arXiv:2303.08330v2 [math.GT] 9 Jan 2024

缆结与BPS级数 II

John Chae

美国加利福尼亚大学戴维斯分校，Shields Ave 1号，戴维斯，CA 95616，
yjchae@ucdavis.edu

摘要

本文是作者早期研究的续篇，将关于八字结 ($|w| > 3$) 的 $(2, 2w+1)$-缆绕推广到一个无限族，并提出了该缆结族的二变量级数不变量的一般公式。这些公式有助于深入理解缆结操作。我们通过递归方法计算具体示例，验证了这一猜想；这些示例也为该级数不变量具有 q-全纯性质提供了有力证据。这一结果为通过某种 q-级数计算对缆结进行 Dehn手术所得3维流形的 WRT不变量开辟了道路。我们还分析并猜想了 $(3, 3w+1)$-缆绕 ($|w| > 3$) 的公式。

1 引言

链环不变量的范畴化是一项富有成果的研究计划，深化并拓展了我们对链环不变量的理解。自 Khovanov 同调问世并实现了链环的（带色）琼斯多项式的范畴化 [9]([10]) 以来，研究者陆续构造了其他链环不变量，例如通过 $sl(N)$ Khovanov-Rozannsky 同调 [12] 对 $sl(N)$ 多项式进行范畴化，以及能够实现 HOMFLY 多项式范畴化的 HOMFLY 同调 [13] 。有些同调理论的计算方法不止一种。例如，除了 [13], 的原始矩阵分解表述外，还有辫子簇 [24] 和（局部）点的希尔伯特概形 [15] 表述[1]。另一个值得注意的例子是 [2, 4]所展示的带色琼斯多项式的另一种范畴化。这些例子展现了链环同调理论的多面性，它们与从不同视角研究3维球面中的链环息息相关。受这些关于链环的重要进展启发，人们开始尝试将一种称为 Witten-Reshetikhin-Turaev（WRT）不变量 [25, 19] 的闭定向3维流形（数值）不变量范畴化 [11, 18]。几年前，数学物理领域提出了关于 WRT 不变量范畴化的一项预测 [7]。该预测指出，闭定向3维流形 Y有一个幂级数不变量，通常记作 $\hat{Z}(q)$；猜想认为，它是某个记作 $\mathcal{H}^{i,\ j}_{BPS}(Y;\ b)$ 的三重分次同调群的分次欧拉示性数，如下所示

$$\hat{Z}_b[Y;q] = \sum_{i,j} (-1)^i\, q^j\, dim\, \mathcal{H}^{i,j}_{BPS}(Y;b) \quad \in \frac{1}{2^c}\, q^{\Delta(Y)}\, \mathbb{Z}[[q]], \qquad \Delta \in \mathbb{Q} \qquad c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad |q| < 1.$$

[1]这些其他方法仅适用于特定类别的链环。

这一幂级数不变量被推广到纽结 $K \subset \mathbb{Z}HS^3$ [2] 在[6],中的补空间 M_K^3

$$F_K(x,q) := \hat{Z}(M_K^3; x^{1/2}, q) \qquad |q| < 1,$$

这是一个二元级数，其中 x与相对 $Spin^c(M_K^3, T^2)$-结构相关联。这个纽结不变量 F_K 具有如下形式 [3]

$$F_K(x,q) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ odd}}}^{\infty} f_m(q)\big(x^{m/2} - x^{-m/2}\big) \in \frac{1}{2^c} q^{\Delta} \mathbb{Z}\big[x^{\pm 1/2}\big]\big[[q^{\pm 1}]\big], \tag{1}$$

其中 $f_m(q)$ 是具有整数系数的劳朗级数[4], $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\Delta \in \mathbb{Q}$。 F_K 不变量的一个有趣特征是，它似乎具有与带色琼斯多项式相似的性质。例如，有人猜想它满足 Melvin–Morton–Rozansky 定理 [14, 20, 21] （在 [1] 中得到证明）：

猜想 1.1（[6, 猜想 1.5]）。对于一个纽结 $K \subset \mathbb{Z}HS^3$，纽结不变量 $F_K\big(x, q = \mathrm{e}^{\hbar}\big)$ 关于 $\hbar = 0$ 的渐近展开与大颜色极限下带色琼斯多项式的 Melvin–Morton–Rozansky（MMR）展开一致：

$$\frac{F_K\big(x, q = \mathrm{e}^{\hbar}\big)}{x^{1/2} - x^{-1/2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{P_r(x)}{\Delta_K(x)^{2r+1}} \hbar^r, \tag{2}$$

其中 $x = e^{n\hbar}$ 为固定值，n 是 K的颜色， $P_r(x) \in \mathbb{Q}\big[x^{\pm 1}\big]$、 $P_0(x) = 1$ 和 $\Delta_K(x)$ 是 K的（对称化）亚历山大多项式。

这一性质已在文献 [16] 中对一大类链环得到证明。此外，它还具有与颜色琼斯多项式 [5]类似的 q-全纯性：

猜想 1.2（[6, 猜想 1.6]）。对于任意纽结 $K \subset \mathbb{Z}HS^3$，归一化级数 $f_K(x,q)$ ˆ 满足由 K 的量子 A 多项式 $A_K(q, \hat{x}, \hat{y})$ 生成的线性递推关系：

$$\hat{A}_K(q, \hat{x}, \hat{y}) f_K(x,q) = 0, \tag{3}$$

其中 $f_K := F_K(x,q)/\big(x^{1/2} - x^{-1/2}\big)$。

ˆx 和 ˆy 的作用为

$$\hat{x} f_K(x,q) = x f_K(x,q) \qquad \hat{y} f_K(x,q) = f_K(xq,q).$$

在 [3] 中， $F_K(x,q)$ 已针对八字结 $K = C_{9,\ 2}(4_1)$ 的缆结在 $\mathbb{Z}HS^3$ 中进行了计算。最重要的是，发现了 $F_K(x,q)$ 与 $F_{4_1}(x,q)$ 之间的关系。本文将这一关系推广到 $w > 3$ 的 $(2w+1, 2)$ 情形以及 $w > 3$ 的 $(3w+1, 3)$ 情形。据作者所知，迄今为止，递归方法是计算八字结缆绕的 $F_K(x,q)$ 的唯一可用方法。 [17] 中的 $F_K(x,q)$ 的 R 矩阵表述适用于某些辫子类，因而也适用于链环。尽管这些类别范围广泛，本文所研究的八字结缆结可能属于这些类别，也可能不属于。无论如何，我们为上述八字结缆绕提出了 $F_K(x,q)$ 的通用公式。

[2]链环的推广见 [17] 。隐含地，这里选定了一个群；最初使用的群是 SU(2)。[4]它们可以是 K 的首一亚历山大多项式对应的多项式（见第3.2节）

2（$2w+1$,2）缆结（$w>3$）

在 S^3 中，一类具有最小 L 次数的缆结 $K_r = C_{(r,2)}(\mathbf{4_1})$ 的量子（或非交换）A 多项式为 [22, 23]

$$\hat{A}_K(t,M,L) = (L-1)B(t,M)^{-1}Q(t,M,L)\left(M^r L + t^{-2r}M^{-r}\right) \in \tilde{\mathcal{A}}_K, \quad gcd(r,2)=1, \quad |r|>8 \tag{4}$$

$Q(t,M,L)$和 $B(t,M)$的定义见附录 A。将 (4) 应用于 $f_K(x,q)$，并结合 $x=q^n$，可得

$$\alpha(x,q)F_{K_r}(x,q)+\beta(x,q)F_{K_r}(xq,q)+\gamma(x,q)F_{K_r}(xq^2,q)+\delta(x,q)F_{K_r}(xq^3,q)+F_{K_r}(xq^4,q)=0, \tag{5}$$

其中 α、β、γ、δ是有理函数。我们根据 $F_{\mathbf{4_1}}(x,q)$的系数函数 $\{h_s(q)\}$，提出了计算 (5) 所需初始条件的以下公式。这些公式揭示了 $F_K(x,q)$的缆结操作，并呈现出简单的规律，使我们能够在任意 r取值下获得完整的初始条件集合 $\{f_m(q)\}$。我们通过具体示例（见第 3 节）验证了这些初始条件，并发现这些规律在超出初始条件范围的 $f_s(q)$中仍然成立。这有力地表明，无需借助繁琐的递归方法，我们也能高效地将$F_{C_{(r,2)}(\mathbf{4_1})}(x,q)$计算到 $x^{\pm 1/2}$ 中的任意所需阶数。

我们给出 $r=2w+1$、$w>3$ 情形下方程 (5) 所需的非零初始条件，这涵盖了缆结参数空间中大部分正子空间（负值情形见下文）。

猜想 2.1. 对于在 $\mathbb{Z}HS^3$ 中对 $\mathbf{4_1}$ ($w>3$) 进行的 ($2w+1$, 2)-缆绕，非零初始数据 $\left\{f_m(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]\right\} = \left\{f_i^+(q) \middle| \text{所有系数均为正}\right\} \bigsqcup \left\{f_j^-(q) \middle| \text{所有系数均为负}\right\}$，式 (5) 中的系数由 $F_{\mathbf{4_1}}(x,q)$ 的系数函数 $\{h_s(q)\}$ 如下确定。

$$\begin{aligned}
f^+_{2w+3}(q) &= 2\,h_1(q)\,q^n \qquad (h_1(q)=1)\\
f^+_{2w+7}(q) &= 2\,h_3(q)\,q^{n+1} \qquad (h_3(q)=2)\\
f^+_{2w+11}(q) &= 2\,h_5(q)\,q^{n+2}\\
&\vdots\\
f^+_{10w+7}(q) &= 2\left(h_{4w+3}(q)\,q^{n+2w+1} + h_1(q)\,q^{n+2w+1+\Delta}\right)\\
f^+_{10w+11}(q) &= 2\left(h_{4w+5}(q)\,q^{n+2w+2} + h_3(q)\,q^{n+2w+6+\Delta}\right)\\
f^+_{10w+15}(q) &= 2\left(h_{4w+7}(q)\,q^{n+2w+3} + h_5(q)\,q^{n+2w+11+\Delta}\right)\\
&\vdots\\
f^+_{18w+11}(q) &= 2\left(h_{8w+5}(q)\,q^{n+4w+2} + h_{4w+3}(q)\,q^{n+12w+6+\Delta} + h_1(q)\,q^{n+12w+6+2\Delta}\right)\\
f^+_{18w+15}(q) &= 2\left(h_{8w+7}(q)\,q^{n+4w+3} + h_{4w+5}(q)\,q^{n+12w+11+\Delta} + h_3(q)\,q^{n+12w+15+2\Delta}\right)\\
&\vdots\\
f^-_{6w+5}(q) &= -2\,h_1(q)\,q^{3n}\\
f^-_{6w+9}(q) &= -2\,h_3(q)\,q^{3n+3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^{-}_{6w+13}(q) &= -2\,h_5(q)\,q^{3n+6} \\
&\vdots \\
f^{-}_{14w+9}(q) &= -2\left(h_{4w+3}(q)\,q^{3n+6w+3} + h_1(q)\,q^{3n+6w+3+\Delta}\right) \\
f^{-}_{14w+13}(q) &= -2\left(h_{4w+5}(q)\,q^{3n+6w+6} + h_3(q)\,q^{3n+6w+10+\Delta}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$ 且 $\Delta = 4w+4$。

我们对上述公式作一些说明。
注 1 由于 $\{f_m(q)\}$ 的阶是有限的，对于固定的 w，上述序列会终止。
注 2 n 可以直接从 $F_{C_{(r,2)}(\mathbf{4_1})}(x,q)$ 的 $\hbar$ 级数中求得。我们将在下文给出 n 的公式。

注 3 每个 q-单项式的幂都会从 $f_m^{\pm}$ 到 $f_{m+4}^{\pm}$ 按某个正整数的倍数递增。

注 4 不符合上述模式的系数函数 $\{f_d(q)\}$ 均为零。
当 f 中出现 h_{4w+3} 时，会加入 5 $h_1(q)q^s$ $b^{\pm}(q)$，对于任意 b。

猜想 2.2。对于上述纽结族，猜想 2.1 中的幂 $n \in \mathbb{Z}$ 由 $w+1$ 给出。

由于上述 $f_m(q)$ 是多项式而非级数，因此我们得到关于镜像结 $m(K)$ 的以下推论。

推论 2.3。对于 $\mathbf{4_1}$ 的 $(2w+1,\ 2)$-缆绕，其中 $w<-3$，其递推关系的非零初始数据 $\{f_m(q)\} = \{f_i^{+}(q)\} \bigsqcup \left\{f_j^{-}(q)\right\}$ 由猜想 2.1 中的 $q \longleftrightarrow q^{-1}$ 给出。

我们指出，猜想 2.1 中的模式对所有非零 $f_m(q)$ 均成立。

对于 $w>3$ 时 $\mathbb{Z}HS^3$ 中的缆结族 $K_w = C_{(2w+1,2)}(\mathbf{4_1})$，其所有系数函数 $f_m^{\pm}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ of $F_{K_w}(x,\ q)$ 均可按照猜想 2.1 中的模式，表示为系数函数 $\{h_s(q)\}$ of $F_{\mathbf{4_1}}(x,\ q)$ 的线性组合。

接下来，我们通过一些示例验证猜想 2.1 和 2.4。

3 示例

3.1 示例 1

我们首先分析 $K = C_{(9,2)}(\mathbf{4_1})$。将猜想 2.1 应用于 $w=4$，其预测与 [3][5] 第 7 节中列出的初始数据一致。

[5]由于 F_K 中 $f_m(q)$ 的约定不同，整体相差一个因子 2

3.2 例 2

下一个最简单的情形是 $K = C_{(11,2)}(\mathbf{4_1})$。

命题3.1. $\hbar$ 展开式$J_{K,\ n}(q)$ 为

$$J_{K,n}(e^{\hbar}) = 1 + \left(11 - 11n^2\right)\hbar^2 + \left(-88 + 88n^2\right)\hbar^3 + \left(\frac{11891}{12} - 1137n^2 + \frac{1753}{12}n^4\right)\hbar^4$$
$$+ \left(-12826 + \frac{47036}{3}n^2 - \frac{8558}{3}n^4\right)\hbar^5 + \left(\frac{69672971}{360} - \frac{991683}{4}n^2 + \frac{224545}{4}n^4 - \frac{630551}{360}n^6\right)\hbar^6 + \cdots$$

在每个 $\hbar$ 阶， n 中的多项式次数至多为 $\hbar$的阶，这等价于对纽结的带色琼斯多项式进行 MMR展开的刻画。

纽结 K 的亚历山大多项式的缆结公式为 [8]

$$\Delta_{C_{(p,q)}(K)}(t) = \Delta_K(t^p)\Delta_{T_{(p,q)}}(t), \quad 2 \le p < |q| \quad \gcd(p,q) = 1,$$

其中， $\Delta(t)$ 是对称化亚历山大多项式， $T_{(p,q)}$ 是（p,q）环面纽结。请注意，我们对环面纽结参数的约定是反过来的（即 $p \equiv 2, q \equiv r$）。

引理3.2. $C_{(11,2)}(\mathbf{4_1})$ 的亚历山大多项式如下。

$$\Delta_{C_{(11,2)}(\mathbf{4_1})}(x) = \Delta_{\mathbf{4_1}}(x^2)\Delta_{T_{(2,11)}}(x)$$
$$= -1 - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x - x^2 + x^3 - 2x^4 + 2x^5 + x^6 - x^7.$$

由这个亚历山大多项式，可以求出其关于 $x = 0$ （在 x 中）和 $x = \infty$ （在 $1/x$ 中）的对称展开。

命题3.3。 K 在 $\hbar \to 0$ 的极限下，其亚历山大多项式的逆的对称展开为

$$\lim_{q\to 1} 2F_K(x,q) = 2\, s.e.\left(\frac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{\Delta_K(x)}\right)$$
$$= x^{13/2} - \left(\frac{1}{x}\right)^{13/2} + 2x^{17/2} - 2\left(\frac{1}{x}\right)^{17/2} + 5x^{21/2} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^{21/2} + 13x^{25/2} - 13\left(\frac{1}{x}\right)^{25/2}$$
$$+ 34x^{29/2} - 34\left(\frac{1}{x}\right)^{29/2} + 89x^{33/2} - 89\left(\frac{1}{x}\right)^{33/2} - x^{35/2} + \left(\frac{1}{x}\right)^{35/2} + 233x^{37/2} - 233\left(\frac{1}{x}\right)^{37/2}$$
$$- 2x^{39/2} + 2\left(\frac{1}{x}\right)^{39/2} + 610x^{41/2} - 610\left(\frac{1}{x}\right)^{41/2} - 5x^{43/2} + 5\left(\frac{1}{x}\right)^{43/2} + \cdots \in \mathbb{Z}\left[\left[x^{\pm 1/2}\right]\right]$$

其中，s.e. 表示关于 x （关于 $x = 0$ ）和 $1/x$ （关于 $x = \infty$）的对称展开。

展开式中的系数均为整数，且亚历山大多项式是首一的，这是 f_m（q）在 (1) 中为多项式的必要条件。此外，$x^{35/2}$、 $x^{39/2}$、 $x^{43/2}$ 等的系数均为负数，这一点体现为下文初始数据中的负系数项（参见命题 3.5）。

由（5）可得 f_m 的递推关系。

定理 3.4。 $f_m(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 的 $F_K(x,q)$ 的递推关系如下:

$$\begin{aligned} f_{v+102}(q) = \frac{-1}{q^{\frac{115+v}{2}}\left(1-q^{\frac{89+v}{2}}\right)}\Big[& t_2 f_{98+v} + t_4 f_{94+v} + t_6 f_{90+v} + t_8 f_{86+v} + t_{10} f_{82+v} + t_{11} f_{80+v} \\ & + t_{12} f_{78+v} + t_{13} f_{76+v} + t_{14} f_{74+v} + t_{15} f_{72+v} + t_{16} f_{70+v} + t_{17} f_{68+v} + t_{18} f_{66+v} \\ & + t_{19} f_{64+v} + t_{20} f_{62+v} + t_{21} f_{60+v} + t_{22} f_{58+v} + t_{23} f_{56+v} + t_{24} f_{54+v} + t_{25} f_{52+v} \\ & + t_{26} f_{50+v} + t_{27} f_{48+v} + t_{28} f_{46+v} + t_{29} f_{44+v} + t_{30} f_{42+v} + t_{31} f_{40+v} + t_{32} f_{38+v} \\ & + t_{33} f_{36+v} + t_{34} f_{34+v} + t_{35} f_{32+v} + t_{36} f_{30+v} + t_{37} f_{28+v} + t_{38} f_{26+v} + t_{39} f_{24+v} \\ & + t_{40} f_{22+v} + t_{41} f_{20+v} + t_{43} f_{16+v} + t_{45} f_{12+v} + t_{47} f_{8+v} + t_{49} f_{4+v} + t_{51} f_v \Big] \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $t_s = t_s(q, q^v)$ 是关于 q 和 q^v 的 $\mathbb{Z}$-劳朗多项式。

命题 3.5。（6）的初始数据由 $\left\{ f_j(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] | j = 1, \cdots, 101 \right\}$ 组成。所有非零元素如下。

$$\begin{aligned} f_{13}^{+}(q) &= 2\, h_1(q)\, q^6 \\ f_{17}^{+}(q) &= 2\, h_3(q)\, q^7 \\ f_{21}^{+}(q) &= 2\, h_5(q)\, q^8 \\ &\vdots \\ f_{57}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{23}(q)\, q^{17} + h_1(q)\, q^{41} \right) \\ f_{61}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{25}(q)\, q^{18} + h_3(q)\, q^{46} \right) \\ f_{65}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{27}(q)\, q^{19} + h_5(q)\, q^{51} \right) \\ &\vdots \\ f_{101}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{45}(q)\, q^{28} + h_{23}(q)\, q^{96} + h_1(q)\, q^{120} \right) \\ &\vdots \\ f_{35}^{-}(q) &= -2\, h_1(q)\, q^{18} \\ f_{39}^{-}(q) &= -2\, h_3(q)\, q^{21} \\ f_{43}^{-}(q) &= -2\, h_5(q)\, q^{24} \\ &\vdots \\ f_{79}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{23}\, q^{51} + h_1\, q^{75} \right) \\ f_{83}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{25}\, q^{54} + h_3(q)\, q^{82} \right) \\ &\vdots \\ f_{99}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{33}\, q^{66} + h_{11}(q)\, q^{110} \right) \end{aligned}$$

将它们代入（6），我们得到 $f_{103}(q)$ 和 $f_{105}(q)$ 是具有整数系数的劳朗多项式；鉴于（6）中的分母（$1-q^{(89+v)/2}$），这并非显而易见。重新用.....表示

它们，并以 $h_s(q)$ 的形式表示，我们得到

$$f_{103}^{-}(q) = -2\left(h_{35}(q)\,q^{69} + h_{13}(q)\,q^{117}\right) \tag{7}$$
$$f_{105}^{+}(q) = 2\,\left(h_{47}(q)\,q^{29} + h_{25}(q)\,q^{101} + h_{3}(q)\,q^{129}\right) \tag{8}$$

通过将猜想 2.4 外推至 $f_{101}(q)$，得到的结果与其预测一致。作为另一项检验，(7) 和 (8) 的 $\hbar$ 展开与 $F_{C_{(11,2)}(\mathbf{4_1})}(x, e^{\hbar})$ 的展开相符。反过来，它们可用于验证从猜想 2.4 得到的后续 $f_m(q)$'与 (6) 的结果相符。

$$f_{107}^{-}(q) = -2\left(h_{37}(q)\,q^{72} + h_{15}(q)\,q^{124}\right)$$
$$f_{109}^{+}(q) = 2\,\left(h_{49}(q)\,q^{30} + h_{27}(q)\,q^{106} + h_{5}(q)\,q^{138}\right)$$

此外，它们的 $\hbar$展开与 $F_{C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})}$ 的展开一致。

注：当 $h_{23}(q)$ 出现在 $f_b^{\pm}$ 中时，对于任意 b，都会加上 $h_1(q)$。

ˆ 3.2.1 Dehn手术与 Z

在 [7], 中，曾猜想有理同调三维球面 $Y(b_1(Y) =\hat{}\, 0)$ 的 $sl(2)$ WRT不变量可分解为幂级数 $Z(q)$ 的线性组合，该组合在 $|q| < 1$ 中收敛，且其本身是 Y 的一个不变量。具体而言，

$$WRT[Y;k] = \frac{1}{i\sqrt{2k}} \sum_{a,b\in Spin^c(Y)} c_{ab}^{WRT}\, \hat{Z}_b(q)\Big|_{q\to e^{\frac{i2\pi}{k}}},$$

其中

$$\hat{Z}_b(Y;q) \in \frac{1}{2^c} q^{\Delta_b}\mathbb{Z}[[q]], \qquad |q|<1, \qquad \Delta_b \in \mathbb{Q}, \quad c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

沿（负）斜率 $-p/r$ [6] 在纽结 K 的补空间上进行 Dehn手术，可得 $F_K(x,q)$ 与 $Z(q)$ 之间的ˆ关系，由 [6]给出

$$\hat{Z}_b[Y_{-\frac{p}{r}}(K);q] = \pm q^d \mathcal{L}^{(b)}_{-p/r}\left[\left(x^{\frac{1}{2r}} - x^{-\frac{1}{2r}}\right) F_K(x,q)\right] \qquad d\in\mathbb{Q},$$

$$\mathcal{L}^{(b)}_{-p/r} : x^u q^v \mapsto \begin{cases} q^{u^2 r/p} q^v & \text{if} \quad ru - b \in p\mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

沿斜率 $-1/r$ 对几个 r 进行手术，得到

$$\hat{Z}_0[S^3_{-\frac{1}{2}}(C_{11,2}(4_1));q] = q^{\frac{167}{2}}\Big(-1+q^{13}-2q^{59}+2q^{76}-q^{133}-3q^{134}-q^{135}+q^{154}+3q^{155}+q^{156}$$
$$-2q^{223}-2q^{224}-5q^{225}-2q^{226}-2q^{227}+2q^{248}+2q^{249}+\cdots\Big)$$
$$\hat{}Z_0[S^3_{-\frac{1}{3}}(C_{11,2}(4_1));$$
$$q] = q^{\frac{251}{2}}\Big(-2+2q^{13}-4q^{89}+4q^{106}-2q^{201}-6q^{202}-2q^{203}+2q^{222}+6q^{223}$$

[6]沿正斜率进行手术可能无法得到幂级数；关于 [16]中的正手术，已有一些进展。

$$+2q^{224}-4q^{337}-4q^{338}-10q^{339}-4q^{340}-4q^{341}+4q^{362}+4q^{363}+\cdots\Big)$$

$$\hat{Z}_0[S^3_{-\frac{1}{4}}(C_{11,2}(4_1));q]=q^{\frac{335}{2}}\Big(-2+2q^{13}-4q^{119}+4q^{136}-2q^{269}-6q^{270}-2q^{271}+2q^{290}+6q^{291}$$
$$+2q^{292}-4q^{451}-4q^{452}-10q^{453}-4q^{454}-4q^{455}+4q^{476}+4q^{477}+\cdots\Big)$$

3.3 示例 3

接下来我们考虑 $K=C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})$。

命题 3.6。 $\hbar$ J_K的展开式$J_{K,n}(q)$由下式给出

$$J_{K,n}(e^{\hbar})=1+\left(17-17n^2\right)\hbar^2+\left(-156+156n^2\right)\hbar^3+\left(\frac{24749}{12}-2365n^2+\frac{3631}{12}n^4\right)\hbar^4$$
$$+\left(-31629+38662n^2-7033n^4\right)\hbar^5+\Big(\frac{203413517}{360}-\frac{8687953}{12}n^2+\frac{1969367}{12}n^4$$
$$-\frac{1855937}{360}n^6\Big)\hbar^6+\cdots$$

这证实了 K满足 MMR条件。

引理 3.7。 $C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})$的亚历山大多项式由下式给出

$$\Delta_{C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})}(x)=\Delta_{\mathbf{4_1}}(x^2)\Delta_{T_{(2,13)}}(x)$$
$$=-t^8-\frac{1}{t^8}+t^7+\frac{1}{t^7}+2t^6+\frac{2}{t^6}-2t^5-\frac{2}{t^5}+t^4+\frac{1}{t^4}-t^3-\frac{1}{t^3}+t^2+\frac{1}{t^2}-t-\frac{1}{t}+1.$$

命题 3.8。 K 在 $\hbar\to 0$ 极限下的亚历山大多项式的逆的对称展开由下式给出

$$\lim_{q\to 1}2F_K(x,q)=2\,s.e.\left(\frac{x^{1/2}-x^{-1/2}}{\Delta_K(x)}\right)$$
$$=x^{15/2}-\left(\frac{1}{x}\right)^{15/2}+2x^{19/2}-2\left(\frac{1}{x}\right)^{19/2}+5x^{23/2}-5\left(\frac{1}{x}\right)^{23/2}+13x^{27/2}-13\left(\frac{1}{x}\right)^{27/2}$$
$$+34x^{31/2}-34\left(\frac{1}{x}\right)^{31/2}+89x^{35/2}-89\left(\frac{1}{x}\right)^{35/2}+233x^{39/2}-233\left(\frac{1}{x}\right)^{39/2}-x^{41/2}+\left(\frac{1}{x}\right)^{41/2}$$
$$+610x^{43/2}-610\left(\frac{1}{x}\right)^{43/2}-2x^{45/2}+2\left(\frac{1}{x}\right)^{45/2}+\cdots\in\mathbb{Z}\left[\left[x^{\pm 1/2}\right]\right]$$

$x^{41/2}$ 、 $x^{45/2}$ 等的系数为负，与下文初始数据中系数为负的项相符（参见命题 3.10）。

定理 3.9。上述 $F_K(x,q)$的 $f_m(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 的递推关系为

$$\begin{aligned} f_{v+106}(q) = \frac{-1}{q^{\frac{121+v}{2}}\left(1-q^{\frac{91+v}{2}}\right)}\Big[& t_2 f_{v+102} + t_4 f_{v+98} + t_6 f_{v+94} + t_8 f_{v+90} + t_{10} f_{v+86} + t_{12} f_{v+82} \\ & + t_{13} f_{v+80} + t_{14} f_{v+78} + t_{15} f_{v+76} + t_{16} f_{v+74} + t_{17} f_{v+72} + t_{18} f_{v+70} + t_{19} f_{v+68} \\ & + t_{20} f_{v+66} + t_{21} f_{v+64} + t_{22} f_{v+62} + t_{23} f_{v+60} + t_{24} f_{v+58} + t_{25} f_{v+56} + t_{26} f_{v+54} \\ & + t_{27} f_{v+52} + t_{28} f_{v+50} + t_{29} f_{v+48} + t_{30} f_{v+46} + t_{31} f_{v+44} + t_{32} f_{v+42} + t_{33} f_{v+40} \\ & + t_{34} f_{v+38} + t_{35} f_{v+36} + t_{36} f_{v+34} + t_{37} f_{v+32} + t_{38} f_{v+30} + t_{39} f_{v+28} + t_{40} f_{v+26} \\ & + t_{41} f_{v+24} + t_{43} f_{v+20} + t_{45} f_{v+16} + t_{47} f_{v+12} + t_{49} f_{v+8} + t_{51} f_{v+4} + t_{53} f_v \Big] \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $t_s = t_s(q, q^v)$ 是关于 q 和 q^v 的 $\mathbb{Z}$-劳朗多项式。

命题 3.10. (9) 的初始数据由 $\left\{f_j(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] | j = 1, \cdots, 105\right\}$ 构成。该集合中的所有非零元素如下。

$$\begin{aligned} f_{15}^{+}(q) &= 2\, h_1(q)\, q^7 \\ f_{19}^{+}(q) &= 2\, h_3(q)\, q^8 \\ f_{23}^{+}(q) &= 2\, h_5(q)\, q^9 \\ &\vdots \\ f_{67}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{27}(q)\, q^{20} + h_1(q)\, q^{48}\right) \\ f_{71}^{+}(q) &= 2\, \left(h_{29}(q)\, q^{21} + h_3(q)\, q^{53}\right) \\ &\vdots \\ f_{41}^{-}(q) &= -2\, h_1(q)\, q^{21} \\ f_{45}^{-}(q) &= -2\, h_3(q)\, q^{24} \\ f_{49}^{-}(q) &= -2\, h_5(q)\, q^{27} \\ &\vdots \\ f_{93}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{27}(q)\, q^{60} + h_1\, q^{88}\right) \\ f_{97}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{29}(q)\, q^{63} + h_3(q)\, q^{95}\right) \\ &\vdots \\ f_{105}^{-}(q) &= -2\, \left(h_{33}(q)\, q^{69} + h_7(q)\, q^{109}\right) \end{aligned}$$

将它们代入 (9) 后，我们确实得到 $f_{107}(q)$ 和 $f_{109}(q)$，它们是系数属于 $\mathbb{Z}$ 的劳朗多项式。它们可以用 $h_s(q)$ 表示:

$$f_{107}^{+}(q) = 2\, \left(h_{47}(q)\, q^{30} + h_{21}(q)\, q^{98}\right) \tag{10}$$

$$f_{109}^{-}(q) = -2\, \left(h_{35}(q)\, q^{72} + h_9(q)\, q^{116}\right) \tag{11}$$

猜想 2.4 的预测与上述结果一致。此外，$\hbar$ 式 (10) 和 (11) 的展开与 $F_{C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})}(x, e^{\hbar})$ 的展开一致。这些结果又可用于确认后续

f_m由 (9) 得到的 (q)'s 再次与猜想 2.4 的结果一致。

$$f^{+}_{111}(q) = 2\left(h_{49}(q)\,q^{31} + h_{23}(q)\,q^{103}\right)$$
$$f^{-}_{113}(q) = -2\,\left(h_{37}(q)\,q^{75} + h_{11}(q)\,q^{123}\right)$$

上述结果的 $\hbar$ 展开也与 $F_{C_{(13,2)}(\mathbf{4_1})}$ 的展开相符。

注：当 $h_{27}(q)$ 出现在 $f^{\pm}_{b}$ 中时，对任意 b，都会加上 $h_1(q)$。

4 $(3w+1,3)$-缆结 $(w>3)$

一类缆结 $C_{(r,3)}(\mathbf{4_1})$ 的量子（或非交换）A 多项式，与第 2 节中的 $(2w+1, 2)$-缆绕的 A 多项式有本质区别。它由 [22] 给出

$$\hat{A}_K(t,M,L) = (L-1)B(t,M)^{-1}Q(t,M,L)\left(t^{6s}M^{3r}L^2 - t^{-6r}M^{-3r},\right) \quad gcd(r,3)=1, \quad |r|>12. \tag{12}$$

$Q(t,M,L)$ 和 $B(t,M)$ 的定义见附录 A。结合 (3) 与 (12) 可得

$$\begin{aligned} &c_0(x,q)F_K(x,q) + c_1(x,q)F_K(xq,q) + c_2(x,q)F_K(xq^2,q) + c_3(x,q)F_K(xq^3,q) \\ &+ c_4(x,q)F_K(xq^4,q) + c_5(x,q)F_K(xq^5,q) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 c_0、c_1、c_2、c_3、c_4、c_5 均为有理函数。我们给出 (13) 所需的非零初始数据。
猜想 4.1. 在 $\mathbb{Z}HS^3$ 中，对 $\mathbf{4_1}$ $(w>3)$ 进行 $(3w+1, 3)$-缆绕时，非零初始数据 $\left\{f_m(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]\right\} = \left\{f_i^{+}(q) \,|\text{所有系数均为正}\right\} \bigsqcup \left\{f_j^{-}(q)|\text{所有系数均为负}\right\}$ 式 (13) 的系数由 $F_{\mathbf{4_1}}(x,q)$ 的系数函数 $\{h_s(q)\}$ 确定如下。

$$\begin{aligned}
f^{+}_{6w+5}(q) &= 2\,h_1(q)\,q^{n} \qquad (h_1(q)=1)\\
f^{+}_{6w+11}(q) &= 2\,h_3(q)\,q^{n+2} \qquad (h_3(q)=2)\\
f^{+}_{6w+17}(q) &= 2\,h_5(q)\,q^{n+4}\\
&\vdots\\
f^{+}_{24w+11}(q) &= 2\,\left(h_{6w+3}(q)\,q^{n+6w+2} + h_1(q)\,q^{n+6w+2+\Delta}\right)\\
f^{+}_{24w+17}(q) &= 2\,\left(h_{6w+5}(q)\,q^{n+6w+4} + h_3(q)\,q^{n+6w+10+\Delta}\right)\\
f^{+}_{24w+23}(q) &= 2\,\left(h_{6w+7}(q)\,q^{n+6w+6} + h_5(q)\,q^{n+6w+18+\Delta}\right)\\
&\vdots\\
f^{+}_{42w+17}(q) &= 2\,\left(h_{12w+5}(q)\;q^{n+12w+4} + h_{6w+3}(q)\;q^{n+30w+10+\Delta} + h_1(q)\;q^{n+30w+10+2\Delta}\right)\\
f^{+}_{42w+23}(q) &= 2\,\left(h_{12w+7}(q)\;q^{n+12w+6} + h_{6w+5}(q)\;q^{n+30w+18+\Delta} + h_3(q)\;q^{n+30w+24+2\Delta}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^{+}_{60w+23}(q) &= 2\,\big(h_{18w+7}(q)\,q^{n+18w+6} + h_{12w+5}(q)\,q^{n+54w+18+\Delta} + h_{6w+3}(q)\,q^{n+72w+24+2\Delta} \\
&\quad + h_1(q)\,q^{n+72w+24+3\Delta}\big) \\
f^{+}_{60w+29}(q) &= 2\,\big(h_{18w+9}(q)\,q^{n+12w+8} + h_{12w+7}(q)\,q^{n+54w+26+\Delta} + h_{6w+5}(q)\,q^{n+72w+38+2\Delta} \\
&\quad + h_3(q)\,q^{n+72w+44+3\Delta}\ \big) \\
&\vdots \\
f^{+}_{78w+29}(q) &= 2\,\big(h_{24w+9}(q)\,q^{n+24w+8} + h_{18w+7}(q)\,q^{n+78w+26+\Delta} + h_{12w+5}(q)\,q^{n+114w+38+2\Delta} \\
&\quad + h_{6w+3}(q)\,q^{n+132w+44+3\Delta} + h_1(q)\,q^{n+132w+44+4\Delta}\ \big) \\
f^{+}_{78w+35}(q) &= 2\,\big(h_{24w+11}(q)\,q^{n+24w+10} + h_{18w+9}(q)\,q^{n+78w+34+\Delta} + h_{12w+7}(q)\,q^{n+114w+52+2\Delta} \\
&\quad + h_{6w+5}(q)\,q^{n+132w+64+3\Delta} + h_3(q)\,q^{n+132w+70+4\Delta}\ \big) \\
&\vdots \\
f^{-}_{12w+7}(q) &= -2\,h_1(q)\,q^{2n} \\
f^{-}_{12w+13}(q) &= -2\,h_3(q)\,q^{2n+4} \\
f^{-}_{12w+19}(q) &= -2\,h_5(q)\,q^{2n+8} \\
&\vdots \\
f^{-}_{30w+13}(q) &= -2\,\big(h_{6w+3}(q)\,q^{2n+12w+4} + h_1(q)\,q^{2n+12w+4+\Delta}\big) \\
f^{-}_{30w+19}(q) &= -2\,\big(h_{6w+5}(q)\,q^{2n+12w+8} + h_3(q)\,q^{2n+12w+14+\Delta}\big) \\
&\vdots \\
f^{-}_{48w+19}(q) &= -2\,\big(h_{12w+5}(q)\,q^{2n+24w+8} + h_{6w+3}(q)\,q^{2n+42w+14+\Delta} + h_1(q)\,q^{2n+42w+14+2\Delta}\big) \\
f^{-}_{48w+25}(q) &= -2\,\big(h_{12w+7}(q)\,q^{2n+24w+12} + h_{6w+5}(q)\,q^{2n+42w+24+\Delta} + h_3(q)\,q^{2n+42w+30+2\Delta}\big) \\
&\vdots \\
f^{-}_{66w+25}(q) &= -2\,\big(h_{18w+7}(q)\,q^{2n+36w+12} + h_{12w+5}(q)\,q^{2n+72w+24+\Delta} + h_{6w+3}(q)\,q^{2n+90w+30+2\Delta} \\
&\quad + h_1(q)\,q^{2n+90w+30+3\Delta}\ \big) \\
f^{-}_{66w+31}(q) &= -2\,\big(h_{18w+9}(q)\,q^{2n+36w+16} + h_{12w+7}(q)\,q^{2n+72w+34+\Delta} + h_{6w+5}(q)\,q^{2n+90w+46+2\Delta} \\
&\quad + h_3(q)\,q^{2n+90w+52+3\Delta}\ \big) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\Delta = 9w + 6$。

我们提出几点注。

Remark 1 与前面的缆绕一样，对于固定的 w，上述序列会终止。

注 **2** n 可以从 $F_{C_{(r,2)}(\mathbf{4_1})}(x,q)$ 的 $\hbar$ 级数中轻易得到。我们在下文给出 n 的一个公式。

注 **3** 每个 q-单项式的幂以正整数倍从 $f^{\pm}_{m}$ 增加到$f^{\pm}_{m+6}$

注 **4** 不符合上述模式的系数函数 $f_d(q)$ 均为零。

当 h_{6w+3} 出现在任意 $f_b^{\pm}(q)$中时，添加注释 $\mathbf{5}\ h_1(q)q^s$ 。

猜想 4.2。对于上述纽结族，猜想 4.1 中的幂 $n \in \mathbb{Z}$ 由 $3w+2$ 给出。

与 $(2w+1, 2)$-缆绕的情形一样，对于镜像纽结 $m(K)$，我们得到 $f_m(q)$。

推论 4.3。对于 $\mathbf{4_1}$ 的 $(3w+1, 3)$-缆绕，其中 $w < -3$，其递推关系的非零初始数据 $\{f_m(q)\} = \{f_m^+(q)\} \bigsqcup \{f_m^-(q)\}$由猜想 4.1 中的 $q \longleftrightarrow q^{-1}$ 给出。

猜想 4.4。对于 $\mathbb{Z}HS^3$ 中 $w > 3$ 时的缆结族 $K_w = C_{(3w+1,3)}(\mathbf{4_1})$，它们关于 $F_{K_w}(x,q)$ 的所有系数函数 $f_m^{\pm}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$，都可以按照猜想 4.1 的模式，表示为关于 $F_{\mathbf{4_1}}(x,q)$ 的系数函数 $\{h_s(q)\}$ 的线性组合。

5 示例

5.1 示例 1

我们从最简单的示例 $K = C_{(13,3)}(\mathbf{4_1})$ 开始。

命题 5.1。 $\hbar$ J_K 的展开式，$_n(q)$ 为

$$\begin{aligned} J_{K,n}(e^{\hbar}) = 1 &+ \left(47 - 47n^2\right)\hbar^2 + \left(-624 + 624n^2\right)\hbar^3 + \left(\frac{151919}{12} - 14605n^2 + \frac{23341}{12}n^4\right)\hbar^4 \\ &+ \left(-294528 + 361088n^2 - 66560n^4\right)\hbar^5 + \Big(\frac{2864712407}{360} - \frac{122607733}{12}n^2 + \frac{28027787}{12}n^4 \\ &- \frac{27314027}{360}n^6\Big)\hbar^6 + \cdots \end{aligned}$$

引理 5.2。 $C_{(13,3)}(\mathbf{4_1})$ 的亚历山大多项式为

$$\begin{aligned} \Delta_{C_{(13,3)}(\mathbf{4_1})}(x) &= \Delta_{\mathbf{4_1}}(x^3)\Delta_{T_{(3,13)}}(x) \\ &= -t^{15} - \frac{1}{t^{15}} + t^{14} + \frac{1}{t^{14}} + 2t^{12} + \frac{2}{t^{12}} - 2t^{11} - \frac{2}{t^{11}} + t^9 + \frac{1}{t^9} - t^8 - \frac{1}{t^8} + t^6 + \frac{1}{t^6} \\ &- t^5 - \frac{1}{t^5} + t^3 + \frac{1}{t^3} - 2t^2 - \frac{2}{t^2} + t + \frac{1}{t} + 1 \end{aligned}$$

命题 5.3. 当 K 的亚历山大多项式的逆在 $\hbar \to 0$ 的极限下，其对称展开为

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1} 2F_K(x,q) &= 2\, s.e.\left(\frac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{\Delta_K(x)}\right) \\ &= 2x^{29/2} - \frac{2}{x^{29/2}} + 4x^{35/2} - \frac{4}{x^{35/2}} + 10x^{41/2} - \frac{10}{x^{41/2}} + 26x^{47/2} - \frac{26}{x^{47/2}} + 68x^{53/2} \\ &- \frac{68}{x^{53/2}} - 2x^{55/2} + \frac{2}{x^{55/2}} + 178x^{59/2} - \frac{178}{x^{59/2}} - 4x^{61/2} + \frac{4}{x^{61/2}} + 466x^{65/2} \\ &- \frac{466}{x^{65/2}} - 10x^{67/2} + \frac{10}{x^{67/2}} + 1220x^{71/2} - \frac{1220}{x^{71/2}} + \cdots \in \mathbb{Z}\left[\left[x^{\pm 1/2}\right]\right] \end{aligned}$$

在这种情况下， $x^{55/2}$、$x^{61/2}$、$x^{67/2}$ 等的系数为负，这反映为初始数据中的负系数元素。

命题 5.4。 K 的递推关系的初始数据由 $I=\left\{f_j(q)\in\mathbb{Z}[q^{\pm1}]|j=1,\cdots,353\right\}$ 组成。通过令 $w=4$，从而令 $n=14$，即可得到 I 中的非零元素，这与猜想 4.1 一致。

我们将猜想 4.1 推广到 I 之外。

$$\begin{aligned}f^-_{355}(q)&=-2\left(h_{101}\,q^{228}+h_{75}\,q^{492}+h_{49}\,q^{678}+h_{23}\,q^{786}\right)\\f_{357}(q)&=0\end{aligned}$$

f^-_{355} 确实与递归计算的结果一致，而 f_{357} 的消失也与递归方法相符。我们确认，后续若干个 $f_m(q)$ 也与递归计算的结果相符。例如，

$$\begin{aligned}f^+_{359}(q)&=2\left(h_{111}\,q^{124}+h_{85}\,q^{418}+h_{59}\,q^{634}+h_{33}\,q^{772}+h_7\,q^{832}\right)\\f^-_{361}(q)&=-2\left(h_{103}\,q^{232}+h_{77}\,q^{502}+h_{51}\,q^{694}+h_{25}\,q^{808}\right)\end{aligned}$$

我们沿着若干个 r 的 $-1/r$ 斜率进行德恩手术。

$$\begin{aligned}\hat{Z}_0[S^3_{-1}(C_{13,3}(4_1));q]&=q^{\frac{419}{2}}\Big(-2+2q^{29}-4q^{95}+4q^{130}-2q^{207}-6q^{208}-2q^{209}+2q^{248}+6q^{249}\\&\qquad+2q^{250}-4q^{337}-4q^{338}-10q^{339}-4q^{340}-4q^{341}+4q^{384}+4q^{385}+\cdots\Big)\\\hat{Z}_0[S^3_{-1}(C_{13,3}(4_1));q]&=q^{\frac{839}{2}}\Big(-2+2q^{29}-4q^{191}+4q^{226}-2q^{417}-6q^{418}-2q^{419}+2q^{458}\\&\qquad+6q^{459}+2q^{460}-4q^{679}-4q^{680}-10q^{681}-4q^{682}-4q^{683}+4q^{726}+4q^{727}+\cdots\Big)\\\hat{Z}_0[S^3_{-\frac{1}{3}}(C_{13,\,3}(4_1));q]&=q^{\frac{1259}{2}}\Big(-2+2q^{29}-4q^{287}+4q^{322}-2q^{627}-6q^{628}-2q^{629}+2q^{668}\\&\qquad+6q^{669}+2q^{670}-4q^{1021}-4q^{1022}-10q^{1023}-4q^{1024}-4q^{1025}+4q^{1068}+\cdots\Big)\end{aligned}$$

5.2 例 2

接下来我们转到 $K=C_{(16,3)}(4_1)$。

命题 5.5。 $\hbar\,J_{K,\,n}(q)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}J_{K,n}(e^{\hbar})&=1+\left(111-111n^2\right)\hbar^2+\left(-2128+2128n^2\right)\hbar^3+\left(\frac{253477}{4}-73197n^2+\frac{39311}{4}n^4\right)\hbar^4\\&\quad+\left(-2159616+\frac{7947776}{3}n^2-\frac{1468928}{3}n^4\right)\hbar^5+\cdots\end{aligned}$$

引理 5.6。 $C_{(16,3)}(\mathbf{4_1})$ 的亚历山大多项式为

$$\begin{aligned}\Delta_{C_{(16,3)}(\mathbf{4_1})}(x) = t^{21} - \frac{1}{t^{21}} + t^{20} + \frac{1}{t^{20}} + 2t^{18} + \frac{2}{t^{18}} - 2t^{17} - \frac{2}{t^{17}} + t^{15} + \frac{1}{t^{15}} - t^{14} - \frac{1}{t^{14}} + t^{12} \\ + \frac{1}{t^{12}} - t^{11} - \frac{1}{t^{11}} + t^9 + \frac{1}{t^9} - t^8 - \frac{1}{t^8} + t^6 + \frac{1}{t^6} - t^5 - \frac{1}{t^5} + t^3 + \frac{1}{t^3} - 2t^2 - \frac{2}{t^2} \\ + t + \frac{1}{t} + 1\end{aligned}$$

命题 5.7. 在 $\hbar \to 0$ 的极限下， K 的亚历山大多项式的逆的对称展开为

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1} 2F_K(x,q) &= 2\, s.e.\left(\frac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{\Delta_K(x)}\right) \\ &= 2x^{35/2} - \frac{2}{x^{35/2}} + 4x^{41/2} - \frac{4}{x^{41/2}} + 10x^{47/2} - \frac{10}{x^{47/2}} + 26x^{53/2} - \frac{26}{x^{53/2}} + 68x^{59/2} \\ &- \frac{68}{x^{59/2}} + 178x^{65/2} - \frac{178}{x^{65/2}} - 2x^{67/2} + \frac{2}{x^{67/2}} + 466x^{71/2} - \frac{466}{x^{71/2}} - 4x^{73/2} + \frac{4}{x^{73/2}} \\ &+ 1220x^{77/2} - \frac{1220}{x^{77/2}} - 10x^{79/2} + \frac{10}{x^{79/2}} + 3194x^{83/2} - \frac{3194}{x^{83/2}} + \cdots \in \mathbb{Z}\left[\left[x^{\pm 1/2}\right]\right]\end{aligned}$$

在这种情况下， $x^{67/2}$、 $x^{73/2}$、 $x^{79/2}$ 等的系数均为负数，这与猜想 4.1 中初始数据里的负系数项一致。

命题 5.8. K 的递推关系的初始数据由 $I = \{f_j\ (q)\ \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] | j = 1、\ \cdots、\ 387\}$ 组成。通过令 $w = 5$，可得到 I 中的非零元素，因此 $n = 17$ 与猜想 4.1 中的结果一致。

我们验证了，通过递推得到的 f_{389} 和 f_{391} 与应用猜想 4.4 得到的结果相符。此外， f_{393} 的消失也与猜想 4.4 一致。

致谢。我谨向审稿人表示感谢，感谢其提出的宝贵建议。

附录

A 缆结的带色琼斯多项式

对于 S^3 中纽结 K 的 (r,2)-缆绕，其未归一化的 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 带色琼斯多项式为 [22]

$$\tilde{J}_{C_{(r,2)}(K),n}(t) = t^{-rs\left(n^2-1\right)} \sum_{w=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} t^{4rw(sw+1)} \tilde{J}_{K,\,(2sw+1)}(t), \quad t^4 = q$$

零框架平凡结 U 归一化为

$$\tilde{J}_{U,n}(t) = \frac{t^{2n} - t^{-2n}}{t^2 - t^{-2}}.$$

B 八字结的递推关系

我们记录了在 [6] 中发现的八字结的递推关系及其初始数据。我们注意到，在 [16] 中找到了一个闭式公式。

$$
\begin{aligned}
h_1(q) &= 1\\
h_3(q) &= 2\\
h_5(q) &= \frac{1}{q} + 3 + q\\
h_7(q) &= \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q} + 5 + 2q + 2q^2\\
h_9(q) &= \frac{1}{q^4} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^2} + \frac{5}{q} + 8 + 5q + 4q^2 + 3q^3 + q^4\\
h_{11}(q) &= \frac{2}{q^6} + \frac{2}{q^5} + \frac{6}{q^4} + \frac{7}{q^3} + \frac{10}{q^2} + \frac{10}{q} + 15 + 10q + 10q^2 + 7q^3 + 6q^4 + 2q^5 + 2q^6\\
h_{13}(q) &= \frac{1}{q^9} + \frac{3}{q^8} + \frac{4}{q^7} + \frac{7}{q^6} + \frac{11}{q^5} + \frac{15}{q^4} + \frac{18}{q^3} + \frac{21}{q^2} + \frac{23}{q} + 27 + 23q + 21q^2 + 18q^3 + 15q^4\\
&\quad + 11q^5 + 7q^6 + 4q^7 + 3q^8 + q^9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{m+14}(q) = -\frac{q^{-\frac{m}{2}-\frac{11}{2}}}{q^{\frac{m}{2}+\frac{13}{2}}-1}\Big[& h_m\left(q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} - q^{m+9}\right) + h_{m+2}\left(q^{\frac{m}{2}+\frac{15}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} + q^{m+9} - q^{m+10}\right)\\
& + h_{m+4}\left(-q^{\frac{m}{2}+\frac{11}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{19}{2}} + q^{\frac{3m}{2}+\frac{21}{2}} + q^{m+8} + q^{m+9} + q^{m+12} - q^7\right)\\
& + h_{m+6}\left(-q^{\frac{m}{2}+\frac{9}{2}} + q^{\frac{m}{2}+\frac{11}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{15}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} + q^{\frac{3m}{2}+\frac{25}{2}} + q^{m+9} + q^{m+10} - q^{m+12} + q^{m+13} - q^5\right)\\
& + h_{m+8}\left(q^{\frac{m}{2}+\frac{11}{2}} + q^{\frac{m}{2}+\frac{13}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} + q^{\frac{m}{2}+\frac{19}{2}} - q^{\frac{3m}{2}+\frac{31}{2}} - q^{m+8} + q^{m+9} - q^{m+11} - q^{m+12} + q^2\right)\\
& + h_{m+10}\left(q^{\frac{m}{2}+\frac{9}{2}} + q^{\frac{m}{2}+\frac{11}{2}} + q^{\frac{m}{2}+\frac{17}{2}} - q^{\frac{3m}{2}+\frac{35}{2}} - q^{m+9} - q^{m+12} - q^{m+13} + 1\right)\\
& + h_{m+12}\left(q^{\frac{m}{2}+\frac{11}{2}} - q^{\frac{m}{2}+\frac{13}{2}} + q^{m+11} - q^{m+12}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

C 算子的定义

ˆ 我们在第 2 节中列出了 A-多项式 (4) 中算子的定义。

$$
Q(t,M,L) = Q_2(t,M)L^2 + Q_1(t,M)L + Q_0(t,M), \quad B(t,M) := \sum_{j=0}^{2} c_j b(t, t^{2j+2}M^2)
$$

$$
b(t,M) = \frac{M(1+t^4M^2)(-1+t^4M^4)(-t^2+t^{14}M^4)}{t^2-t^{-2}}
$$

$$
c_0 = \hat{P}_0(t,t^4M^2)\hat{P}_1(t,t^6M^2), \quad c_1 = -\hat{P}_1(t,t^2M^2)\hat{P}_1(t,t^6M^2), \quad c_2 = \hat{P}_1(t,t^2M^2)\hat{P}_2(t,t^4M^2).
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(t,M) =& \ \hat{P}_2(t,t^4M^2)\,\hat{P}_1(t,t^2M^2)\,\hat{P}_0(t,t^6M^2)\\
Q_1(t,M) =& \ \hat{P}_0(t,t^4M^2)\,\hat{P}_1(t,t^6M^2)\,\hat{P}_2(t,t^2M^2) - \hat{P}_1(t,t^6M^2)\,\hat{P}_1(t,t^2M^2)\,\hat{P}_1(t,t^4M^2)\\
&+ \hat{P}_2(t,t^4M^2)\,\hat{P}_1(t,t^2M^2)\,\hat{P}_0(t,t^6M^2)\\
Q_0(t,M) =& \ \hat{P}_0(t,t^4M^2)\,\hat{P}_1(t,t^6M^2)\,\hat{P}_0(t,t^2M^2),
\end{aligned}
$$

$\hat{P}_0(t,M) := t^6M^4(-1+t^{12}M^4)$ $\hat{P}_1(t,M) := -(-1+t^4M^2)(1+t^4M^2)$
$\left(1-t^4M^2-t^4M^4-t^{12}M^4-t^{12}M^4-t^{12}M^6+t^{16}M^8\right)\hat{P}_2(t,M) := t^{10}M^4(-1+t^4M^4)$.

$\hat{}$ 第4节中 A-多项式 (12) 的算子定义如下:

$$
Q(t,M,L) := 1+\frac{DetA_9}{DetA}L+\frac{DetA_8}{DetA}L^2, \quad B(t,M) := \sum_{j=0}^{6} c_j b(t,t^{2(2+j)}M^3)
$$

其中 A 是一个矩阵，而 A_9 和 A_8 由 A 得到（参见 [22] 中的第4节） .

参考文献

[1] Bar-Natan D., Garoufalidis S.，关于 Melvin–Morton–Rozansky 猜想，《数学发明》125 (1996), 103–133。[2] A. Beliakova, S. Wehrli，链环带色琼斯多项式及 Rasmussen 不变量的范畴化，《加拿大数学杂志》60 (2008), 1240–1266。[3] J. Chae，《一条缆结与 BPS 级数》，SIGMA arXiv:2204.02794。[4] B. Cooper, V. Krushkal，Jones-Wenzl 投影算子的范畴化，《Quantum Topology》3 (2012), 第 2 期, 139–180。arXiv:1005.5117。[5]Garoufalidis S., Le T Q T.，带色琼斯函数是 q-全纯的，《几何与拓扑》9 (2005), 1253–1293, arXiv:math/0309214。[6] Gukov S., Manolescu C.，纽结补空间的二元级数，《Quantum Topology》12, 2021, 1–109。arXiv:1904.06057。[7]Gukov S., Pei D., Putrov P., Vafa C., BPS 谱与三维流形不变量，《结理论及其影响》29 (2020), 2040003, 85 页, arXiv:1701.06567。[8] Hedden M.，关于结 Floer 同调与缆绕，《代数与几何拓扑》5 (2005), 1197–1222，arXiv:math/0406402。[9] Khovanov M.，琼斯多项式的范畴化，《杜克数学杂志》101 (2000), 359–426，arXiv:math.QA/9908171。[10]Khovanov M.，带色琼斯多项式的范畴化，《结理论及其影响》14 (2005), 111–130，arXiv:math/0302060。

[11] Khovanov M.，单位根处的 Hopfological代数与范畴化：初步探索，arXiv:math/0509083。[12]M. Khovanov and L. Rozansky，矩阵分解与链环同调 1，arXiv:math/0401268。[13] M. Khovanov and L. Rozansky，矩阵分解与链环同调 2，《几何与拓扑》12 (2008), 1387–1425，arXiv:math/0505056。[14] Melvin P.M., Morton H.R.，彩色琼斯函数，《数学物理通讯》169 (1995), 501–520。[15] A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende. 平面曲线奇点的希尔伯特概形及其链环的 HOMFLY同调。附录由 Eugene Gorsky 撰写。《几何与拓扑》2018, 22。arXiv:1201.2115。[16]Park S.，反演态和、反演Habiro级数与不定theta函数，arXiv:2106.03942。[17]Park S.，纽结补空间的 Large color R-矩阵与奇异恒等式，《结理论及其应用》29, 第 14 期, 2050097 (2020)。arXiv:2004.02087。[18] Y. Qi, Hopfological代数，《组合数学》150, 1 (2014)。arXiv:1205.1814。[19] Reshetikhin N., Turaev V.，通过链环多项式与量子群构造三维流形不变量，《数学发明》103 (1991), 547–597。[20] Rozansky L.，带色琼斯多项式 Melvin–Morton 展开的高阶项，《数学物理通讯》183 (1997), 291–306，arXiv:q-alg/9601009。[21] Rozansky L.，万能R矩阵、Burau 表示与带色琼斯多项式的 Melvin-Morton 展开，《数学进展》134 (1998), 1–31，arXiv:q-alg/9604005。[22]Ruppe D.，八字结上的 AJ猜想与缆结，《拓扑学及其应用》188 (2015), 27–50，arXiv:1405.3887。[23]Tran A.，关于八字结缆结的 AJ 猜想，《纽约数学杂志》20 (2014), 727–741，arXiv:1405.4055。[24] Trinh M.，从 Hecke范畴到幺幂轨迹，arXiv:2106.07444。[25] Witten E.，量子场论与琼斯多项式，《数学物理通讯》121 (1989), 351–399。