arXiv:2303.08304v1 [cond-mat.soft] 15 Mar 2023

短弹性条带在管内接触时的卷曲普适定律

Jeng Yi Lee,[1], * Hao-Yu Lu,[2] 和 Ray-Kuang Lee[2,3,4,5]1 *Department of Opto-Electronic Engineering, National Dong Hwa University, Hualien 974301, Taiwan*2 *Department of Physics, National Tsing Hua University, Hsinchu 30013, Taiwan*3 *Institute of Photonics Technologies, National Tsing Hua University, Hsinchu 30013, Taiwan*4 *Physics Division, National center for theoretical sciences, Taipei, 10617, Taiwan*5 *Center for Quantum Technology, Hsinchu 30013, Taiwan*（日期：2023年3月16日）

我们发现，不仅长弹性条带在管内接触时存在卷曲普适定律，短弹性条带也存在这一普适定律。这里考虑的弹性条带，其长度 L 与管半径 R之比为 $2 < L/R \leq 2\pi$ 。通过改变 L/R的比值，我们确定了这类短弹性条带的四种变形类型，即两点接触、三点接触、连续接触和自接触。通过闭式理论公式和实验演示，我们验证了对于在管内接触的任意弹性条带，无论其弹性性质、条带长度和管半径如何，这四种类型均成立。我们的卷曲研究结果可直接应用于多种物理系统，包括薄型柔性电子器件、卷曲形状的范德华材料，以及病毒衣壳中的 DNA 包装。

引言。—将一根较长的线材、纤维或条带装入容器中，常见于许多不同的系统，例如将弹性线材折叠在球形空腔中 [1–8]，将石墨烯片或范德华材料弯曲成卷曲形状 [9–12]，将 DNA 装入病毒衣壳 [13–21]，以及在受限结构中卷曲片材 [22–24]。

通过研究光滑坚固的圆柱管内的长弹性条带，人们发现了卷曲普适定律 [25, 26]。无论管尺寸、条带总长度和弹性弯曲刚度如何，当本征形状为平直的弹性条带在管内卷曲时，多层卷曲中最内侧的条带会在多个位置脱离管壁。在条带与条带之间以及条带与管壁之间的界面均不存在摩擦的情况下，脱离条带自由端处的切线与管壁切线之间的切向角为 $24.1°$；而从脱离区域张开的角度为 $125.2°$ [25, 26]。

这一普遍现象首先在理论上得以推导，随后在多种尺度迥异且出人意料的系统中被观察到，包括机械、生物和凝聚态物质系统。尽管实验测量和理论分析表明，由于缺乏面内 $\sigma-$ 键合，经典弹性板模型难以描述单层石墨烯的弯曲变形，但得益于范德华力[9–12]的介导，连续介质板理论仍可很好地应用于粘合多层材料。

与长条带不同，在这篇论文中，我们揭示，短弹性条带在管内接触时也存在卷曲普适定律。这里，我们将条带长度L 与管半径 R 之比介于 $2 < L/R \leq 2\pi$之间的条带称为短条带。借助弹性曲线的基尔霍夫方程，我们首先从理论上确定了图 1 所示的这类短弹性条带的四种变形类型，分别标记为：(a) 两点接触、(b) 三点接触、(c) 连续接触和 (d) 自接触，这些类型适用于任意弹性材料。在实验中，见图 1(e)–(h) 中的示意图，我们用不同长度和厚度的聚氯乙烯（PVC）和聚对苯二甲酸乙二醇酯（PET）制备样品，以验证我们的理论预测，结果与预测吻合良好。由于这类短条带的类似情形在许多物理系统中都很常见，我们关于短弹性条带卷曲的研究成果可直接应用于薄型柔性电子器件、光伏太阳能电池、范德华材料和 DNA包装。

理论：基尔霍夫方程。——如图 1(a-d) 所示，我们将本征平坦的条带建模为准一维弹性曲线。根据基尔霍夫理论，静力平衡下的力方程和力矩方程为 [27, 28]，

$$\frac{d\,\vec{F}(s)}{ds} + \vec{K}(s) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\,\vec{M}(s)}{ds} + \hat{t}(s) \times \vec{F}(s) = 0. \tag{2}$$

这里， s 是沿弹性条带的弧长，$\hat{}t(s)$是单位切向量，$\vec{K}(s)$是单位长度的外力， $\vec{F}(s)$和 $\vec{M}(s)$分别表示 s处的合应力和力矩。在理论分析中，我们假设弹性曲线不受外弯矩作用，即条带与条带之间以及条带与管壁界面处均无摩擦，且不受重力影响。对于平面变形，有 $\vec{M} = B\hat{}t \times d\hat{}t/ds$。这里， B 是由 $B = Y\,I$构成的弯曲刚度，其中 Y 为杨氏模量， I 为惯性矩；它等价于弯曲自由能中曲率的二次形式 [28]。基于方程（1-2），我们从略大于 2 开始增大条带长度比 L/R，直至 2π ，并揭示四种不同变形类型的出现。

两点接触。——首先，我们考虑条带长度略大于 $2R$的情况，因此仅有两个

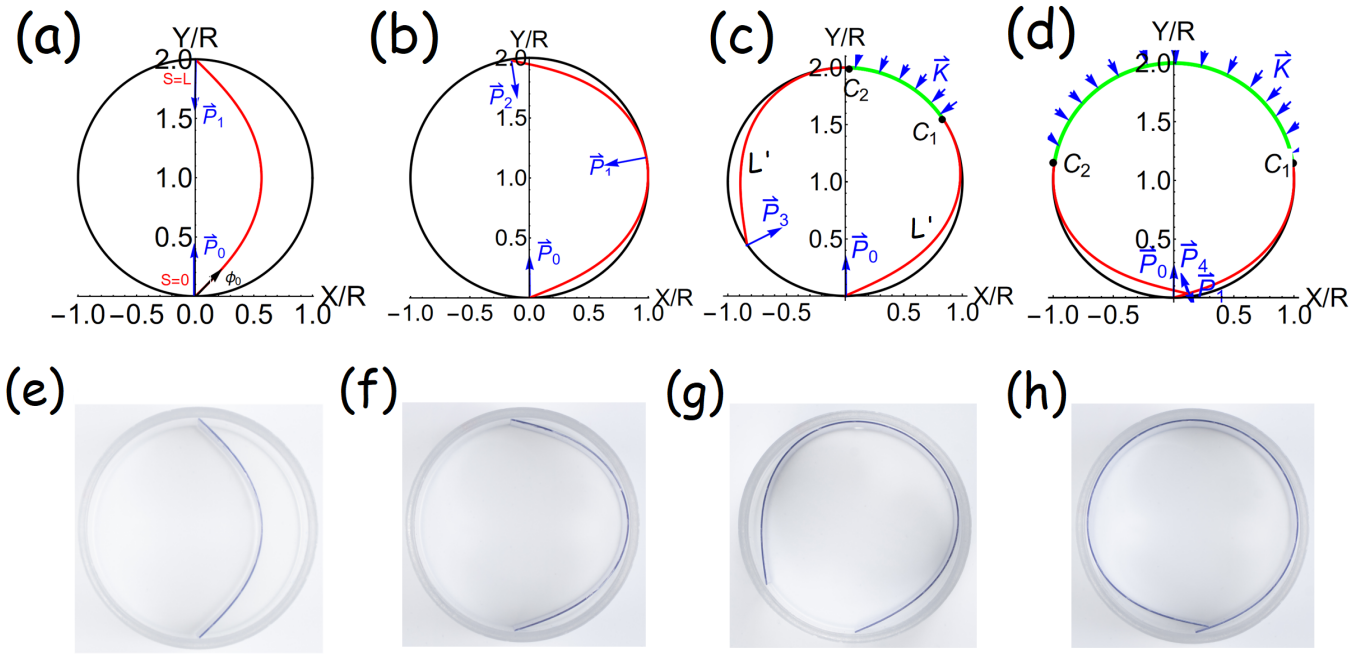


图1. 当条带长度 L 与管半径 R 之比为 $2 < L/R \leq 2\pi$时，卷曲普适定律识别出四种不同类型的变形。第一行 (a)-(d) 展示了以下情况的模拟结果：(a) $L/R = 2.37$、(b) 3.2、(c) 5.1，以及 (d) 2π。其中，红色曲线表示脱离条带，绿色曲线表示条带的连续接触部分。第二行 (e)-(h) 展示了相应的实验测量结果以供比较（更多详情见表1）。这四种变形分别为 (a, e) 两点接触、(b, f) 三点接触、(c, g) 连续接触，以及 (d, h) 自接触。(a-d) 中还绘出了相关的受力分析图，以蓝色表示。

点接触位于条带上的 $s = 0$和 $s = L$处，如图 1(a) 所示的数值计算结果，以及图 1(e) 中相应的实验示意图所示。

现在，$s = 0$ and $s = L$ 处相应的点接触力分别为 P_0 和 P_1，如图 1(a) 中的蓝色箭头所示。由于不存在摩擦，外力的方向垂直于管壁。此外，在静力平衡条件下，有 $P_0 = -P_1$。结合 $K = 0$，根据方程 (1)，应力 $\vec{F}(s)$ 在整个条带上保持恒定，即 $\vec{F}(s) = -\vec{P}_0$。利用方程 (2) 的力矩平衡，可得曲率方程，

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = \sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}. \tag{3}$$

这里，$P_0 = |\vec{P}_0|$ 和 ϕ（s）是相对于 X轴的切向角。此外，我们记 $\phi_0 \equiv \phi$（$s = 0$），并在 $s = 0$处采用零力矩条件，对应于 $d\phi/ds|_{s=0} = 0$。由于条带在 Y轴上的投影长度始终为 $2R$，且条带长度 L 保持不变，因此我们得到两个几何约束：

$$R = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}\, d\phi, \tag{4}$$

$$\frac{L}{2} = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}\, d\phi, \tag{5}$$

其中涉及两个未知量 ϕ_0 和 P_0。随后，通过消去 P_0，即可针对给定的 L/R计算出 ϕ_0，而不受弯曲刚度 B 的影响，但须满足条带在 $s = L/2$处的关键几何约束，即 $0 \leq X$（$s = L/2$）$/R < 1$。

因此，我们通过数值计算求得满足 ϕ_0 and达到约束条件 $0.358 < \phi_0 \leq \pi/2$的条件，从而得到这一双点接触区域内相应的条带长度：

$$L/R \in [2, 3.033);\ \text{two point-contact region.} \tag{6}$$

我们想指出，这一结果适用于任何弹性条带系统。随着 L/R增加，条带弯曲得更加明显，反映出 ϕ_0 单调递减，如图2(a)所示。此外，利用式（4-5），还可以引入一个无量纲力：

$$\frac{P_0R^2}{B} = \frac{1}{2}\left[\int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}\, d\phi\right]^2, \tag{7}$$

它是 ϕ_0的函数。在图 2(b) 中，我们展示了无量纲力 P_0R^2/B 作为L/R的函数。在这个双点接触区域中，尽管无量纲力 P_0R^2/B 随着L/R 增大而单调减小，但当材料属性和条带长度（B 和 L）固定时，对于较小的半径 R，相应的点接触力 P_0 会增大。
$P_0R^2/B = 2.47$ 在 $L/R = 2$ 处的值对应于临界

力，即经典欧拉屈曲分岔对应的临界力，其中$B\pi^2/L^2$ [28–30]。

三点接触。—当条带的中间段（$s = L/2$）与管发生点接触时，便形成三点接触情况，如数值计算和实验测量结果分别显示于图 1(b) 和图 1(f) 中。此处，如图 1(b) 所示，我们将作用于条带上的三个外部点接触力记为 P_0、P_1 和 P_2。在静力平衡状态下，它们的矢量和为零。

对条带应用镜像对称性，可知两个自由端处这些外力的大小相同 $|\vec{P}_0| = |\vec{P}_2| = P_0$，尽管方向不同。同样，在从$s = 0$ 和 $s = L/2$脱离的区域内，由于没有外力，我们也有 $\vec{F}(s) = -\vec{P}_0$.。随后，利用点接触的几何约束、条带长度L 守恒以及自由端处的零力矩，可以确定两个未知量： $s = 0$和 $s = L/2$处相对于 X轴的切向角，即 ϕ_0 和 $\phi_1 \equiv \phi$（$s = L/2$），可通过以下条件确定，

$$R\sin\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi - \sin\phi_0]}}\, d\phi, \quad (8)$$

$$R - R\cos\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi - \sin\phi_0]}}\, d\phi. \quad (9)$$

同样，对于给定的 L/R，通过消去未知量 P_0，我们便可充分确定 ϕ_0 和 ϕ_1，且不依赖于 B。详细推导见补充材料。

要求 $s = L/2$ 处的曲率半径为 R，这对应于连续接触的开始，据此可求出 $\phi_0 = 0.358 = 20.51°$ 的允许值，从而确定满足三点接触情形的最大条带长度：

$$L/R \in [3.033, 4.176);\ \text{three point-contact region.} \quad (10)$$

三点接触情形对应的无量纲力 P_0R^2/B 为

$$\frac{P_0R^2}{B} = \frac{2(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)}{\sin^2\phi_1}, \quad (11)$$

它隐式依赖于 L/R。当 $L/R = 3.033$ 时，中间条带处出现的点接触使 P_2 具有一个水平分量，以满足静力平衡。这样一来，沿竖直方向的 P_2 强度会降低，从而使图 2(b) 中的 $|\vec{P}_0|$ 减小。因此，当长度比 $L/R > 3.033$ 时，切向角 ϕ_0 会增大，如图 2(a) 的插图所示。

连续接触。—当 $d\phi/ds|_{s=L/2}$ 变为 $1/R$时，条带变形转为连续接触，如

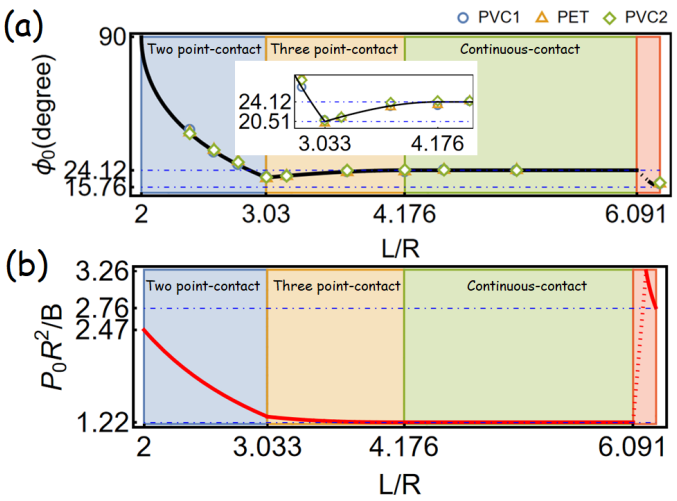


图 2. (a) 根据长度比 L/R，我们通过数值模拟识别出切向角 ϕ_0（黑色曲线）对应的不同变形区域，并展示了三组实验测量结果： ○（PVC 厚度为 0.5mm，记为 PVC1）、 ◇（PVC 厚度为 0.1mm，记为 PVC2）和 △（PET 厚度为 0.2mm，记为 PET）。(b) 还绘出了相应的无量纲力 P_0R^2/B 随长度比 L/R 的变化关系。

数值结果和实验结果分别如图 1(c) 和 1(g) 所示。此时，条带与管形成了一个有限区域的连续接触，如图 1(c) 中绿色曲线所示。管施加的相关压力分布 K 的大小保持不变 [31]。

我们将连续接触的两个端点标记为C_1 和 C_2。考虑到 C_1 处曲率为 $1/R$这一几何约束，以及自由端 $s = 0$ 处的零力矩条件，同样可以得到以下两个包含 $s = 0$ 和 $s = L'$处两个未知切向角的方程，

$$2\sin\phi_0 = \sin\phi_1, \quad (12)$$

$$\frac{\sin\phi_1}{1 - \cos\phi_1} = \frac{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}}\, d\phi}{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}}\, d\phi}. \quad (13)$$

详情请参阅补充材料。

通过数值计算，我们得到自由端的切线角为 $\phi_0 = 0.421 = 24.12°$；而张开角为 $\phi_1 = 2.185 = 125.2°$。有趣的是，这两个角度恰好与长条带 [25, 26] 的角度相同。该脱离条带的曲率方程及其边界条件回到了多层卷曲的相同情形。我们在图2(a)中指出这一结果，其中 ϕ_0 始终为 $24.12°$。

将 $s = 0$ 处的无量纲力，即 $P_0R^2/B = 1/\sin\phi_1 = 1.22$，代入脱离条带的曲率方程，可数值求得脱离长度为 $L'/R = 2.088$。该比值也反映了连续接触变形所允许的最小长度，即

$2L'$。然而，当条带的两个自由端在 $(X/R,\ Y/R) = (0,\ 0)$ 处相遇时，连续接触变形便会终止。因此，我们可以通过 $2L' + R(2\pi - 2\phi_1) = 6.091R$ 推导连续接触情况下的最大长度。因此，该连续接触区域的受支撑条带长度受限于

$$L/R \in [4.176, 6.091]; \text{ continuous-contact region.} \quad (14)$$

我们想强调的是，正如图 2(b) 中的数值结果所示，在这个连续接触区域内，相应的无量纲力 P_0R^2/B 有些出乎意料地保持不变。

自接触。——最后但同样重要的是，我们考虑自接触区域内条带的长度：

$$L/R > 6.091; \text{ self-contact region.} \quad (15)$$

此时，条带发生自接触，分别如模拟和实验中的图 1(d) 和图 1(h) 所示。此处，条带的一个自由端与管的前侧形成点接触。在这一阶段，点接触伴随着内部点力，如图 1(d) 中的$\vec{P_1}$ 和 $\vec{P_4}$ 所示。根据牛顿第三定律，我们有 $\vec{P_1} = -\vec{P_4}$。因此，条带不同分段之间的相互作用会产生非局部效应。此外，仍存在一个有限的连续接触区域，如图 1(d) 中绿色曲线所示，并与压力分布 K相关联。

有趣的是，整个条带只受到两个外部点力。一个是位于 $s = 0$,处的点接触力，记为 P_0；另一个是来自管的压力 K。由于在我们的系统中摩擦力仍为零，$s = 0$处的点接触力方向为竖直方向。因此，为维持静态平衡，压力分布 K 需要关于Y轴对称。这意味着 C_1 和 C_2 的位置关于Y轴呈镜像对称。详细推导见补充材料。

在图2(b)中，我们还计算了 $s = 0$处相应的无量纲点接触力。由于在我们的情形下，内力的出现位置接近 $s = 0$，因此可以预期，无量纲点接触力 P_0R^2/B 会大于连续接触区域中的点接触力。在 $L/R = 2\pi$处，我们发现 $P_0R^2/B = 2.76$。因此，推力 P_1 使前方条带向下运动，导致 ϕ_0 相对于L/R减小，如图2(a)所示。

实验验证。—我们设计并制作了一系列不同条带长度 L/R 的样品，长度范围为 2.4 至 6.28，更多详情见表1。在实验中，我们制备了两种不同的弹性材料：聚氯乙烯（PVC）和聚对苯二甲酸乙二醇酯（PET），并采用不同厚度，以验证我们的理论发现。

长度比 L/R	PVC 0.5 毫米	PET 0.2 毫米	PVC 0.1 毫米	理论值，ϕ_0
2.4	43.9°	42.8°	42.3°	42.37°
2.6	33.1°	34.2°	34.1°	33.55°
2.8	26.7°	28.6°	28.1°	26.78°
3.03	20.8°	20.2°	20.7°	20.5°
3.2	21.2°	21.3°	21.3°	21.38°
3.7	23.3°	23.2°	24°	23.38°
4.176	23.4°	23.6°	24.3°	24.12°
4.5	24.2°	24.3°	24.3°	24.12°
5.1	23.8°	24.2°	24.1°	24.12°
6.28	17.5°	17.5°	17.9°	15.76°

表I. 不同条带长度比 L/R下的切向角 ϕ_0 实验测量值。这里，我们采用了三组材料参数：厚度为0.5mm的PVC（PVC1）、厚度为0.2 mm的PET（PET），以及厚度为0.2mm的PVC（PVC2）。同时列出了理论值以供比较。

我们采用了三组材料参数：厚度为 0.5 mm 的 PVC（PVC1）、厚度为 0.2 mm 的 PET（PET）以及厚度为 0.1 mm 的 PVC（PVC2）。所有样品的宽度均为 2 cm。制备弹性条带时，先使其保持初始平直状态，即不受管的约束，以避免发生塑性变形。所用的管为丙烯酸（聚甲基丙烯酸甲酯，PMMA）管，内半径为 3 cm。

切向角为 $s = 0$，记作 ϕ_0。三组PVC1、PET和PVC2的切向角测量值列于表1，并与理论值进行了比较。所有数据也绘制在图2(a)中，图1(e)-(h)展示了选取的图片。它们与两点接触、三点接触和连续接触区域的模拟曲线吻合良好。当条带长度满足 $4.176 \le L/R \le 6.091$ 时，测得的 ϕ_0 证实了理论值 $24.12°$，与连续接触情况下的预测一致。

结论。—除了长条带的卷曲普适定律外，我们还通过理论和实验发现，长度比为 $2 < L/R \le 2\pi$、在管内接触的短弹性条带也遵循普适规律。理论上确定了四种不同的变形类型：两点接触、三点接触、连续接触和自接触，并通过实验加以验证。理论上，相邻两个变形区域之间的边界由弹性基尔霍夫方程刻画；实验上，我们研究了三组材料参数及一系列不同长度的条带，结果与理论分析高度吻合。我们的结果表明，即使是短条带，也存在普适定律，而不受弹性性质、条带长度和管半径的影响。本研究结果可直接应用于许多实际领域，例如柔性电子器件、医学光纤成像和 DNA 包装。

致谢

作者感谢 Ole Stuernagle 教授提供的宝贵讨论。本研究部分由台湾科技部资助。

（编号 110-2112-M-259-005、111-2112-M-259-011、110-2627-M-008-001 和 110-2123-M-007-002），国际技术中心印太分部（ITC IPAC）和陆军研究办公室（合同编号 FA5209-21-P-0158），以及东京大学宇宙射线研究所（ICRR）的合作研究计划。

[1] Laurent Bou´e 和 Eytan Katzav，“二维空间中柔性杆的折叠”，《欧洲物理快报》**80** 54002（2007）。[2] N. Stoop、J. Najafi、F. K. Wittel、M. Habibi 和 H. J. Herrmann，“球形空腔中的弹性线材密堆积”，《物理评论快报》**106**，214102（2011）。[3] J. Najafi、N. Stoop、F. Wittel 和 M. Habibi，“弹性线材在球体中的有序堆积”，《物理评论E》**85**，061108（2012）。[4] R. Vetter、F.K. Wittel 和 H.J. Herrmann，“柔性限域中生长细丝的形态发生”，《自然通讯》**5**，4437（2014）。[5] M. R. Shaebani、J. Najafi、A. Farnudi、D. Bonn 和 M. Habibi，“准一维弹塑性材料的压实”，《自然通讯》**8**，15568（2017）。[6] T. Curk、J. D. Farrell、J. Dobnikar 和 R. Podgornik，“球形限域弹性细丝中的自发畴形成”，《物理评论快报》**123**，047801（2019）。[7] J. D. Sherwood 和 S. Ghosal，“将柔性纤维装入空腔”，《物理评论E》**105**，035002（2022）。[8] S. Alben，“带摩擦的弹性环堆积”，《英国皇家学会会刊A辑》**478**，20210742（2022）。[9] E. Perim、A. F. Fonseca、N. M. Pugno 和 D. S. Galvao，“纳米尺度圆柱管内膜的普适行为失效”，《欧洲物理快报》**105**，56002（2014）。[10] G. Wang、Z. Dai、J. Xiao、S. Z. Feng、C. Weng、L. Liu、Z. Xu、R. Huang 和 Z. Zhang，“多层范德华材料的弯曲”，《物理评论快报》**123**，116101（2019）。[11] V. B. Shenoy、C. D. Reddy 和 Y.-W. Zhang，“具有重构边缘的石墨烯片自发卷曲”，《美国化学会纳米》**4**，4840（2010）。[12] D.-B. Zhang、E. Akatyeva 和 T. Dumitrica，“在连续介质力学的适用边界处弯曲超薄石墨烯”，《物理评论快报》**106**，255503（2011）。[13] M. E. Cerritelli、N. Cheng、A. H. Rosenberg、C. E. McPherson、F. P. Booy 和 A. C. Steven，“T7噬菌体DNA的衣壳内构象”。《细胞》**91**，271（1997）。[14] P. K. Purohit、J. Kondev 和 R. Phillips，“病毒中的DNA包装力学”，《美国国家科学院院刊》**100**，3173（2003）。[15] P. K. Purohit、M. M. Inamdar、P. D. Grayson、T. M. Squires、J. Kondev 和 R. Phillips，“噬菌体DNA包装与释放过程中的作用力”，《生物物理学杂志》**88**，851、866（2005）。[16] V. A. Belyi 和 M. Muthukuma，“病毒基因组包装的静电起源”，《美国国家科学院院刊》**103**，17174（2006）。[17] E. Katzav、M. Adda-Bedia 和 A. Boudaoud，“弹性杆密堆积及病毒衣壳中DNA包装的统计方法”，《美国国家科学院院刊》美国 103, 18900 (2006). [18] A. S. Petrov、C. R. Locker 和 S. C. Harvey，“细菌病毒内部 DNA 构象的表征”，《物理评论E》80, 021914 (2009). [19] S. Ghosal，“噬菌体 DNA 喷射的绞盘摩擦模型”，《物理评论快报》109, 248105 (2012). [20] N. Al-Naamani 和 I. Ali，“拥挤环境中半柔性聚合物在病毒衣壳内的填充”，《物理评论E》100, 052412 (2019). [21] J. D. Sherwood 和 S. Ghosal，“将柔性纤维填入空腔”，《物理评论E》105, 035002 (2022). [22] E. Cerda 和 L. Mahadevan，“受限可展弹性曲面：圆柱、圆锥与弹性曲线”，《英国皇家学会会刊A辑》461, 671 (2005). [23] L. Bou´e、M. Adda-Bedia、A. Boudaoud、D. Cassani、Y. Couder、A. Eddi 和 M. Trejo，“柔性结构填充中的螺旋图案”，《物理评论快报》97, 166104 2006( ). [24] Y. Wang 和 V. H. Crespi，“NanoVelcro：原子级薄片中具有互补掺杂区域的引导折叠理论”，《纳米快报》17, 6708 (2017). [25] V. Romero、T. A. Witten 和 E. Cerda，“弹性薄片在管中的多重卷曲”，《英国皇家学会会刊A辑》464, 2847 2008( ). [26] P. Ball，“卷曲普适定律”，《自然》453, 966 (2008). [27] B. Audoly 和 Y. Pomeau, *Elasticity and geometry: from hair curls to the non-linear response of shells* (牛津大学出版社，2010). [28] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity* (爱思唯尔，1986). [29] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics Biology Chemistry And Engineering* , , 2018 , （CRC 出版社，）。[30] T. G. Sano 和 H. Wada，“ 非对称约束弹性条带中的跳跃屈曲”，《物理评论E》97, 013002 (2018).[31] 连续接触区域的曲率为常数， $\phi_s = \frac{1}{R}$，因此 $\vec{M}_s = 0$。然后，考虑式(1)的力矩平衡，可得$\hat{t} \times \vec{F} = 0$，进而得到$f_n = 0$。这里 $\vec{F} = f_t\hat{t} + f_n\hat{n}$ 是以内禀坐标表示的，适用于平面变形。这里$\hat{n}$ 是单位法向量。此外，考虑式(1)的力矩平衡，并取 $\vec{K}(s) = K\hat{n}$，可得 $f_t = constant$和 $K = -\frac{f_t}{R} = constant$ [33]。$\hat{}K$ 的方向随 s改变，而其大小保持不变， $|\vec{K}| = constant$。[32] 通过式(1)的力矩平衡，可得到法向应力的关系式， $f_n = -B\phi_{ss}$。这里使用的应力是以内禀坐标表示的

—

标， $\vec{F} = f_t\hat{t} + f_n\hat{n}$。将此结果代入力平衡方程(1)，沿切向可得（$f_t$）$_s = f_n\phi_s = -B\phi_s\phi_{ss}$。对$s$积分，得到 f_t（$s^{'}$）$+\frac{1}{2}B\phi_s^2$（$s^{'}$）$= constant.$ 这是切向应力 f_t 与曲率 ϕ_s之间的守恒关系，适用于条带的任意位置。

[33] 根据平面变形的弗雷内-塞雷公式，可得以下关系：$\frac{dt}{ds} = \phi_s\hat{n}$ 以及$\frac{dn}{ds} = -\phi_s\hat{t}$。

I. 两点接触区域

图3(a)给出了两点接触情形的一个示例。这里，我们在数值计算中 $L/R = 2.37$ 。这里，坐标(X,Y)的原点取在管的底部，也就是条带的起点，即 $s = 0$。图3(a)还展示了相关的受力分析图。条带两端受到两个外部点接触力，分别记为 P_0 和 P_1。

根据力平衡，可得 $P_0 = -P_1$。并且由于不存在摩擦，我们有 $P_0 = P_0\hat{y}$。我们将 $s = 0$ 和 $s = L$ 处条带相对于X轴的切向角分别记为 ϕ_0和 ϕ_1 。在我们的坐标系中，单位切向量的形式为：$\hat{t} = \frac{dx}{ds}\hat{x} + \frac{dy}{ds}\hat{y} = \cos\phi(s)\hat{x} + \sin\phi(s)\hat{y}$。由于只有两个点接触，根据正文中的公式(1)，我们得到 $F_s = 0$。因此，条带每个横截面处的应力恒定，即 $F = -P_0 = -P_0\hat{y}$。

根据式（1）的力矩平衡，我们得到曲率方程，

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = \phi(s)_s = \sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}. \tag{16}$$

这里，我们已在 $s = 0$ 处施加零力矩，对应于 $\phi_s(0) = 0$。由于条带在Y轴上的投影长度始终为 R ，且条带长度 L 保持不变，因此我们有两个几何约束：

$$R = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}d\phi, \tag{17}$$

$$\frac{L}{2} = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}d\phi, \tag{18}$$

其中涉及两个未知数 ϕ_0 和 P_0 。利用上述方程，可以消去 P_0 ，得到

$$\frac{2R}{L} = \frac{\int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}d\phi}{\int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}}. \tag{19}$$

因此，给定 L/R 的值后，我们便可确定 ϕ_0 。

现在，我们将无量纲力定义为 $\frac{P_0R^2}{B^2}$ ，其形式为：

$$\frac{P_0R^2}{B} = \frac{1}{2}[\int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}d\phi]^2, \tag{20}$$

作为 ϕ_0 的函数。

我们指出，在这个双点接触区域中，一个关键的几何约束是条带中部在X轴上的投影位置受以下条件限制

$$0 \leqslant x \leqslant R \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{4}[\int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}d\phi]^2 \leq \sin\phi_0 \tag{21}$$

这里，我们已代入式（20）中的 P_0 ，以及 $x = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}d\phi = \sqrt{\frac{2B}{P_0}[1 - \sin\phi_0]}$。求解上述条件后，我们得到

$$0.358 \leq \phi_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

接下来，结合式（19），此两点接触区域内的条带长度满足

$$L/R \in [2, 3.033), \tag{23}$$

这对任何弹性材料都成立。

确定 ϕ_0 和 P_0后，可以通过数值计算得到弹性条带的形状：

$$x(\phi^{'}) = \int_{\phi_0}^{\phi^{'}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}d\phi = \sqrt{\frac{2B}{P_0}[\sin\phi^{'} - \sin\phi_0]}, \tag{24}$$

$$y(\phi^{'}) = \int_{\phi_0}^{\phi^{'}} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}}d\phi, \tag{25}$$

其中 $\phi^{'} = [\phi_0, \pi - \phi_0]$。 $L/R = 2.37$ 时两点接触变形的一个示例见图3(a)。

II. 三点接触区域

当 $L/R > 3.033$时，条带受到三个外部力，分别记为 P_0、 P_1和 P_2。条带相对于X轴的相应切向角分别记为 ϕ_0、 ϕ_1和 ϕ_2。需要指出的是，在这一阶段，条带中间部分的曲率大于 $1/R$，对应于点接触。另一方面，根据力平衡，可得 $P_0 + P_1 + P_2 = 0$。现在，我们引入一个相对于 –Y轴的角坐标β，作为辅助坐标，如图3(b)所示。于是，这些接触点的坐标可写为

$$\vec{R}(\beta) = R\sin\beta\hat{x} + (R - R\cos\beta)\hat{y}, \tag{26}$$

与 $\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]$。利用辅助坐标，可得 $\beta_1 = \phi_1$，但 $\phi_0 \neq \beta_0$ 和 $\phi_2 \neq \beta_2$。因此，相应的点接触力为

$$\vec{P}_0 = P_0\hat{y}, \tag{27}$$

$$\vec{P}_1 = P_1(-\sin\beta_1\hat{x} + \cos\beta_1\hat{y}), \tag{28}$$

$$\vec{P}_2 = P_0(-\sin\beta_2\hat{x} + \cos\beta_2\hat{y}). \tag{29}$$

根据镜像对称性，可得 $|\vec{P_0}| = |\vec{P_2}| = P_0$。然后，根据力平衡，可得 $\vec{P_0} + \vec{P_1} + \vec{P_2} = 0$，或者等价地，

$$\hat{x} : -P_1 \sin\beta_1 = P_0 \sin\beta_2 \tag{30}$$
$$\hat{y} : P_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_0 \cos\beta_2 = 0. \tag{31}$$

于是，我们得到

$$\tan\beta_1 = \frac{\sin\beta_2}{1+\cos\beta_2}, \tag{32}$$
$$P_1 = -\frac{P_0 \sin\beta_2}{\sin\beta_1}. \tag{33}$$

一旦确定了 β_1 (ϕ_1)和 P_0，即可求得 β_2 和 P_1 。

此外，我们将分离条带划分为两个区域，分别记为 (1) 和 (2)，如图3(b)中的蓝色和绿色曲线所示。根据力矩方程，可以得到区域 (1) 的曲率方程，即

$$\phi_s^{(1)} = \sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}. \tag{34}$$

这里我们也在 $s = 0$ 处施加零力矩，对应于 $\phi_s(0) = 0$。结合条带中部的几何约束，我们得到以下条件，

$$R\sin\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi - \sin\phi_0]}}, \tag{35}$$
$$R - R\cos\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi - \sin\phi_0]}}. \tag{36}$$

再次通过消去未知量 P_0，我们得到

$$\frac{1-\cos\phi_1}{\sin\phi_1} = \frac{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}}{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}}, \tag{37}$$

其中包含两个未知量，即 ϕ_0 和 ϕ_1。对于这段条带，其对应的长度为

$$\frac{L}{2} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi - \sin\phi_0]}}. \tag{38}$$

根据方程 (35) 和 (38)，可得

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}} = \frac{L}{R}\frac{\sqrt{\sin\phi_1 - \sin\phi_0}}{\sin\phi_1}. \tag{39}$$

然后，考虑方程组 (37) 和 (39):

$$\frac{1-\cos\phi_1}{\sin\phi_1} = \frac{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}}{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}}}, \tag{40}$$
$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}} = \frac{L}{R}\frac{\sqrt{\sin\phi_1 - \sin\phi_0}}{\sin\phi_1}, \tag{41}$$

给定 L/R 时，可以同时求解 ϕ_0 和 ϕ_1 (β_1)。

三点接触情形下对应的无量纲力 $\frac{P_0 R^2}{B}$ 的形式为:

$$\frac{P_0 R^2}{B} = \frac{2(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)}{\sin^2\phi_1}, \tag{42}$$

其中 L/R 存在隐式依赖。

对于另一个区域 (2)，即 $s = [\frac{L}{2}, L]$，有 $\vec{F} = \vec{P_2} = P_0(-\sin\beta_2\hat{x} + \cos\beta_2\hat{y})$，其中 β_2 可由式 (32) 计算。再次利用力矩方程，区域 (2) 的曲率方程为

$$\phi_s^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{B}[P_0\sin(\beta_2 - \phi) + \frac{2B(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)^2}{R^2\sin^2\phi_1} - P_0\sin(\beta_2 - \phi_1)]}, \tag{43}$$

其中我们在 ϕ_1 处应用连续曲率条件，即区域 (1) 与区域 (2) 之间的连续曲率条件。

$s = L/2$ 处的曲率为

$$\phi_s(\frac{L}{2}) = \frac{2(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)}{R\sin\phi_1}. \tag{44}$$

对于这个脱离区域 (2)，相应的长度定义为

$$\frac{L}{2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0\sin(\beta_2 - \phi) + \frac{2B(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)^2}{R^2\sin^2\phi_1} - P_0\sin(\beta_2 - \phi_1)]}}, \tag{45}$$

这可用于确定 ϕ_2，即 $s = L$ 处的切向角。

当中间板处的曲率满足 $\phi_s(\frac{L}{2}) = 2(\sin\phi_1 - \sin\phi_0 = \frac{1}{R})R\sin$ 时，三点接触区域将结束，进而进入连续接触区域。因此，三点接触情况下的条带长度满足

$$L/R \in [3.033R, 4.176), \tag{46}$$

这一结论对任何弹性材料都再次成立。图3(b)展示了数值计算得到的这种三点接触变形，其中 $L/R = 3.2$。

III. 连续接触区域

当 $L/R > 4.176$ 时，我们进入连续接触区域，如图 3(c) 所示。此处，连续接触的边界定义为 C_1 和 C_2，其切向角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2。相应的受力分析图也如图 3(c) 所示。$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$此时，存在两个点接触力 P_0 和 P_3，以及一个$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$连续接触压力 K。此处，K 定义为压力，de-定义为单位长度的力。条带在 P_0 和 P_3 处相对于 X轴的切向角分别表示为 ϕ_0 和 ϕ_3。

考虑条带的镜像对称性，可得$|\vec{P_0}| = |\vec{P_3}| = P_0$，且记为 (1) 和 (3) 的脱离形状应当相同。需要注意的是，在此连续接触区域内，其曲率保持为 $1/R$。通过恰当选取坐标，还可得 $\phi_1 = \beta_1$ 和 $\phi_2 = \beta_2$。现在，对于区域 (1)，$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$应力为常数，即 $F = -P_0 = -P_0\hat{y}$。利用力矩平衡，可得

$$\phi_s^{(1)} = \sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \phi_0)}, \tag{47}$$

其中，在 $s = 0$处采用零力矩，对应于 $\phi_s(0) = 0$。由于 C_1 处的曲率为 $\frac{1}{R}$，因此可得 $-$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi_1 - \phi_0)}. \tag{48}$$

由于 C_1 受管的约束，因此有以下几何约束：

$$R\sin\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi = \sqrt{\frac{2B}{P_0}(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)}, \tag{49}$$

$$R - R\cos\phi_1 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi. \tag{50}$$

消去 P_0后，得到以下方程

$$\frac{\sin\phi_1}{1-\cos\phi_1} = \frac{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi}{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi}. \tag{51}$$

将式（48）代入式（49）的第一项，得到

$$2\sin\phi_0 = \sin\phi_1. \tag{52}$$

因此，得到方程组（51）和（52），

$$2\sin\phi_0 = \sin\phi_1, \tag{53}$$

$$\frac{\sin\phi_1}{1-\cos\phi_1} = \frac{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi}{\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)}} d\phi}, \tag{54}$$

其中涉及两个未知数，即 ϕ_0 和 ϕ_1，它们可以充分确定，且不受弹性弯矩 B 和管半径 R的影响。数值计算得出

$$\phi_0 = 0.421 = 24.1^\circ, \tag{55}$$

$$\phi_1 = 2.185 = 125.2^\circ. \tag{56}$$

结果表明，ree 端的切向角为 $\phi_0 = 0.421 = 24.12^\circ$;f 而张开角为$\phi_1 = \beta_1 = 2.185 = 125.2^\circ$，该结论适用于任意弹性材料和管尺寸，对应于卷曲普适定律。

该连续接触区域中对应的无量纲力 P_0R^2/B 为

$$\frac{P_0R^2}{B} = \frac{1}{\sin\phi_1} = 1.22. \tag{57}$$

此外，我们将区域 (1) 的脱离长度表述为 L'，

$$\frac{L^{'}}{R}=\frac{1}{R}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin\phi-\sin\phi_0)}}=\sqrt{\frac{\sin\phi_1}{2}}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi-\sin\phi_0}}=2.088. \tag{58}$$

这里，我们已应用公式 (57)，其中 $\phi_0 = 0.421$ 和 $\phi_1 = 2.185$。该结果定义了连续接触出现所需的最小长度，即 $2L^{'}$。另一方面，在发生自接触之前的最大长度为

$$2\frac{L^{'}}{R}+(2\pi-2\beta_1). \tag{59}$$

这里，$2L^{'}/R$ 表示脱离区域的总长度；而（$2\pi-2\beta_1$）表示连续接触区域的长度。因此，这种连续接触状态下的条带长度满足

$$L\in[4.176R,6.091R], \tag{60}$$

这对任何弹性材料都成立。

对于区域（3），由于条带具有镜像对称性，β_2（此处为 $\beta_2=\phi_2$）可由下式求得

$$\beta_2=\frac{L-2L^{'}}{R}+\beta_1. \tag{61}$$

根据几何关系，有

$$\beta_3=\beta_1+\beta_2. \tag{62}$$

我们注意到，$s=L$ 端的切向角，即ϕ_3，与 β_3不同。利用脱离长度条件，可通过 ϕ_3 得到

$$\frac{L^{'}}{R}=\frac{1}{R}\int_{\phi_2}^{\phi_3}\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}(\sin[\phi_3-\beta_3]-\sin[\phi-\beta_3])}}=2.088. \tag{63}$$

该脱离区域（3）对应的曲率方程形式如下：

$$\phi_s^{(3)}=\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin(\phi_3-\beta_3)-\sin(\phi-\beta_3)]}. \tag{64}$$

该脱离区域的应力为 $\vec{F}^{(3)}=q_0(-\sin\beta_3\hat{}x+\cos\beta_3\hat{}y)$。图 3(c)通过对 $L/R=5.1$进行数值计算，展示了连续接触区域的一个示例。

IV. 自接触区域

自接触变形发生于

$$L/R>6.091. \tag{65}$$

由于条带不同线段之间存在相互作用，自接触问题具有非局部性和高度非线性。如图 3(d) 所示，我们将条带分为四个线段，分别记为 (1)、(2)、(3) 和 (4)，其对应长度分别为 L_1、L_2、L_3 和 L_4。首先，我们有 $L=L_1+L_2+L_3+L_4$。此处，只有区域 (3) 发生连续接触。我们还将 ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 和 ϕ_4 记为相对于X轴 的切向角，分别位于 $s=0$ 、区域 (1)-(2) 的界面、C_1、C_2 和 $s=L$。这里，C_1 和 C_2 是连续接触的边界。

借助图 3(d)中的受力分析图，$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$外力为 P_0 和压力 K；而 P_1 和P_4 属于内力。连续接触区$\vec{}$域与管所施加的压力 K 有关，且其大小恒定。另一方面，由于$\vec{}$ P_0 的方向始终指向Y轴方向，为了维持力平衡，我们可以得出结论：$\vec{}$压力 K 必须关于Y轴对称。因此，可以建立 β_2 和 β_3 之间的几何关系，即

$$\pi-\beta_2=\beta_3-\pi \quad\Rightarrow\quad \beta_2+\beta_3=2\pi. \tag{66}$$

在区域 (1) 中，即 $s\in[0,L_1]$，应力为$\vec{F}^{(1)}=-\vec{P}_0=-P_0\hat{}y$，相应的曲率方程为 $\phi_s^{(1)}=\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}$。

接着，在区域 (2) 中，即 $s\in[L_1,L_2+L_1]$，应力为 $\vec{F}^{(2)}=-\vec{P}_0-\vec{P}_1=-P_1\sin\phi_1\hat{}x+[-P_0+P_1\cos\phi_1]\hat{}y$。相应的曲率方程为$\phi_s^{(2)}=\sqrt{\frac{2}{B}[P_0\sin\phi-P_1\sin(\phi-\phi_1)-P_0\sin\phi_0]}$，其中我们在$s=L_1$ 和 $s=L_2$处应用边界条件。

最后，在区域 (4) 中，应力为 $\vec{F}^{(4)}=P_1(-\sin\phi_1\hat{}x+\cos\phi_1\hat{}y)$。根据牛顿第三定律，我们有 $\vec{P}_1=-\vec{P}_4$。曲率方程为 $\phi_s^{(4)}=\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)}$，其中我们还在 $s=L$ 处应用零力矩条件，即 $\phi_s(L)=0$。现在，这个自接触问题中有六个未知数。它们是

$$\phi_0,\phi_1,\beta_2,\phi_4,P_0,P_1. \tag{67}$$

要求解，我们需要六个方程。首先，$s=L_1$ 处的位置与 $s=L$ 处的位置重合。接下来，我们有

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}} = R\sin(\beta_3) + \int_{\beta_3}^{\phi_4} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{68}$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}} = R - R\cos(\beta_3) + \int_{\beta_3}^{\phi_4} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}. \tag{69}$$

此外，我们还有 s =处的位置条件

$L_1 + L_2$，即，

$$R\sin\beta_2 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}} + \int_{\phi_1}^{\beta_2} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{70}$$

$$R - R\cos\beta_2 = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}} + \int_{\phi_1}^{\beta_2} \frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}}. \tag{71}$$

我们还有条带总长度 L，其为

$$L = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}} + \int_{\phi_1}^{\beta_2} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}} \tag{72}$$

$$+ R(\beta_3-\beta_2) + \int_{\beta_3}^{\phi_4} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}. \tag{73}$$

利用守恒关系，可以得到

$$\frac{B}{2R^2} - P_0\sin\phi_2 + P_1\sin(\phi_2-\phi_1) = -P_0\sin\phi_0. \tag{74}$$

最后，我们将这六个未知数归纳为一组六个方程：

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}}=R\sin(\beta_3)+\int_{\beta_3}^{\phi_4}\frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{75}$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}}=R-R\cos(\beta_3)+\int_{\beta_3}^{\phi_4}\frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{76}$$

$$R\sin\beta_2=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}}+\int_{\phi_1}^{\beta_2}\frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{77}$$

$$R-R\cos\beta_2=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}}+\int_{\phi_1}^{\beta_2}\frac{\sin\phi d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{78}$$

$$L=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_0}{B}[\sin\phi-\sin\phi_0]}}+\int_{\phi_1}^{\beta_2}\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2}{B}[P_0(\sin\phi-\sin\phi_0)-P_1\sin(\phi-\phi_1)]}} \tag{79}$$

$$+R(\beta_3-\beta_2)+\int_{\beta_3}^{\phi_4}\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2P_1}{B}[\sin(\phi_4-\phi_1)-\sin(\phi-\phi_1)]}}, \tag{80}$$

$$\frac{B}{2R^2}-P_0\sin\phi_2+P_1\sin(\phi_2-\phi_1)=-P_0\sin\phi_0, \tag{81}$$

其中 $\beta_2+\beta_3=2\pi$。例如，图 3(d) 展示了自接触情形，此时自由端 $s=L$ 形成条带前侧的点接触。这里我们在数值计算中使用 $L/R=7$。

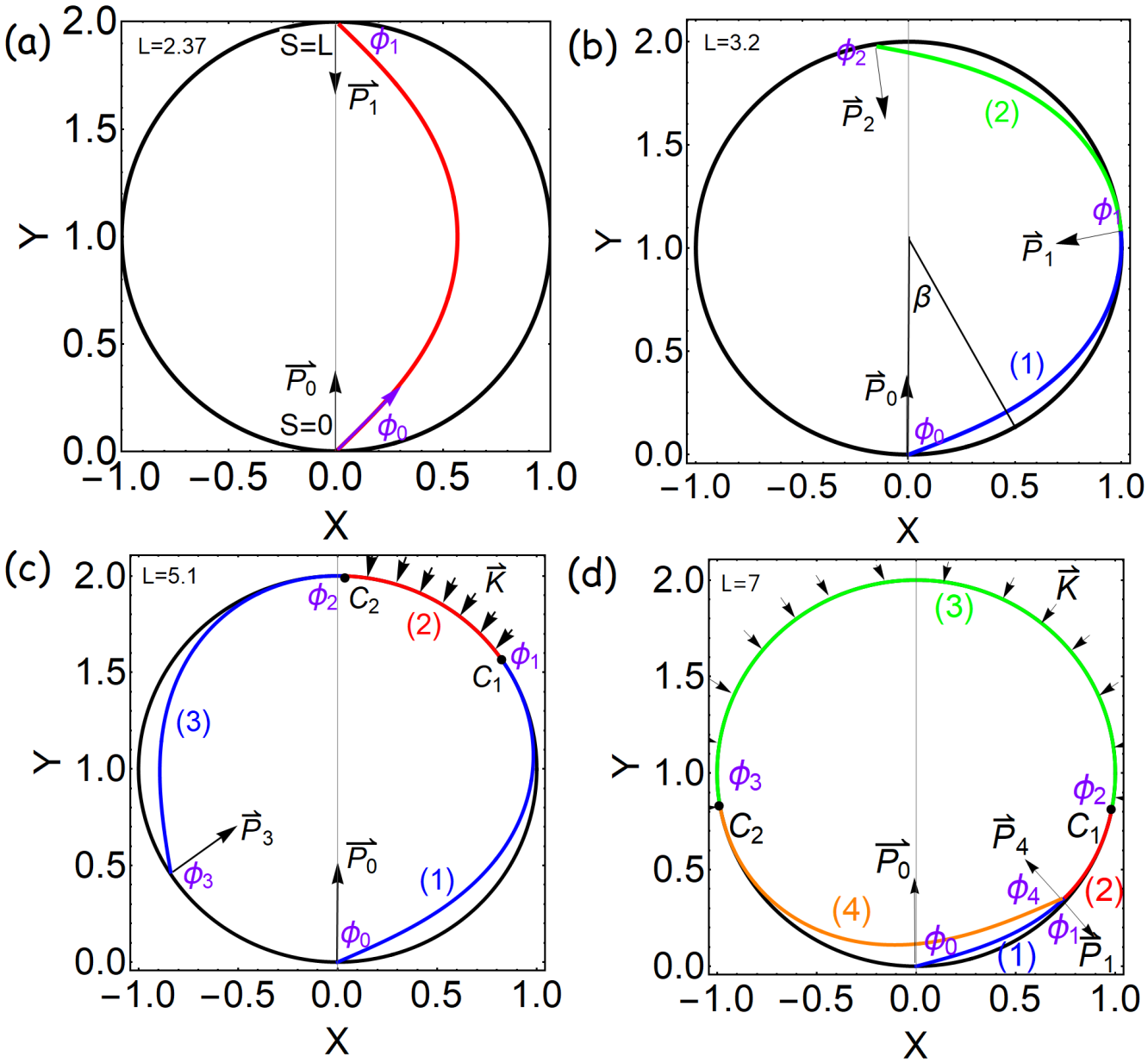


图3. (a) 使用 $L/R = 2.37$ 通过数值计算得到的两点接触变形。 $s = 0$ 和 $s = L$ 处垂直于管壁的外力分别记为 $\vec{P}_0$ 和 $\vec{P}_1$。这里， ϕ_0 和 ϕ_1 分别是 $s = 0$ 和 $s = L$ 处相对于 X轴 的切向角。(b) 使用 $L/R = 3.2$ 通过数值计算得到的三点接触变形。条带上有三个外部点接触力，分别记为 $\vec{P}_0$、 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_0$。条带在 $s = 0$、 $s = \frac{L}{2}$ 和 $s = L$ 处对应的切向角分别为 ϕ_0、 ϕ_1 和 ϕ_2。这里，我们还采用另一个坐标系 β，以 −Y轴 为参照，作为辅助坐标来描述几何关系。(c) 使用 $L/R = 5.1$ 得到的连续接触变形。存在一个有限的连续接触区域，以红色曲线标示，并伴有以黑色箭头标示的连续接触压力 $\vec{K}$。这里， C_1 和 C_2 对应连续接触区域的边界。 ϕ_0、 ϕ_1、 ϕ_2 ϕ_3 $s = 0$ C_1 C_2 $s = L$ 和 分别是 、 、 和 处对应的切向角。(d) 使用 $L = 7R$ 得到的自接触变形。仍存在一个以绿色曲线标示的连续接触区域，并伴有压力 $\vec{K}$。这里，外力来自 $s = 0$ 处的 $\vec{P}_0$，而压力 $\vec{K}$ 作用于连续接触区域。 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_4$ 为内力。区域 (1)、(2) 和 (4) 与管分离，分别以蓝色、红色和橙色曲线标示。