B_{\underline{w}}:=B_{s_1}\otimes_R\cdots\otimes_R B_{s_n}=R\otimes_{R^{s_1}}\cdots\otimes_{R^{s_n}}R\langle -n\rangle$$

如果 $n\geq 1$，且 $B_\varnothing=R$。所谓的 1-张量元素

$$u_{\underline{w}}=(1\otimes 1)\otimes_R\cdots\otimes_R(1\otimes 1)\in B_{\underline{w}}$$

[2]事实上，$\mathcal{C}'$ 在 [A1] 中的定义略有不同，但这会带来困难。我们下面采用的定义解决了这些问题，详见 [A2]。

在理论中发挥着特殊作用。（如果 $\underline{w} = \varnothing$ 是空表达式，则将元素 $u_\varnothing$ 解释为 $1 \in R$。）

读者或许已经注意到，我们采用了与 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中某些对象相同的记号。这不会造成任何混淆，因为有以下由 Abe 给出的结果（见 [A2，定理 3.15]）。

定理3.3. 存在一个幺半范畴等价

$$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$$

它将自等价 (1) 与 $\langle -1 \rangle$ 交织起来，并将 $B_{\underline{w}}$ 映至 $B_{\underline{w}}$，对任意$\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$均成立。

注 3.4. 定理3.3的证明分为两部分：(a) 构造函子；(b) 证明它是一个等价。一旦以适当的方式完成 (a)，根据 [A1] 的结果，(b) 就有了保证。目前对 (a) 的证明依赖于 [A2] 中的计算。我们相信，可以采用与第5–6节中的思路相似（或者从某种意义上说是“Koszul对偶”）的考量，构造出这个函子的另一种形式；其中，W 有限时，使用不可分解对象 B_{w_0} 而非 $\mathcal{T}_{w_0}$。若这一方法有任何应用，相关细节将在别处发表。

4. 反常层与倾斜层

本节简要回顾由 Hecke 范畴构造的一系列同伦型范畴的定义。这些范畴是 [AMRW1] 和 [ARV]的主要研究对象。我们还将 [AMRW1, 第 10 章–11] 中的一些结果推广到当前的情形。

4.1. 双等变范畴。 双等变范畴 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 定义于 [AMRW1, §4.2]，其定义如下

$$\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W) := K^{\mathrm{b}} \mathscr{D}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W);$$

从 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 到 $K^{\mathrm{b}}\mathscr{D}(\mathfrak{h}, W)$ 的自然函子是一个等价，见 [AMRW1, 引理 4.9.1], 因此，我们将在方便时认定这两个范畴相同。双等变范畴关于某个乘积 $\underline{\star}$ 构成幺半范畴；该乘积限制在$\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 上时与 $\star$一致，并且在两侧均为三角化；详情见 [AMRW1, §4.2]。

三角范畴 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 上的上同调平移函子记作 $[1]$。$\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 上的分次平移函子 (1) 是一个函子，它将复形 $(\mathcal{F}^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 映为复形 $(\mathcal{F}^n(1)\ -d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$。我们还有平移函子 $\langle 1 \rangle = (-1)[1]$。

与 [AMRW1, §4.2], 中一样，给定 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 中的 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$，我们记

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

这个双分次 $\Bbbk$-向量空间，其齐次分量为

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^i_j := \mathrm{Hom}_{\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i]\langle -j \rangle)$$

对所有 $i, j \in \mathbb{Z}$ 均成立。我们还令 $\mathbb{E}\mathrm{nd}^{\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}) = \mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$。

按照 [AMRW1，例 4.2。2], 我们为任意表达式 $\underline{w} = (s_1, \dots, s_n)$ 定义标准对象 $\Delta_{\underline{w}}$ 和余标准对象 $\nabla_{\underline{w}}$，如下所示：

$$\Delta_{\underline{w}} = \Delta_{s_1} \underline{\star} \cdots \underline{\star} \Delta_{s_n} \quad \text{and} \quad \nabla_{\underline{w}} = \nabla_{s_1} \underline{\star} \cdots \underline{\star} \nabla_{s_n},$$

其中 Δ_s 和 ∇_s 表示复形

$$\cdots 0 \to B_s \xrightarrow{\uparrow} B_\varnothing(1) \to 0 \cdots \quad \text{and} \quad \cdots 0 \to B_\varnothing(-1) \xrightarrow{\downarrow} B_s \to 0 \cdots \tag{4.1}$$

集中在次数 0 和 1 中，而 -1 和 0 中，分别如此。（按惯例，$\Delta_\varnothing = \nabla_\varnothing = B_\varnothing$。）

另一方面，对于每个 $w \in W$ 属于 [ARV, §6.3].[3]，都定义了 BE($\mathfrak{h}, W$) 中的标准对象 Δ_w 和余标准对象 ∇_w。我们有

$$\Delta_w \simeq \Delta_{\underline{w}} \quad \text{and} \quad \nabla_w \simeq \nabla_{\underline{w}} \tag{4.2}$$

如果 $\underline{w}$ 是 w 的约化表达式，见 [ARV, Proposition 6.11]。

在 BE($\mathfrak{h}, W$) 上的 t-结构构造见 [ARV, §7.2]；其心记为 $\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h}, W)$。事实证明，（余）标准对象 Δ_w 和 $\nabla_w (w \in W)$ 属于 $\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h}, W)$，见 [ARV, Proposition 7.8], ; 平移函子 $\langle 1 \rangle$ 是 t-正合的，见 [ARV, Lemma 7.3]。对于每个 $w \in W$，存在一个唯一的（相差一个标量）非零态射 $f_w \colon \Delta_w \to \nabla_w$ [ARV, Lemma 6.6]；我们令

$$\mathscr{L}_w := \mathrm{Im}(f_w)$$

是此态射在 $\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的像。于是，映射 $(w, n) \mapsto \mathscr{L}_w\langle n \rangle$在 $W \times \mathbb{Z}$ 与 $\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中简单对象的同构类集合之间诱导出一个双射，见 [ARV, §8.1]。

下面的陈述可由 [ARV, §5], 中借助再粘合形式体系构造标准对象和余标准对象得到，后文将用到。

引理 4.1。对于任意 $w \in W$，$\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 中任意非零态射 $\Delta_w \to \nabla_w$ 的锥都属于由形如 $\Delta_v(n)$ 的对象生成的三角子范畴，其中 $v \in W$ 满足 $v < w$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。

4.2. **右等变范畴**。右等变范畴在 [AMRW1, §4.3] 中定义为

$$\mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W) := K^{\mathrm{b}}\overline{\mathscr{D}}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W);$$

从 RE($\mathfrak{h}, W$) 到 $K^{\mathrm{b}}\overline{\mathscr{D}}(\mathfrak{h}, W)$ 的自然函子是一个等价，见 [AMRW1, 引理 4.9.1], 因此，我们将在方便时把这两个范畴视为相同。范畴 RE($\mathfrak{h}, W$) 自然地是幺半范畴 (BE($\mathfrak{h}, W$) $\underline{\star}$) 的右模范畴；作用双函子也记作 $\underline{\star}$，它在两侧都是三角化的。存在一个自然的“遗忘”函子

$$\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}} : \mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W)$$

由 (3.1) 诱导；此函子满足

$$\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}(\mathcal{F} \underline{\star} \mathcal{G}) = \mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}(\mathcal{F}) \underline{\star} \mathcal{G} \tag{4.3}$$

对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$BE($\mathfrak{h}, W$)。移位函子 $[1]$, (1) 和 $\langle 1 \rangle$，以及双分次向量空间 $\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, 均按双等变范畴中的方式定义。随后，函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}$ 以显然的方式与函子 $[1]$, (1) 和 $\langle 1 \rangle$ 交换。

在 [ARV, §9] 中也构造了 RE($\mathfrak{h}, W$) 上的一个 t-结构；其心记为 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$。对于此结构，函子 $\langle 1 \rangle$ and $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}$ 是 t-正合的。

[3]在 [ARV 的 §6.3] 中，这类对象是针对包含 w 的某些子集 $I \subset W$ 定义的。此处我们取 $I = W$，并依照 [ARV] 中的约定，在记号中省略它。下文所考虑的 [ARV] 中的各种构造也同样如此。

范畴 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 与卡茨–穆迪群旗簇上 Bruhat-可构造反常层的范畴具有许多共同性质，但“多了一种分次”；特别是，它具有自然的分次最高权范畴结构（按 [AR, Appendix][4] 中的定义），其权偏序集为 $(W, \trianglelefteq)$，并带有规范化的标准对象和余标准对象

$$\overline{\Delta}_w := \mathsf{For}_{\mathsf{RE}}^{\mathsf{BE}}(\Delta_w) \quad \text{and} \quad \overline{\nabla}_w = \mathsf{For}_{\mathsf{RE}}^{\mathsf{BE}}(\nabla_w)$$

关于 $w \in W$，参见 [ARV，定理 9.6]。（若 W 是约化群的韦伊群，且适当地选择 $\mathfrak{h}$，事实上可以将 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 与相应的反常层范畴明确联系起来；详情参见 [AR] 。）函子 $\mathsf{For}_{\mathsf{RE}}^{\mathsf{BE}}$ 在 perverse t-结构的心上的限制定义了一个全忠实函子 $\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$，参见 [ARV，命题 9.4]。在同构意义下，$\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的简单对象为

$$\overline{\mathscr{L}}_w\langle n\rangle := \mathsf{For}_{\mathsf{RE}}^{\mathsf{BE}}(\mathscr{L}_w\langle n\rangle)$$

对于 $(w, n) \in W \times \mathbb{Z}$。

4.3. **倾斜对象**。由于 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 自然具有分次最高权范畴的结构，因此考虑其倾斜对象是有意义的，也就是说，同时具有一个滤过，其子商形如 $\overline{\Delta}_w\langle n\rangle$ $(w \in W,\ n \in \mathbb{Z})$，以及一个滤过，其子商形如 $\overline{\nabla}_w\langle n\rangle$ $(w \in W,\ n \in \mathbb{Z})$ 的对象。$\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中由倾斜对象构成的全子范畴记为 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$。范畴 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 是 Krull–Schmidt 范畴，其不可分解对象的同构类与 $W \times \mathbb{Z}$ 存在自然双射；对于 $w \in W$，我们将对应于 $(w, 0)$ 的不可分解对象记为 $\overline{\mathcal{T}}_w$。于是，对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，对应于 (w, n) 的不可分解对象为 $\overline{\mathcal{T}}_w\langle n\rangle$。（以上内容参见 [AR，附录]。）由 [AR，引理 A.5 和引理 A.6] 可知，自然函子

$$K^{\mathrm{b}}\mathsf{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W) \to D^{\mathrm{b}}\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W) \tag{4.4}$$

是三角范畴之间的等价。

例 4.2。$\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中与 W 的单位元对应的简单对象是 $\overline{B}_\varnothing$，将其视为一个集中于次数 0 的复形时，它与对象 $\overline{\Delta}_1 = \overline{\nabla}_1 = \overline{\mathcal{T}}_1$ 相同。

例 4.3。设 $s \in S$。$\mathsf{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的不可分解倾斜对象 $\overline{\mathcal{T}}_s$ 是复形

$$\cdots 0 \to \overline{B}_\varnothing(-1) \longrightarrow \overline{B}_s \longrightarrow \overline{B}_\varnothing(1) \to 0 \cdots$$

集中于次数 -1、0 和 1。它属于以下正合列

$$0 \to \overline{\Delta}_s \to \overline{\mathcal{T}}_s \to \overline{\Delta}_1\langle 1\rangle \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \overline{\nabla}_1\langle -1\rangle \to \overline{\mathcal{T}}_s \to \overline{\nabla}_s \to 0.$$

关于这一点，参见 [AMRW1，例 4.3。4]。

[4]与此参考文献相比，我们做了两处修改。首先，我们使用“最高权”一词，而不使用“拟遗传”。其次，我们允许权偏序集 $\mathcal{S}$ 是无限的，但要求对任意 $s \in \mathcal{S}$，集合 $\{t \in \mathcal{S} \mid t \leq s\}$ 都是有限的；这不会影响理论，唯一例外是能否存在足够多的投射对象，而本文不会用到这一点。关于非分次情形，参见例如 [R4, §A] 。

4.4. **左等变范畴**。现在我们将左等变范畴 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$ 定义为

$$\mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W) := K^{\mathrm{b}} \underline{\mathscr{D}}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W).$$

当然，$\mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W)$ 的所有构造和性质在 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$ 中都有对应物。（事实上，根据注 3.1(2)，这两个范畴等价。）特别地，我们将自然的"遗忘"函子记为 $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}$: $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$（由自然函子 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W) \to \underline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 诱导），并将

$$\underline{\Delta}_w := \mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}(\Delta_w), \quad \text{resp.} \quad \underline{\nabla}_w = \mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}(\nabla_w)$$

与 $w \in W$ 相关的标准对象和余标准对象。范畴 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$ 具有自然的"倾斜"t-结构，其心记为 $\mathsf{P}_{\mathsf{LE}}(\mathfrak{h}, W)$，并具有规范的分次最高权范畴结构，权偏序集为 $(W, \trianglelefteq)$，归一化标准对象和余标准对象分别为对象 $(\underline{\Delta}_w : w \in W)$ 和 $(\underline{\nabla}_w : w \in W)$。其倾斜对象全子范畴记为 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LE}}(\mathfrak{h}, W)$。$\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的不可分解对象与 $W \times \mathbb{Z}$ 之间存在规范双射，而与 $(w, 0)$ 相关的不可分解对象记为 $\underline{T}_w$ (for $w \in W$)。

回顾一下，$\underline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 是幺半范畴 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 的左模范畴。这一结构可"扩展"为一个双函子

$$\underline{\star} : \mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W) \times \mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$$

它定义了幺半范畴 $(\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W), \underline{\star})$ 在 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}, W)$ 上的左作用。此双函子在两侧都是三角化的，并且对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$，我们有一个典范的（尤其是双函子性的）同构

$$\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}(\mathcal{F} \underline{\star} \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \underline{\star} \mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}(\mathcal{G}).$$

注 4.4。与注3.1(1)一样，下文也将考虑以上所有构造，但采用实现 $\mathfrak{h}^*$ 而非 $\mathfrak{h}$。在这种情况下，我们会在所有记号上添加上标"$\wedge$"。

4.5. **自由单值范畴**。我们将记

$$\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$$

在 [AMRW1, §5.1]中定义的"自由单值"范畴。它是一个 $\Bbbk$-线性加性范畴，其对象是 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$中的对象序列，并赋有某种微分；其精确构造相当技术性，此处不再赘述。范畴 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 具有平移函子 $[1], (1)$和 $\langle 1 \rangle$，二者彼此交换，并且满足 $\langle 1 \rangle = (-1)[1]$。（注意，$[1]$ 原则上并非 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 上三角结构的悬移函子；事实上，目前尚不清楚此范畴是否具有三角结构。）与双等变范畴中一样（见 §4.1），对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$，我们定义双分次向量空间 $\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$如下

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^i_j := \mathrm{Hom}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i]\langle -j \rangle)$$

以及 $\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}) = \mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$。我们指出，我们已经

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}\langle 1 \rangle) = \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})\langle 1 \rangle \tag{4.5}$$

对所有 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$。

与 §2.2 中一样，我们将分次环 $R^\vee$ 视为双分次环，其非零分量集中在 $\{0\} \times \mathbb{Z}$。然后，如 [AMRW1, §5.2], for 中所述

$\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 双分次向量空间 $\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 具有自然的双分次 $R^\vee$-双模结构。两个作用都记作 $\mathbin{\widehat{\star}}$，并且与复合相容，具体来说，$x\mathbin{\widehat{\star}}(f\circ g)=(x\mathbin{\widehat{\star}}f)\circ g=f\circ(x\mathbin{\widehat{\star}}g)$ 对于 $x\in R^\vee$ 成立；右作用也类似。特别地，左作用由某些双分次代数同态诱导

$$\mu_{\mathcal{F}}:R^\vee\to\mathbb{E}\mathrm{nd}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F})$$

对任意对象 $\mathcal{F}$；若 $f\in\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 且 $x\in R^\vee$，则 $x\mathbin{\widehat{\star}}f=\mu_{\mathcal{G}}(x)\circ f=f\circ\mu_{\mathcal{F}}(x)$。

$\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$（或适当的子范畴）应当具有幺半范畴结构。遗憾的是，这种构造颇为微妙，目前尚无一般性的答案。不过，至少这种结构的部分内容已在 [AMRW1 第 6–7] 章中构造出来。具体而言，$\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中存在一种称为“卷积复形”的概念，见 [AMRW1，定义 6.1.1],；$\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中以卷积复形为对象的全子范畴带有一个运算 $\mathbin{\widehat{\star}}$，使得 $\mathcal{F}\mathbin{\widehat{\star}}(-)$ 和 $(-)\mathbin{\widehat{\star}}\mathcal{F}$ 在任意固定的卷积对象 $\mathcal{F}$ 下都是函子。此外，对于固定的卷积复形 $\mathcal{F}$，函子 $\mathcal{F}\mathbin{\widehat{\star}}(-)$ 可扩张到整个范畴 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$，见 [AMRW1，命题 7.6.3]。运算 $\mathbin{\widehat{\star}}$ 满足幺半范畴的所有公理，唯一可能例外的是“交换律”：该公理指出，对于 $f:\ \mathcal{F}\to\mathcal{G}$、$g:\ \mathcal{G}\to\mathcal{H}$、$h:\ \mathcal{F}'\to\mathcal{G}'$ 和 $k:\ \mathcal{G}'\to\mathcal{H}'$ 这些卷积复形之间的态射，我们有

$$(g\circ f)\mathbin{\widehat{\star}}(k\circ h)=(g\mathbin{\widehat{\star}}k)\circ(f\mathbin{\widehat{\star}}h);$$

详见 [AMRW1，第 7]章。特别是：

- 运算 $\mathbin{\widehat{\star}}$ 是结合的，因此在考虑多个 $\mathbin{\widehat{\star}}$ 时可以省略括号，见 [AMRW1，§7.2];
- 我们有一个卷积对象 $\mathcal{T}_{\varnothing}$，它是在 [AMRW1，§5.3.1] 中构造的，其作用类似于单位对象；见 [AMRW1，§7.1]。

我们将在下文 §4.9 中回到这个问题。

4.6. **左单值范畴**。我们将用

$$\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$$

表示 [AMRW1，§4.4] 中定义的“左单值”范畴。与自由单值范畴一样，该范畴中的对象是 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 中对象构成的序列，并带有（另一种）“微分”。存在平移函子 $[1]$，(1) 和 $\langle1\rangle$，其性质与 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中的相应函子类似；这使得我们可以按照 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中的相同方法，为 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 定义双分次向量空间 $\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$。此时，双分次向量空间 $\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 具有典范的双分次左 $R^\vee$-模结构。存在一个函子

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}:\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$$

满足

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}\circ(1)=(1)\circ\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}},\quad \mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}\circ[1]=[1]\circ\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}},\quad \mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}\circ\langle1\rangle=\langle1\rangle\circ\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}.$$

此外，$\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 自然具有三角范畴结构，其悬移函子为 $[1]$。幺半范畴 $(\mathsf{BE}(\mathfrak{h},W)$ $\underline{\star})$ 还自然地右作用于 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$；相应的双函子仍记为 $\underline{\star}$。（显式构造见 [AMRW1, (4.23)] 。）

$\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 中有卷积对象的概念；对于 $\mathcal{F}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\mathcal{G}\in\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$，若二者均为卷积对象，则存在卷积对象 $\mathcal{F}\hat{\star}\mathcal{G}\in\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$。态射上也有一种"卷积"运算；若 $\mathcal{F}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\mathcal{G}\in\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 均为卷积对象，则运算 $\mathcal{F}\hat{\star}(-)$ 和 $(-)\hat{\star}\mathcal{G}$ 具有函子性；见 [AMRW1, §6.6]。此外，对于固定的卷积对象 $\mathcal{F}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$，函子 $\mathcal{F}\hat{\star}(-)$ 可扩张为从 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 到其自身的三角函子，见 [AMRW1, Proposition 7.6.4]。函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}$ 将卷积复形映为卷积复形，并满足

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{F}\hat{\star}\mathcal{G})\simeq\mathcal{F}\hat{\star}\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{G}) \tag{4.6}$$

对于所有卷积的 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$，参见 [AMRW1, (6.18)]。

还存在一个三角范畴之间的等价

$$\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}:\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)\xrightarrow{\sim}\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W) \tag{4.7}$$

该等价见 [AMRW1, 定理 4.6。2] 并且我们有一个函子

$$\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}:\mathsf{BE}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$$

使得对于$\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}\circ\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}=\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}$，参见 [AMRW1, §4.6]。根据 [AMRW1, 引理 6.6.1],，对于任意 $\mathcal{G}\in\mathsf{BE}(\mathfrak{h},W)$，对象 $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{G})$ 都是卷积的；对于所有 $\mathcal{F}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$，我们有一个典范同构

$$\mathcal{F}\hat{\star}\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{G})\simeq\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{F})\underline{\star}\mathcal{G}.$$

函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}$ 和 $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}$ 以显然的方式与平移函子交换。

我们可以利用 $\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}$ 是一个等价，将 $\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)$ 的所有结构和性质转移到 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$。具体而言，我们赋予 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 由 $\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)$ 的结构诱导的 t-结构（见 §4.2），并将其心记为 $\mathsf{P}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$，即 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h},W)$ 在等价 $\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}$ 下的逆像。当然，这个范畴在 $\langle 1\rangle$ 下稳定，并继承了 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h},W)$ 的分次最高权结构。归一化的标准对象和余标准对象为

$$\Delta_w:=\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\Delta_w)\quad\text{and}\qquad{}_w:=\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\nabla_w) \tag{4.8}$$

对所有 $w\in W$ 均成立，因为 $\mathsf{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}(\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\Delta_w))=\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}(\Delta_w)=\overline{\Delta}_w$，余标准对象也类似。对象

$$\mathcal{L}_w\langle n\rangle=\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(\mathscr{L}_w\langle n\rangle),$$

$(w,n)\in W\times\mathbb{Z}$ 构成 $\mathsf{P}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 中简单对象同构类的一族代表元。由例 4.2 可得 $\mathcal{L}_1=\Delta_1={}_1$。

以下性质有助于将 [AMRW2] 中的结果推广到我们更一般的情形。

命题 4.5. 设 $w\in W$.

(1) Δ_w 的底同构于 $\mathcal{L}_1\langle-\ell(w)\rangle$，且包含映射 $\mathcal{L}_1\langle-\ell(w)\rangle\hookrightarrow\Delta_w$ 的余核不含形如 $\mathcal{L}_1\langle n\rangle$ 且满足$n\in\mathbb{Z}$的合成因子。*(2)* ${}_w$ 的头同构于 $\mathcal{L}_1\langle\ell(w)\rangle$，且满射 ${}_w\twoheadrightarrow\mathcal{L}_1\langle\ell(w)\rangle$ 的核不含形如 $\mathcal{L}_1\langle n\rangle$ 且满足 $n\in\mathbb{Z}$ 的合成因子。

证明。对象 $\mathscr{L}_1$、Δ_w 和 ∇_w 在 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h},W)$ 中满足类似的陈述，参见 [ARV，命题 8.3]。由于函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}\colon\mathsf{P}_{\mathsf{BE}}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h},W)$ 是全忠实的，且其本质像包含所有简单对象，我们推得

Δ_w 的底同构于 $\mathcal{L}_1\langle -\ell(w)\rangle$，而 w 的头同构于 $\mathcal{L}_1\langle \ell(w)\rangle$。其余断言也由此得出，因为 $\mathrm{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{RE}}$ 是正合的，并将简单对象映为简单对象。□

4.7. 左单值倾斜范畴。 以下结果已在 [AMRW1 第 10] 章中针对晶体学 Coxeter 群的 Cartan 实现建立。使用 [ARV], 中发展的理论，我们可以将这些结果推广到当前情形，证明完全相同。

~对于 $s \in S$，回顾在 [AMRW1, §5.3.2] 中定义的对象 $\mathcal{T}_s \in \mathrm{FM}(\mathfrak{h}, W)$；根据定义，该对-~象是可卷积的。因此我们有一个三角函子 $\mathcal{T}_s \widehat{\star}(-) : \mathrm{LM}(\mathfrak{h}, W) \to \mathrm{LM}(\mathfrak{h}, W)$，见 §4.6。

引理 4.6. 设 $w \in W$ 和 $s \in S$。

(1) 若 $sw > w$，则存在特异三角

$$\Delta_{sw} \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \Delta_w \to \Delta_w\langle 1\rangle \xrightarrow{[1]} \quad and \quad {}_w\langle -1\rangle \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star}\ {}_w \to {}_{sw} \xrightarrow{[1]}$$

在 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)$ 中，其中每种情形下第二个态射均非零。

(2) 若 $sw < w$，则有三角形

$$\Delta_w\langle -1\rangle \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \Delta_w \to \Delta_{sw} \xrightarrow{[1]} \quad and \quad {}_{sw} \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star}\ {}_w \to {}_w\langle 1\rangle \xrightarrow{[1]}$$

in $\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)$, *where in each case the second morphism is nonzero.*

证明。这些三角形的存在性可仿照 [AMRW1，引理 10.5.3], （引用 [ARV，命题 6.11] ，而非 [AR，命题 4.4], 在与（余）标准对象作张量积时）得到。我们证明 (1) 中第一个三角形里的第二个态射非零；其他情况类似。反设 ~此态射为零；那么有 $\Delta_{sw} \cong \mathcal{T}_s \widehat{\star} \Delta_w \oplus \Delta_w\langle 1\rangle[-1]$。这与 $\mathrm{Hom}(\Delta_{sw}, \Delta_w\langle 1\rangle[-1]) = 0$ 的事实矛盾，而该事实可由 Δ_{sw} 和 $\Delta_w\langle 1\rangle$ 均属于 $\mathrm{P}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 得出。□

~**引理 4.7。** 三角函子 $\mathcal{T}_s \widehat{\star}(-) : \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)$ 关于 *perverse t*-结构是 *t*-正合的。

证明。根据 [ARV，引理 7.5 和注记 7.6], ，t-结构的非正部分和非负部分分别由标准对象和余标准对象的适当移位在扩张下生成。因此，该断言由引理 4.6 得出。□

我们设 $\mathcal{T}_1 := \mathrm{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LM}}(B_\varnothing)$，并且给定一个表达式 $\underline{w} = (s_1, \dots, s_r)$，我们设

$$\mathcal{T}_{\underline{w}} := \widetilde{\mathcal{T}}_{s_1} \widehat{\star} \cdots \widehat{\star} \widetilde{\mathcal{T}}_{s_r} \widehat{\star} \mathcal{T}_1 \in \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W).$$

令 $\mathrm{Tilt}^{\oplus}{}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 为 $\mathrm{LM}(\mathfrak{h}, W)$ 的全子范畴，其对象是形如 $\mathcal{T}_{\underline{w}}\langle n\rangle$ 的对象的直和，其中 $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$ 且 $n \in \mathbb{Z}$。我们将左单值倾斜范畴 $\mathrm{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 定义为其 Karoubi 包络。（注意，$\mathrm{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 是 $\mathrm{LM}(\mathfrak{h}, W)$ 的全子范畴，因为后者具有有界 t-结构，因而根据 [LC] 的主要结果是 Karoubi 范畴。）以下结果说明了这一定义的合理性。

命题 4.8。 函子对于 $\mathrm{For}^{\mathsf{LM}}_{\mathsf{RE}}$ 诱导出加性范畴的等价

$$\mathrm{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W).$$

因此，自然函子

$$K^{\mathrm{b}}\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\to D^{\mathrm{b}}\mathsf{P}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W) \tag{4.9}$$

是三角范畴之间的等价。

证明。对于第一个断言，[AMRW1，命题 10.5.1] 的证明适用于当前情形，只需使用引理 4.6 代替 [AMRW1，引理 10.5.3]。接着，(4.9) 中的函子是等价这一事实，可由 (4.4) 中函子的类似性质推出。□

注 4.9。标准论证表明，显然的函子

$$K^{\mathrm{b}}\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\to K^{\mathrm{b}}\mathsf{Tilt}^{\oplus}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$$

是三角范畴之间的等价。因此，我们还得到一个范畴等价

$$K^{\mathrm{b}}\mathsf{Tilt}^{\oplus}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\xrightarrow{\sim}\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W), \tag{4.10}$$

如 [AMRW2，引理 2.4] 中所述。

使用命题 4.8，我们可以将分次最高权范畴的倾斜对象通常满足的性质转移到 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 上，参见 [ARV, §9.5], ，并得到以下陈述。

推论 4.10。范畴 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 是 *Krull–Schmidt* 范畴。对于任意 $w\in W$，存在唯一一个（在同构意义下）不可分解对象 $\mathcal{T}_w$，其由以下性质刻画：

(1) 对于任意表示 w 的约化表达式 $\underline{w}$，$\mathcal{T}_w$ 以重数1作为直和项出现在 $\mathcal{T}_{\underline{w}}$ 中；*(2)* $\mathcal{T}_w$ 不会作为任何对象 $\mathcal{T}_{\underline{v}}\langle n\rangle$ 的直和项出现，其中 $\underline{v}$ 是一个表达式，使得 $\ell(\underline{v})<\ell(w)$ 且 $n\in\mathbb{Z}$。

此外，赋值 $(w,n)\mapsto\mathcal{T}_w\langle n\rangle$ 诱导出 $W\times\mathbb{Z}$ 与 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 中不可分解对象的同构类集合之间的一个双射。□

4.8. **自由单值化倾斜范畴**。给定一个表达式 $\underline{w}=(s_1,\dots,s_r)$，我们定义

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}=\widetilde{\mathcal{T}}_{s_1}\mathbin{\widehat{\star}}\cdots\mathbin{\widehat{\star}}\widetilde{\mathcal{T}}_{s_r}\in\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W).$$

注意，由 (4.6) 可知 $\mathcal{T}_{\underline{w}}=\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})$。

命题 4.8 表明，对于任意表达式 $\underline{v}$、$\underline{w}$ 和 i、$j\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{v}},\mathcal{T}_{\underline{w}}[i]\langle j\rangle)=0\quad\text{unless } i=0$$

（见 [ARV, (9.2)]）。如同 [AMRW1, Corollary 10.6.2], 的证明，上述等式和 [AMRW1, Lemma 5.2.3] 推出以下陈述。

命题 4.11。对于任意表达式 $\underline{v}$、$\underline{w}$ 以及任意 $i,j\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^i_j=0\quad unless\quad i=0.$$

此外，$\mathbb{H}\mathrm{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^0_\bullet$ 作为右侧 $R^\vee$-模是分次自由的，并且态射

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^0_\bullet\otimes_{R^\vee}\Bbbk\to\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{v}},\mathcal{T}_{\underline{w}})^0_\bullet$$

由函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}$ 诱导的映射是一个同构。□

下面我们需要考虑范畴 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 的 Karoubi 包络 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)$。平移函子 $\langle m\rangle$ 延拓为 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)$ 的自等价。给定 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)$ 中的 $\mathcal{F},\mathcal{G}$，我们还将考虑双分次 $\Bbbk$-向量空间

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G}\langle -m\rangle[n]).$$

利用 $R^\vee$ 在 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中态射空间上的左右作用与复合相容这一事实，可以看出该空间具有典范的双分次 $R^\vee$-双模结构。函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}\colon \mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 根据 Karoubi 包络的泛性质延拓为 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)$ 上的函子。稍微滥用一下记号，我们也将此延拓记为 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}$。

我们将自由单值化倾斜范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 定义为 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 的全子范畴，其对象为形如 $\mathcal{T}_{\underline{w}}\langle n\rangle$ 的对象，其中 $\underline{w}\in\mathsf{Exp}(W)$ 且 $n\in\mathbb{Z}$。我们用 $\mathscr{T}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 表示 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的加性包，用 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 表示 $\mathscr{T}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 的 Karoubi 包络（它是 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)$ 的一个全子范畴）。根据构造，卷积运算 $\widehat{\star}$ 限制为一个运算

$$\widehat{\star}:\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)\times\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\to\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W). \tag{4.11}$$

命题 4.11 可推广到 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 中的所有对象，具体如下。

命题 4.12。设 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 是 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 中的对象。那么有

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})^i_j=0\quad unless\quad i=0,$$

$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 作为右 $R^\vee$-模是分次自由的，并且态射

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})\otimes_{R^\vee}\Bbbk\to\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{F}),\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\mathcal{G}))$$

由函子 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}$ 诱导，是一个同构。

证明。根据 Karoubi 包络的构造，$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 可识别为 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)$ 中一个类似态射空间的直和项。因此，根据命题 4.11，该空间在 $(\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ 中的次数上消失，并且是一个射影分次 $R^\vee$-模，因而是分次自由的。$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}$ 诱导同构这一事实也可由命题 4.11 得出。□

$\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 中不可分解倾斜对象的分类可借助命题 4.12“升级”为 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 中的分类，参见 [AMRW1, 定理 10.7.1]。

定理 4.13。$\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 是 *Krull–Schmidt* 范畴。对于任意 $w\in W$，存在~唯一的（在同构意义下）不可分解对象 $\mathcal{T}_w$，使得

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widetilde{\mathcal{T}}_w)=\mathcal{T}_w.$$

~此外，$\mathcal{T}_w$ 由以下性质刻画：

~(1) 对于任意表示 w 的约化表达式 $\underline{w}$，$\mathcal{T}_w$ 以重数 1 作为 $\mathcal{T}_{\underline{w}}$ 的直和项出现~；~(2) $\mathcal{T}_w$ 不会作为任何对象 $\mathcal{T}_{\underline{v}}$ 的直和项出现，其中 $\underline{v}$ 是一个满足以下条件的表达式：$\ell(\underline{v})<\ell(w)$ 且 $n\in\mathbb{Z}$。

~此外，映射 $(w,n)\mapsto\mathcal{T}_w\langle n\rangle$ 在 $W\times\mathbb{Z}$ 与 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 中不可分解对象的同构类集合之间诱导出一个双射。□

~ ~ ~当 $w=1$ 时，我们有 $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_\varnothing$；若 $\underline{w}=s\in S$，则 $\mathcal{T}_s$ 就是上文以这种方式表示的对象~。在这些情况下，对象 $\mathcal{T}_w$ 是规范的；一般而言，它仅在同构意义下确定。

4.9. **双函子性假设**。如 §4.5 中所述，目前尚不清楚运算 $\widehat{\star}$ 是否是 FM($\mathfrak{h},W$) 中卷积对象子范畴上的双函子。正如 [AMRW1, §7.7], 中所述，人们预期这一条件至少在子范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 上成立；这归结为以下事实：对于 $f\colon \mathcal{F}\to\mathcal{G}$, $g\colon \mathcal{G}\to\mathcal{H}$, $h\colon \mathcal{F}'\to\mathcal{G}'$ 和 $k\colon \mathcal{G}'\to\mathcal{H}'$ 中 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 内对象之间的态射，我们有

$$(g\circ f)\mathbin{\widehat{\star}}(k\circ h)=(g\mathbin{\widehat{\star}}k)\circ(f\mathbin{\widehat{\star}}h). \tag{4.12}$$

下文假设这一性质对我们给定的实现成立，这意味着 $\widehat{\star}$ 在范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 上诱导出一个幺半结构（进而在 $\mathscr{T}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ 上也如此）。

备注 4.14. (1) 若我们的实现是结晶型 Coxeter 群的 Cartan 实现，则 [AMRW1, 第 11] 章的主要结果表明上述条件成立。(2) 使用 §4.8 的结果，[AMRW1, 第 11] 章的方法也适用于一般 Coxeter 群的一般实现，前提是对于任意一对不同的简单反射 $s,t\in S$（它们生成 W 的一个有限子群），[AMRW1, 第 8] 章中的条件均由 $\mathfrak{h}_{|\langle s,t\rangle}$ 满足。对于任意考克斯特系统，此情形至少涵盖几何实现和 Soergel 实现（见 §2.1），但若 (W,S) 含有 H_3 型抛物子系统，则还要求满足 §2.1 的条件 (2)。(3) Matthew Hogancamp 和 Shotaro Makisumi 已宣布在完全一般的情况下证明了这一条件（前提是 §2.1 的假设 (1)–(2)–(3) 成立）。遗憾的是，目前尚无他们证明的书面记录。(4) 使用命题 4.11 可得，若上述条件成立，则运算 (4.11) 是一个双函子，并在 $\mathrm{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)$ 上定义了一个作为幺半范畴 ($\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)$ $\widehat{\star}$) 的模范畴结构。

5. 一个函子 $\mathbb{V}$

本节中，我们假设 §2.1、§2.3 和 §4.9 的条件均已满足。此外，我们假设 W 是有限的。

5.1. **陈述**。回顾 §2.3 中讨论的 (W,S) 的对偶实现 $\mathfrak{h}^*$。我们的目标是证明以下陈述。

定理 5.1。存在一个幺半加性范畴之间的典范等价

$$\mathbb{V}:\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$$

~满足 $\mathbb{V}\circ\langle 1\rangle=\langle -1\rangle\circ\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})\simeq B^{\wedge}_{\underline{w}}$，对任意表达式 $\underline{w}$ 均成立。

我们将在 §5.4 和 §5.5 中构造函子 $\mathbb{V}$ 并证明该定理。在此之前，我们需要一些预备知识。

5.2. **大倾斜对象**。 设 w_0 为 W中的最长元，并考虑 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 中对应的不可分解倾斜对象 $\mathcal{T}_{w_0}$，见推论 4.10。我们定义

$$\mathcal{P} := \mathcal{T}_{w_0}\langle -\ell(w_0)\rangle.$$

由 [ARV 定理 10.3]， $\mathcal{P}$ 是简单对象 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_1$ 的射影覆盖，而 [ARV 的式 (10.5)] 蕴含

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P}, \ {}_w\langle m\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = -\ell(w); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.1}$$

特别地，我们有

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P}, \mathcal{T}_1)^i_j = \begin{cases} \Bbbk & \text{if } i = j = 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.2}$$

我们固定一个不可分解倾斜对象 $\widetilde{\mathcal{T}}_{w_0}$，它属于 $\mathscr{T}(\mathfrak{h}, W)$，且满足 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{w_0}) = \mathcal{T}_{w_0}$，参见定理 4.13，并令

$$\widetilde{\mathcal{P}} := \widetilde{\mathcal{T}}_{w_0}\langle -\ell(w_0)\rangle. \tag{5.3}$$

命题 4.12 和 (5.2) 蕴含我们有一个分次 $R^\vee$-模的同构

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{T}}_1) \simeq R^\vee,$$

因此特别有

$$\dim_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{T}}_1)) = 1.$$

从现在起，我们固定一个非零态射

$$\xi : \widetilde{\mathcal{P}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_1, \tag{5.4}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$它自动是 $\mathbb{H}\mathsf{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},\ W)}(\mathcal{P}, \mathcal{T}_1)$ 作为右 $R^\vee$-模的一个生成元。我们还令 $\xi' = \mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\xi)$，它是 $\mathsf{Hom}^{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P}, \mathcal{T}_1)$ 的一个生成元。

$\widetilde{\ }$对于（有限）晶体学 Coxeter 群的 Cartan 实现， $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}$ 在 [AMRW2, §§3.1–3.4] 中进行了研究。与 §4.8 中一样，这些结果在我们目前的情形下仍然成立，其证明可照搬 [AMRW2], ，只需将其中对 [AR] 的引用替换为对 [ARV] 的引用。下面陈述我们将用到的结果，并简要给出证明思路。

引理 5.2。 在阿贝尔范畴 $\mathsf{P}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, \ W)$ 中，我们有

$$[\mathcal{P} : \mathcal{L}_1\langle m\rangle] = 0$$

除非 $m \leq 0$，并且还有 $[\mathcal{P} : \ \mathcal{L}_1] = 1$。特别地，自同态空间$\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)(\mathcal{P}) = \Bbbk \cdot$ 恒等态射。

证明。 证明与 [AMRW2 的引理 3.1] 类似。具体而言，由于 $\mathcal{P}$ 是倾斜对象，它具有标准滤过。使用互反公式（例如参见 [ARV, (10.1)]），对于 $w \in W$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，我们有

$$(\mathcal{P} : \Delta_w\langle n\rangle) = [\ {}_w\langle n\rangle : \mathcal{L}_1],$$

根据命题 4.5，当 $n = -\ell(w)$ 时其值为 1，否则为 0。再次使用命题 4.5，我们推得

$$[\mathcal{P} : \mathcal{L}_1\langle n\rangle] = \#\{w \in W \mid n = -2\ell(w)\},$$

这就推出了该陈述。 □

令 $s \in S$ 和 $\widehat{\epsilon}_s\colon \mathcal{T}_s \to \mathcal{T}_1\langle 1\rangle$ 为 [AMRW1, §5.3.4] 中定义的态射。与 [AMRW2, §3.3], 中一样，存在唯一的态射

$$\zeta_s' : \mathcal{P} \to \mathcal{T}_s\langle -1\rangle$$

使得 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widehat{\epsilon}_s\langle -1\rangle)\circ\zeta_s' = \xi'$。反过来，与 [AMRW2，引理 3.5], 中一样，存在唯一一个态射

$$\zeta_s : \widetilde{\mathcal{P}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_s\langle -1\rangle \tag{5.5}$$

使得 $\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\zeta_s) = \zeta_s'$，且此态射满足

$$\widehat{\epsilon}_s\langle -1\rangle \circ \zeta_s = \xi. \tag{5.6}$$

并且存在唯一的分次 $R^\vee$-双模同构

$$\gamma_s' : R^\vee \otimes_{(R^\vee)^s} R^\vee\langle 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{T}}_s) \tag{5.7}$$

将 $u_s = 1\otimes 1$ 送到 ζ_s。

以下陈述是我们这一设定中与 [AMRW2，命题 3.6], 相对应的结果，其证明完全相同。

命题 5.3。对象 $\mathcal{P}$ 在幺半范畴 $\mathscr{T}(\mathfrak{h}, W)$中具有典范余代数结构，其余单位为 $\xi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{T}_1$，余乘法态-射 $\delta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\widehat{\star}\mathcal{P}$ 由以下条件唯一确定：$(\xi\widehat{\star}\xi)\circ\delta = \xi$。□

5.3. **局部化**。现在我们回顾 [AMRW1, §11.1] 中的局部化过程。（再一次，在 [AMRW1], 中，这一构造仅针对晶体学 Coxeter 群的 Cartan 实现来考虑，但在我们当前的设定中，它现在也有意义。）

回顾 §2.2 中的分次环 $Q^\vee$。若 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 是 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 中的对象，我们定义

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) := \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \otimes_{R^\vee} Q^\vee,$$

其中我们考虑 §4.5 中 $R^\vee$ 在 $\mathbb{H}\mathsf{om}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 上的右 作用。令

$$\mathsf{Loc}(\mathfrak{h}, W)$$

令该范畴的对象与 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 的对象相同，并规定从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的态射空间由 $\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 中双次数为 (0, 0) 的元素组成。根据构造，存在一个典范函子

$$\mathsf{Loc} : \mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{Loc}(\mathfrak{h}, W).$$

我们还将 $\mathsf{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$ 记作由 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h}, W)$ 经与 $\mathsf{Loc}(\mathfrak{h}, W)$ 从 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 得到时相同的过程所得到的范畴。于是存在一个典范的全忠实函子 $\mathsf{Loc}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$。

回顾 [AMRW2, §7.4] ，对于任意 $s \in S$ ，我们都有 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 中某个特定的卷积对象 ∇_s。于是，对于表达式 $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$，我们可以考虑对象

$$\widetilde{\nabla}_{\underline{w}} = \widetilde{\nabla}_{s_1} \widehat{\star} \cdots \widehat{\star} \widetilde{\nabla}_{s_n}.$$

当 $\underline{w} = \varnothing$ 我们令 $\nabla_\varnothing := \mathcal{T}_\varnothing$。使用 [AMRW2、引理 7.4.2 和推论 11.3.2],，可知我们有分次 $Q^\vee$-模之间的同构

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\nabla}_{\underline{x}}, \widetilde{\nabla}_{\underline{y}}) \cong \begin{cases} Q^\vee & \text{if } \pi(\underline{x}) = \pi(\underline{y}); \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.8}$$

其中 π 与 §2.1 中的相同。

考虑态射

$$\phi_s : \widetilde{\mathcal{T}}_s \to \widetilde{\nabla}_{\varnothing}\langle 1\rangle \oplus \widetilde{\nabla}_s \tag{5.9}$$

在 $\mathsf{FM}(\mathfrak{h}, W)$ 中，记作 $\varkappa_s^2\mathsf{in}$ [AMRW1，命题 11.2.1]。给定一个表达式 $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$，我们定义

$$\phi_{\underline{w}} := \phi_{s_1} \mathbin{\widehat{\star}} \cdots \mathbin{\widehat{\star}} \phi_{s_n} : \widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}} \to (\widetilde{\nabla}_{\varnothing}\langle 1\rangle \oplus \widetilde{\nabla}_{s_1}) \mathbin{\widehat{\star}} \cdots \mathbin{\widehat{\star}} (\widetilde{\nabla}_{\varnothing}\langle 1\rangle \oplus \widetilde{\nabla}_{s_n}). \tag{5.10}$$

根据此定义，显然对任意表达式 $\underline{v}, \underline{w}$，我们有

$$\phi_{\underline{v}} \mathbin{\widehat{\star}} \phi_{\underline{w}} = \phi_{\underline{v}\underline{w}}. \tag{5.11}$$

以下陈述是 [AMRW1，推论 11.2.2]，的一个版本，它可由相同的论证得到。

引理 5.4. 对任意表达式 $\underline{w}$，态射 $\mathsf{Loc}(\phi_{\underline{w}})$ 是一个同构。□

5.4. 函子 $\mathbb{V}$ 的构造。 回忆一下 §2.2 中考虑的函子 $(-)^\wedge$。对于 $\mathcal{F} \in \mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$，我们定义

$$\mathbb{V}(\mathcal{F}) := \left(\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h}, W)}(\widetilde{\mathcal{P}}, \mathcal{F})\right)^\wedge.$$

根据定义和 (2.1)，我们注意到 $\mathbb{V} \circ \langle 1\rangle = \langle -1\rangle \circ \mathbb{V}$。这定义了一个从 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 到 $R^\wedge$-$\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}$-$R^\wedge$ 的函子。本小节的目标是证明该函子可分解为一个从 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 到 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的幺半函子。

如果 $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$ 是一个表达式，我们用 $S_{\underline{w}}$ 表示 $\underline{w}$ 的子表达式所成的多重集，即可以通过从 $\underline{w}$ 中删去若干字母而得到的表达式。（重数源于同一个表达式有时可以通过以多种方式从 $\underline{w}$ 中删去字母而得到。）于是我们有

$$(\widetilde{\nabla}_{\varnothing}\langle 1\rangle \oplus \widetilde{\nabla}_{s_1}) \mathbin{\widehat{\star}} \cdots \mathbin{\widehat{\star}} (\widetilde{\nabla}_{\varnothing}\langle 1\rangle \oplus \widetilde{\nabla}_{s_n}) \cong \bigoplus_{\underline{v} \in S_{\underline{w}}} \widetilde{\nabla}_{\underline{v}}\langle \ell(\underline{w}) - \ell(\underline{v})\rangle.$$

对于 $u \in W$，我们定义

$$\widetilde{\mathcal{T}}^u_{\underline{w}} := \bigoplus_{\substack{\underline{v} \in S_{\underline{w}} \\ \pi(\underline{v}) = u}} \widetilde{\nabla}_{\underline{v}}\langle \ell(\underline{w}) - \ell(\underline{v})\rangle.$$

那么 $\phi_{\underline{w}}$ 定义了一个态射

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}} \to \bigoplus_{u \in W} \widetilde{\mathcal{T}}^u_{\underline{w}},$$

并且如果 $\underline{v}$ 和 $\underline{w}$ 是表达式，对于 $x, y \in W$，我们有

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\mathcal{T}}^x_{\underline{v}}, \widetilde{\mathcal{T}}^y_{\underline{w}}) = 0 \quad \text{unless } x = y \tag{5.12}$$

根据 (5.8)。

如果 $\underline{w}$ 是表达式且 $u \in W$，我们考虑 $(R^\wedge, Q^\wedge)$-双模

$$\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge} := \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h}, W)}(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{T}}^u_{\underline{w}}\langle -n\rangle)\right)^\wedge \otimes_{R^\wedge} Q^\wedge,$$

以及分次 $(R^\wedge, Q^\wedge)$-双模的态射

$$\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})} : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}) \otimes_{R^\wedge} Q^\wedge \to \bigoplus_{u \in W} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$$

由赋值 $g \mapsto \phi_{\underline{w}} \circ g$ 对 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P}, \mathcal{T}_{\underline{w}}\langle -n\rangle)$ $g \in$ 所诱导。由引理 5.4 可知，$\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})}$ 是一个同构。

回顾 §3.2 中范畴 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的定义。

引理 5.5。*(1)* 对于任意表达式 $\underline{w}$，三元组

$$\left(\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}), (\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge})_{u\in W}, \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})}\right)$$

是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中的一个对象。

(2) 对于任意表达式 $\underline{v}$、$\underline{w}$ 以及任意 $\varphi \in \mathbb{H}om^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{v}}, \mathcal{T}_{\underline{w}})$，$\mathbb{V}(\varphi)$ 是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中从三元组 $(\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}}), (\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})^u_{Q^\wedge})_{u\in W}, \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})})$ 到三元组 $(\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}}), (\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge})_{u\in W}, \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})})$ 的态射。

证明。 (1) 令 $\underline{w}$ 为一个表达式，并令 $x \in R^\vee$。对于任意表达式 $\underline{y}$ 以及任意 $g \in \mathbb{H}om^{\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P}, \nabla_{\underline{y}})$，我们有

$$x \mathbin{\widehat{\star}} g = g \circ \mu_{\widetilde{\nabla}_{\underline{y}}}(x) = g \mathbin{\widehat{\star}} \pi(\underline{y})^{-1}(x)$$

根据 [AMRW1，引理 7.4.1]。因此，对所有 $u \in W$，左、右 $R^\wedge$-作用在 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$上满足 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 定义中的相容性。因此，如所愿，我们的三元组是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中的一个对象。

(2) 固定陈述中所述的 $\underline{v}$、$\underline{w}$ 和 φ。我们要证明的是，对于任意 $u \in W$ 以及任意 $f \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})^u_{Q^\wedge}$，元素

$$h := \left(\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})} \circ (\mathbb{V}(\varphi) \otimes_{R^\wedge} 1) \circ (\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})})^{-1}\right)(\widetilde{f})$$

属于 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$。

首先，假设对于某个 $f \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})$，有 $f = \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f)$。此时，$h = \phi_{\underline{w}} \circ \varphi \circ f$ 属于 $\mathsf{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$。由于 $\phi_{\underline{v}}$ 是该范畴中的一个同构，我们有

$$h = (\phi_{\underline{w}} \circ \varphi \circ \phi_{\underline{v}}^{-1}) \circ (\phi_{\underline{v}} \circ f) = (\phi_{\underline{w}} \circ \varphi \circ \phi_{\underline{v}}^{-1}) \circ \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f)$$

因此，根据我们对 f 的假设及 (5.12)，有 $h \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$；见图1。

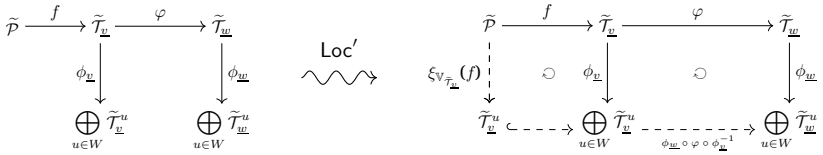


图1。左侧的图表属于 $\mathsf{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h}, W)$，另一个属于 $\mathsf{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$，其中虚线表示的态射存在，且它们的复合等于 h。

现在我们考虑一般情形。存在 $a \in R^\wedge$ 和 $f \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})$，使得 $\widetilde{f} = \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f\frac{1}{a})$。那么 $\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f) \in \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})^u_{Q^\wedge}$，因为 $\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}$ 是右 $Q^\wedge$-模的态射，因此 $ha \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$，这意味着 h 也属于 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^u_{Q^\wedge}$。□

引理 5.5 表明，函子 $\mathbb{V}$ 可通过一个函子进行分解

$$\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W) \to \mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W),$$

记号也类似。接下来我们将证明，可以为这个函子赋予一个幺半结构。为此，我们引入态射

$$\gamma_\varnothing : B_\varnothing^\wedge = R^\wedge \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_\varnothing) = \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1) \tag{5.13}$$

由赋值 $x \mapsto \xi \mathbin{\widehat{\star}} x$ 给出（其中 ξ 如 (5.4) 所述），以及双函子态射

$$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathbb{V}(\mathcal{F}) \otimes_{R^\wedge} \mathbb{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F} \mathbin{\widehat{\star}} \mathcal{G})$$

定义为 $\beta_{\mathcal{F},\,\mathcal{G}}(f \otimes g) = (f \mathbin{\widehat{\star}} g) \circ \delta \in \mathbb{V}(\mathcal{F} \mathbin{\widehat{\star}} \mathcal{G})_{m+n}$，对所有 $f \in \mathbb{V}(\mathcal{F})_m$ 和 $g \in \mathbb{V}(\mathcal{G})_n$（其中 δ 如命题 5.3 所述）。

命题 5.6。 三元组 $(\mathbb{V}, \beta, \gamma_\varnothing)$ 是从 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 到 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的幺半函子。

证明。我们首先注意到，[AMRW2 的命题 3.7] 的证明表明，$(\mathbb{V}, \beta, \gamma_\varnothing)$ 是从 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 到 $R^\wedge$-Mod$^{\mathbb{Z}}$-$R^\wedge$ 的幺半函子。事实上，除 [AMRW2 引理 2.6], 之外，该证明的所有要素都已在上文重述；而后者可以用同样的思路证明，只需用命题 4.5 替代 [AR 引理 4.9]。

显然，$\gamma_\varnothing$ 也是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中的一个态射，因此剩下需要证明的只有：对于任意 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$，$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中的一个态射；也就是说，对于任意表达式 $\underline{v}, \underline{w}$，态射

$$\beta_{\underline{v},\underline{w}} := \beta_{\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}}, \widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}} : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}}) \otimes_{R^\wedge} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}) \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}} \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$是 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中的一个态射。设 $x, y \in W$, $f \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})^x_{Q^\wedge}$ 和 $\widetilde{g} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})^y_{Q^\wedge}$。我们需要证明元素

$$h := \left(\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{vw}})} \circ (\beta_{\underline{v},\underline{w}} \otimes_{R^\wedge} 1) \circ (\xi^{-1}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})} \otimes_{Q^\wedge} \xi^{-1}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})})\right)(\widetilde{f} \otimes_{Q^\wedge} \widetilde{g})$$

$\sim$属于 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{vw}})^{xy}_{Q^\wedge}$。如引理 5.5(2) 的证明所示，我们可以假设存在 $f \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})$ 和 $g \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{w}})$，使得 $f = \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f) \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})^x_{Q^\wedge}$ 且 $\widetilde{g} = \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})}(g) \in \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^y_{Q^\wedge}$。因此，在 $\mathrm{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$ 中，我们有

$$\begin{aligned} h = \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{vw}})}\left((\beta_{\underline{v},\underline{w}} \otimes_{R^\wedge} 1)((f \otimes_{R^\wedge} 1) \otimes_{Q^\wedge} (g \otimes_{R^\wedge} 1))\right) &\overset{(a)}{=} \phi_{\underline{vw}} \circ (f \mathbin{\widehat{\star}} g) \circ \delta \\ &\overset{(b)}{=} (\phi_{\underline{v}} \mathbin{\widehat{\star}} \phi_{\underline{w}}) \circ (f \mathbin{\widehat{\star}} g) \circ \delta \\ &\overset{(c)}{=} (\phi_{\underline{v}} \circ f) \mathbin{\widehat{\star}} (\phi_{\underline{w}} \circ g) \circ \delta \\ &\overset{(d)}{=} (\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}})}(f) \mathbin{\widehat{\star}} \xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})}(g)) \circ \delta. \end{aligned}$$

这里：

- (a) 和 (d) 由 $\xi_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{vw}})}$ 及 β 的定义得出；
- (b) 由 (5.11) 得出；
- (c) 由交换律得出，见 §4.9。

$\sim$因此，根据我们的假设和（5.12），$h \in \mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{vw}})^{xy}_{Q^\wedge}$，见图 2。 □

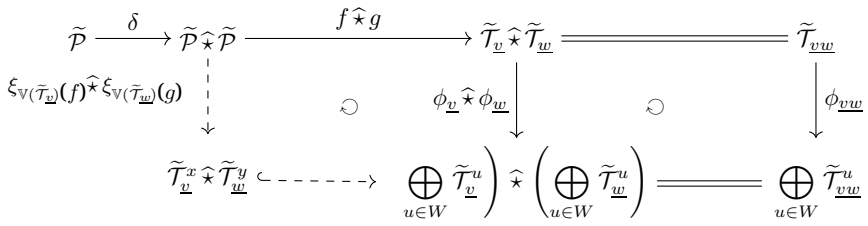


图 2. 虚线态射属于 $\mathrm{Loc}'(\mathfrak{h}, W)$，其余的属于 $\mathrm{FM}^{\mathrm{Kar}}(\mathfrak{h}, W)$。

回顾一下在（5.7）中定义的态射 γ'_s。

引理 5.7. 对于任意 $s \in S$，态射 $\gamma_s := (\gamma'_s)^\wedge$ 定义了$B_s^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)$ 中的一个同构，该同构位于 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$。

证明. 我们已经知道，γ_s 是分次 $R^\wedge$-双模之间的一个同构，因此我们只需证明它在 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中定义了一个从 $B_s^\wedge$ 到 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_s)$ 的态射。然而，除非 $u \in \{1, s\}$，双模 $(B_s^\wedge)^u_{Q^\wedge}$ 和 $(\mathbb{V}(\mathcal{T}_s))^u_{Q^\wedge}$ 均为零，并且它们与满足以下条件的元素子集 m 同一：对于任意 $x \in R^\wedge$，若 $u \in \{1, s\}$，则 $m \cdot x = u(x) \cdot m$（见 [A1, §2.4] 开头的说明）。因此，遗忘函子诱导出一个同构

$$\mathrm{End}_{\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)}(B_s^\wedge, \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{R^\wedge\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\text{-}R^\wedge}(B_s^\wedge, \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)).$$

因此，所需性质自然成立。 □

使用命题 5.6 和引理 5.7，对于任意非空表达式$\underline{w}$，我们得到一个典范同构

$$\gamma_{\underline{w}} : B_{\underline{w}}^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}) \tag{5.14}$$

在 $\mathscr{C}(\mathfrak{h}^*, W)$ 中。（对于空表达式，这样的同构已在 (5.13) 中构造。）

因此，我们证明了函子 $\mathbb{V}$ 定义了一个幺半函子

$$\mathbb{V} : \mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W) \to \mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$$

使得 $\mathbb{V} \circ \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle \circ \mathbb{V}$，并且对所有表达式 $\underline{w}$，都有典范同构 $\gamma_{\underline{w}} : B_{\underline{w}}^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})$。为了完成定理 5.1 的证明，只需证明该函子是全忠实的，这将在下一小节中完成。

5.5. **的可逆性**。我们首先比较 $\mathbb{V}$ 的源范畴和目标范畴中态射的分次秩。

引理 5.8. 对于任意表达式 $\underline{y}, \underline{w}$，我们有

$$\mathrm{grk}_{R^\wedge} \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{y}}, \widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^\wedge = \mathrm{grk}_{R^\wedge} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)}(B_{\underline{y}}^\wedge, B_{\underline{w}}^\wedge).$$

证明。与 [AMRW2, §2.7]，中一样，我们考虑 (W, S) 的 Hecke代数 $\mathcal{H}_{(W,S)}$、其“标准”基 $(H_w : w \in W)$（作为 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-模），以及满足 $\langle H_x, H_y \rangle = \delta_{x,y}$（其中 $x, y \in W$）的 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-双线性配对 $\langle -, - \rangle$，定义在 $\mathcal{H}_{(W,S)}$ 上。对于 $s \in S$，我们设 $\underline{H}_s = H_s + v$；若 $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_n)$ 是一个表达式，则设

$$\underline{H}_{\underline{w}} = \underline{H}_{s_1} \cdots \underline{H}_{s_n}.$$

该元素在基 $(H_x:\ x\in W)$ 下的展开记作

$$\underline{H}_{\underline{y}}=\sum_{x\in W}p^x_{\underline{y}}(v)H_x.$$

根据 [AMRW2，引理 2.8]（该结论在我们的情形下也成立，证明相同），对于任意表达式 $\underline{y}$、$\underline{w}$，有

$$\langle\underline{H}_{\underline{y}},\underline{H}_{\underline{w}}\rangle=\mathrm{grk}_{\Bbbk}\,\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{y}},\mathcal{T}_{\underline{w}})=\mathrm{grk}_{R^\vee}\,\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{y}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}) \tag{5.15}$$

其中第二个等号由命题 4.11 得出。另一方面，根据 [A1，推论 4.7]，有

$$\overline{\langle\underline{H}_{\underline{y}},\underline{H}_{\underline{w}}\rangle}=\overline{\sum_{x\in W}p^x_{\underline{y}}(v)p^x_{\underline{w}}(v)}=\mathrm{grk}_{R^\wedge}\,\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(B^\wedge_{\underline{y}},B^\wedge_{\underline{w}})$$

结合 (2.2)，这就证明了该引理。 □

现在记 $R^\vee$-Mod$^{\mathbb{Z}}$ 和 $R^\wedge$-Mod$^{\mathbb{Z}}$ 分别为分次左 $R^\vee$-模和 $R^\wedge$-模的范畴。那么，与双模的情形一样，我们有一个自然的范畴等价

$$(-)^\wedge:R^\vee\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\to R^\wedge\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}$$

它将分次替换为反向分次。我们考虑函子

$$\mathbb{V}':\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)\to R^\wedge\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} \tag{5.16}$$

定义为

$$\mathbb{V}'(\mathcal{F})=\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{P},\mathcal{F})^\wedge.$$

于是，由命题 4.12 可得一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W) & \xrightarrow{\ \mathbb{V}\ } & R^\wedge\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\text{-}R^\wedge\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (-)\otimes_{R^\wedge}\Bbbk}\\ \mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W) & \xrightarrow{\ \mathbb{V}'\ } & R^\wedge\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}.\end{array}$$

以下引理是 [AMRW2, Lemma 3.9]，的一个类似结果，它可由相同的论证推出，只需将命题 4.5 用于 [AR, Lemma 4.9]。

引理 5.9。函子 $\mathbb{V}'$ 是忠实的。 □

现在我们可以完成定理 5.1 的证明了。

定理 *5.1* 的证明。如 §5.4 末尾所述，我们只需证明$\mathbb{V}$ 是全忠实的。首先证明 $\mathbb{V}$ 是忠实的。设$\underline{w}$ 和 $\underline{v}$ 为表达式。~固定 $R^\vee$-双模 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_{\underline{v}})$的一组有限齐次生成元 n；由命题 4.12，这也给出了左$R^\vee$-模 $\mathbb{V}'(\mathcal{T}_{\underline{v}})$的一组齐次生成元。考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}) & \longrightarrow & \bigoplus_m \mathrm{Hom}_{R^\vee\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\text{-}R^\vee}(\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}}),\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})\langle m\rangle) & \longrightarrow & \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^{\oplus n}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{v}},\mathcal{T}_{\underline{w}}) & \longrightarrow & \bigoplus_m \mathrm{Hom}_{R^\vee\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}}(\mathbb{V}'(\mathcal{T}_{\underline{v}}),\mathbb{V}'(\mathcal{T}_{\underline{w}})\langle m\rangle) & \longrightarrow & \mathbb{V}'(\mathcal{T}_{\underline{w}})^{\oplus n}\end{array}$$

其中：

- 左侧的水平箭头由函子 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}'$诱导；

- 右侧的水平箭头由我们为 $\mathbb{V}(\underline{\mathcal{T}_v})$ 和 $\mathbb{V}'(\underline{\mathcal{T}_v})$ 选取的生成元诱导；
- 垂直箭头由函子 $\mathsf{For}_{\mathsf{FMLM}}$ 和 $(-)\otimes_{R^\wedge}\Bbbk$诱导。

命题 4.12 表明，在最左列和最右列中，底行上的 $\Bbbk$-向量空间是将函子 $(-)\otimes_{R^\wedge}\Bbbk$ 作用于上行上的自由右 $R^\vee$-模所得。根据引理 5.9 以及我们的族生成 $\mathbb{V}'(\underline{\mathcal{T}_v})$ 这一事实，下方的复合是单射。由引理 2.2 可知，上方的复合也为单射，因此左上方的态射也是单射，这表明 $\mathbb{V}$ 是忠实的。

现在，对于任意 $m\in\mathbb{Z}$，函子 $\mathbb{V}$ 在齐次分量之间诱导一个态射

$$\left(\mathbb{H}\mathrm{om}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})^\wedge\right)_m \quad\text{and}\quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}}),\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}})\langle -m\rangle)$$

由于 $\mathbb{V}$ 是忠实的，该态射是单射。由引理 5.8 可知，这些向量空间具有相同的有限维数。因此，该态射是同构，这证明 $\mathbb{V}$是全忠实的。□

注记 5.10。 我们上面关于全忠实性的证明，不如 [AMRW2] 中相应结论的证明直接。这是因为在 [A1] 的框架中，没有“Soergel 模”理论。

6. 构造 $2m_{st}$-价态射

从现在起，我们不再假设 W 有限。因此，我们考虑任意的考克斯特系统 $(W,\ S)$，以及满足 §2.1、§2.3 和 §4.9 条件的 $(W,\ S)$ 的实现 $\mathfrak{h}$。

6.1. 概述。 给定一对不同的简单反射 s、t，使得乘积 st 的有限阶为 $m_{s,\ t}$，我们将用 $w(s,\ t)$ 表示长度为 m_s 的词 $(s,\ t,\ \cdots)_{,\ t}$其中各字母在 s 和 t 之间交替出现。注意，W 中的关系 $\pi(w(s,\ t))=\pi(w(t,\ s))$ 恰好是与 s 和 t 相关的辫关系。本节的目标是为任意这样的 s、t 构造一个典范态射

$$f_{s,t}:\widetilde{\mathcal{T}}_{w(s,t)}\to\widetilde{\mathcal{T}}_{w(t,s)}$$

它最终将是 Hecke 范畴中与 (s,t) 相关联的 $2m_{s,t}$ 价态射在 Koszul 对偶下的像。

我们将按以下步骤进行。根据 Abe 理论，存在唯一一个态射

$$\varphi_{s,t}:B^\wedge_{w(s,t)}\to B^\wedge_{w(t,s)}$$

在 $\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$ 中，使用 §3.2 的记号，我们有

$$\varphi_{s,t}(u_{w(s,t)})=u_{w(t,s)}, \tag{6.1}$$

参见 [A2，定理 3.9]。（更具体地说，该参考文献指出了此类态射的存在性。唯一性则由 [A1，定理 4.6] 以及 [Li，§4.1]中的计算得出。）现在，选取一个包含 s 和 t、并生成 W的一个有限子群 W' 的子集 $S'\subset S$。此外，为考克斯特系统 $(W',\ S')$ 及其实现 $\mathfrak{h}_{|W'}$选取相应的数据，以便定义 §5.4 中的函子$\mathbb{V}_{W'}$及其幺半结构（见（5.3）–（5.4））。于是，范畴 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}_{|W'},W')$以自然方式与 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$的一个全子范畴相对应，并且这两个范畴中的对象

$\sim$ $\sim\mathcal{T}_{w(s,t)}$ 和 $\mathcal{T}_{w(t,s)}$ 相同。由 $\mathbb{V}_{W'}$ 的全忠实性（见定理 5.1），存在唯一的上述态射 $f_{s,t}$，使得

$$\mathbb{V}_{W'}(f_{s,t}) = \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t} \circ (\gamma_{w(s,t)})^{-1}, \tag{6.2}$$

这便给出了所需的态射。

显然，这一定义存在一个问题，因为它可能取决于我们引入的额外数据：子集 S'，以及定义 $\mathbb{V}_{W'}$ 时涉及的数据。我们的目标正是证明，事实上并非如此。注意，我们本可以通过设定 $S' = \{s,t\}$ 来解决对 S' 选择的依赖问题；然而，后面我们需要用到 (6.2) 对 S' 的某些其他选择也成立。

6.2. **独立性证明**。因此，我们的目标是证明以下断言。

命题 6.1。对于任意一对$(s,\ t)$ 生成一个有限子群的简单反射 - 在 W 中，存在一个态射

$$f_{s,t} : \widetilde{\mathcal{T}}_{w(s,t)} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{w(t,s)}$$

它满足以下性质：对于任意包含 s 和 t 且生成 W 的有限子群 W' 的子集 $S' \subset S$，以及任意允许按照 *§5.4* 为考克斯特系统 (W', S') 及其实现 $\mathfrak{h}_{|W'}$ 定义幺半函子 $\mathbb{V}_{W'}$ 的选择 (5.3)–(5.4)，等式 (6.2) 成立。

命题 6.1 的证明将用到以下预备结果。回顾，对于任意 $s \in S$，态射

$$\widehat{\epsilon}_s : \widetilde{\mathcal{T}}_s \to \widetilde{\mathcal{T}}_1\langle 1\rangle \tag{6.3}$$

在 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中，该态射构造于 [AMRW1, §5.3.4]。对于表达式 $\underline{w} = (s_1, \cdots, s_r)$，我们定义

$$\widehat{\epsilon}_{\underline{w}} := \widehat{\epsilon}_{s_1} \widehat{\star} \cdots \widehat{\star} \widehat{\epsilon}_{s_r} : \widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_1\langle \ell(\underline{w})\rangle. \tag{6.4}$$

引理 6.2。设 (s,t) 是一对生成 W 的有限子群的简单反射。$\Bbbk$-向量空间

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{w(s,t)}, \mathcal{T}_1\langle \ell(w(s,t))\rangle)$$

是一维的，并由 对于$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)})$张成。此外，对于任意生成 W 的有限子群 W' 的子集 $S' \subset S$，以及任意允许按照 *§5.4* 定义幺半函子 $\mathbb{V}_{W'}$ 的数据 (5.3)–(5.4)，若 $f_{s,t}$ 是满足 (6.2) 的唯一态射，则有

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) = \mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}).$$

证明。沿用引理 5.8 的证明中引入的记号，由 (5.15) 可得

$$p^1_{w(s,t)}(v) = \langle \underline{H}_{w(s,t)}, \underline{H}_1\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_{\Bbbk} \left(\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{w(s,t)}, \mathcal{T}_1\langle n\rangle)\right) v^n.$$

（在第 5 节中假设 W 是有限的，但这一条件并非该陈述成立所必需。）另一方面，使用 [EW2 引理 2.7] 中的公式可知，$p^1_{w(s,t)}(v)$ 中出现的最高单项式是 $v^{\ell(w(s,t))}$，且其系数为 1；由此可得

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{w(s,t)}, \mathcal{T}_1\langle \ell(w(s,t))\rangle) = 1.$$

[AMRW2 引理 4.4] 的证明中的论证表明 $\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) \neq 0$；因此，该态射是 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{w(s,t)}, \mathcal{T}_1\langle \ell(w(s,t))\rangle)$ 的一个生成元。

现在，固定引理第三句中的数据，并考虑相应的态射 $f_{s,t}$。由上面的证明可知，存在$a \in \Bbbk$ 使得

$$\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) = a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}), \tag{6.5}$$

而我们需要证明的是 $a = 1$。为此，我们将以不同方式描述一些态射，然后进行比较。

我们先计算态射

$$\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) \left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right) \in \mathbb{V}_{W'}(\widetilde{\mathcal{T}}_1) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{P}}_{W'}, \widetilde{\mathcal{T}}_1),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{P}}_{W'}$ 是我们选定的对象 (5.3)，并且对于任意 $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W')$，$\gamma_{\underline{w}}$ 是根据我们对态射 (5.4) 的选择得到的同构 (5.14)。具体而言，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) \circ \gamma_{w(s,t)} &= \mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}) \circ \mathbb{V}_{W'}(f_{s,t}) \circ \gamma_{w(s,t)} \\ &= \mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}) \circ \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t}\end{aligned}$$

由 (6.2) 得。现在我们有

$$(\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}) \circ \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t})(u_{w(s,t)}) = (\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}\langle -\ell(w(t,s))\rangle) \circ (\gamma_{w(t,s)}(u_{w(t,s)})).$$

根据定义，态射

$$\gamma_{w(t,s)}(u_{w(t,s)}) : \widetilde{\mathcal{P}}_{W'} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{w(t,s)}$$

是态射

$$(\zeta_t \mathbin{\widehat{\star}} \zeta_s \mathbin{\widehat{\star}} \cdots) \circ \delta^{\ell(w(s,t))-1}$$

其中我们使用 (5.5) 中的记号，并且对于任意 $n \geq 1$，态射

$$\delta^n : \widetilde{\mathcal{P}}_{W'} \to \underbrace{\widetilde{\mathcal{P}}_{W'} \mathbin{\widehat{\star}} \cdots \mathbin{\widehat{\star}} \widetilde{\mathcal{P}}_{W'}}_{n+1 \text{ times}}$$

是 $\widetilde{\mathcal{P}}_{W'}$ 的第 n 个余乘态射，参见命题 5.3。根据 $\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}$ 的定义（见 (6.4)），我们推得

$$\begin{aligned}&(\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}) \circ \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t})(u_{w(s,t)}) \\ &\quad = (\widehat{\epsilon}_t\langle -1\rangle \mathbin{\widehat{\star}} \widehat{\epsilon}_s\langle -1\rangle \mathbin{\widehat{\star}} \cdots) \circ (\zeta_t \mathbin{\widehat{\star}} \zeta_s \mathbin{\widehat{\star}} \cdots) \circ \delta^{\ell(w(s,t))-1} \\ &\quad = ((\widehat{\epsilon}_t \circ \zeta_t\langle -1\rangle) \mathbin{\widehat{\star}} (\widehat{\epsilon}_s \circ \zeta_s\langle -1\rangle) \mathbin{\widehat{\star}} \cdots) \circ \delta^{\ell(w(s,t))-1}\end{aligned}$$

由交换律 (4.12) 得。使用 (5.6) 和余代数的公理，我们最终推得

$$(\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)}) \circ \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t})(u_{w(s,t)}) = \xi,$$

因此

$$\left(\mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) \circ \gamma_{w(s,t)}\right)(u_{w(s,t)}) = \xi.$$

类似的考量表明 $\mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) \left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right) = \xi$，这最终表明

$$\xi = \mathbb{V}_{W'}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) \left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right) = \mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) \left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right). \tag{6.6}$$

使用 (6.5)，我们推得

$$\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\xi) = \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t} \circ (\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)}))\right)$$

$$= \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}\right) \circ \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right)$$
$$= a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}\right) \circ \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right)$$
$$= a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}\left(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)} \circ \gamma_{w(s,t)}(u_{w(s,t)})\right) = a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\xi).$$

由于 $\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\xi) \neq 0$ （参见 (5.4) 后的注释），这意味着 $a = 1$，从而完成证明。□

注记 6.3。 等式 (6.6) 以及 $\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\xi) \neq 0$ 这一事实也意味着 $\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) \neq 0$。

命题 *6.1* 的证明。 我们需要证明：若 $f_{s,\,t}$ 和 $f'_{s,\,t}$ 是按照引理 6.2 构造的两个态射，则 $f_{s,\,t} = f'_{s,\,t}$。现在，$\Bbbk$-向量~空间 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\widehat{s}}, \mathcal{T}_{\widehat{t}})$ 是一维的，例如，因为它与空间 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(B^{\wedge}_{w(s,t)}, B^{\wedge}_{w(t,s)})$ 同构，而如 §6.1 中所解释的，该空间是一维的。这个论证还表明 $f_{s,\,t}$ 和 $f'_{s,\,t}$ 均非零；因此存在 $a \in \Bbbk$，使得 $f'_{s,\,t} = a \cdot f_{s,\,t}$。使用引理 6.2，我们进而得到

$$\mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}) = \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f'_{s,t}) = a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(t,s)} \circ f_{s,t}) = a \cdot \mathsf{For}_{\mathsf{LM}}^{\mathsf{FM}}(\widehat{\epsilon}_{w(s,t)}).$$

根据注6.3，这意味着 $a = 1$，从而完成证明。 □

7. Koszul duality

我们继续沿用第 6 节的设定。

7.1. **幺半 Koszul 对偶**。 我们对 Koszul 对偶的第一种表述推广了 [AMRW2, Theorem 5.1], ，如下所示。

定理 7.1. 存在一个幺半范畴等价

$$\Phi : \mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W) \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$$

~它满足 $\Phi \circ (1) = \langle 1 \rangle \circ \Phi$ 以及 $\Phi(B^{\wedge}_{\underline{w}}) = \mathcal{T}_{\underline{w}}$，对任意 $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$ 均成立。

幺半函子 Φ 在 §7.2–7.3 中构造。根据定义，它满足~$\Phi \circ (1) = \langle 1 \rangle \circ \Phi$ 以及 $\Phi(B^{\wedge}_{\underline{w}}) = \mathcal{T}_{\underline{w}}$，对任意 $\underline{w} \in \mathrm{Exp}(W)$ 均成立；特别地，它在 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 与 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的对象集合之间诱导出一个双射。因此，要证明该函子是一个等价，只需证明它是全忠实的，这将在 §7.5 中完成。

注记 7.2。 当 W 是有限时，定理 7.1 可由定理 5.1 与定理3.3（应用于 $\mathfrak{h}^*$）结合推出。下面给出的证明的要点在于，它同样适用于无限 Coxeter 群。

7.2. **函子 Φ 的构造**。 鉴于范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的定义，要定义一个从 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 到 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 的幺半函子，并使其满足 $\Phi \circ (1) = \langle 1 \rangle \circ \Phi$，只需定义每个对象 $B^{\wedge}_{s}$（$s \in S$）及每个生成态射的像，然后验证这些态射的像满足 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$（在 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中）的定义关系，参见 §3.1。本小节将说明如何定义生成对象和生成态射的像，并将在 §7.3 中证明这些像满足所需的关系。

首先，对每个反射 $s \in S$，我们将把 $B^{\wedge}_{s}$ 发送到~对于任意~表达式 $\underline{w}$，$B^{\wedge}_{\underline{w}}$ 的像将为 $\mathcal{T}_{\underline{w}}$。

7.2.1. 多项式。 正如我们在 §4.5 中所指出的，我们有一个分次代数态射 $\mu_{\widetilde{\mathcal{T}}_1} :_{\sim} R^\vee \to \mathbb{E}\mathrm{nd}^{\mathsf{FM}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_1)$。因此，对于 $x \in R_m^\wedge$，我们可以设

$$\Phi\left(\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \vdots\ x\ \vdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right) := \mu_{\widetilde{\mathcal{T}}_1}(x) : \widetilde{\mathcal{T}}_1 \to \widetilde{\mathcal{T}}_1\langle m\rangle.$$

7.2.2. 点态射。 令 $s \in S$。回顾一下，我们曾在 (6.3) 中考虑过某个态射 $\widehat{\epsilon}_s$。再考虑态射

$$\widehat{\eta}_s : \widetilde{\mathcal{T}}_1\langle -1\rangle \to \widetilde{\mathcal{T}}_s$$

定义见 [AMRW1, §5.3.4]。令

$$\Phi\left(\begin{array}{c} s \\ \bullet \end{array}\right) := \widehat{\eta}_s \quad \text{and} \quad \Phi\left(\begin{array}{c} \bullet \\ s \end{array}\right) := \widehat{\epsilon}_s.$$

7.2.3. 三价顶点。 再次令 $s \in S$。我们注意到， [AMRW2, 引理 4.2] 的证明完全是图表论证，因此同样适用于我们当前的情形。由此可知，存在唯一的态射

$$\widehat{b}_1 : \widetilde{\mathcal{T}}_s \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \widetilde{\mathcal{T}}_s\langle -1\rangle, \quad \text{resp.} \quad \widehat{b}_2 : \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \widetilde{\mathcal{T}}_s \to \widetilde{\mathcal{T}}_s\langle -1\rangle,$$

满足

$$(\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{T}}_s} \widehat{\star} \widehat{\epsilon}_s) \circ \widehat{b}_1 = \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{T}}_s}, \quad \text{resp.} \quad \widehat{b}_2 \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{T}}_s} \widehat{\star} \widehat{\eta}_s) = \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{T}}_s}, \tag{7.1}$$

对于任意 $s \in S$。令

$$\Phi\left(\begin{array}{c} s \quad s \\ \curlyvee \\ s \end{array}\right) = \widehat{b}_1 \quad \text{and} \quad \Phi\left(\begin{array}{c} s \\ \curlywedge \\ s \quad s \end{array}\right) = \widehat{b}_2.$$

7.2.4. $2m_{st}$-价顶点。 设 s、$t \in S$ 是生成 W的有限子群的两个不同简单反射。我们定义

$$\Phi\left(\begin{array}{c} t \quad s \quad \cdots \\ \cdots \\ s \quad t \quad \cdots \end{array}\right) = f_{s,t},$$

其中右侧与命题 6.1 中的相同。

7.3. **函子 Φ 定义良好**。 为完成 Φ 的构造，我们现在需要验证 §7.2 中考察的态射满足范畴 $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$的定义关系。我们证明这一点所采用的策略与 [AMRW2, §4.3]中的相同。

固定一个待检验的任意关系。存在一个子集 $S' \subset S$，它生成 W 的一个有限子群 W'，使得该关系只涉及 S' 中的词。（子集 S' 的基数至多为 3，但这对我们的目的并不重要。）因此，用 (W', S') 替换 (W, S) 后，我们可以假设 W 是有限的。在此假设下，我们可以考虑第 5 节中的函子 $\mathbb{V}$。由于这个函子是全忠实的，所讨论的关系在 $\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 中成立，当且仅当它在应用 $\mathbb{V}$ 后成立。为检验这一点，我们将首先计算生成态射在 $\mathbb{V} \circ \Phi$ 下的像，见 §7.3.1–7.3.5。这些计算将表明，同构 $\gamma_{\underline{w}}$（见 (5.14)）定义了从 $\mathbb{V} \circ \Phi$ 到函子 $\mathcal{F}$: $\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W) \to \mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的幺半函子同构；该函子

见 [A2，§3.5]。随后，所讨论的关系成立这一事实将由 $\mathcal{F}$ 确实定义良好这一事实推出，见 [A2，引理 3.14]。

7.3.1. 多项式。 若 $x \in R^\wedge_m$，则该态射

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{c} \vdots \\ x \\ \vdots \end{array} \right) : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1) \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1\langle m \rangle)$$

由下式给出

$$f \mapsto \mu_{\widetilde{\mathcal{T}}_1}(x) \circ f = f \circ \mu_{\widetilde{\mathcal{P}}}(x),$$

~即由 x 在 $R^\wedge$-模 $\mathbb{V}(\mathcal{T}_1) = R^\wedge$ 上的作用给出。

7.3.2. 上点。 根据定义，我们有

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{c} \bullet^{s} \\ | \end{array} \right) = \mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_s) : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s) \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1\langle 1 \rangle).$$

回忆一下 (5.7) 中的识别 $\gamma_s : B_s^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)$，它满足 $\gamma_s(u_s) = \zeta_s$。该态射

$$\mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_s) \circ \gamma_s : B_s^\wedge \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1\langle 1 \rangle) = R^\wedge(1)$$

是一个 $R^\wedge$-模的态射，它将生成元 u_s 映射到

$$\widehat{\epsilon}_s\langle -1 \rangle \circ \zeta_s = \xi,$$

见 (5.6)，即映射到 $\gamma_\varnothing(u_\varnothing)$。因此它与“乘法”态射重合

$$m_s : B_s^\wedge \to R^\wedge(1)$$

由 $a \otimes b \mapsto ab$ 定义，见 [A1, §3.3]。

7.3.3. 下点。现在我们分析

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{c} {}^{s} \\ \bullet \\ | \end{array} \right) = \mathbb{V}(\widehat{\eta}_s) : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1\langle -1 \rangle) \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s).$$

根据 [AMRW1, 引理 5.3.2 (1)]，我们有 $\widehat{\epsilon}_s \circ \widehat{\eta}_s = \mu_{\widetilde{\mathcal{T}}_1}(\alpha_s^\vee)$，因此

$$\mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_s) \circ \mathbb{V}(\widehat{\eta}_s) = \alpha_s^\vee \cdot \mathrm{id} : \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1) \to \mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_1).$$

因此，态射 $\beta'_s := \gamma_s^{-1} \circ \mathbb{V}(\widehat{\eta}_s) \circ \gamma_\varnothing$ 满足 $m_s \circ \beta'_s = \alpha_s^\vee \cdot \mathrm{id}_{R^\wedge}$。现在，$\Bbbk$-向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(R^\wedge, B_s^\wedge(1))$ 是一维的，并由满足 $\beta_s(1) = \delta_s \otimes 1 - 1 \otimes s(\delta_s)$ 的态射 β_s 生成，其中 $\delta_s \in V$ 是满足 $\langle \alpha_s, \delta_s \rangle = 1$ 的元素，参见 (3.3)。这个生成元是满足 $m_s \circ \beta_s = \alpha_s^\vee \cdot \mathrm{id}_{R^\wedge}$ 的唯一向量，因此 $\beta_s = \beta'_s$。

7.3.4. 三价顶点。 设 $s \in S$。由 [A1，推论 4.7] 以及在 Hecke代数中的一个简单计算可知，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(B_s^\wedge, B_{(s,s)}^\wedge(-1))$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(B_{(s,s)}^\wedge, B_s^\wedge(-1))$ 均为一维。正如例如 [A2，第 3 节5], 中所解释的，我们可以取以下态射作为这些空间的生成元

$$t_1 : f \otimes g \mapsto f \otimes 1 \otimes g \quad \text{and} \quad t_2 : f \otimes g \otimes h \mapsto f\partial_s(g) \otimes h,$$

其中我们使用如下识别

$$B_{(s,s)}^\wedge = B_s^\wedge \otimes_{R^\wedge} B_s^\wedge = R^\wedge \otimes_{(R^\wedge)^s} R^\wedge \otimes_{(R^\wedge)^s} R^\wedge\langle -2 \rangle,$$

且 ∂_s 是与 s 相关联的 Demazure 算子，参见 [EW2，第 3 节。3]

我们有

$$(\mathrm{id}_{B_s^\wedge} \otimes m_s(-1)) \circ t_1 = \mathrm{id}_{B_s^\wedge} \quad \text{and} \quad t_2(1) \circ (\mathrm{id}_{B_s^\wedge} \otimes \beta_s) = \mathrm{id}_{B_s^\wedge}.$$

另一方面，根据定义（见 (7.1)），我们有

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)} \otimes \mathbb{V}(\widehat{\epsilon}_s)(-1)) \circ \mathbb{V}(\widehat{b}_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)} \quad \text{and} \quad \mathbb{V}(\widehat{b}_2)(1) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)} \otimes \mathbb{V}(\widehat{\eta}_s)) = \mathrm{id}_{\mathbb{V}(\widetilde{\mathcal{T}}_s)}.$$

使用 §§7.3.2–7.3.3 中的描述，我们推得

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{ccc} s & & s \\ & \diagdown\!\diagup & \\ & s & \end{array} \right) = \gamma_{(s,s)} \circ t_1 \circ \gamma_s^{-1}$$

and

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{ccc} & s & \\ & \diagdown\!\diagup & \\ s & & s \end{array} \right) = \gamma_s \circ t_2 \circ (\gamma_{(s,s)})^{-1}.$$

7.3.5. $2m_{st}$-价顶点。设 s、$t \in S$ 是生成 W 的一个有限子群的两个不同简单反射。根据 $f_{s,t}$ 的定义（见引理 6.1），我们有

$$\mathbb{V} \circ \Phi \left(\begin{array}{ccccc} t & s & & & \\ & \diagdown & \diagup & \cdots & \\ & & \diagup & & \\ & & \diagdown & & \\ & \diagdown & \diagup & \cdots & \\ s & t & & & \end{array} \right) = \mathbb{V}(f_{s,t}) = \gamma_{w(t,s)} \circ \varphi_{s,t} \circ (\gamma_{w(s,t)})^{-1}.$$

7.4. **三角范畴科祖尔对偶**。至此，我们已经构造了定理 7.1 中的幺半函子 Φ。我们仍用 Φ 表示由 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 到 $\mathscr{T}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)$ 的诱导函子。为了证明该函子是等价，我们将先研究此函子的一个变体，它是通过“消去 $R^\wedge$ 的右作用”得到的。具体而言，回顾 §4.4 中的构造。根据 $\underline{\mathscr{D}}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 的定义，存在唯一的加性函子

$$\underline{\Phi} : \underline{\mathscr{D}}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W) \to \mathsf{Tilt}^{\oplus}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$$

使得

$$\mathsf{For}^{\mathsf{FM}}_{\mathsf{LM}} \circ \Phi = \underline{\Phi} \circ \mathsf{For}^{\mathsf{BE}}_{\mathsf{LE}}.$$

还要回顾等价 (4.10)，这里记作 $\imath$。最后，还要回顾幺半范畴 $(\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)\ \widehat{\star})$ 在范畴 $\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h}, W)$ 上的作用，见注 4.14(4)。

以下陈述是 AMRW2 定理 5.2 和命题 5.5] 的一个类似结果。

定理 7.3。函子

$$\varkappa := \imath \circ K^{\mathrm{b}}(\underline{\Phi}) : \mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*, W) \to \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)$$

是三角范畴之间的等价。它满足 $\varkappa \circ (1) = \langle 1 \rangle \circ \varkappa$，并且对于任意 $\underline{v} \in \mathrm{Exp}(W)$ 以及任意 $w \in W$，都有

$$\varkappa(\underline{B}^\wedge_{\underline{v}}) \cong \mathcal{T}_{\underline{v}}, \quad \varkappa(\underline{\Delta}^\wedge_w) \simeq \Delta_w, \quad \varkappa(\underline{\nabla}^\wedge_w) \simeq \quad {}_w.$$

最后，对于任意 $\mathcal{F} \in \mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*, W)$ 和 $\mathcal{G} \in \mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*, W)$，我们都有一个典范同构

$$\varkappa(\mathcal{F} \underline{\star} \mathcal{G}) \cong \imath \left(\Phi(\mathcal{F}) \widehat{\star} \imath^{-1}(\mathcal{G}) \right). \tag{7.2}$$

证明。 $\varkappa \circ (1) = \langle 1 \rangle \circ \varkappa$ 以及对于任意表达式 $\underline{v}$， $\varkappa(\underline{B}_{\underline{v}}^{\wedge}) \cong \mathcal{T}_{\underline{v}}$，均由构造可知成立。同构 (7.2) 也由构造及 Φ 的幺半性显然成立。接下来，我们将沿用 [AMRW2, §5.2] 的策略，证明对于任意 $w \in W$， $\varkappa(\underline{\Delta}_w^{\wedge}) \simeq \Delta_w \circ \varkappa(\underline{\nabla}_w^{\wedge}) \simeq {}_w$ 的证明类似，留给读者。

首先，对于 $s \in S$，我们考虑函子

$$C'_s := \imath \circ K^{\mathrm{b}}(\widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star}(-)) \circ \imath^{-1} : \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W).$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$也可以用 $\mathcal{T}_1$ 替代 $\mathcal{T}_s$，进行相同的构造，从而得到一个与恒等函子同构的函子。这些构造具有函子性，并且我们有一个函子态射 $\widetilde{\epsilon}_s : C'_s \to \mathrm{id}\langle 1 \rangle$，它由态射 $\widehat{\epsilon}_s$诱导，见 (6.3)。如 [AMRW2, 引理 5.3] 所示，对于所有 $w \in W$，态射 $\widetilde{\epsilon}_s(\Delta_w) : C'_s(\Delta_w) \to \Delta_w\langle 1 \rangle$ 均非零。另一方面，回顾引理 4.7 中考虑的函子。如 [AMRW2], 所示，存在一个函子同构

$$C'_s \cong \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star}(-). \tag{7.3}$$

现在我们通过对 $\ell(w)$ 进行归纳法来证明所需的结论。对于 $w = 1$，根据定义，由于 $\underline{\Delta}_1^{\wedge} = \underline{B}_1^{\wedge}$ 和 $\Delta_1 = \mathcal{T}_1$，该结论成立。设 $w \in W$ 和 $s \in S$ 满足$sw < w$，并假设该结论对 sw 已知。由 (4.1) 中 $\Delta_s^{\wedge}$ 的显式描述，我们有一个三角形

$$\Delta_s^{\wedge} \to B_s^{\wedge} \to \Delta_1^{\wedge}(1) \xrightarrow{[1]}$$

在 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 中，第二个态射由上点给出。在右侧与$\Delta_{sw}^{\wedge}$ 作张量积，并使用 [ARV 命题 6.11], ，我们得到一个三角形

$$\Delta_w^{\wedge} \to B_s^{\wedge} \underline{\star} \Delta_{sw}^{\wedge} \to \Delta_{sw}^{\wedge}(1) \xrightarrow{[1]},$$

其中第二个态射是上点与 $\mathrm{id}^{\Delta_{sw}^{\wedge}}$ 作张量积。应用 $\varkappa \circ \mathsf{For}_{\mathsf{LE}}^{\mathsf{BE}}$，并使用 (7.2) 和 (7.3)，我们推得一个三角形

$$\varkappa(\underline{\Delta}_w^{\wedge}) \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \varkappa(\underline{\Delta}_{sw}^{\wedge}) \to \varkappa(\underline{\Delta}_{sw}^{\wedge})\langle 1 \rangle \xrightarrow{[1]},$$

其中第二个态射是通过识别 (7.3) 由 $\widetilde{\epsilon}_s$ 诱导的。使用归纳假设，我们可以将此三角形改写为

$$\varkappa(\underline{\Delta}_w^{\wedge}) \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \Delta_{sw} \xrightarrow{f} \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \xrightarrow{[1]}$$

其中 $f \neq 0$。我们将此三角形与下列三角形进行比较

$$\Delta_w \to \widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \Delta_{sw} \xrightarrow{g} \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \xrightarrow{[1]} \tag{7.4}$$

由引理 4.6(1) 给出。这里我们也有 $g \neq 0$。我们将在下文证明

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)} \left(\widetilde{\mathcal{T}}_s \widehat{\star} \Delta_{sw}, \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \right) = 1; \tag{7.5}$$

这将意味着 f 和 g 互为倍数，从而有 $\varkappa(\underline{\Delta}_w) \cong \Delta_w$，由此完成证明。

为了证明 (7.5)，我们注意到

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)} \left(\Delta_{sw}\langle 1 \rangle, \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \right) = 1 \quad \text{and}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)} \left(\Delta_w, \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \right) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h}, W)} \left(\Delta_w[1], \Delta_{sw}\langle 1 \rangle \right),$$

其中前两个等式由最高权范畴中标准对象的性质得出，第三个等式则是以下公理的推论:

由于标准对象属于心，t-结构。因此，对三角形 (7.4) 应用 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(-,\Delta_{sw}\langle 1\rangle)$，即可得到 (7.5)。

最后，我们证明 $\varkappa$ 是范畴等价。为此，我们首先注意到，对于任意的 $v,w\in W$和 n, $m\in W$, $\varkappa$诱导一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)}(\underline{\Delta}^\wedge_w,\underline{\nabla}^\wedge_v(n)[m])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)}(\Delta_w,\ {}_v(n)[m]).$$

事实上，除非 $v=w$ 和 $n=m=0$，否则这些空间均为零；在这种情况下，它们是一维的，参见 [ARV, (9.2)]。因此，要证明这一断言，只需证明若 $g\colon \underline{\Delta}^\wedge_w\to\underline{\nabla}^\wedge_v$ 是非零态射，则 $\varkappa(g)\neq 0$。然而，由引理 4.1可知，g的锥属于 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$ 的三角子范畴，该子范畴由满足 $v\in W$ 和 $v<w$ 的对象 $\underline{\Delta}^\wedge_v\langle n\rangle$ 生成。因此，$\varkappa(g)$的锥属于 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$ 的三角子范畴，该子范畴由满足 $v\in W$ 和 $v<w$ 的对象 $\Delta_v\langle n\rangle$ 生成。由于 ${}_w\oplus\Delta_w[1]$ 不属于这个子范畴（同样由再粘合形式体系可知），因此可得$\varkappa(g)\neq 0$。

现在，回想一下，对象（$\underline{\Delta}^\wedge_w\langle n\rangle\colon\ w\in W, n\in\mathbb{Z}$）生成三角范畴 $\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$；对象（$\underline{\nabla}^\wedge_w\langle n\rangle\colon\ w\in W, n\in\mathbb{Z}$）也同样如此，参见例如 [ARV，引理 6.9]。根据 [AMRW2，引理 5.6]（Beılinson 引理的一个版本），因此，上面验证的性质意味着 $\varkappa$ 是全忠实的。由于其本质像包含对象（$\Delta_w\langle n\rangle\colon\ w\in W, n\in\mathbb{Z}$），而这些对象作为三角范畴生成 $\mathsf{LM}(\mathfrak{h},W)$，因此该函子也是本质满的，由此完成证明。□

7.5. **全忠实性** Φ。如 §7.1 所述，要完成定理 7.1 的证明，我们只需证明 Φ 是全忠实的，也就是说，对于任意表达式$\underline{v},\underline{w}$，该函子都会诱导一个分次 $R^\wedge$-模的同构

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(B^\wedge_{\underline{v}},B^\wedge_{\underline{w}}(n))\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{v}},\widetilde{\mathcal{T}}_{\underline{w}}\langle n\rangle).$$

现在，根据推论 6.14和命题 4.11，两边都是关于 $R^\wedge$ by [EW2 的有限秩分次自由对象。要证明此断言，由引理 2.2 可知，只需证明对 $(-)\otimes_{R^\wedge}\Bbbk$ 应用后得到的态射是一个同构。然而，根据命题 4.11，后一个态射可识别为由

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)}(\underline{B}^\wedge_{\underline{v}},\underline{B}^\wedge_{\underline{w}}(n))\to\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LM}}(\mathfrak{h},W)}(\mathcal{T}_{\underline{v}},\mathcal{T}_{\underline{w}}\langle n\rangle)$$

$\underline{\Phi}$诱导的态射；因此根据定理 7.3，它是一个同构。

7.6. **自对偶性**。现在我们证明一个类似于 [AMRW2, 定理 5.7] 的结果。（之所以称此版本为“自对偶性”，是因为右等变范畴与左等变范畴在典范意义下等价，详见 §4.4。）回顾 §3.1 中定义的不可分解对象 $\overline{B}_w\in\overline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\underline{B}^\wedge_w\in\underline{\mathscr{D}}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}^*,W)$（针对 $w\in W$），以及 §§4.3–4.4 中定义的不可分解对象 $\overline{\mathcal{T}}_w\in\mathsf{Tilt}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h},W)$ 和 $\underline{\mathcal{T}}^\wedge_w\in\mathsf{Tilt}_{\mathsf{LE}}(\mathfrak{h}^*,W)$（针对 $w\in W$）。

定理 7.4。存在一个三角范畴的等价

$$\kappa:\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)\xrightarrow{\sim}\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)$$

它满足 $\kappa\circ\langle 1\rangle=(1)\circ\kappa$，并且

$$\kappa(\overline{\Delta}_w)\simeq\underline{\Delta}^\wedge_w,\quad \kappa(\overline{\nabla}_w)\simeq\underline{\nabla}^\wedge_w,\quad \kappa(\overline{B}_w)\simeq\underline{\mathcal{T}}^\wedge_w,\quad \kappa(\overline{\mathcal{T}}_w)\simeq\underline{B}^\wedge_w$$

对任意 $w \in W$。

证明。 我们将 κ 定义为等价复合的逆。关于$\mathsf{RE}^{\mathsf{LM}} \circ \varkappa$，参见 (4.7) 和定理 7.3。由定理 7.3 可知，此函子满足 $\kappa(\overline{\Delta}_w) \simeq \underline{\Delta}_w^\wedge$且 $\kappa(\overline{\nabla}_w) \simeq \underline{\nabla}_w^\wedge$，对任意 $w \in W$ 均成立。对于 $w \in W$， $\kappa(\overline{T}_w) \simeq \underline{B}_w^\wedge$ 这一事实也直接源自 $\varkappa$的性质。最后，对任意 $w \in W$，$\kappa(\overline{T}_w) \simeq \underline{B}_w^\wedge$ 这一事实可完全仿照 AMRW2 的定理 5.7] 的证明推出。□

7.7. 不可分解倾斜对象的组合学应用。有两族由W 中的元素对参数化的劳朗多项式，可以与实现 $\mathfrak{h}$联系起来。首先，考虑幺半范畴 $\mathscr{D}(\mathfrak{h}, W)$ 的分裂格罗滕迪克环 $[\mathscr{D}(\mathfrak{h}, W)]_\oplus$，我们将其视为一个 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-代数，其中 v 通过由 (1) 诱导的态射作用。回想一下，使用引理 5.8 的证明中的记号（但现在允许 W 不是有限的），存在唯一的 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-代数同构

$$\eta : \mathcal{H}_{(W,S)} \xrightarrow{\sim} [\mathscr{D}(\mathfrak{h}, W)]_\oplus$$

它将 $H_s + v$ 映射到 $[B_s]$，对任意 $s \in S$皆如此，参见 [EW2，推论 6.27]。对于 $w \in W$，我们定义

$$\underline{H}_w^{\mathfrak{h}} = \eta^{-1}([B_w]).$$

那么 $(\underline{H}_w^{\mathfrak{h}} : w \in W)$ 是 $\mathcal{H}_{(W,S)}$ 的一组基，我们称之为与 $\mathfrak{h}$ 相关联的“典范基”。我们可以得到第一族劳朗多项式 $(h_{y,\,w}^{\mathfrak{h}} : y, w \in W)$，其系数是将该基中的元素在标准基 $(H_y : y \in W)$ 下展开所得；也就是说，对于 $w \in W$，我们有

$$\underline{H}_w^{\mathfrak{h}} = \sum_{y \in W} h_{y,w}^{\mathfrak{h}} \cdot H_y.$$

（在 [JW] 中研究的“p-典范”基就是这一构造的一个例子。）

另一方面，考虑 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 中的对象 $(\overline{T}_w : w \in W)$。给定 $y \in W$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，我们将用以下符号表示

$$(\overline{T}_w : \overline{\Delta}_y\langle n\rangle)$$

$\overline{\Delta}_y\langle n\rangle$ 在 $\overline{T}_w$ 的一个标准滤过中出现的次数。（这是一个标准事实，该数量不依赖于滤过的选取。）于是，对于 $y, w \in W$，我们可以考虑劳朗多项式

$$t_{y,w}^{\mathfrak{h}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\overline{T}_w : \overline{\Delta}_y\langle n\rangle) \cdot v^n.$$

以下陈述表明，从$\mathfrak{h}$ 变为 $\mathfrak{h}^*$时，这些族会互换。

推论 7.5. 对于任意 $y, w \in W$，我们有 $h_{y,w}^{\mathfrak{h}} = t_y^{\mathfrak{h}^*}{}_{,w}$。

证明。 如 [ARV, §6.6], 中所述，自然函子 $\mathscr{D}^{\oplus}{}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W) \to \mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 诱导出一个同构

$$[\mathscr{D}^{\oplus}_{\mathrm{BS}}(\mathfrak{h}, W)]_\oplus \xrightarrow{\sim} [\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)]_\Delta$$

其中右侧是三角范畴 $\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)$ 的 Grothendieck 群，而 η 与此同构的复合将 H_w 映射到 $[\Delta_w]$，对任意 $w \in W$ 都成立。函子 $\mathsf{For}_{\mathsf{RE}}^{\mathsf{BE}}$ 也诱导出一个同构

$$[\mathsf{BE}(\mathfrak{h}, W)]_\Delta \xrightarrow{\sim} [\mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W)]_\Delta,$$

例如，因为它是 t-正合的，并且在两侧 perverse t-结构的心中，诱导简单对象同构类集合之间的同构。由此我们得到一个同构

$$\mathcal{H}_{(W,S)} \xrightarrow{\sim} [\mathsf{RE}(\mathfrak{h}, W)]_\Delta$$

将任意 $w \in W$送至$[\overline{\Delta}_w]$。根据标准对象与余标准对象之间态射空间的描述（见 [ARV, (9.2)]），逆同构将对象 M 的类送至

$$\sum_{w \in W} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)}(M, \overline{\nabla}_w(m)[n]) \cdot v^m H_w.$$

特别地，对于 $y, w \in W$，我们有

$$h^{\mathfrak{h}}_{y,w}(v) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)}(\overline{B}_w, \overline{\nabla}_y(m)[n]) \cdot v^m.$$

另一方面，由定理 7.4，对于任意 $y, w \in W$和 $n, m \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)}(\overline{B}_w, \overline{\nabla}_y(m)[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{LE}(\mathfrak{h}^*,W)}(\underline{\mathcal{T}}^\wedge_w, \underline{\nabla}^\wedge_y\langle m\rangle[n]).$$

因此，这个 $\Bbbk$-向量空间除非 $n = 0$，否则为零；在此情形下，其维数为 $(\underline{\mathcal{T}}^\wedge_w, \underline{\Delta}_y\langle m\rangle)$。由此我们得到

$$h^{\mathfrak{h}}_{y,w}(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\underline{\mathcal{T}}^\wedge_w, \underline{\Delta}^\wedge_y\langle m\rangle) \cdot v^m,$$

从而完成证明。 □

例 7.6。考虑例 2.1(4)中的实现。在此情形下，[EW1] 的主要结果表明，对于任意 $y, w \in W$，多项式 $h^{\mathfrak{h}}_{y,w}$ 在相差一个因子的意义下，等于与 (y, w) 相联系的 Kazhdan–Lusztig 多项式 [KL]；按照 [S2] 的记号，我们有 $h^{\mathfrak{h}}_{y,w} = h_{y,w}$。由于 Soergel 实现的对偶仍是 Soergel 实现（见例 2.3(2)），因此可推出，对于任意 Soergel 实现，我们有 $t^{\mathfrak{h}}_{y,w} = h_{y,w}$。

注 7.7。沿用例 7.6 的设定。根据 [ARV，命题 8.13]，对于任意 $w \in W$，我们有 $\overline{B}_w = \overline{\mathscr{Z}}_w$。因此，由定理 7.4 可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{RE}(\mathfrak{h},W)}(\overline{\mathscr{Z}}_w, \overline{\mathscr{Z}}_w\langle n\rangle[m]) = 0 \tag{7.6}$$

除非 $n = -m$。现在假设 W是有限的。此时，范畴 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 有足够多的投射对象；若对于 $w \in W$，我们将 $\overline{\mathscr{P}}_w$ 记作$\overline{\mathscr{Z}}_w$的射影覆盖，则令

$$\overline{\mathscr{P}} := \bigoplus_{w \in W} \overline{\mathscr{P}}_w, \quad A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(\overline{\mathscr{P}}, \overline{\mathscr{P}}\langle n\rangle)$$

我们得到一个分次 $\Bbbk$-代数 A，以及 $\mathsf{P}_{\mathsf{RE}}(\mathfrak{h}, W)$ 与有限维分次 A-模范畴之间的范畴等价。使用 (7.6) 以及 [R1, §9.2] 中的技巧，可以证明 A 是 [BGS] 意义下的 Koszul 环。

当 W 是有限二面体群且 $\mathfrak{h}$ 是几何实现时，利用定理 7.4 和 Ringel 对偶（参见 [ARV, 命题 10.2]），可以看出 A 同构于 [Sa] 中研究的分次环。

参考文献

[A1] N. Abe, 《Hecke 范畴的双模描述》, Compos. Math. 157 (2021), 2133–2159.[A2] N. Abe, 《Bott–Samelson 双模之间的一个同态》, 预印本 arXiv:2012.09414.[AMRW1] P. Achar、S. Makisumi、S. Riche 和 G. Williamson, 《旗簇上的自由单值混合倾斜层》, 预印本 arXiv:1703.05843. [AMRW2] P. Achar、S. Makisumi、S. Riche 和 G. Williamson, 《Kac–Moody群的 Koszul 对偶与倾斜模的特征》, J. Amer. Math. Soc. 32 (2019), 261–310. [AR] P. Achar 和 S. Riche, 《旗簇上的模系数 perversity 层 II：Koszul 对偶与形式性》, Duke Math. J. 165 (2016), 161–215. [ARV] P. Achar、S. Riche 和 C. Vay, 《Coxeter 群旗簇上的混合 perversity 层》, Canad. J. Math. 72 (2020), 1–55. [BBD] A. Beĭlinson、J. Bernstein 和 P. Deligne, 《Perversity 层》, 载于《奇异空间上的分析与拓扑》I（吕米尼，1981年）, Astérisque 100 (1982), 5–171. [BGS] A. Beĭlinson、V. Ginzburg 和 W. Soergel, 《表示论中的 Koszul 对偶模式》, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 473–527. [BBM] A. Beĭlinson、R. Bezrukavnikov 和 I. Mirković, 《倾斜练习》, Mosc. Math. J. 4 (2004), 547–557, 782. [BY] R. Bezrukavnikov 和 Z. Yun, 《关于 Kac–Moody群的 Koszul 对偶》, Represent. Theory 17 (2013), 1–98. [CYZ] X.-W. Chen、Y. Ye 和 P. Zhang, 《导出维数为零的代数》, Comm. Algebra 36 (2008), no. 1, 1–10. [EW1] B. Elias 和 G. Williamson, 《Soergel 双模的 Hodge 理论》, Ann. of Math. (2) 180 (2014), 1089–1136. [EW2] B. Elias 和 G. Williamson, 《Soergel 演算》, Represent. Theory 20 (2016), 295–374. [EW3] B. Elias 和 G. Williamson, 《Hecke 范畴的局部化演算》, Ann. Math. Blaise Pascal 30 (2023), no. 1, 1–73. [JW] L. T. Jensen 和 G. Williamson, 《Hecke 代数的 p典范基》, 载于《范畴化与高阶表示论》, 333–361, Contemp. Math. 683, Amer. Math. Soc., 2017.[JMW] D. Juteau、C. Mautner 和 G. Williamson, 《奇偶层》, J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), 1169–1212. [Ha] A. Hazi, 《双色 Jones-Wenzl 投影算子的存在性与可旋转性》, Bull. Lond. Math. Soc. 56 (2024), No. 3, 1095–1113. [KL] D. Kazhdan 和 G. Lusztig, 《Coxeter 群与 Hecke 代数的表示》, Invent. Math. 53 (1979), 165–184. [LC] J. Le 和 X.-W. Chen, 《三角范畴的 Karoubi 性》, J. Algebra 310 (2007), 452–457. [Li] N. Libedinsky, 《轻叶与 Lusztig 猜想》, Adv. Math. 280 (2015), 772–807. [R1] S. Riche, 《半单李代数的 Koszul 对偶与模表示》, Duke Math. J. 154 (2010), 31–134. [R4] S. Riche, 《约化代数群模表示论讲义》, 编写中的书籍，预备版本见 https://lmbp.uca.fr/~riche/curso-riche-total.pdf. [RW] S. Riche 和 G. Williamson, 《倾斜模与 p典范基》, Astérisque 397 (2018). [Sa] M. Sauerwein, 《二面体群的 Koszul 对偶与 Soergel 双模》, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), 1251–1283. [S1] W. Soergel, 《范畴、Perversity 层与关于 Weyl 群余不变量的模》, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 2, 421–445. [S2] W. Soergel, 《Kazhdan–Lusztig 多项式与倾斜模的组合学》, Represent. Theory 1 (1997), 83–114.

[S3] W. Soergel, 《Kazhdan–Lusztig 多项式与多项式环上的不可分解双模》*Kazhdan–Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomrin- gen*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), 501–525. [Ti] J. Tits, 《与 Kac–Moody 代数相关的群》*Groupes associés aux algèbres de Kac–Moody*, 载于***Bourbaki*** 研讨班 *1988/89*，报告 *700–714*，Astérisque **177**–**178** (1989), Exp. 700, 7–31. 克莱蒙奥弗涅大学、法国国家科学研究中心、LMBP，F-63000 克莱蒙费朗，法国。电子邮箱地址: simon.riche@uca.fr 科尔多瓦国立大学、数学、天文学、物理学与计算学院、CIEM – CONICET，科尔多瓦，阿根廷。电子邮箱地址: cristian.vay@unc.edu.ar