arXiv:2303.08270v1 [math.AT] 14 Mar 2023

二参数持久性元图

NateClause ！俄亥俄州立大学，哥伦布，俄亥俄州，美国

TamalK. Dey ！普渡大学，西拉斐特，印第安纳州，美国

FacundoMémoli ！俄亥俄州立大学，哥伦布，俄亥俄州，美国

Bei Wang
犹他大学，盐湖城，犹他州，美国

摘要

我们首先为二参数持久模引入元秩的概念。元秩是一种不变量，能够捕捉该模的一维切片之间态射的像所蕴含的信息。随后，我们将二参数持久模的元图定义为元秩的莫比乌斯反演，由此得到一个取值为带符号一参数持久模的函数。我们证明，元秩和元图所包含的信息分别等价于秩不变量和带符号条形码。这种等价性带来了计算上的优势：我们提出了一种算法，可在 $O(n^4)$ 时间内计算由 $O(n^3)$ 中的 M 个单形的双滤过索引的二参数模M 的元秩和元图。这意味着，相较于运行时间为 $O(n^4)$ 的现有带符号条形码计算算法，该算法有所改进；同时，我们还将M 的秩分解中矩形数量的现有上界从 $O(n^4)$ 改进为 $O(n^3)$。此外，我们定义了元秩之间以及元图之间的侵蚀距离，并证明在这些距离下，元秩和元图相对于交错距离是稳定的。最后，元图可以直观地表示为图的持久图，从而将单参数情形下广为人知的持久图推广到更一般的情形。

2012年ACM主题分类 计算理论 → 计算几何，计算数学 → 拓扑学

关键词与短语 多参数持久模、持久同调、莫比乌斯反演、条形码、计算拓扑学、拓扑数据分析

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.27

资助 *Nate Clause*：NC 获得美国国家科学基金会 CCF 1839356 和美国国家科学基金会 DMS 1547357 的部分资助。*Tamal K. Dey*：TD 获得美国国家科学基金会 CCF 2049010 的部分资助。*Facundo Mémoli*：FM 获得 BSF 2020124、美国国家科学基金会 CCF 1740761、美国国家科学基金会 CCF 1839358 和美国国家科学基金会 IIS 1901360 的部分资助。
Bei Wang：BW 获得美国国家科学基金会 IIS 2145499、美国国家科学基金会 IIS 1910733 和 DOE DE SC0021015 的部分资助。

1 引言

对于单参数持久模，持久图（或条形码）通过一组区间完整地记录了其在同构意义下的信息。持久图表示为平面上的一个多重集，其中各点的坐标是区间的出生与死亡时间，每个区间都编码了一个拓扑特征的生命周期。这种对持久模的紧凑表示便于理解和可视化。转向多参数情形时，情况会复杂得多，因为多参数持久模可能包含一些不可分解部分，而这些部分

© Nate Clause、Tamal K. Dey、Facundo Mémoli 和 Bei Wang；根据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权
第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）。编辑：Erin W. Chambers 和 Joachim Gudmundsson；文章编号 27；
页码 27:1–27:22 莱布尼茨国际信息学会议录 Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国

并不能完全由区间确定，或者无法用有限的离散方式描述 [10]。

这种复杂性的增加促使人们研究多参数持久模的其他不变量。第一个不变量是秩不变量 [10], ，它捕捉持久模中所有维度上内部线性映射的像所包含的信息。Patel 注意到，一参数情形下的持久图等价于秩函数 [24] 的莫比乌斯反演 [25] 。随后，他将广义持久图定义为一个函数的莫比乌斯反演：该函数定义在$\mathbb{R}$的区间子集上，记作 Dgm，取值于某个阿贝尔群。

莫比乌斯反演的思想已向许多方向拓展。Kim 和 Mémoli 为偏序集上的模定义了广义持久图 [12, 17]。Patel 和 McCleary 将 Patel 的广义持久图拓展到由有限格索引的持久模 [22]。Botnan 等人 [7] 隐式研究了二参数模的秩函数的莫比乌斯反演，由此得到一种定义域为 $\mathbb{Z}^2$中所有矩形的图的概念。Asashiba 等人利用有限二维网格上的莫比乌斯反演，定义了区间可分解近似 [1]。Morozov 和 Patel [23] 通过对生灭函数作莫比乌斯反演，在二参数情形下定义了广义持久图，并提供了计算该图的算法。该算法与我们的方法有些相似：它通过沿一维路径切片，利用葡萄园算法 [13] 研究二参数持久模。

我们的工作也涉及对二参数模进行切片的思想。这种切片思想出现在纤维条形码 [11, 20],中，而纤维条形码等价于秩函数。为了深入了解二参数持久模 M 的结构，Lesnick 和 Wright [20] 通过将其限制 M 到所有可能的非负斜率直线上，研究了由此得到的一组单参数模。Buchet 和 Escolar [9] 证明，任何有限支撑的单参数持久模都可以作为某个有限支撑的不可分解双参数持久模的限制得到。此外，Dey 等人 [15] 证明，二参数模的某些锯齿（子）模可用于计算广义秩不变量，其莫比乌斯反演即为 Kim 和 Mémoli 定义的广义持久图。我们的工作研究二参数模各切片之间的像，这与 Bauer 和 Schmal [4] 的工作相关。

在 [8], Botnan 等人中，他们引入了秩分解这一概念。在某些附加条件下，它等价于由秩函数经莫比乌斯反演得到的广义持久图。Botnan 等人还进一步证明，将一个模转换为秩分解的过程相对于匹配距离 [18] 是稳定的。此外，他们通过带符号条形码对该秩分解进行可视化，突出显示秩分解中出现的矩形的对角线及其重数。他们使用一个通过以尺度和密度参数对点云进行聚类而生成的二参数持久模，展示了带符号条形码的取值。

与此前在更高维偏序集上进行莫比乌斯反演的结果不同，例如 $\mathbb{Z}^2$，我们的工作是在 $\mathbb{R}$ 的有限区间子集上进行莫比乌斯反演，因此得到的反演公式更为简单。在这项工作中，我们为二参数持久模引入了元秩 的概念，它是一个从 Dgm 到持久模同构类的映射。与通常的秩不变量考察向量空间之间线性映射的像不同，元秩考察的是将二参数持久模沿竖直线和水平线切片后形成的单参数持久模之间映射的像，见图1。随后，我们将元图定义为元秩的莫比乌斯反演，从而得到一个从 Dgm 到带符号

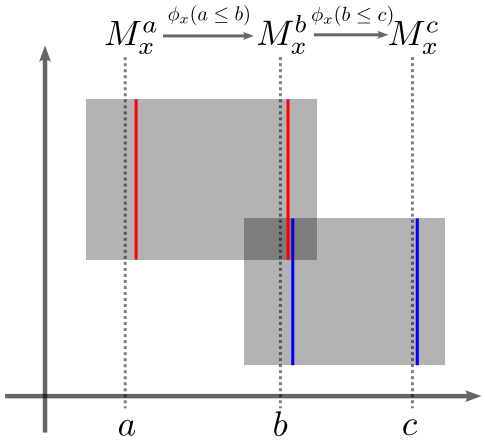


图1 沿垂直线对二参数模进行切片，会得到单参数模，例如 M M_x^a，M_x^b 和 M_x^c。这些单参数模之间存在由 M的内部态射诱导的态射，而元秩则捕获了关于这些态射的信息。例如，如果 M 定义为由两个阴影矩形所对应的两个区间模的直和，那么 M 在 $[a, b)$ 上的元秩就是 $\phi_x(a \le b)$的像，它的条形码由红色区间构成。 M 在 $[b, c)$ 上的元秩的条形码由蓝色区间构成，而 M 在 $[a, c)$ 上的元秩为 0，因为 $\phi_x(a \le c) = \phi_x(b \le c) \circ \phi_x(a \le b) = 0$。

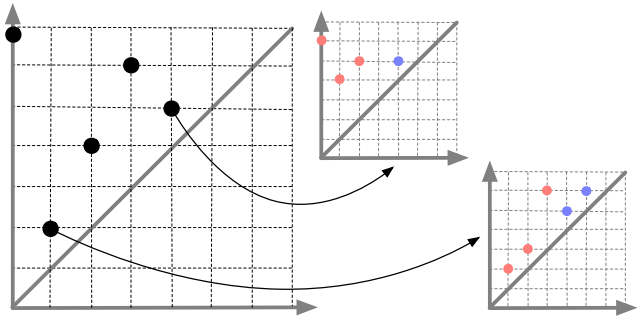


图2 一个元图，可视为由带符号图构成的持久图（红色和蓝色分别表示正号和负号）。

持久模同构类的映射。这与 Botnan 等人采用的在二维中进行莫比乌斯反演的方法 [8] 形成对比；我们的 Dgm 上的莫比乌斯反演公式更简单，所含项也更少。

贡献。 元秩和元图所包含的信息，分别与秩不变量（命题 12）和带符号条形码（命题 27）等价。因此，元秩和元图都可以看作是从不同视角观察这些已知不变量。不过，这种不同的视角带来了以下若干优势，使元秩和元图本身也具有独特价值：

1. 二参数持久模 M 的元秩和元图可在 $O(n^3)$ 时间内计算，其中该持久模由具有 n 个单形的单纯复形的双滤过诱导。 2. 这立即意味着 Botnan 等人用于计算带符号条形码的 $O(n^4)$ 算法得到了改进。 3. 用于计算元秩和元图的 $O(n^3)$ 时间算法，也隐含地改进了秩分解中带符号条的数量上界：将 M 的上界从当前已知的 $O(n^4)$ 改进为$O(n^3)$。这回答了一个开放问题：带符号条形码的大小是否能由矩形的数量紧密界定。

4. 元图可以视为带符号图的持久图，如图2所示。这种直观的可视化将经典持久图——拓扑数据分析（TDA）中一种广为人知的技术——推广用于概括持久同调。5. 元图还推广了TDA 中广为人知的切片条形码概念 [20]。它将切片条组合在一组直线上，同时也保留了由被切片的模所诱导的切片间映射 M 。

2 预备知识

我们将偏序集 $(P, \leq)$ 视为一个范畴，其对象是元素 $p \in P$，且当且仅当 $p \leq q$ 时，存在唯一的态射 $p \to q$ ；这称为 $(P, \leq)$ 的偏序范畴。根据上下文清楚时，我们用 P 表示该偏序范畴。

固定一个域 $\mathbf{k}$，并假设本文中所有向量空间的系数均属于$\mathbf{k}$ 。令$\mathbf{vec}$ 表示有限维向量空间及其间线性映射所构成的范畴。持久模（简称模）是一个函子 $M\colon P \to$ **向量空间**。对于任意 $p \in P$，我们将向量空间 $M_p := M(p)$ 记作 M_p；对于任意 $p \leq q \in P$，我们将线性映射$\varphi_M(p \leq q) := M(p \leq q)$ 记作 φ_M。当 M 显而易见时，我们省略 φ_M 的下标。我们称P 为 M 的指标偏序集。我们重点讨论指标偏序集为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^2$ 的情形，分别赋予通常序和积序。若指标偏序集为 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}^2$，则定义和命题也可类似地给出，我们将在第5节中简要介绍。如果 M 的指标偏序集为 $P \subseteq \mathbb{R}$，则 M 是一个单参数（或一维）持久模。如果 M 的指标偏序集为 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，且 P 不是全序的，则M 是一个双参数（或二维）持久模，简称双模。

按照 [21], ，我们要求持久模是可构造的：

▶ 定义*1.* 如果存在有限集 $S := \{s_1 < \ldots < s_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得：对于 $a < s_1$, $M(a) = 0$；对于 $s_i \leq a \leq b < s_{i+1}$, $\varphi_M(a \leq b)$是同构；对于 $s_n \leq a \leq b$, $\varphi_M(a \leq b)$是同构，则称模 $M\colon \mathbb{R} \to$ 向量空间是可构造的。

类似地，如果存在有限集 $S := \{s_1 < \ldots < s_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得，则称双模 $M\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间** 是可构造的：

如果 $x < s_1$ 或 $y < s_1$，那么 $M((x, y)) = 0$；对于 $s_i \leq x_1 \leq x_2 < s_{i+1}$ 和 $s_j \leq y_1 \leq y_2 < s_{j+1}$，$\varphi_M((x_1, y_1) \leq (x_2, y_2))$是同构；如果 $x_1 \geq s_n$ 或 $y_1 \geq s_n$ 且 $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$，那么 $\varphi_M((x_1, y_1) \leq (x_2, y_2))$是同构。

无论哪种情况，这样的模都是 S-可构造的。

若一个模是 S-可构造的，除非另有说明，假设 $S = \{s_1 < \ldots < s_n\}$。若$M$ 是 S-可构造的，则对于任意 $S' \supseteq S$， M 都是 S'-可构造的。在本文余下部分中，我们假设任意给定的持久模都是可构造的。

在单参数和双参数持久模的研究中，区间模和区间可分解模的概念尤为重要。定义如下：

▶ 定义 *2.* 对于偏序集 $(P, \leq)$， P 的一个区间是一个非空子集 $I \subset P$，满足：*(凸性)* 若 $p, r \in I$ 和 $q \in P$ 满足 $p \leq q \leq r$，则 $q \in I$。*(连通性)* 对任意 $p, q \in I$，存在一个序列 $p = r_0, r_1, \ldots, r_n = q$，其元素均属于$I$，且对于所有 $0 \leq i \leq n-1$，要么 $r_i \geq r_{i+1}$，要么 $r_i \leq r_{i+1}$。

我们将 P 的所有区间的集合记作 $\mathbf{Int}(P)$。

对于 $I \in \mathbf{Int}(P)$，区间模 $\mathbf{k}^I$ 是以 P 为索引的持久模，其中：

$$\mathbf{k}^I_p = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{if } p \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad \varphi_{\mathbf{k}^I}(p \le q) = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbf{k}} & \text{if } p \le q \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

对于任意 $M, N\colon P \to$ **向量空间**，直和 $M \oplus N$ 在每个 $p \in P$ 上逐点定义。我们称非平凡的 $M\colon P \to$ **向量空间** 是可分解的，如果对于某些非平凡的 $N_1, N_2\colon P \to$ **向量空间**，M 与 $N_1 \oplus N_2$ 同构，我们将其记为 $M \cong N_1 \oplus N_2$。否则，M 是不可分解的。区间模是不可分解的 [6]。

持久模 $M\colon P \to$ **向量空间** 若与区间模的直和同构，则称为区间可分解的。也就是说，若存在区间多重集 $\mathrm{barc}(M)$，使得：

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathrm{barc}(M)} \mathbf{k}^I$$

如果该多重集存在，我们就称其为 M 的条形码。若其存在，由 Azumaya-Krull-Remak-Schmidt 定理 [2] 可知，$\mathrm{barc}(M)$ 是良定义的。因此，当 M 区间可分解时，$\mathrm{barc}(M)$ 是 M 同构类型的完整描述。

本文中特别重要的是右开矩形，它们是形如 $R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ 的区间 $R \subset \mathbb{R}^2$。如果 M 可分解为区间模 $\mathbf{k}^R$ 的直和，且其中 R 是一个右开矩形，那么我们称 M 为矩形可分解。

单参数持久模有着特别好的性质，因为它们总是可以分解为区间模 [14]。因此，条形码是单参数持久模的完全不变量。另一方面，双模不一定能以这种方式分解。事实上，双模不存在完全离散描述符 [10]。

人们提出了许多不变量来研究双模。最早且最值得关注的不变量之一是秩不变量 [10]，其回顾见定义 3。

▶ **定义 3** ([10])。对于 P 偏序集，定义 $\mathbf{D}(P) := \{(a, b) \in P \times P \mid a \le b\}$。对于 $M\colon P \to$ **向量空间**，M 的秩不变量，秩$_M\colon \mathbf{D}(P) \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$，按点定义如下：

$$\mathrm{rank}_M(a, b) := \mathrm{rank}(\varphi_M(a \le b))$$

对于双模，秩不变量本质上是一个四维对象，因此难以直接可视化。RIVET [20] 通过纤维条形码间接可视化秩不变量。在[8], Botnan 等人基于秩分解的概念定义了带符号条形码：

▶ **定义 4** ([8])。设 $M\colon \mathbb{R}^n \to$ **向量空间** 是一个秩函数为秩$_M$的持久模。假设 $\mathscr{R}, \mathscr{S}$是来自 $\mathbb{R}^n$ 的区间多重集。定义$\mathbf{k}_{\mathscr{R}} := \oplus_{I \in \mathscr{R}} \mathbf{k}^R$，并类似地定义$\mathbf{k}_{\mathscr{S}}$。那么，$(\mathscr{R}, \mathscr{S})$ 是秩$_M$ 的一个秩分解，如果作为整数值函数有：

$$\text{秩}_M = \text{秩}_{\mathscr{R}} - \text{秩}_{\mathscr{S}}.$$

如果 $\mathscr{R}$，$\mathscr{S}$ 由右开矩形组成，那么这对对象就是一个矩形秩分解。我们有：

▶ **定理5** ([8], 定理3.3。每个有限呈示的 $M\colon \mathbb{R}^2 \to$**向量空间** 都存在唯一的最小矩形秩分解。

这里的极小性是指 $\mathscr{R} \cap \mathscr{S} = \emptyset$。随后，带符号条形码通过展示 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$中的矩形的对角线，来可视化 $\mathbb{R}^2$ 中的秩函数。

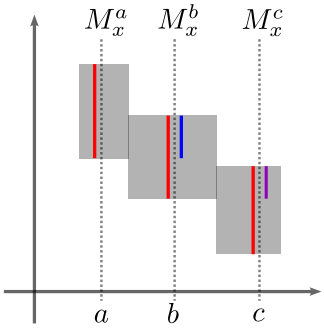


图3 例9中， M 及其在某些$\mathbf{mrk}_M$ 取值下的条形码示意图。

3 元秩

本节中，我们将介绍元秩。秩不变量刻画了持久模中成对向量空间之间的像的信息，而元秩则刻画了通过对双模进行切片而得到的两个单参数持久模之间的像的信息。我们将描述关于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}$上的模的结果，但这些结果也直接类似地适用于 $\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbb{Z}$ 情形；后者将在第5节中简要介绍。省略的证明见附录A。我们先给出一些预备定义：

▶定义6。设 $M:\mathbb{R}^2\to$ *vec*是一个双模。对于 $s\in\mathbb{R}$，逐点定义垂直切片$M_x^s\colon\mathbb{R}\to$*vec*为 $M_x^s(a):=M(s,a)$，而从 a到 b的态射定义为$\varphi_x^s(a\le b):=\varphi((s,a)\le(s,b))$。类似地，定义水平切片 $M_y^s\colon\mathbb{R}\to$*vec*，令 $M_y^s(a):=M(a,s)$，且对所有 $a\le b\in\mathbb{R}$，令 $\varphi_y^s(a\le b):=\varphi((a,s)\le(b,s))$。

定义单参数持久模的态射 $\phi_x(s\le t)\colon M_x^s\to M_x^t$，对于$s\le t\in\mathbb{R}$，定义为 $\phi_x(s\le t)(a):=\varphi((s,a)\le(t,a))$。类似地，对于$s\le t\in\mathbb{R}$，定义 $\phi_y(s\le t)\colon M_y^s\to M_y^t$为 $\phi_y(s\le t)(a):=\varphi((a,s)\le(a,t))$。

用**Pvec** 表示 $\mathbb{R}$ 上持久模的同构类。**Pvec** 中的每个元素都可以由其条形码唯一表示，实际操作中我们也正是如此。我们回顾 [24]，中 Dgm 的定义，它作为元秩的定义域：

▶ **定义7** ([24])。 将Dgm 定义为偏序集，其元素包括所有形如 $[p,q)\subset\mathbb{R}$ （其中 $p<q$）的半开区间，以及所有形如 $[p,\infty)\subset\mathbb{R}$的半无限区间。偏序关系为包含关系。

▶ **定义 8.** 设 $M:\mathbb{R}^2\to$ **vec** 是 S-可构造的。定义水平元秩$\mathbf{mrk}_{M,x}:\mathrm{Dgm}\to$**Pvec** 如下：

对于 $I=[s,s_i)$ 且 $s_i\in S$，$mrk_{M,x}(I):=[im(\phi_x(s\le s_i-\delta))]$,，其中某个 $\delta>0$ 满足 $s_i-\delta\ge s$ 且 $s_i-\delta\ge s_{i-1}$。对于 $I=[s,\infty)$，$mrk_{M,x}(I):=[im(\phi_x(s\le s_n))]$。对于所有其他 $I=[s,t)$，$mrk_{M,x}(I):=[im(\phi_x(s\le t))]$。

类似地，将垂直元秩定义为$\mathbf{mrk}_{M,\,y}:\mathrm{Dgm}\to\mathbf{Pvec}$，方法是将上文中的每个 x 替换为 y。

本文中的结果均以水平元秩表述，但同样适用于垂直元秩。为简化记号，下文将$\mathbf{mrk}_{M,\,x}$记作$\mathbf{mrk}_M$。在不会引起混淆时，我们省略$\mathbf{mrk}_M$的下标。

▶ **例9**。 如图3所示，令 I 为唯一的灰色区间，并定义双模 $M:=\mathbf{k}^I$。单参数模 M_x^a、M_x^b 和 M_x^c 的条形码显示在

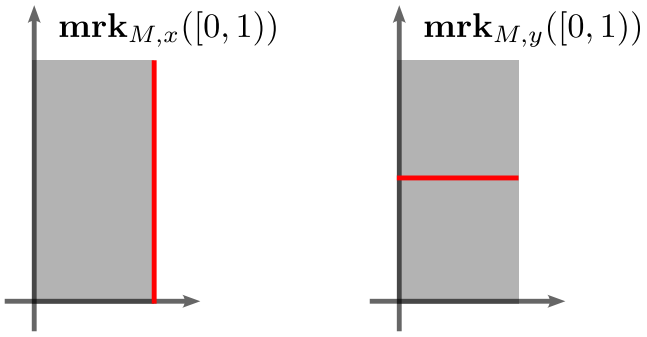


图4 M的示意图，展示了$\mathbf{mrk}_{M,\,x}([0,1)) \neq \mathbf{mrk}_{M,\,y}([0,1))$。

其对应垂直切片旁边的红色部分。$\mathbf{mrk}_M([a,b))$ 的条形码由蓝色区间组成，该区间是 M_x^a 和 M_x^b 中条形的重叠部分，$\mathrm{barc}(M_x^a) \cap \mathrm{barc}(M_x^b)$。类似地，$\mathbf{mrk}_M([b,c))$ 的条形码由紫色区间组成，该区间是 M_x^b 和 M_x^c 中条形的重叠部分。由于 M_x^a 和 M_x^c 的条形码中的条形没有重叠，$\mathrm{im}(\phi_x(a \le c)) = 0$，因此 $\mathbf{mrk}_M([a,c)) = 0$。

▶ 注10。一般而言，$\mathbf{mrk}_x \neq \mathbf{mrk}_y$。例如，考虑右开矩形 R，其左下角为原点，右上角为 $(1,2)$，如图4所示。令$M := \mathbf{k}^R$。如图所示，$\mathbf{mrk}_{M,\,x}([0,1)) = [0,2) \neq [0,1) = \mathbf{mrk}_{M,\,y}([0,1))$。

下面的命题11使我们能够通过一个双模的不可分解直和项的元秩来计算该双模的元秩：

▶ **命题11**。对于 M，N：$\mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，我们有：

$$\mathbf{mrk}_M \oplus \mathbf{mrk}_N = \mathbf{mrk}_{M \oplus N}$$

其中，**元秩**$_M \oplus$**元秩**$_N$: Dgm $\to$ **Pvec** 定义如下：

$$(\mathbf{mrk}_M \oplus \mathbf{mrk}_N)([s,t)) := [\mathbf{mrk}_M([s,t)) \oplus \mathbf{mrk}_N([s,t))].$$

对于有限的 $S \subseteq \mathbb{R}$，令$\overline{S} := S \cup \{\infty\}$。定义 $S_>^{\frown} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \overline{S}$为 $S_>^{\frown}(t) := \min\{s \in \overline{S} \mid s > t\}$。对于 $M \in$**Pvec**、$[b,d) \in$Dgm，令 $\#[b,d) \in M$表示$[b,d) \in$条形码(M) 的重数。秩不变量和元秩包含等价的信息：

▶ **命题 12.** 对于 $M : \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，可以由秩$_M$ 计算出**元秩**$_M$，也可以由**元秩**$_M$ 计算出秩$_M$。特别地，给定 $(s,y) \le (t,y') \in \mathbb{R}^2$，

$$\mathrm{rank}_M((s,y),(t,y')) = \#[b_i,d_i) \in \mathbf{mrk}_M([s,\overline{S}_>(t))) \ s.t.\ b_i \le y \le y' < d_i.$$

也就是说，秩是条形码(**元秩**$_M([s,S_>(t)))$) 中包含 $[y,y']$ 的区间数量。

右端点需要 $S_>(t)$ 的原因是，如果 $t \in S$，**元秩**$_M([s,t))$ 捕捉不到 $\phi_x(s \le t)$ 的像的信息，只能捕捉 $\phi_x(s \le t-\delta)$ 的像。

最后，我们讨论元秩的稳定性。元秩相对于一种侵蚀距离是稳定的，该距离基于 Patel [24] 提出的概念。我们引入截断条形码：

▶ 定义*13.* 对于 $\epsilon \ge 0$, 和 $I = [s,t) \in Dgm$，定义 $I[\epsilon:] := [s+\epsilon, t)$。对于 $M:$ $\mathbb{R} \to$ 向量空间，定义：条形码$_\epsilon(M) := \{I[\epsilon:] \mid I \in$条形码$(M)\}$。如果 $I = [s,t) \in$条形码(M) 有 $t - s \le \epsilon$，那么 I 在条形码$_\epsilon(M)$ 中没有对应的区间。

▶ **定义14.** 对于 $M, N\colon \mathbb{R} \to$ **向量空间**，我们称 $M \preceq_\epsilon N$，如果存在一个定义在条形码上的单射 $\iota\colon$ 条形码$_\epsilon(M) \to$ 条形码(N)，使得对于所有 $J \in$ 条形码$_\epsilon(M)$， $J \subseteq \iota(J)$。

对于 $\epsilon \geq 0$, $M \in$ **Pvec**，令 M^ϵ 表示 M [19]的 ϵ-平移，其中 $M^\epsilon(a) := M(a+\epsilon)$ 且 $\varphi_{M^\epsilon}(a \leq b) := \varphi_M(a+\epsilon \leq b+\epsilon)$。对于 $I = [s,t) \in$ Dgm 和 a， $b \in \mathbb{R}$，令 $I_a^b := [s+a, t+b)$，约定对于任意 $b \in \mathbb{R}$， $\infty + b := \infty$。现在我们定义侵蚀距离：

▶ **定义 15。** 令 $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间。**侵蚀距离定义如下：

$$\mathrm{d_E}(\mathbf{mrk}_M, \mathbf{mrk}_N) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \forall I \in \mathrm{Dgm}, \mathbf{mrk}_M(I^\epsilon_{-\epsilon})^\epsilon \preceq_{2\epsilon} \mathbf{mrk}_N(I) \text{ and } \mathbf{mrk}_N(I^\epsilon_{-\epsilon})^\epsilon \preceq_{2\epsilon} \mathbf{mrk}_M(I)\}$$

如果我们取下确界的集合为空，则令 $\mathrm{d_E}(\mathbf{mrk}_M, \mathbf{mrk}_N) := \infty$。

▶**命题 16.** $\mathrm{d_E}$ 如定义 *15* 中所定义，是可构造双模的元秩集合上的扩展伪度量 $M\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间。**

我们使用多参数交错距离 [19]比较双模 M 和 N。定义13中的 ϵ-平移和条形码截断对于稳定性是必要的，因为交错距离基于双模的对角平移，而元秩基于水平映射，而非对角映射。我们有如下结论：

▶ **定理 17.** 对于可构造的 M， $N\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，我们有：

$$\mathrm{d_E}(\mathbf{mrk}_M, \mathbf{mrk}_N) \leq \mathrm{d_I}(M, N)$$

4 元图

我们将 Patel [24] 关于元秩函数的莫比乌斯反演公式用于得到一个元图。该公式包含负号，因此我们需要带符号持久模这一概念。我们的思路受到 Betthauser 等人 [5], 的工作的启发，其中我们考虑将一个函数拆分为正部和负部。未列出的证明见附录 B。

▶ **定义18。** 带符号单参数持久模 是一个有序对(M, N)，其中$M, N\colon \mathbb{Z} \to$ **向量空间** 是单参数持久模。 M 是正号 模，而 N 是负号 模。

▶ **定义19。** 将**Pvec**视为一个交换幺半群，其运算 $\oplus$ 由 $[M]\oplus[N] := [M \oplus N]$给出，单位元为 $[0]$。定义**SPvec** 为**Pvec**的格罗滕迪克群。

SPvec的每个元素都是有序对 $([M^+], [M^-])$的一个同构类。根据单参数持久模的条形码完备性，我们不失一般性地假设每个元素 M^+, M^- 都由 $* := \oplus_{I \in \mathrm{barc}(*)} \mathbf{k}^I$给出，并省略内部等价类记号，将**SPvec**中的元素写作 $[(M^+, M^-)]$。命题 20允许我们为**SPvec**的每个元素选取一个规范代表元：

▶ **命题 20。** 设 $A \in$ **SPvec**。则存在唯一的代表元 $A = [(M^+, M^-)]$，使得 条形码$(M^+) \cap$ 条形码$(M^-) = \emptyset$。

根据命题 20，在方便时，我们将 **SPvec** 中的一个元素唯一地表示为该特殊代表元的条形码之和，如以下例子所示：

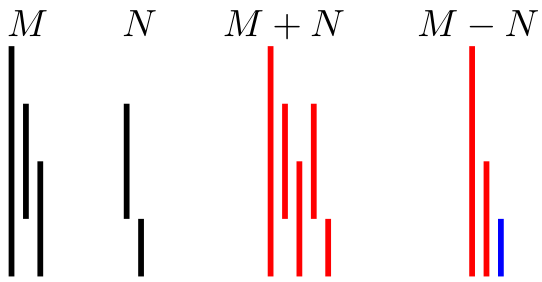


图 5 M、$N \in$**Pvec**和 $M+N$、$M-N \in$**SPvec**的条形码示意图。对于 $M+N$和 $M-N$，红色区间表示正号，蓝色区间表示负号。

▶例 21。考虑 $[(N^+, N^-)] \in$SPvec，其中 barc$(N^+) = \{[0,4],[1,3],[2,4]\}$，且 barc$(N^-) = \{[1,3],[3,4]\}$。根据命题 20，$[(N^+, N^-)]$可唯一表示为$[(M^+, M^-)]$，其中 barc$(M^+) = \{[0,4],[2,4]\}$，且 barc$(M^-) = \{[3,4]\}$。实际使用中，我们将 SPvec 中的这个元素记作 $[0,4]+[2,4]-[3,4] \in$SPvec。若 $M, N \in$Pvec，则用 $M+N$表示元素 $[(M \oplus N, 0)] \in$SPvec，并用 $M-N$表示元素$[(M, N)] \in$SPvec。图示见图 5。

有了带符号持久模这一概念后，我们现在使用 [24] 中莫比乌斯反演公式的一个修订版本来定义元图：

▶ **定义 22**。设 $M\colon \mathbb{R}^2 \to$**向量空间** 是 S-可构造的。通过莫比乌斯反演公式定义水平元图为函数 $\mathbf{mdgm}_M\colon \mathrm{Dgm} \to$**SPvec**：

$$\begin{aligned}\mathbf{mdgm}_{M,x}([s_i,s_j)) := {}& \mathbf{mrk}_{M,x}([s_i,s_j)) - \mathbf{mrk}_{M,x}([s_i,s_{j+1})) \\ & + \mathbf{mrk}_{M,x}([s_{i-1},s_{j+1})) - \mathbf{mrk}_{M,x}([s_{i-1},s_j)) \\ \mathbf{mdgm}_{M,x}([s_i,\infty)) := {}& \mathbf{mrk}_{M,x}([s_i,\infty)) - \mathbf{mrk}_{M,x}([s_{i-1},\infty))\end{aligned}$$

其中 s_0 是任意值，$s_0 < s_1$ 和 s_{n+1} 是任意值，$s_{n+1} > s_n$。对于任意其他 $[s,t) \in \mathrm{Dgm}$，令 $\mathbf{mdgm}_{M,x}([s,t)) := 0$。将上文中的每个 x替换为 y，即可定义垂直元图 。

此后，我们用**mdgm** 表示 M 的水平元图；若不会引起混淆，则省略下标。下面的莫比乌斯反演公式描述了元秩与元图之间的关系。它是 [24, 定理 4.1] 的直接类比。

▶ **命题 23**。对于 $[s,t) \in \mathrm{Dgm}$，有：

$$\mathbf{mrk}([s,t)) = \sum_{\substack{I \in \mathrm{Dgm} \\ I \supseteq [s,t)}} \mathbf{mdgm}(I)$$

▶ **命题 24**。对于 M，N：$\mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，有：

$$\mathbf{mdgm}_M \oplus \mathbf{mdgm}_N = \mathbf{mdgm}_{M \oplus N},$$

其中 $\mathbf{mdgm}_M \oplus \mathbf{mdgm}_N\colon$ Dgm $\to$ **SPvec** 定义为

$$\begin{aligned}(\mathbf{mdgm}_M \oplus \mathbf{mdgm}_N)([s,t)) := [&\mathbf{mdgm}_M([s,t))^+ \oplus \mathbf{mdgm}_N([s,t))^+, \\ &\mathbf{mdgm}_M([s,t))^- \oplus \mathbf{mdgm}_N([s,t))^-].\end{aligned}$$

如果已知一个模的不可分解分解，命题 24 便能让我们直接计算元图。特别是，根据命题 25，矩形可分解模的元图可以直接计算。

▶ **命题 25. </style}假设 $\mathbf{k}^R$** 是一个由右开矩形 R 支撑的 $\mathbb{R}^2$-指标区间模，其左下角为 (s, t)，右上角为 (s', t')。我们有：

$$\mathbf{mdgm}_M([a,b)) = \begin{cases} [t,t') & if\ a=s\ \ and\ \ b=s'; \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

▶ **推论 26.** 设 $M = \oplus_{R\in \mathrm{barc}(M)} \mathbf{k}^R$ 为矩形可分解的。那么，区间 $[t, t')$ 在 $\mathbf{mdgm}([s, s'))$ 中出现的重数为 n，当且仅当左下角为 (s, t)、右上角为 (s', t') 的右开矩形在 $\mathrm{barc}(M)$ 中出现的重数为 n。

4.1 通过矩形进行秩分解的等价性

对于 $M\colon \mathbb{R}^2 \to$**向量空间**，矩形秩分解包含的信息与秩不变量相同；根据命题 12，秩不变量包含的信息又与元秩相同。现在我们说明，可以直接从元图得到秩分解：

▶ **命题 27.** 设 $M : \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间** 可构造。定义如下：

$$\mathscr{R} := \bigcup_{I\in \mathrm{Dgm}} \left(\bigcup_{[a,b)\in \mathbf{mdgm}_M(I)} I \times [a,b) \right),$$

$$\mathscr{S} := \bigcup_{I\in \mathrm{Dgm}} \left(\bigcup_{-[a,b)\in \mathbf{mdgm}_M(I)} I \times [a,b) \right),$$

其中所有并集均为多重集并。则$(\mathscr{R}, \mathscr{S})$ 是 M 的秩分解。

证明。只需证明对于所有 $w_1 := (x_1, y_1) \le w_2 := (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$，$\mathrm{rank}_M(w_1, w_2) = \mathrm{rank}^{\mathbf{k}_{\mathscr{R}}}(w_1, w_2) - \mathrm{rank}^{\mathbf{k}_{\mathscr{S}}}(w_1, w_2)$。设 $w_1 \le w_2 \in \mathbb{R}^2$ 如上。由命题 12，

$$\mathrm{rank}_M(w_1, w_2) = \#[b_i, d_i) \in \mathbf{mrk}_M([x_1, x_2')) \ \text{ s.t. } \ b_i \le y_1 \le y_2 < d_i,$$

其中为简化记号，$x_2' := S_>(x_2)$。

现在固定 $[b, d)$ 使得 $b \le y_1 \le y_2 < d$。由命题 23，我们有：

$$\#[b,d) \in \mathbf{mrk}_M([x_1,x_2')) = \#[b,d) \in \sum_{\substack{I\in \mathrm{Dgm} \\ I\supseteq [x_1,x_2')}} \mathbf{mdgm}_M(I)$$

$$= \left(\#[b,d) \in \sum_{\substack{I\in \mathrm{Dgm} \\ I\supseteq [x_1,x_2')}} \mathbf{mdgm}^+_M(I) \right) - \left(\#[b,d) \in \sum_{\substack{I\in \mathrm{Dgm} \\ I\supseteq [x_1,x_2')}} \mathbf{mdgm}^-_M(I) \right)$$

由命题 25 和推论 26，项 $\#[b,d) \in \sum \mathbf{mdgm}^+(I)$ 是$_{I\in \mathrm{Dgm} I\supseteq [x_1,x_2')}$ 的数量

次 $I\times[b,d)$ 出现在 $\mathscr{R}$ 所有 $I \supseteq [x_1, x_2')$，并且术语$\#[b,d) \in \sum \mathbf{mdgm}^-(I)$ $_{I\in \mathrm{Dgm} I\supseteq [x_1,x_2')}$

$I \times [b,d)$ 在所有 $I \supseteq [x_1, x_2')$ 中出现在 $\mathscr{S}$ 的次数。

因此，我们看到 $\mathrm{rank}_M(w_1,\ w_2)$ 等于 $\mathscr{R}$ 中包含 w_1 和 w_2 的矩形数量，减去 $\mathscr{S}$ 中包含 w_1 和 w_2 的矩形数量。根据矩形模的定义以及秩与直和可交换这一事实，第一项为 $\mathrm{rank}(\mathbf{k}_{\mathscr{R}})(w_1,\ w_2)$，第二项为 $\mathrm{rank}(\mathbf{k}_{\mathscr{S}})(w_1,\ w_2)$，因此我们得到：

$$\mathrm{rank}_M(w_1,w_2) = \mathrm{rank}_{\mathbf{k}_{\mathscr{R}}}(w_1,w_2) - \mathrm{rank}_{\mathbf{k}_{\mathscr{S}}}(w_1,w_2) \quad \blacktriangleleft$$

4.2 元图的稳定性

现在我们给出元图的一个稳定性结果。为此，我们需要修改侵蚀距离的概念，因为元图包含带负号的部分。我们通过将一个元图的正部分与另一个元图的负部分相加来实现这一点。这个思路源自 Betthauser 等人的工作 [5]，，并且也曾用于 [8] 中秩分解的稳定性研究。

▶ **定义28**。对于 $M,\ N\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，定义$\mathrm{PN}(M,\ N)\colon \mathrm{Dgm} \to$ **向量空间** 如下

$$\mathrm{PN}(M,N)([s,t)) := \mathbf{mdgm}_M^{+}([s,t)) + \mathbf{mdgm}_N^{-}([s,t))$$

$\mathrm{PN}(M,\ N)$ 对所有 $[s,t) \in \mathrm{Dgm}$ 都是一个带非负符号的单参数持久模，这使我们能够利用前述概念 $\preceq_\epsilon$（定义14）来定义元图的侵蚀距离。与具有连续支撑的元秩不同，元图仅支撑于 $(S)^2$，其中某个有限 $S \subset \mathbb{R}$。因此，我们首先修改侵蚀距离的概念，使其适用于离散情形。

定义映射 $S_{\geq}, S_{\leq}\colon \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to S$，令 $S_{\geq}(x) := \min\{s \in S \mid x \geq s\}$，并令 $S_{\leq}(x) := \max\{s \in S \mid x \leq s\}$；若该集合为空，则取小于 s_1 的某个值。若存在 $c \in \mathbb{R}$，使得对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 均有 $s_{i+1} - s_i = c$，则称 S 为等间距的。下文固定一个等间距的有限 $S \subset \mathbb{R}$。

▶ **定义 29.** 对于 S-可构造的 $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，定义侵蚀距离：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathrm{E}}^{S}(\mathbf{mdgm}_M, \mathbf{mdgm}_N) := \inf\{\epsilon \geq 0 \mid \forall s \leq t \in \overline{S},\\ \mathrm{PN}(M,N)([\overline{S}_{\leq}(s-\epsilon), \overline{S}_{\geq}(s+\epsilon))^{\epsilon} \preceq_{2\epsilon} \mathrm{PN}(N,M)([s,t)) \text{ and}\\ \mathrm{PN}(N,M)([\overline{S}_{\leq}(s-\epsilon), \overline{S}_{\geq}(s+\epsilon))^{\epsilon} \preceq_{2\epsilon} \mathrm{PN}(M,N)([s,t))\}\end{aligned}$$

元图具有如下稳定性结果，

▶ **定理 30.** 对于 S-可构造的 $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间**，若 S 为等间距的，则有

$$\mathrm{d}_{\mathrm{E}}^{S}(\text{元图}_M, \text{元图}_N) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{I}}(M,N)。$$

关于详细内容以及 S 不是等间距时的稳定性结果，请参见附录 B。

5 算法

本节将介绍用于计算元秩和元图的算法。这些算法的输入是一个逐单纯形双过滤：

▶ 定义 *31*。令 $n \in \mathbb{Z}$，并令 $[n]$ 表示带有通常序的偏序集 *{1, . . . , n}*。设 K 为一个单纯复形，*sub(K)* 表示 K 的所有本身也是单纯复形的子集。滤过是一个函数 $F\colon [n] \to$ *sub(K)*，满足对于 $a \leq b$, *F (a)* $\subseteq$ *F(b)*。若一个滤过是单纯形逐项的，则称之为单纯形逐项滤过；具体而言，对所有 $1 \leq a \leq n-1$，要么 *F(a* + 1*)* = *F(a)*，要么*F(a* + 1*)* = *F(a)* ∪*{σ}*，其中某个 $\sigma \in K \setminus F(a)$。在后一种情形下，我们用*F(a)* $\xrightarrow{\sigma}$ *F(a* + 1*)*表示。若 $\sigma \in$ *sub(K)* 在 a 时出现，即 $\sigma \in F(a)$ 且 $\sigma \notin F(a-1)$，则称之为如此。

定义 $P_n := [n] \times [n]$，并赋予积序。双滤过是一个函数 $F: P_n \to sub(K)$。若一个双滤过是单纯形逐项的，则称之为单纯形逐项双滤过；具体而言，对所有 $(a, b) \in P_n$，对于 $(x, y) = (a+1, b)$ 或 $(a, b+1)$，若 $(x, y) \in P_n$，则要么 $F((x, y)) = F((a, b))$，要么 $F((a, b)) \xrightarrow{\sigma} F((x, y))$，其中某个 $\sigma \notin F((a, b))$。

对双滤过应用同调，可得到定义在 P_n 上的双模。前文的理论背景重点讨论定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的双模。对于定义在 P_n 上的模，同样的思路和主要结果也类似成立。下面简要说明处理定义在 P_n 上的模时，定义上的差异。以下定义是对以 P_n 为指标的模的水平元秩和水平元图的重新表述；但与之前一样，在垂直情形下也有直接对应的表述。令 $\mathbf{Int}([n])$ 表示 $[n]$ 的所有区间，其中包含 $\{[a, b] \mid a \le b, \quad a, \quad b \in [n]\}$。

▶ **定义 32.** 对于 $M: \quad P_n \to$ **向量空间**，定义元秩 $\mathbf{mrk}_M: \mathbf{Int}([n]) \to \mathbf{Pvec}$ 如下

$$\mathbf{mrk}_M([s, t]) := [\mathrm{im}(\phi_x(s \le t))]$$

▶**定义 33. </style}对于：** $P_n \to$ **向量空间**，定义元图 $\mathbf{mdgm}_M: \mathbf{Int}([n]) \to \mathbf{SPvec}$如下：若 $1 < s \le t < n$，则定义：

$$\mathbf{mdgm}_M([s, t]) := \mathbf{mrk}_M([s, t]) - \mathbf{mrk}_M([s, t+1]) + \mathbf{mrk}_M([s-1, t+1]) - \mathbf{mrk}_M([s-1, t]), \mathbf{mdgm}_M([s, n]) := \mathbf{mrk}_M([s, n]) - \mathbf{mrk}_M([s-1, n]), \mathbf{mdgm}_M([1, t]) := \mathbf{mrk}_M([1, t]) - \mathbf{mrk}_M([1, t+1]),$$ 以及 $\mathbf{mdgm}_M([1, n]) := \mathbf{mrk}_M([1, n])$。

5.1 算法概述

以下假设 $F: P_n \to \mathrm{sub}(K)$ 是逐单纯形双过滤，且 M 是对 F 应用同调后得到的结果。我们用于计算元秩的算法依赖于 [13] 中的葡萄园算法。算法以 F 为输入。定义 γ_1 为 P 中从 $(1, 1) \to (1, n) \to (n, n)$ 的路径，也就是沿着 P 左上边界的路径。我们通过对 F 沿 γ_1 切片，得到一个单参数滤过；对该滤过所对应的持久模进行区间分解，记为 F_{γ_1}。我们计算其 $D = RU$ 分解。该分解给出了所有持久区间、持久配对 (σ_i, σ_j)，以及与每个区间对应的未配对单形；前者对应有限区间，后者对应无限区间。为简化记法，对于每个对应于无限区间的未配对单形，我们将它与一个隐式单形配对，该单形在扩展的 F 中于 $(n+1, n+1)$ 到达。我们将持久区间存储在一个有序列表中，记为 `intervals`。`intervals` 中限制到 $[1, n]$ 的所有区间共同构成单参数持久模 M_x^1，这正是 $\mathbf{mrk}_M([1, 1])$。然后，我们将 $\mathbf{mrk}_M([1, 1])$ 存储为一个列表，其顺序与 `intervals` 相同；当某个区间与 $[1, n]$ 不相交时，则留一个空占位符。

我们逐个正方形地遍历 γ 到 P，沿第一列向下，直到到达 γ_2，即路径 $(1, 1) \to (2, 1) \to (2, n) \to (n, n)$。从那里开始，我们逐列重复这一过程，直到到达 γ_n，即路径 $(1, 1) \to (n, 1) \to (n, n)$；参见图6。

每当我们通过将单个正方形的左上边界换为右下边界，使中间路径 γ 中的一个顶点发生变化后，所得的滤过 F_γ要么保持不变，要么以图7所示的某种方式发生变化。

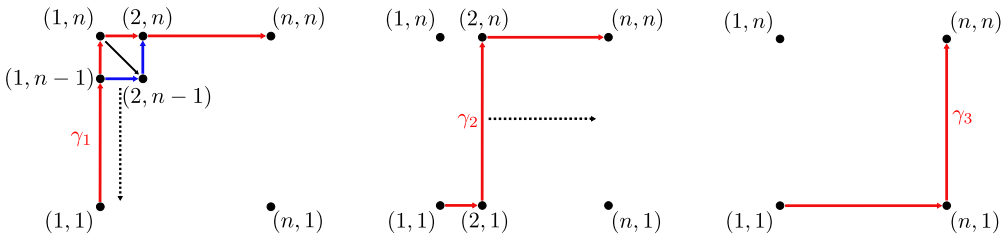


图6 我们从左侧的 γ_1 开始，然后将 γ_1 推过正方形，使其沿着正方形的右下角（蓝色）移动。我们重复这一过程，沿第一列逐个向下经过每个正方形，直到到达 γ_2 （中间）。然后我们逐列重复这一过程，直到到达 γ_n （右侧）。

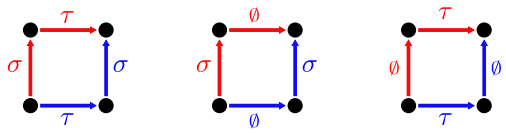


图7 将 F_γ 推过一个一乘一的正方形时，它可能发生变化的三种方式。在我们的算法中， γ 总是先沿红色路径移动，然后转到蓝色路径。

经过每个正方形后，我们会原地更新 `intervals` 中的每个区间。如果 F_γ保持不变，那么 `intervals`就不会发生变化。如果 F_γ 因某个单形的到达时间改变而发生变化，那么配对关系不会改变，与该单形对应的区间要么延长一个单位，要么缩短一个单位。若发生换位（见图7（左）），则使用葡萄园算法中的换位更新过程。

如果我们从 γ_1开始，那么到达 F_{γ_2}时，可以将 `intervals` 中的每个区间限制到$[2, n+1]$，并将其向下移动一格；这对应于$\mathbf{mrk}_M([2,2])$，我们按照与$\mathbf{mrk}_M([1,1])$相同的规则存储它。

由于我们以这种有序方式存储元秩中的所有区间，因此可以取 $\mathrm{mrk}_M([2,2])$ 中的任意区间，并查看它在 $\mathrm{mrk}_M([1,1])$ 中的来源，也就是两个列表中索引相同的区间。通过取交集，我们得到相应的区间，并将其放入列表 $\mathrm{mrk}_M([1,2])$ 的这个位置。我们每次只修改 γ 一个顶点，重复这一过程，从而得到上文所述从 $(1,1) \to (i,1) \to (i,n) \to (n,n)$ 的路径 γ_i ，同时更新 `intervals`，并通过取适当的交集和平移得到 $\mathrm{mrk}_M([i,i])$。由于我们存储的每个区间列表都保持这种排序，因此对于所有 $1 \le k \le i-1$，我们都可以取 $\mathrm{mrk}_M([i,i])$ 中的任意区间，并查看它在 $\mathrm{mrk}_M([k,i-1])$ 中先前对应的区间（如果存在）。然后，将 $\mathrm{mrk}_M([i,i])$ 中的区间与 $\mathrm{mrk}_M([k,i-1])$ 中对应的区间取交集，便可在 $\mathrm{mrk}_M([k,i])$ 中得到一个新的对应区间。我们从 1 到 n 迭代地重复这一过程，其中 i，最终计算出 $\mathrm{mrk}_M : \mathrm{Int}([n]) \to \mathrm{Pvec}$。

现在我们来描述，当遍历一个发生换位的正方形、交换 σ_i 和 σ_{i+1}时，区间可能发生的变化。根据 [13, 节的分析，如果配对函数发生变化，那么区间本身不会改变。如果配对函数保持不变，那么两个持久区间会发生变化。假设 σ_i 与 τ_i 配对，而 σ_{i+1} 与 τ_{i+1}配对。有四种可能性，见图8。

我们在算法1中描述该算法。算法1的输出为 $\mathbf{mrk}_M$，以列表集合的形式存储所有 $s \le t \in [n]$ 对应的条形码 $\mathbf{mrk}_M([s,t])$。
现在我们证明算法1的正确性。

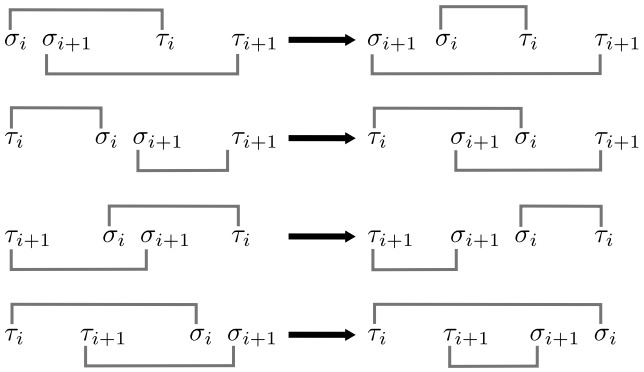


图8 换位后区间发生变化的四种情况。请注意，在每种情况下，两个区间都会发生变化，且变化恰好发生在一个坐标上。

算法1 元秩(F)

步骤1. 对于 F_{γ_1}，计算 $D = RU$，得到有序列表 `intervals` 以及每个区间的配对。步骤2. 对于 `intervals`中的每个区间，将该区间与 $[1,n]$求交，并将结果存储在有序列表 **mrk**$([1,1])$ 中。步骤3. 对于 $i := 1$ 到 $n-1$，执行步骤3.1。对于 $j := n$，从下到2，执行

- 通过葡萄园算法更新 D、R、U 和 `intervals`，同时 γ 扫过左上角为 (i,j)、右下角为 $(i+1, j-1)$ 的正方形。步骤 3.2。对于 `intervals` 中的每个区间，将区间向下平移 $i-1$，再与 $[1,n]$ 求交，并将结果存入有序列表 **mrk**$([i,i])$。步骤 3.3。对于 $k := 1$ 到 $i-1$，执行
- 对于 **mrk**$([i,i])$ 中的每个区间，与**mrk**$([k,i-1])$ 中对应的区间求交。将此交集存入有序列表 **mrk**$([k,i])$。

▶ **命题 34.** 对于 $i \in [n]$，**元秩**$_M([i,i])$ 可通过以下方式求得：将 F_{γ_i} 的条形码中的每个区间向下平移 $i-1$，然后与 $[1,n]$ 取交集。

▶ **命题 35.** 设 $1 < i \le n$，并假设我们已知所有 $1 \le k \le i-1$ 对应的 **元秩**$_M([i,i])$ 和 **元秩**$_M([k,i-1])$，且这些区间列表按前文所述的顺序存储。利用这些信息，我们可以计算 **元秩**$_M([k,i])$。

▶**定理 36.** 算法*1*能够正确计算由输入双滤过 F 的同调所诱导的双模 M 的元秩，运行时间为 $O(n^3)$。因此，M 的秩分解中的矩形数量也为 $O(n^3)$。

证明。 根据命题 34，我们可以计算 $\mathbf{mrk}_M([1,1])$，并进一步计算 $\mathbf{mrk}_M([i,i])$ 对所有$i \in [n]$。然后我们可以迭代地使用命题 35，填入 $\mathbf{mrk}_M([k,i])$ 对所有 $1 \le k < i \le n$，至此证明完成。

对于运行时间分析，首先注意到，步骤 1 中初始的 $D = RU$ 计算需要 $O(n^3)$ 时间，而 `intervals`可在线性时间内根据分解计算得出。步骤 2 中的循环同样需要线性时间，因为 `intervals` 的大小为 $O(n)$，且在整个过程中保持不变。步骤 3 包含一个有 $O(n)$ 次迭代的 for 循环。步骤 3.1 包含一个有 $O(n)$ 次迭代的 for 循环，其中每次循环都会使用

vineyards 方法执行一次正方形上的更新。单次更新在最坏情况下需要 $O(n)$ 时间，因此步骤 3.1 需要$O(n^2)$ 时间。步骤 3.2 与步骤 2 基于相同原因在线性时间内完成。步骤 3.3 包含一个有 $O(n)$ 次迭代的 for 循环。由于每个 $\mathbf{mrk}_M([k,i])$ 的大小都与 `intervals`相同，每次迭代需要 $O(n)$ 次操作。因此，步骤 3.3 的总运行时间为 $O(n^2)$。所以，步骤 3 中的每个循环都包含若干子步骤，其运行时间分别为 $O(n^2)$、$O(n)$ 和 $O(n^2)$，在 $O(n)$ 次迭代中总计耗费 $O(n^3)$。

总之，我们有一个成本为 $O(n^3)$ 的步骤，接着是一个成本为 $O(n)$ 的步骤，然后是一个成本为 $O(n^3)$ 的步骤，因此算法的运行时间为 $O(n^3)$。

根据定义 33，我们可以在 $O(n^3)$ 时间内从$\mathbf{mdgm}_M$ 计算出$\mathbf{mrk}_M$，这意味着 $\mathbf{mdgm}_M$ 中的非零区间数量为 $O(n^3)$。根据命题 27，$\mathbf{mdgm}_M$ 中的每个非零区间都唯一对应于 M的秩分解中的一个矩形，因此这类矩形的数量同样为 $O(n^3)$。◀

6 讨论

最后，我们提出一些尚未解决的问题。首先，我们希望将我们的方法推广到d参数情形。我们预计，恰当的推广应当具有与秩不变量和秩分解之间的关系，类似于命题 12 和命题 27。这样的推广还将导向图2中所示的图的持久图的“递归”表述。其次，定理 36 表明，双模的秩分解所需的矩形数量至多为 $O(n^3)$。目前尚不清楚这个上界是否紧确。最后，近期有多项研究运用单参数持久性的算法思想，在多参数情形下计算不变量 [15, 16, 23]。我们希望探索这些方法能够以何种方式催生新算法，或改进现有算法，从而计算多参数持久性模的不变量。

参考文献

1 Hideto Asashiba、Emerson G Escolar、Ken Nakashima 和 Michio Yoshiwaki。关于用区间可分解模逼近二维持久模。arXiv 预印本 arXiv:1911.01637，2019。2 Gorô Azumaya。关于我那篇涉及 Krull–Remak–Schmidt 定理的论文的勘误与补充。名古屋数学杂志，1:117–124，1950。3 Ulrich Bauer 和 Michael Lesnick。诱导匹配与持久性条形码的代数稳定性。计算几何杂志，6(2):162–191，2015。4 Ulrich Bauer 和 Maximilian Schmahl。像持久性的高效计算。arXiv 预印本 arXiv:2201.04170，2022。5 Leo Betthauser、Peter Bubenik 和 Parker B Edwards。分次持久性图与持久性景观。离散与计算几何，67(1):203–230，2022。6 Magnus Botnan 和 Michael Lesnick。之字形持久性模的代数稳定性。代数与几何拓扑，18(6):3133–3204，2018。7 Magnus Bakke Botnan、Vadim Lebovici 和 Steve Oudot。关于矩形可分解的双参数持久性模。离散与计算几何，页码 1–24，2022。8 Magnus Bakke Botnan、Steffen Oppermann 和 Steve Oudot。通过秩分解研究多参数持久性中的有符号条形码。载于第 38 届国际计算几何研讨会（SoCG 2022）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik，2022。9 Mickaël Buchet 和 Emerson G. Escolar。每个一维持久模都是某个不可分解二维持久性模的限制。应用与计算拓扑学杂志，4:387–424，2020。10 Gunnar Carlsson 和 Afra Zomorodian。多维持久性理论。离散与计算几何，42(1):71–93，2009。

11 Andrea Cerri、Barbara Di Fabio、Massimo Ferri、Patrizio Frosini 和 Claudia Landi。多维持久同调中的贝蒂数是稳定函数。应用科学中的数学方法，36(12):1543–1557，2013。12 Nate Clause、Woojin Kim 和 Facundo Memoli。广义秩不变量的辨别能力。arXiv 预印本 arXiv:2207.11591，2022。13 David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 Dmitriy Morozov。通过线性时间内更新持久性来追踪藤蔓与葡萄园。载于第二十二届计算几何年度研讨会论文集，页码 119–126，2006。14 William Crawley-Boevey。逐点有限维持久模的分解。代数及其应用杂志，14(05):1550066，2015。15 Tamal K. Dey、Woojin Kim 和 Facundo Mémoli。通过之字形持久性计算二参数持久模的广义秩不变量及其应用。载于第 38 届国际计算几何研讨会（SoCG 2022），2022 年 6 月 7–10 日，德国柏林，LIPIcs 第 224 卷，页码 34:1–34:17，2022。16 Abigail Hickok。持久图丛的计算。arXiv 预印本 arXiv:2210.06424，2022。17 Woojin Kim 和 Facundo Mémoli。偏序集上持久模的广义持久图。应用与计算拓扑学杂志，5(4):533–581，2021。18 Claudia Landi。通过交错研究秩不变量稳定性。载于《计算拓扑研究》，页码 1–10。施普林格，2018。19 Michael Lesnick。多维持久模交错距离理论。计算数学基础，15(3):613–650，2015。20 Michael Lesnick 和 Matthew Wright。二维持久模的交互式可视化。arXiv 预印本 arXiv:1512.00180，2015。21 Alex McCleary 和 Amit Patel。广义持久图的瓶颈稳定性。美国数学会会刊，148(733)，2020。22 Alexander McCleary 和 Amit Patel。格上的编辑距离与持久图。SIAM应用代数与几何杂志，6(2):134–155，2022。23 Dmitriy Morozov 和 Amit Patel。二重滤过的广义持久图的输出敏感计算。arXiv 预印本 arXiv:2112.03980，2021。24 Amit Patel。广义持久图。应用与计算拓扑学杂志，1(3):397–419，2018。25 Gian-Carlo Rota。组合理论基础 I：莫比乌斯函数理论。概率论及相关领域杂志，2(4):340–368，1964。

元秩的详细证明

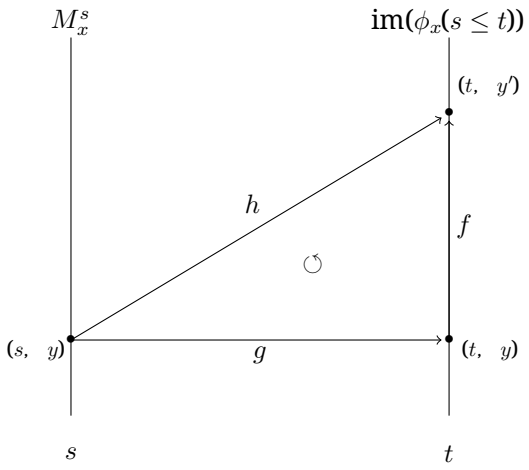
命题 12 的证明。我们首先证明

$$\operatorname{rank}_M((s,y),(t,y')) = \#[b_i,d_i) \in \mathbf{mrk}_M([s,\overline{S}_>(t))) \ s.t.\ b_i \le y \le y' < d_i. \tag{1}$$

根据持久模的交换条件，我们有：

$$\varphi((s,y)\le(t,y')) = \varphi((t,y)\le(t,y'))\circ\varphi((s,y)\le(t,y)),$$

并注意到 $\varphi((s,y)\le(t,y)) = \phi_x(s\le t)|_{M((s,y))}$。由定义 8 可知，可以验证 $\mathbf{mrk}_M([s,S_>(t))) = [\operatorname{im}(\phi_x(s\le t))]$。为简化记号，令 $h := \varphi((x,y)\le(t,y')), f := \varphi((t,y)\le(t,y')), g := \varphi((s,y)\le(t,y))$，且 $N := \operatorname{im}(\phi_x(s\le t))$。我们有如下交换图：



根据线性代数，我们知道 $\mathrm{rank}(h) = \mathrm{rank}(g) - \dim(\ker f \cap \mathrm{im}(g))$。如前所述，$N(y) = \mathrm{im}(g)$，因此 $\mathrm{rank}(g) = \dim(N(y))$。显然，$\dim(N(y))$ 等于 $\mathrm{barc}(N)$ 中包含 y 的区间数。此外，根据 M 的内部态射的交换性，我们有 $f|_{\mathrm{im}(g)}$ 恰好是内部态射 $\varphi_N(y \le y')$。由此并根据秩-零化度定理，我们得到：

$$\dim(N(y)) = \dim(\mathrm{im}(\varphi_N(y \le y'))) + \dim(\ker \varphi_N(y \le y')).$$

由于 $\mathrm{rank}(g) = \dim(N(y))$，且 $\dim(\ker \varphi_N(y \le y') = \dim(\ker f|_{\mathrm{im}(g)}) = \dim(\ker f \cap \mathrm{im}(g))$，我们得到 $\mathrm{rank}(h) = \dim(\mathrm{im}(\varphi_N(y \le y')))$。$\mathrm{rank}(h)$ 恰好等于 $\mathrm{rank}_N(y \le y')$，众所周知，它等于 $\mathrm{barc}(N)$ 中包含 $[y, y']$ 的条形数量。因此，我们可以从 $\mathbf{mrk}_M$ 计算 rank_M。

现在我们证明另一个论断，即可以从 rank_M 计算 $\mathbf{mrk}_M$。根据可构造双模的定义，秩函数的任意临界点都具有以下形式：对于某些 $s_a, s_b, s_c, s_d \in S$，$((s_a, s_b), (s_c, s_d))$。因此，由 M 的秩函数，我们可以确定使 M 为 S-可构造的最小 S。假设在下文中，S 是使 M 为 S-可构造的最小 S。

固定某个 $[s,t) \in \mathrm{Dgm}$，并固定一个区间 $[y,y') \in \mathrm{Dgm}$。我们证明，根据秩$_M$，可以确定区间 $[y,y')$ 在 $\mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s,t)))$ 中的重数，记为 $\#[y,y')$。若 $s < s_1$，则根据定义7，有 $\mathbf{mrk}_M([s,t)) = 0$。因此，假设 $s \ge s_1$，并定义$S_<, S_\le$：$\mathbb{R}_{\ge s_1} \cup \{\infty\} \to S$，使得 $S_<(t) := \max\{s \in S \mid s < t\}$，且 $S_\le(t) := \max\{s \in S \mid s \le t\}$。

由于 M 是 S-可构造的，$\mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s,t)))$ 中的所有区间都具有 $[s_i, s_j)$ 或 $[s_i, \infty)$ 的形式，其中某个 $s_i, s_j \in S$。若 $[y,y') = [s_i, s_j)$，则根据单参数持久性中众所周知的容斥公式以及方程1中的公式，我们可以计算：

$$\begin{aligned}\#[s_i, s_j) = {} & \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_i), (S_<(t), s_{j-1})) - \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_i), (S_<(t), s_j)) \\ & + \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_{i-1}), (S_<(t), s_j)) - \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_{i-1}), (S_<(t), s_{j-1})),\end{aligned}$$

其中 s_{n+1} 是任意值 $s_{n+1} > s_n$，s_0 是任意值 $s_0 < s_1$。如果 $[y,y') = [s_i, \infty)$，那么类似地，我们可以计算：

$$\#[s_i, \infty) = \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_i), (S_<(t), s_n)) - \mathrm{rank}_M((S_\le(s), s_{i-1}), (S_<(t), s_n)).$$

因此，对于任意 $[s,t) \in \mathrm{Dgm}$ 和 $[y,y') \in \mathrm{Dgm}$，我们可以根据秩计算 $[y,y') \in$ **重数**$_M([s,t))$，进而可以根据秩计算所有 **重数**$_M$。◀

命题 16 的证明。根据 $\mathrm{d_E}$ 的定义，对称性显然。接下来只需验证三角不等式。设 M、N、L：$\mathbb{R}^2 \to$向量空间 满足以下条件：$\forall I \in$Dgm，重数$_M(I^{\epsilon_1}_{-\epsilon_1})^{\epsilon_1} \preceq_{2\epsilon_1}$重数$_N(I)$，且重数$_N(I^{\epsilon_1}_{-\epsilon_1})^{\epsilon_1} \preceq_{2\epsilon_1}$重数$_M(I)$。另外，设 $\forall I \in$Dgm，重数$_N(I^{\epsilon_2}_{-\epsilon_2})^{\epsilon_2} \preceq_{2\epsilon_2}$重数$_L(I)$，且重数$_L(I^{\epsilon_2}_{-\epsilon_2})^{\epsilon_2} \preceq_{2\epsilon_2}$重数$_N(I)$。

任取 $I \in$Dgm。显然 $(I^{\epsilon_1}_{-\epsilon_1})^{\epsilon_2}_{-\epsilon_2} = I^{\epsilon_1+\epsilon_2}_{-\epsilon_1-\epsilon_2}$，因此我们有：

$$\mathbf{mrk}_M(I^{\epsilon_1+\epsilon_2}_{-\epsilon_1-\epsilon_2})^{\epsilon_1+\epsilon_2} \preceq_{2(\epsilon_1+\epsilon_2)} \mathbf{mrk}_N(I^{\epsilon_2}_{-\epsilon_2})^{\epsilon_2} \preceq_{2\epsilon_2} \mathbf{mrk}_L(I)$$

反过来交换 M 和 L 的角色，同理可得。因此，$\mathrm{d_E}(\mathbf{mrk}_M, \mathbf{mrk}_L) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$，如所求。◀

下面的引理对定理 17 的证明很有用：

▶ **引理 37**。设 $M: \mathbb{R} \to$ **向量空间** 是一个持久模，其条形码为 $\mathrm{barc}(M)$，并设$\epsilon > 0$。定义 $M[\epsilon:]: \mathbb{R} \to$ **向量空间** 如下：对于 $a \leq b \in \mathbb{R}$,

$$M[\epsilon:](a) := \{x \in M(a) \mid \exists x' \in M(a-\epsilon)\, s.t.\ \varphi_M(a-\epsilon \leq a)(x')\}$$

$$M[\epsilon:](a \leq b) := M(a \leq b)|_{M[\epsilon:](a \leq b)}$$

那么 $M[\epsilon:]:\ \mathbb{R} \to$ **向量空间** 是一个定义良好的持久模，并且 条形码$_\epsilon(M) =$ 条形码$(M[\epsilon:])$。

引理 37 的证明。设 $M = \oplus_{I \in \mathcal{I}} \mathbf{k}^I$，且 $\{e^t_I\}^{t \in \mathbb{R}}_{I \in \mathcal{I}}$ 满足：对于所有 t，$\{e^t_I\}_{I \in \mathcal{I}}$ 是$M(t)$ 的一组基。此外，要求 $e^t_i \neq 0 \Longleftrightarrow t \in I$，且 $\varphi_M(s \leq t)(e^s_I) = e^t_I$。直观地说，每个元素 $e^t_I \in M(t)$ 要么是 0，要么是 $M(t)$ 的直和项 $\mathbf{k}^I(t)$ 的一组基。我们称这样的集合 $\{e^t_I\}^{t \in \mathbb{R}}_{I \in \mathcal{I}}$ 为持久基。根据定义，$e^t_I \neq 0 \in M[\epsilon:](t)$ 当且仅当$e^t_I \neq 0 \in M(t)$ 且 $e^{t-\epsilon}_I \neq 0 \in M(t-\epsilon)$。因此，如果 $\{e^t_{I_1}, \ldots, e^t_{I_n}\}$ 是 $M(t)$ 的一组基，那么其中某个子集将是 $M[\epsilon:](t)$ 的一组基。

对于 $a \leq b \in \mathbb{R}$，要证明 $\varphi_M(a \leq b)|_{M[\epsilon:](a)}$ 将 $M[\epsilon:](a)$ 映射到 $M[\epsilon:](b)$ 中，我们可以考察其在基元素上的映射。若 $e^a_I \neq 0 \in M[\epsilon:](a)$，则 $e^{a-\epsilon}_I \neq 0 \in M(a-\epsilon)$。由此可得

$$\varphi_M(a \leq b)(e^a_I) = \varphi_M(b-\epsilon \leq b)(\varphi_M(a-\epsilon \leq b-\epsilon)(e^{a-\epsilon}I))$$

因此 $\varphi_M(a \leq b)|_{M[\epsilon:](a)}(M[\epsilon:](a) \subseteq M[\epsilon:](b)$，所以 $M[\epsilon:]$ 是一个定义良好的持久模。

现在证明 $\mathrm{barc}_\epsilon(M) = \mathrm{barc}(M[\epsilon:])$。假设 $I = [s,t) \in \mathrm{barc}_\epsilon(M)$。那么 I 唯一对应于一个区间 $[s-\epsilon, t) \in \mathrm{barc}(M)$。假设 $M = \oplus_{I \in \mathcal{I}} k^I$。$\mathrm{barc}(M)$ 中的这个区间唯一对应于一个特定序列，即对于固定的 $I \in \mathrm{I}$，一个由非零元素 $\{e^a_I\}^{a \in [s-\epsilon,t)}$ 构成的序列，其中 $e^a_I \in M(a) = 0$ 对所有 $a \notin [s-\epsilon, t)$ 均成立。容易验证，若 $\{e^t_I\}^{t \in \mathbb{R}}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 M 的持久基，则 $\{e'^t_I\}^{t \in \mathbb{R}}_{I \in \mathcal{I}}$ 是 $M[\epsilon:]$, 的持久向量基，其中 $e'^t_I = e^t_I \in M[\epsilon:](t) \Longleftrightarrow e^t_I \neq 0 \in M(t)$ 且 $e^{t-\epsilon}_I \neq 0 \in M(t-\epsilon)$。否则，$e'^t_I := 0$。这意味着 $e'^a_I \neq 0 \in M(a)$ 当且仅当 $e^a_I \neq 0 \in M(a)$ 且 $e^{a-\epsilon}_I \neq 0 \in M(a-\epsilon) \Longleftrightarrow a \in I$。因此，序列 $\{e^a_I\}^{a \in [s,t)}$ 唯一对应于一个区间 $[s,t) \in \mathrm{barc}(M[\epsilon:])$。所以，每个区间 $[s,t) \in \mathrm{barc}_\epsilon(M)$ 都唯一对应于 $\mathrm{barc}(M[\epsilon:])$ 中的一个区间，因此 $\mathrm{barc}_\epsilon(M) \subseteq \mathrm{barc}(M[\epsilon:])$。

为了证明反向包含，若 $I = [s,t)$ 是 $\mathrm{barc}(M[\epsilon:])$ 中的一个区间，那么我们可以反向应用前面的论证，看到它唯一对应于 M 中非零元素的一个序列$\{e^a_I\}^{a \in [s-\epsilon,t)}$。这唯一对应于 $\mathrm{barc}(M)$ 中的一个区间 $[s-\epsilon, t)$，而后者对应于 $\mathrm{barc}_\epsilon(M)$ 中的一个区间 $[s,t) \in$。因此，$\mathrm{barc}(M[\epsilon:]) \subseteq \mathrm{barc}_\epsilon(M)$，从而 $\mathrm{barc}(M[\epsilon:]) = \mathrm{barc}_\epsilon(M)$，如所需。◀

定理 17 的证明。 设 $\epsilon \geq 0$和 $f\colon\ M \to N^{\epsilon}$和 $g\colon\ N \to M^{\epsilon}$构成一个交错对,¯其中 $\epsilon = (\epsilon, \epsilon)$。固定 S 使得 M¯和 N 均为 S- 可构造的。令 $I = [s, t) \in \mathrm{Dgm}$。先假设 $t \notin S$ 和 $t + \epsilon \notin S$，这些情形将在最后处理。

根据可构造性的定义，我们可以将 $[s, \infty)$ 替换为某个 $[s, c)$（回想一下， $c \geq s_n$ 是 s_n 中的最大元素），因此我们将在假设 $S) [s, t\mathrm{Dgm}$，且 $\in, t \notin S,$ 和 $t + \epsilon \notin S$ 的条件下证明该结果。

在我们的假设下，$\mathbf{mrk}_M(I) = [\mathrm{im}(\phi_x^M(s \leq t))],$，且 $\mathbf{mrk}_N(I^{\epsilon}_{-\epsilon}) = [\mathrm{im}(\phi_x^N(s - \epsilon \leq t + \epsilon))]$。记 f' 为 f 在 $\mathrm{im}(\phi_x^M(s \leq t))$ 上的限制。注意， f' 映射到 $N_x^{t+\epsilon}$。我们断言 $\mathrm{im}(\phi_x^N(s - \epsilon \leq t + \epsilon))[2\epsilon :] \subseteq \mathrm{im}(f')$。

为此，令 $a \in \mathbb{R}$，并令 $x \in \mathrm{im}(\phi_x^N(s-\epsilon \leq t+\epsilon))^{\epsilon}[2\epsilon :](a)$。根据定义，这意味着存在 $x' \in \mathrm{im}(\phi_x^N(s-\epsilon \leq t+\epsilon))(a-\epsilon)$，使得 $\varphi_N((t+\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a+\epsilon))(x') = x$。此外，存在一个 $x'' \in N_x^{s-\epsilon}(a-\epsilon)$，使得 $\varphi_N((s-\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a-\epsilon))(x'') = x'$。设 $y := \varphi_M((s, a) \leq (t, a))(g(x''))$。根据此定义，显然有 $y \in \mathrm{im}(\phi_x^M(s \leq t))$。由 f 和 g 之间的交错条件可得：

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= f'(\varphi_M((s,a) \leq (t,a))(g(x'')) \\
&= f'(g(\varphi_N((s-\epsilon, a-\epsilon) \leq (t-\epsilon, a-\epsilon))(x'') \\
&= \varphi_N((t-\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a+\epsilon))(\varphi_N((s-\epsilon, a-\epsilon) \leq (t-\epsilon, a-\epsilon))(x'')) \\
&= \varphi_N((t+\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a+\epsilon))(\varphi_N((s-\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a-\epsilon))(x'')) \\
&= \varphi_N((t+\epsilon, a-\epsilon) \leq (t+\epsilon, a+\epsilon))(x') = x
\end{aligned}
$$

因此，我们有一个满射 $f'\colon \mathrm{im}(\phi_x^M(s \leq t)) \to \mathrm{im}(f')$，以及一个持久模的单射嵌入 $\iota\colon \mathrm{im}(\phi_x^N(s - \epsilon \leq t + \epsilon))[2\epsilon :], \to \mathrm{im}(f')$。由 [3] 这些映射在条形码上诱导出单射 $\chi_{f'}\colon \mathrm{barc}(\mathrm{im}(f')) \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s, t)))$ 和$\chi_{\iota'}\colon \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon)))^{\epsilon}[2\epsilon :]) \to \mathrm{barc}(\mathrm{im}(f'))$。根据引理 37，我们可以将 χ_{ι}视为一个定义域为 $\mathrm{barc}_{2\epsilon}(\mathbf{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon))^{\epsilon})$ 的映射。

定义 $\chi := \chi_{f'} \circ \chi_{\iota}\colon$条形码$_{2\epsilon}(\mathbf{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon))^{\epsilon}) \to \mathbf{mrk}_M([s, t))$。由于它是单射的复合，因此是单射。对于所有 $J \in$条形码$_{2\epsilon}(\mathbf{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon))^{\epsilon})$，我们有$\chi(J) = \chi_{f'}(\chi_{\iota}(J)) \subseteq \chi_{\iota}(J) \subseteq J$。因此，$\mathbf{mrk}_N(I^{\epsilon}_{-\epsilon}) \preceq_{2\epsilon} \mathbf{mrk}_M(I)$。交换 M 和 N时，论证是对称的，因此这一情形得证。

如果 $t \in S$，那么我们可以在上述所有论证中将 t 替换为 $t-\delta$，其中 δ 足够小，使得 $t - \delta + \epsilon \notin S$；由上述论证可得 $\mathbf{mrk}_N(I^{\epsilon}_{-\epsilon}) \preceq_{2\epsilon} \mathbf{mrk}_M(I)$。

最后，若 $t + \epsilon \in S$，则对所有充分小的 $\epsilon' = \epsilon + \delta, \delta > 0$，有 $\mathrm{im}(\phi_x^N(s - \epsilon \leq t + \epsilon)) = \mathbf{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon'))$。因此，上述论证表明，对所有这样的 ϵ'，都有 $\mathbf{mrk}_N(I^{\epsilon'}_{-\epsilon'}) \preceq_{2\epsilon'} \mathbf{mrk}_M(I)$；在定义 15 中取下确界，得到 $\mathrm{d_E}(\mathbf{mrk}_M, \mathbf{mrk}_N) \leq \epsilon$，这正是所需结论。◀

B 元图的详细证明

命题 20 的证明。首先，我们证明存在这样一对 (M^+, M^-)。设$A \in$SPvec 有一个代表元 (M_1^+, M_1^-)，其中 J :=barc(M_1^+) ∩barc$(M_1^-) \neq \emptyset$。定义$M_2^+ := \oplus_{I \in \mathrm{barc}(M_1^+)}$\J k^I, M_2^-: $= \oplus_{I \in \mathrm{barc}(M_1^-)}$\J k^I，以及 $V := \oplus_{I \in \mathcal{J}}$k^I。考虑 $M_1^+ \oplus M_2^- \oplus V$和 $M_2^+ \oplus M_1^- \oplus V$。根据构造，这二者的条形码均为 barc$(M_1^+)$ ∪barc(M_1^-)，其中 ∪ 是多重集并。因此，这两个模同构。由此，在 SPvec 中有 $[(M_1^+, M_1^-)] = [(M_2^+, M_2^-)],$，并且根据构造，$(M_2^+, M_2^-)$ 是一个代表元，其条形码为 barc(M_2^+) ∩barc$(M_2^-) = \emptyset$。

现在我们证明这一对 (M^+, M^-) 的唯一性。假设 $[(M_1^+, M_1^-)] =[(M_2^+, M_2^-)]$,条形码$(M_1^+)$∩条形码$(M_1^-) = \emptyset$，且条形码$(M_2^+)$∩条形码$(M_2^-) = \emptyset$。一个简单的代数事实是，对于两个单参数持久模 M和 N，条形码$(M \oplus N)$ =条形码(M) ∪

条形码(N)，其中 $\cup$是多重集并。根据 $[(M_1^+, M_1^-)] = [(M_2^+, M_2^-)]$,的定义，必定存在一个单参数持久模 V，使得 $M_1^+ \oplus M_2^- \oplus V \cong M_2^+ \oplus M_1^- \oplus V$。这意味着条形码($M_1^+$) $\cup$条形码(M_2^-) =条形码(M_2^+) $\cup$条形码(M_1^-)。根据我们关于交集的假设，这意味着条形码(M_1^+) =条形码(M_2^+)，且条形码(M_1^-) =条形码(M_2^-)，也就是说(M_1^+, M_1^-) =(M_2^+, M_2^-)。因此，这是唯一满足交集判据的代表元。◀

命题 23 的证明。设 $s = s_i < t = s_j$。那么我们有：

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{I \in \mathrm{Dgm} \\ I \supseteq [s,t)}} \mathbf{mdgm}(I) &= \sum_{k=j}^{n} \sum_{h=1}^{i} \mathbf{mdgm}([s_h, s_k)) + \sum_{h=1}^{i} \mathbf{mdgm}([s_h, \infty)) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \sum_{h=1}^{i} \big(\mathbf{mrk}([s_h, s_k)) - \mathbf{mrk}([s_h, s_{k+1})) \\
&\qquad + \mathbf{mrk}([s_{h-1}, s_{k+1})) - \mathbf{mrk}([s_{h-1}, s_k)) \big) \\
&\quad + \sum_{h=1}^{i} \big(\mathbf{mrk}([s_h, \infty)) - \mathbf{mrk}([s_{h-1}, \infty)) \big) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \big(\mathbf{mrk}([s_i, s_k)) - \mathbf{mrk}([s_i, s_{k+1})) \big) + \mathbf{mrk}([s_i, \infty)) \\
&= \mathbf{mrk}([s_i, s_j))
\end{aligned}$$

现在假设 $s = s_i < t = \infty$。我们有：

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{I \in \mathrm{Dgm} \\ I \supseteq [s,t)}} \mathbf{mdgm}([s_i, \infty)) &= \sum_{h=1}^{i} \mathbf{mdgm}([s_h, \infty)) \\
&= \sum_{h=1}^{i} \big(\mathbf{mrk}([s_h, \infty)) - \mathbf{mrk}([s_{h-1}, \infty)) \big) \\
&= \mathbf{mrk}([s_i, \infty))
\end{aligned}$$

◀

命题 25 的证明。首先，注意到 M是在某个集合 $S = \{s_1 < \ldots < s_4\}$ 上可构造的，该集合的大小不超过（但可能小于）三，其中 S 由 s、 s'、 t和 t'组成。直接计算可得：

$$\mathbf{mrk}([a, b)) = \begin{cases} [t, t') & \text{if } s \le a \le b < s'; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因为 $\mathsf{im}(a \le b)$ 要么是 $[t, t')$ 在恒等映射下的像，要么是平凡的。

不失一般性，假设 $s = s_a$ 和 $s' = s_b$。若 $a, b \notin S \times S$，则根据定义立即有 $\mathsf{mdgm}([a, b)) = 0$ 。为了计算元图的其余部分，对于每一对 $s_i < s_j$，我们需要计算四个元秩 $\mathsf{mrk}([s_i, s_j))$、$\mathsf{mrk}([s_i, s_{j+1}))$、$\mathsf{mrk}([s_{i-1}, s_{j+1}))$ 和 $\mathsf{mrk}([s_{i-1}, s_j))$。现在根据 s_i, s_j 在元秩定义中像映射 ϕ 的定义域和陪域中的位置，分情况讨论：情况 1： $s_i < s$。四个元秩均为平凡的，因为定义域 $M_{s_j}, M_{s_{i-1}}$ 都是平凡模。因此，$\mathsf{mdgm}([s_i, s_j)) = 0$。

情况 2： $s_j > s'$。四个元秩均为平凡的，因为陪域 M_{s_j}, $M_{s_{j+1}}$ 都是平凡模，且 $\mathrm{mdgm}([s_i, s_j)) = 0$。情况 3： $s_i = s$, $s < s_j < s'$。我们有 $\mathrm{mrk}([s_i, s_j)) = [t, t')$、$\mathrm{mrk}([s_i, s_{j+1})) = [t, t')$、$\mathrm{mrk}([s_{i-1}, s_{j+1}) = 0$ 以及 $\mathrm{mrk}([s_{i-1}, s_j)) = 0$，因此 $\mathrm{mdgm}([s_i, s_j)) = 0$。情况 4： $s < s_i < s'$, $s_j = s'$。我们有 $\mathrm{mrk}([s_i, s_j)) = [t, t')$、$\mathrm{mrk}([s_i, s_{j+1})) = 0$、$\mathrm{mrk}([s_{i-1}, s_{j+1})) = 0$ 以及 $\mathrm{mrk}([s_{i-1}, s_j)) = [t, t')$，因此 $\mathrm{mdgm}([a, b]) = 0$。情况 5： $s < s_i < s_j < s'$。四个元秩均为 $[t, t')$，因此 $\mathrm{mdgm}([s_i, s_j)) = 0$。情况 6： $s_i = s$, $s_j = s'$。我们有 $\mathrm{mrk}([s_i, s_j)) = [t, t')$、$\mathrm{mrk}([s_i, s_{j+1})) = 0$、$\mathrm{mrk}([s_{i-1}, s_{j+1})) = 0$ 以及 $\mathrm{mrk}([s_i, s_{j+1})) = 0$，因此 $\mathrm{mdgm}([s_i, s_j)) = [t, t')$。这涵盖了 s_i 和 s_j 相对于 s 和 s' 的位置的所有情况

，因此，我们就完成了 . ◀

命题 38 可仿照命题 16 得出：

▶**命题 38。** $\mathrm{d}_{\mathrm{E}}^S$ 如定义 *29* 所定义，是 S-可构造的模的元图集合上的扩展伪度量 $M : \mathbb{R}^2 \to$ **向量空间。**

定理 30 的证明。为此，我们证明 $\mathrm{d}_{\mathrm{E}}^S(\mathrm{mdgm}_M, \mathrm{mdgm}_N) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{E}}(\mathrm{mrk}_M, \mathrm{mrk}_N)$，然后应用定理 17。令 $\epsilon \geq 0$ ，并假设对所有 $[s, t) \in \mathrm{Dgm}$，都有 $\mathrm{mrk}_M([s - \epsilon, t + \epsilon))^\epsilon \preceq_{2\epsilon} \mathrm{mrk}_N([s, t))$，且 $\mathrm{mrk}_N([s - \epsilon, t + \epsilon))^\epsilon \preceq_{2\epsilon} \mathrm{mrk}_M([s, t))$。固定$[s_i, s_j) \in \mathrm{Dgm}$。根据假设，我们有以下四个单射映射：

$$\begin{aligned}
\chi_1 &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_i - \epsilon, s_j + \epsilon)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_i, s_j))) \\
\chi_2 &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_{i-1} - \epsilon, s_{j+1} + \epsilon)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_{i-1}, s_{j+1}))) \\
\chi_3 &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_{i-1} - \epsilon, s_j + \epsilon)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_{i-1}, s_j))) \\
\chi_4 &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_i - \epsilon, s_{j+1} + \epsilon)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_i, s_{j+1})))
\end{aligned}$$

设 $s_a := \overline{S_{\leq}}(s_i - \epsilon)$ 且 $s_b := S_{\geq}(s_j + \epsilon)$。假设 $c := s_{i+1} - s_i$ (根据假设，它对任意 $1 \leq i \leq n - 1$ 都是常数)。于是我们有 $s_{a-1} = s_a - c \leq s_i - \epsilon - c = s_{i-1} - \epsilon$。类似地，我们有 $s_{b+1} \geq s_{j+1} + \epsilon$。例如，这意味着 $\mathbf{mrk}_M([s_{a-1}, s_{b+1})) \preceq \mathbf{mrk}_M([s_{i-1} - \epsilon, s_{j+1} + \epsilon))$，并且对于上文其他三个映射 χ_i' 的定义域，也有类似结论。因此，将上文每个映射 χ_i 与 $\preceq$ 的定义所保证的映射复合，我们可以定义：

$$\begin{aligned}
\chi_1' &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_a, s_b)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_i, s_j))) \\
\chi_2' &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_{a-1}, s_{b+1})))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_{i-1}, s_{j+1}))) \\
\chi_3' &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_{a-1}, s_b)))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_{i-1}, s_j))) \\
\chi_4' &: \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_N([s_a, s_{b+1})))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathbf{mrk}_M([s_i, s_{j+1})))
\end{aligned}$$

定义域中四个条形码的多重集并构成 $\mathrm{PN}(M, N)([S_{\leq}(s_i - \epsilon)\ S_{\geq}(s_j + \epsilon))^\epsilon[2\epsilon :] = \mathrm{PN}(M, N)([s_a, s_b)))$ 的条形码，而陪域中四个条形码的多重集并构成 $\mathrm{PN}(N, M)([s_i, s_j))$ 的条形码。因此，我们可以令 $\chi : \mathrm{barc}(\mathrm{PN}(M, N))([s_a, s_b))^\epsilon[2\epsilon :] \to \mathrm{barc}(\mathrm{PN}(N, M))([s_i, s_j))$ 为 χ_i'（$1 \leq i \leq 4$）的不交并。由于每个 χ_i' 都是单射，且具有 $\chi_i'(J) \subseteq J$，这些性质对 χ 也成立。◀

▶ 注释 39. 我们可以去掉条件 S 为等间距，但这样做需要付出代价。如果 S 不是等间距的，令 $\mathrm{irreg}(S) := (\max_{1 \leq i \leq n-1} s_{i+1} - s_i) - (\min_{1 \leq i \leq n-1} s_{i+1} - s_i)$。我们可以像之前一样定义侵蚀距离，只去掉等间距条件。在这种情况下，稳定性结果如下：

▶ 定理 40. </style}假设 ,: $\mathbb{R}^2 \to$ **向量空间** 是 S-可构造的。那么有:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{E}}^{S}(\mathbf{mdgm}_M, \mathbf{mdgm}_N) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{I}}(M, N) + \mathrm{irreg}(S)$$

注意，irreg(S) $= 0$ 当且仅当 S 为等间距，因此这一结果推广了定理 30。若 S 不是等间距，主要问题在于可能出现 $s_{a-1} > s_{i-1} - \epsilon$，从而导致定理 30 的证明失效。不过，加性项 irreg(S) 可以对此进行补偿。具体而言，令 $s_a := S_{\leq}(s_i - \epsilon$ –irreg(S))、 $c_a :$ $= s_a - s_{a-1}$ 和 $c_i := s_i - s_{i-1}$。根据定义， $c_i - c_a \leq$ irreg(S)，因此有:

$$s_{a-1} = s_a - c_a \leq s_i - \epsilon - \mathrm{irreg}(S) - c_a \leq s_i - \epsilon - c_i = s_{i-1} - \epsilon$$

类似地，令 $s_b := S_{\geq}(s_j + \epsilon +$ irreg(S)), 可得 $s_{b+1} \geq s_{j+1} + \epsilon$。使用我们对 s_a 和 s_b 的新定义后，定理 40 的证明与定理 30 的证明类似。

C 算法的详细证明

命题 34 的证明。根据定义，mrk$_M$($[i, i]$) 是沿着 M 中从 (i, 1) 到 (i, n) 的垂直切片 M_x^i 上的一维持久模。这是 γ_i 的一个子路径，但由于 γ_i 有一段从 (1, 1) $\to$ ($i - 1$) 开始的初始部分，我们需要调整区间在 F_{γ_i} 中的出生时间和死亡时间，使索引对齐。之后，将每个区间与 $[1, n]$ 求交，即可得到该区间在切片 M_x^i 内的持久性。◀

命题 35 的证明。按照我们的排序，可以先取一个区间 I_i^i在$\mathbf{mrk}_M([i, i])$中，并找到它对应的区间 I_k^{i-1}在$\mathbf{mrk}_M([k, i-1])$。根据定义， I_k^{i-1} 源自某个区间模直和项的像 I_k^i，该直和项来自$\mathbf{mrk}_M([k, k]) = M_x^k$。根据持久模的交换条件，我们有:

$$\phi_x(k \leq i) = \phi_x(i-1 \leq i) \circ \phi_x(k \leq i-1).$$

因此，只需证明 ϕ_x($i - 1 \leq i$)(I_k^{i-1}) $= I_k^{i-1} \cap I_i^i$。根据我们的排序和葡萄园算法，我们知道 ϕ_x($i - 1 \leq i$)(I_k^{i-1}) $\subseteq I_i^i$，显然这个像也是 I_k^{i-1} 的子集，因此我们有 ϕ_x($i - 1 \leq i$)(I_k^{i-1}) $\subseteq I_k^{i-1} \cap I_i^i$。这个像不完整的唯一可能情况是：在我们从 $F_{\gamma_{i-1}}$ 扫到 F_{γ_i}的更新过程中， `intervals` 中的区间 I （同时对应 I_k^{i-1} 和 I_i^i ）在某一时刻缩短为 I_k^{i-1} 的真子集，随后又重新扩展到包含 I_k^{i-1} 的全部。如果发生这种情况，那么我们就有 ϕ_x($i - 1 \leq i$)(I_k^{i-1}) $\subsetneq I_k^{i-1} \cap I_i^i$。

我们断言这种情况不可能发生。原因如下：从图8可以看出，在第三种或第四种情况下，区间的死亡坐标最多只能缩小一个单位。无论是哪种情况， σ_{i+1} 都是在换位后沿滤过向前移动的死亡坐标。按照我们向下扫描该列的顺序， σ_{i+1} 不可能通过任何换位沿滤过向后移动，因此，与 σ_{i+1} 对应的区间的死亡坐标不可能再次增大。类似地，在第一种和第三种情况下，区间的出生坐标最多只能缩小一个单位。无论是哪种情况， σ_i 都是在换位后沿滤过向后移动的出生坐标。由于在新的滤过中 σ_i 现在位于σ_{i+1} 之后，按照我们向下扫描该列的顺序， σ_i 不会再在该列中被其他换位触及。因此，与 σ_i 对应的区间的出生坐标不可能再次减小。

由此，我们证明了像 ϕ_x($k \leq i$)(I_k^k) $= I_k^{i-1} \cap I_i^i$，因此证明完毕。◀