arXiv:2303.08349v1 [cs.CG] 15 Mar 2023

经济型凸覆盖及其应用*

Sunil Arya†计算机科学与工程系 香港科技大学，香港
arya@cse.ust.hk

GuilhermeD. da Fonseca*法国艾克斯-马赛大学 及 LIS实验室 guilherme.fonseca@lis-lab.fr

David M. Mount*计算机科学系与高级计算机研究所 马里兰大学帕克分校，马里兰州 mount@umd.edu

摘要

凸体的覆盖已成为设计高效解决方案的核心组成部分，这些方案用于解决涉及凸体的近似问题。直观地说，给定一个凸体K 和 $\varepsilon > 0$，覆盖是由一组凸体构成的集合，其并集覆盖 K，且每个凸体经过常数倍扩张后都包含在 ε 对 K的扩张之内。覆盖已应用于许多领域，例如点集的直径、宽度和 ε-核近似、近似最近邻搜索、组合复杂度较低的多胞体近似，以及最近向量问题（CVP）的近似。

已知对于一般的$\mathbb{R}^n$凸体，可以构造大小为 $n^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 的覆盖。在某些特殊情况下，例如凸体为 ℓ_p 单位球时，这一界已改进为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。这引出了一个问题：这样的界是否普遍成立？本文对此给出了肯定的回答。

我们通过将凸覆盖应用于凸体的多胞体逼近问题，展示了这些覆盖的强大能力与广泛适用性，其中误差通过巴拿赫–马祖尔度量来衡量。给定一个中心良好的凸体 K 和一个近似参数 $\varepsilon > 0$，我们证明存在一个由 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个顶点（面）组成的多胞体 P，使得 $K \subset P \subset K(1+\varepsilon)$。在最坏情况下，这个界在相差 $2^{O(n)}$倍的范围内是最优的。（这一界近期已通过不同技术得到证明，但可以说我们的方法更简单、更优雅。）此外，我们还得到最快的 $(1+\varepsilon)$-近似最近向量问题算法，该算法适用于任意范数，运行时间为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$（输入规模的多项式因子除外）；同时，我们也得到最快的 $(1+\varepsilon)$-近似整数规划算法。我们还提出了一个框架，用于为任意凸体构造规模最优的覆盖（相差 $2^{O(n)}$倍以内）。

*本文的早期版本曾发表于 *Proceedings of the 2023 Annual ACM-SIAM Symposium onDiscrete Algorithms*（SODA），第 1834–1861 页，2023 年。

†本研究得到中国香港研究资助局项目（16213219 和 16214721）的资助。David Mount 的研究得到美国国家科学基金会 CCF–1618866 号资助。Guilherme da Fonseca 的研究得到法国国家研究署 PRC 项目 ADDS（ANR-19-CE48-0005）的资助。

关键词：近似算法、高维几何、凸覆盖、巴拿赫–马祖尔度量、格算法、最近向量问题、麦克比斯区域

1 引言

凸体在数学和计算机科学中具有基础性的重要地位。鉴于精确表示的复杂度很高，简洁的近似表示对于许多应用至关重要。定义两个凸体之间距离的方法有多种（例如，参见 [20]），每种方法都会带来一种不同的近似概念。虽然人们通常研究豪斯多夫距离，但它对凸体的形状并不敏感。本文将考虑一种常见的线性不变距离，称为 Banach–Mazur 距离。

给定实数 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体 X 和 Y，且二者的内部都包含原点，其 Banach–Mazur 距离记作 $\mathrm{dist}_{\mathrm{BM}}(X,Y)$，定义为 $\ln \lambda$ 的最小值，其中存在一个线性变换 T，使得 $TX \subseteq Y \subseteq \lambda \cdot TX$。给定 $\delta > 0$，若 $\mathrm{dist}_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leq \delta$，则称 Y 是 X 的 Banach–Mazur δ-近似。 T 在我们的构造中将是恒等变换。因此，给定 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K 和 $\varepsilon > 0$，我们寻求一个凸多胞体 P，使得 $K \subseteq P \subseteq (1+\varepsilon)K$。这意味着 $\mathrm{dist}_{BM}(K,P) \leq \ln(1+\varepsilon)$，当 ε 较小时，该值约为 ε。缩放以原点为中心进行。按照惯例，假设 K 是中心良好的，即原点位于 K 内部，且离 K 的边界不太近。（正式定义见第 2.2 节。）与豪斯多夫距离不同，班纳赫–马祖尔测度具有一个理想特性：它对 K 的形状敏感，在 K 较窄处更准确，在 K 较宽处则不那么准确。

主要问题是：给定 n 和 $\varepsilon > 0$，在上述意义下，用多胞体对任意凸体 K 进行 ε-逼近，所需的顶点（或面）最少有多少个？这个问题已得到广泛研究。现有的界都假设 K 是中心良好的。如果一个界对所有 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$都成立，且 ε_0 取决于 K，我们就称它为非一致界。典型的非一致界假设 K 是光滑的，且 ε_0 的取值取决于 K的光滑程度。本文关注一致界，即 ε_0 不依赖于 K。

Dudley [28] 以及 Bronshtein 和 Ivanov [23] 在 Hausdorff 度量背景下给出了一致界，但他们的结果可以改写为 Banach-Mazur 度量下的结论，从而推出存在一个逼近多胞体，其 $n^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个顶点（面）。对于光滑凸体，B¨or¨oczky[20, 38]给出了一个非一致界：$2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。Barvinok [17]在对称凸体的一致情形下改进了这个界。忽略关于 $1/\varepsilon$的多对数因子，他的界为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{n/2}$。最后，Nasz´odi、Nazarov 和 Ryabogin 得到了规模为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ [52]的最坏情形最优逼近。他们的界是一致的，且适用于一般凸体。

本文的主要结果是在 Banach-Mazur 框架下，给出一种替代性的渐近最优构造，用于构造凸体 K in $\mathbb{R}^n$ 的 ε-近似。我们的构造在两个方面优于 [52] 在 [52] 中提出的构造。首先，尽管该构造十分巧妙，却需要结合多种技术手段（将凸体变换到标准位置、对其进行圆整、计算 Bronshteın-Ivanov 网，以及筛选以减小样本量）。相比之下，我们的方法相当简单。我们采用一种贪心过程，从 K 的内部抽取点作为样本，最终的近似就是这些点的凸包。其次，我们的构造功能更强，因为它还提供了一个

针对 K 的额外覆盖结构。每个样本点都与一个中心对称凸体相关联，这些凸体共同构成对 K 的覆盖，且它们的并集包含于扩张后的 $(1+\varepsilon)K$ 中。作为这一额外结构的直接结果，我们得到了迄今为止最快的最近向量问题（CVP）近似算法，而且该算法适用于任意范数。

1.1 我们的结果

在全文中，我们假设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个关于原点中心良好的满维凸体。满足我们需求的中心性概念有多种（正式定义见第 2.2 节）。我们的第一个结果涉及简洁覆盖的存在性。给定一个凸体 K，其原点位于内部，以及实数 $c \geq 1$ 和 $\varepsilon > 0$，K 的一个 (c,ε)-覆盖是由一组凸体 $\mathcal{Q}$ 构成的集合，其并集覆盖 K，且将每个 $Q \in \mathcal{Q}$ 以其质心为中心扩张因子 c 后，所得集合位于 $(1+\varepsilon)K$ 内（见图1）。覆盖已成为凸逼近中的重要工具，并已应用于计算几何领域的多个问题，包括组合复杂度、近似最近邻搜索以及计算直径和 ε-核 [7]。

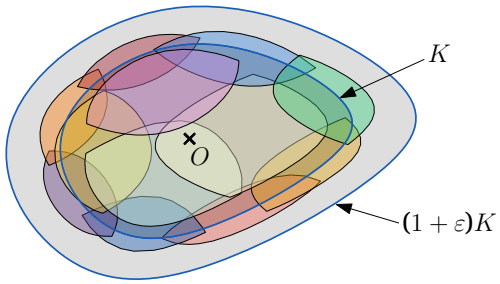


图1：(2，ε)-覆盖。

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体、常数 $c \geq 1$ 和参数 $\varepsilon > 0$，(c，ε)-覆盖的最小规模关于 n 和 ε 是什么？Abdelkader 和 Mount 研究了常数维数 [1] 空间中的这个问题。他们没有分析其界在高维情形下的表现，但根据 [9]，的结果，可以证明他们的结果在 $\mathbb{R}^n$ 中给出了一个 $n^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 的上界。高维情形中的若干特殊情况已得到研究。Nasz´odi 和 Venzin 证明，当 K 是任意固定 $p \geq 2$ [53] 的 ℓ_p 球时，存在规模为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{n/2}$ 的 (2，ε)-覆盖。对于 ℓ_∞ 球，Eisenbrand、H¨ahnle 和 Niemeier 证明，存在由轴平行矩形 [32] 组成、规模为 $2^{O(n)}/\log^n(1/\varepsilon)$ 的 (2，ε)-覆盖。他们还给出了一个几乎匹配的下界 $2^{-O(n)}/\log^n(1/\varepsilon)$，即使覆盖由平行六面体构成也是如此。

本文建立了以下关于 (c,ε)-覆盖规模的界，该界适用于 $\mathbb{R}^n$ 中任意中心良好的凸体。

定理 1。设 $0 < \varepsilon \leq 1$ 为实参数，$c \geq 2$ 为常数，$K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为中心良好的凸体。则存在一个由至多 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个中心对称凸体组成的 K 的(c,ε)-覆盖。

不难证明，任何 $(2,\varepsilon)$-覆盖的大小都至少为 $2^{-O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 。

欧几里得球的（例如，参见 Nasz´odi 和 Venzin [53]）覆盖的大小至少为 。因此，就 ε 的依赖关系而言，上述界是最优的。在第 4.1 节（定理 4）中，我们证明，对于任意常数 $c \geq 2$，我们的构造实际上是实例最优的，误差不超过 $2^{O(n)}$ 倍。这意味着，对于任意中心良好的凸体 K，我们的覆盖大小至多是针对 c、ε 的覆盖大小的 K 倍。在第 6.2 节中，我们给出一种随机化算法，它构造的覆盖稍大一些（大 $\log(1/\varepsilon)$ 倍）。按照标准惯例，我们的构造假设可通过弱成员预言机（定义见第 6 节）访问 K 。

我们展示了该结果的一些应用。首先，在第5 节中，我们证明，覆盖元素的中心点的凸包可在 Banach-Mazur 度量下给出一个近似。

定理 2. 给定一个中心良好的凸体 K 和一个近似参数 $\varepsilon > 0$，存在一个多胞体 P，它由 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个顶点（面）组成，使得 $K \subset P \subset K(1+\varepsilon)$。

此外，该结果还可应用于格问题。在最近向量问题（最近向量问题）中，给定一个 n维格 L ，它位于 $\mathbb{R}^n$ 中（即由 n 基向量的整数线性组合构成的集合），以及一个目标向量 $t \in \mathbb{R}^n$。问题是要返回 L 中在给定范数下距离 t 最近的向量。该问题在密码学 [41, 55, 56], 、整数规划 [25, 26, 45], 以及有理数上的多项式因式分解 [44], 等领域都有应用。对于任意 ℓ_p 范数 [34] ，该问题都是 NP-hard；在某些条件性困难性假设 $2^{(1-\gamma)n}$下，对于常数 $\gamma > 0$，无法在 [18]时间内精确求解。

这个问题有着悠久的研究历史。最初提出的针对 ℓ_∞范数下最近向量问题的解法，通过整数线性规划需要 $2^{O(n^3)}$ 时间 [45], ，后来改进为$n^{O(n)}$ [42]。对于 ℓ_2 范数，Micciancio 和 Voulgaris 提出了一种运行时间为单指数级 $2^{O(n)}$ 的算法 [49], ；目前，求解精确欧几里得最近向量问题最快的算法由 Aggarwal、Dadush 和 Stephens-Davidowitz 提出 [3] ，运行时间为 $2^{n+o(n)}$ 。然而，对于欧几里得范数以外的范数，如何在单指数时间内精确求解最近向量问题仍是一个开放问题。（更多信息请参见 [40]。）Dadush、Peikert 和 Vempala [26] 研究了由凸体定义的（可能不对称的）范数下的最近向量问题及相关的最短向量问题（SVP）。他们的工作揭示了格算法与凸几何之间丰富的联系。

在 CVP 问题的近似版本中，记作 $(1+\varepsilon)$-CVP，我们还会给定一个参数$\varepsilon > 0$，目标是找到一个格向量，使其到 t的距离至多为最优值的 $1+\varepsilon$倍。CVP 的近似问题是 NP-hard 的 [5, 27] ，条件困难性结果表明，对于 $p \geq 1$ 范数下的 CVP，在 ℓ_p 中要在 $2^{(1-\gamma)n}$ 时间内实现近似是困难的，其中常数 $\gamma > 0$满足特定条件；但当 p 甚至为 [2]时除外。

Ajtai、Kumar 和 Sivakumar 的随机筛法 [4] 经 Bl¨omer 和 Naewe [19]推广到 ℓ_p 范数下的近似 CVP，并由 Dadush [24]推广到一般的良中心范数情形。这些算法的运行时间和空间复杂度均为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{2n}$。在沃罗诺伊胞方法 [26, 49], 的基础上，Dadush 和 Kun [25] 提出了确定性算法，将运行时间改进为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{n}$ ，空间复杂度改进为 $\widetilde{O}(2^n)$。

Eisenbrand、H¨ahnle 和 Niemeier [32] and Nasz´odi 与 Venzin [53]探索了在该范数下使用单位球的（c， ε）覆盖，通过将弱常数因子近似“增强”为强（$1+\varepsilon$）近似，为近似最近向量问题设计高效算法。利用超立方体的独特性质，Eisenbrand 等人 [32] 改进了 ℓ_∞

范数下的 $2^{O(n)}$对数$^n(1/\varepsilon)$ 时间。Nasz´odi 和 Venzin [53] 将这一方法推广到了 ℓ_p 范数。他们算法的运行时间为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{n/2}$ 对于 $p \geq 2$ 以及 $2^{O(n)}/\varepsilon^{n/p}$ 对于 $1 \leq p \leq 2$。运行时间中 $2^{O(n)}$ 项的常数取决于 p。

将我们的覆盖方法应用于现有算法后，我们得到了迄今为止针对任意范数下（$1+\varepsilon$）-近似最近向量问题最快的算法。该算法是随机化的，运行时间为单指数级， $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。（按照惯例，我们忽略输入规模的多项式因子。）下文将正式陈述这一结果。

定理 3. 存在一种随机化算法，给定任意中心良好的凸体 K 和格 L，可以在由 K定义的范数下，以至少 $1-2^{-n}$的概率求解$(1+\varepsilon)$-最近向量问题，所需时间为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$，空间为$O(2^n)$。

最后，通过 Dadush 提出的从近似最近向量问题到近似整数规划（整数规划）的归约， [24]，我们提出一种近似整数规划的随机化算法（见第5节6.3定理）。

1.2 技术

如上所述，覆盖是求解涉及凸体的近似问题时一种强有力的工具。本文探讨的基本问题涉及一般凸体在 $\mathbb{R}^n$ 中的 (c,ε)-覆盖大小，尤其关注其对 ε 的依赖关系。我们的方法采用了凸几何中的一个经典概念，称为麦克比斯区域 [46]。给定一个凸体 K 和一个点 $x \in K$，麦克比斯区域 $M_K(x)$ 是以 x 为中心且包含于 K 中的最大中心对称体（见图 2(a) ）。麦克比斯区域在凸集理论和数论几何中有诸多应用（关于此主题的优秀综述，参见 B´ar´any [15] ）。它们还应用于计算几何领域的若干问题，包括组合复杂度下界 [12, 13, 22]，、近似最近邻搜索的组合复杂度 [6, 8, 10, 29, 51]，，以及计算直径和 ε-核 [7]。

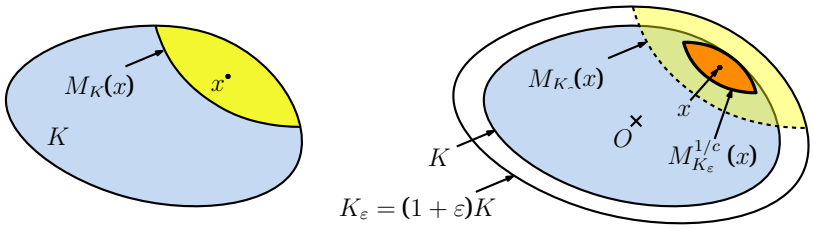


图 2: （a）麦克比斯区域；（b）由收缩后的麦克比斯区域导出的覆盖元素。

在c-ε覆盖的背景下，以任意点 x 为中心的覆盖元素，显而易见（事实上也是极大的）选择是取以 x 为中心、相对于扩张体 $K_\varepsilon = (1+\varepsilon)K$的麦克比斯区域，然后将其按约 $\frac{1}{c}$的因子 x缩放（见图2（b））。这种基于麦克比斯区域的覆盖的构造与分析，是本文的主要贡献之一。在关于经济帽覆盖的研究中，B´ar´any 和 Larman 指出，麦克比斯区域可有效地覆盖凸体 [16]边界附近的区域。尽管

麦克比斯区域可能非常狭长，尤其是在凸体边界附近，但在许多方面，它们的行为类似于度量空间中的定半径球。（Vernicos 和 Walsh 证明，收缩的麦克比斯区域与由K [1, 63]诱导的希尔伯特几何中的定半径球形状相似。）这就带来了一种非常简单的覆盖构造：计算一个极大点集，使得以这些点为中心、经过适当收缩的麦克比斯区域两两不相交。随后，通过统一增大缩放因子来构造覆盖，使所得的麦克比斯区域覆盖 K。

在实现和分析这一构造时，会遇到两个难题。第一个是如何高效地计算这些麦克比斯区域。第二个是证明这一简单构造能够使覆盖大小达到所需的界。针对后者，一种自然的方法是基于体积考量进行装填论证。遗憾的是，这种方法行不通，因为麦克比斯区域的体积可能非常小。我们处理小型麦克比斯区域的方法，是利用原凸体 K 及其极体中的麦克比斯区域体积所具有的马勒型倒数性质， K^* （定义见第2.2 节）。在低维情形下，分析利用了 K 与 K^*之间的帽对应关系，使得这些帽的体积互为倒数（例如，参见 [6]）。因此，对于 K 中每个体积较小的麦克比斯区域，都存在一个 K^* 中的大体积麦克比斯区域。因此，同时在 K 和 K^*中进行随机采样，就有可能命中所有麦克比斯区域。

将这一方法推广到高维情形，需要克服若干技术难题。直接推广 [6] 中的方法，可得到一个大小为 $n^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$的覆盖。分析中的一个关键步骤，是建立由投影帽和对偶帽得到的两个（$n-1$）维凸体的体积之间的关系。早期研究假设维数为常数，因此粗略的界就已足够。但在高维情形中，必须避免依赖维数的因子。本文的一个关键见解是，可以通过使用差体来避免这些因子。（见第3.1 节中的引理3.1。）通过运用这种更精细的几何分析，我们在第3节中建立了这一马勒型关系（尤其是引理3.3 和3.4）。我们在第4.2 节中运用这一关系，得到覆盖大小的界。在第5 节中，我们说明这如何带来班纳赫–马祖尔测度下的 ε-近似。第6 节介绍采样过程及其应用。

2 预备知识

本节将介绍全文中使用的术语和符号。首次阅读时可以跳过本节，直接阅读第3节。

2.1 长度与测度

给定向量 u， $v \in \mathbb{R}^n$，令 $\langle u, v\rangle$ 表示它们的点积，令$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ 表示 v 的欧几里得长度。全文中，我们将点 和 向量 这两个术语互换使用。给定点 p， $q \in \mathbb{R}^n$， 令 $\|pq\| = \|p - q\|$ 表示它们之间的欧几里得距离。令 vol(·) 和 area(·) 分别表示 n 维和 $(n-1)$ 维勒贝格测度。

全文中， $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 表示一个满维紧凸体，其内部包含原点 O 。令 $\|x\|_K = \inf\{s \geq 0 : \ x \in sK\}$ 表示与K相关联的闵可夫斯基泛函，或规范函数。若 K 是中心对称的，其规范函数便定义了一个范数；但即使 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 不是中心对称的，我们也会滥用

记法，仍称其为“范数”。给定 $\varepsilon > 0$，定义$K_\varepsilon = (1+\varepsilon)K$ 为将 K 按 $1+\varepsilon$进行均匀缩放所得的结果。

给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，其差体记为 $\Delta(K)$，定义为闵可夫斯基和 $K \oplus -K$。差体是凸且中心对称的，并满足以下性质。

引理 2.1 (Rogers 和 Shephard [57])。给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，体积$(\Delta(K)) \leq 4^n$体积(K)。

2.2 极性和中心性性质

给定一个有界凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，它的内部 O 包含原点，定义其极体记为 K^*，它是凸集

$$K^* = \{u : \langle u, v\rangle \leq 1, \text{ for all } v \in K\}.$$

极体具有许多有用的性质（例如参见 Eggleston [31]）。例如，众所周知，K^* 有界且 $(K^*)^* = K$。此外，若 K_1 和 K_2 是两个都包含原点的凸体，且满足 $K_1 \subseteq K_2$，则 $K_2^* \subseteq K_1^*$。

给定一个非零向量 $v \in \mathbb{R}^n$，我们将其“极体” v^* 定义为一个超平面：它与 v正交，距离原点 $1/\|v\|$，且位于与 v相同的原点一侧。超平面的极体定义为这一映射的逆映射。等价地，我们可以将 K^* 定义为包含原点的闭半空间的交集，这些闭半空间由超平面 v^*围成，其中 $v \in K$均成立。

给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，有许多方法可以刻画 K 以原点 [39, 61]为中心这一性质。本节将探讨几种相关的中心性度量。

首先，将 K的马勒体积 定义为乘积 vol(K) ·vol(K^*)。马勒体积已得到广泛研究（例如参见 [47, 59, 60]）。它在线性变换下保持不变，并且取决于原点在 K中的位置。在下列定义中，$O(n)$项中的固定常数可以任意取值。

Santal´性质： K 的马勒体积至多为 $2^{O(n)} \cdot \omega_n^2$，其中 ω_n 表示 n维单位欧几里得球的体积（$\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$）。

Winternitz 性质： 对于任意经过原点的超平面，K 位于超平面两侧的部分的体积与 K 的体积之比至少为 $2^{-O(n)}$。

科夫纳-别西科维奇性质： $K \cap -K$ 的体积与 K 的体积之比至少为 $2^{-O(n)}$。

Following Dadush, Peikert, and Vempala [26], ，我们称 K 为中心良好，如果它满足科夫纳-别西科维奇性质。通常，如果 $K - x$ 是中心良好的，则称 K 关于点 x 是中心良好。不过，就我们的目的而言，上述任一种定义都可以使用，如下述引理所示。

引理 2.2. 三种中心性性质（*Santal´o*、温特尼茨和 *Kovner-Besicovitch*）是等价的：满足其中任意一种性质的凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，在改变 $2^{O(n)}$ 因子的条件下，也满足另外两种性质。此外，如果原点与 K的质心重合，那么这三种性质都成立。

我们先引入一些记号。给定一个超平面 h，令 h^+ 和 h^- 表示它所确定的两个半空间。给定 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，设 h 是一个与 K 相交的超平面，使得 $\mathrm{vol}(K \cap h^+) = \delta \cdot \mathrm{vol}(K)$。定义 δ-浮体，记作 K_δ，为所有此类超平面 h 对应的半空间 h^- 的交集。对于 $t > 0$，定义 t-*Santal´o* 区域 $S(K, t) \subseteq K$ 为满足以下条件的点 $x \in K$ 构成的集合：相对于 x，K 的马勒体积至多为 $t\,\omega_n^2$，其中 ω_n 表示 n维单位欧几里得球的体积。浮体和 Santal´o 区域（若非空）都是 K的凸子集，Meyer 和 Werner 证明它们具有以下性质。

引理 2.3 (Meyer 和 Werner [48])。对于所有 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，$K_\delta \subseteq S(K, t)$，其中 $t = 1/(4\delta(1-\delta))$。

我们还需要 Milman 和 Pajor 的以下结果 [50]（推论 3 后的备注 4），该结果表明，若 K 满足 Santal´o，则其满足 Kovner-Besicovitch。

引理 2.4 (Milman 和 Pajor [50])。设 K 是一个凸体，原点 O 位于其内部，并且满足 体积$(K) \cdot$体积$(K^*) \le s\, w_n^2$，其中 s 是一个参数。则 体积$(K \cap -K)/$ 体积$(K) \ge 2^{-O(n)}/s$。

现在我们可以证明引理 2.2。

证明。(引理 2.2) 首先，假设 K 满足 Kovner-Besicovitch，即，体积$(K \cap -K) \ge 2^{-O(n)} \cdot$体积$(K)$。任取一个经过原点的超平面 h。由于 $K \cap -K$ 是中心对称的，该凸体有一半位于 h的每一侧。因此，K 位于 h 任一侧的部分的体积至少为 $2^{-O(n)} \cdot$体积(K)，所以 K 满足温特尼茨性质。

接下来，假设 K 满足温特尼茨性质。注意，浮体 K_δ之外的任意点都包含在某个半空间 h^+ 中，使得 $\mathrm{vol}(K \cap h^+) \le \delta \cdot \mathrm{vol}(K)$。根据温特尼茨性质，包含原点的所有半空间的体积至少为 $2^{-O(n)} \cdot \mathrm{vol}(K)$，因此当 K_δ 时，原点包含在浮体 $\delta = 2^{-O(n)}$内。由引理 2.3 可知，原点位于某个桑塔洛´区域 $S(K, t)$ 内，其中 $t = 2^{O(n)}$。因此，K 满足桑塔洛´性质。

最后，若 K 满足桑塔洛´性质，则由引理 2.4 可知，它满足科夫纳-别西科维奇性质。这就证明了这三种中心性性质彼此等价。

Milman 和 Pajor [50] (推论 3) 表明，若原点与 K的质心重合，则 K满足科夫纳-别西科维奇性质，因而也满足其他性质。 □

马勒体积的下界也得到了广泛研究 [21, 43, 54]。回顾 Santal´o 性质给出的 ω_n 值，无论原点位于凸体 [21] 内的何处，以下下界都成立。

引理 2.5. 设凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 的内部包含原点，则 体积$(K) \cdot$体积$(K^*) \ge 2^{-O(n)} \cdot \omega_n^2$。

2.3 帽、射线与相对测度

设紧凸体 K 位于 n维空间 $\mathbb{R}^n$ 中，且原点 O 位于其内部。K 的帽 C 定义为 K 与某个半空间的非空交集。令 h_1 表示一个不经过原点的超平面，将帽$_K(h_1)$定义为 K 与由 h_1 界定且不包含原点的半空间的交集（见图 3(a)）。定义 C的底面为 base(C)，记作 $h_1 \cap K$。令 h_0 表示 K 的支撑超平面，且 C 平行于 h_1，将 C 的顶点定义为 $h_0 \cap K$中的任意一点。

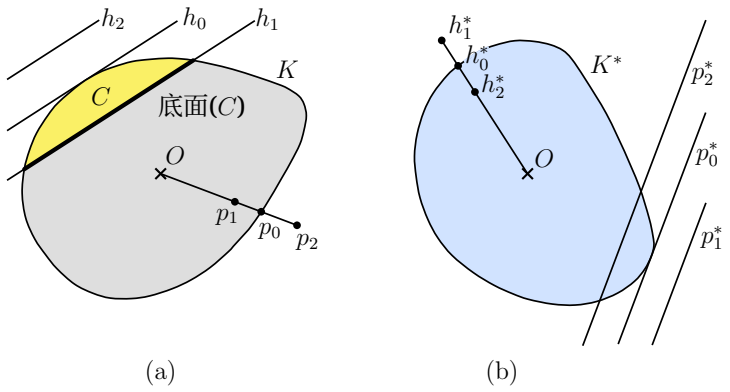


图 3：用于定义宽度和射线的凸体 K 及其极体 K^* 。

我们将帽 C 的绝对宽度 定义为 $\mathrm{dist}(h_1, h_0)$。当一个帽不包含原点时，定义 C的相对宽度 会很方便，记作 $\mathrm{wid}_K(C)$，其值为比率 $\mathrm{dist}(h_1, h_0)/\mathrm{dist}(O, h_0)$。我们将宽度的概念扩展到超平面，定义 $\mathrm{wid}_K(h_1) = \mathrm{wid}_K(\mathrm{cap}_K(h_1))$。注意，当超平面从支撑超平面平移至原点时，其帽的相对宽度从 0 变化到极限值 1。

我们还用绝对和相对两种方式刻画点到边界的距离。给定一点 $p_1 \in K$，令 p_0 表示射线 Op_1 与 K边界的交点。定义 p_1 的绝对射线距离 为 $\|p_1p_0\|$，并定义p_1的相对射线距离 （记作射线$_K(p_1)$）为比值 $\|p_1p_0\|/\|Op_0\|$。相对宽度和相对射线距离都是仿射不变量；除非另有说明，提及宽度和射线距离时，均指相对意义下的量。

我们还可以用仿射不变的方式定义体积。回忆一下，vol(·)表示标准的勒贝格体积测度。对于任意区域 $\Lambda \subseteq K$，定义 Λ 相对于 K的相对体积 ，记作 $\mathrm{vol}_K(\Lambda)$，为 $\mathrm{vol}(\Lambda)/\mathrm{vol}(K)$。

借助极变换，我们可以将宽度和射线距离的概念推广到位于 K 外部的对象。考虑一个与 h_1 平行、且位于支撑超平面 h_0 外侧的超平面 h_2 （见图 3(a)）。由此可知 $h_2^* \in K^*$，我们定义 $\mathrm{wid}_K(h_2) = \mathrm{ray}_{K^*}(h_2^*)$（见图 3(b)）。类似地，对于位于射线 Op_1 上的点 $p_2 \notin K$，可知超平面p_2^* 与 K^* 相交，因此我们定义 $\mathrm{ray}_K(p_2) = \mathrm{wid}_{K^*}(p_2^*)$。根据极变换的性质，容易看出 $\mathrm{wid}_K(h_2) = \mathrm{dist}(h_0, h_2)/\mathrm{dist}(O, h_2)$。类似地，$\mathrm{ray}_K(p_2) = \|p_0p_2\|/\|Op_2\|$。此后，只要上下文明确，我们就省略对 K 的提及。

我们的一些结果仅适用于足够靠近 K 边界的情形。给定 $0 \le \alpha \le 1$，我们称帽 C 为 α-浅，如果 $\mathrm{wid}(C) \le \alpha$；称点 p 为 α-浅，如果 $\mathrm{ray}(p) \le \alpha$。我们简称浅，表示 α-浅，其中 α 是一个足够小的常数。

给定任意帽 C 和一个实数 $\lambda > 0$，我们定义它的 λ-扩张，记作 C^λ，即由一条平行于 C 底面的超平面截出的 K 的帽，使得 C^λ 的绝对宽度是 C 的绝对宽度的 λ 倍。（注意，如果帽的扩张足够大，它可能与 K 相同。）

现在，我们给出若干关于射线距离和帽宽的实用技术结果，分别适用于它们的

绝对形式和相对形式。

引理 2.6. 设 C 是 K 的一个不包含原点的帽，且 p 是 C 中的一点。那么射线(p) $\leq$宽度(C)。

证明。设 h 为经过 C 底面的超平面， h_0 为在 C 顶点处平行于 h 的 K 的支撑超平面。令 q、 p_0 和 q_0 分别表示射线 Op 与 h、 ∂K 和 h_0 的交点。由于 $p \in C$，这些点沿射线的顺序为 $\langle O, q, p, p_0, q_0\rangle$。考虑经过这些点且平行于 h 的超平面，可得

$$\mathrm{ray}(p) \;=\; \frac{\|pp_0\|}{\|Op_0\|} \;\leq\; \frac{\|qp_0\|}{\|Op_0\|} \;\leq\; \frac{\|qp_0\| + \|p_0q_0\|}{\|Op_0\| + \|p_0q_0\|} \;=\; \frac{\|qq_0\|}{\|Oq_0\|} \;=\; \frac{\mathrm{dist}(h, h_0)}{\mathrm{dist}(O, h_0)} \;=\; \mathrm{wid}(C). \quad \square$$

有两种自然的方法，可以为任意点 $p \in K$ 关联一个帽。第一种是最小体积帽，即底面经过 p 且在所有此类帽中体积最小的帽。对于第二种方法，假设 $p \neq O$，并令 p_0 表示射线 Op 与 K 边界的交点。令 h_0 为 K 在 p_0 处的任意支撑超平面。取由经过 p 且平行于 h_0 的超平面所确定的帽 C 。如下述引理所示，这是包含 p 的最小宽度帽。

引理 2.7。对于任意 $p \in K \setminus \{O\}$，考虑上文定义的帽 C 。则 宽度(C) $=$ 射线(p) 并且， C 在所有包含 p 的帽中具有最小宽度。

证明。令 h 表示经过 p 且平行于 h_0 （如上文定义）的超平面。根据相似三角形，有

$$\mathrm{wid}(C) \;=\; \frac{\mathrm{dist}(h, h_0)}{\mathrm{dist}(O, h_0)} \;=\; \frac{\|pp_0\|}{\|Op_0\|} \;=\; \mathrm{ray}(p).$$

根据引理 2.6，对于任意包含 C' 的帽 p，射线(p) $\leq$ 宽度(C')，因此宽度(C) $\leq$ 宽度(C')。 $\square$

下一个引理给出了帽的绝对体积的一个简单下界和上界。

引理 2.8。设 C 是一个1-2-浅帽，令 $a =$ 面积(底面(C))，并令 w 表示 C 的绝对宽度。则 $aw/n \leq$ 体积(C) $\leq 2^{n-1}aw$。

证明。令 p 为 C 的顶点，并令 base(C) 表示其底面。令 $P =$ = conv(base(C) $\cup \{p\}$)。显然，$P \subseteq C$ 且 vol(P) $= aw/n$，由此得到下界。为证明上界，注意到 C 位于一个广义无限圆锥内，该圆锥的顶点为 O ，底面为 base(C)。由于 wid(C) $\leq \frac{1}{2}$ ，因此，任何由平行于 base(C) 的超平面截取 C 所得截面的面积，至多是 base(C) 面积的 2^{n-1} 倍。上界由初等几何得出。 $\square$

凸性的一个简单推论是，对于 $\lambda \geq 1$， C^λ 是将区域 C 以其顶点为中心按因子 λ 缩放后所得区域的子集。这引出了下面的引理。

引理 2.9。给定任意帽 C 和一个实数 $\lambda \geq 1$，体积(C^λ) $\leq \lambda^n$体积(C)。

凸性的另一个推论是，帽的包含关系在扩张下保持不变。这是对 [8] 中引理 4.4 的直接改写。

引理 2.10。给定两个帽 $C_1 \subseteq C_2$ 和一个实数 $\lambda \geq 1$, $C_1^\lambda \subseteq C_2^\lambda$。

以下引理是一个技术性结果，它表明，如果一条射线穿过宽度至少为 ε 的帽的底面内部，那么它也会穿过一个恰好宽度为 ε 、且包含于原帽中的帽的底面内部。

引理 2.11. 设 $0 < \varepsilon < 1$，且 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，其内部包含原点。设 r 是从原点射出的射线， D 是 K 的一个帽，其宽度至少为 ε ，且射线 r 与其底面的内部相交。那么存在一个宽度为 ε 的帽 $E \subseteq D$ ，使得射线 r 与其底面的内部相交。

证明. 设 p 是射线 r 与 K 的边界的交点。设 $F \subseteq D$ 是一个帽，其底面经过 p ，且平行于 D 的底面。现在分两种情况讨论。

若帽 F 的宽度小于 ε，则令 E 为宽度为 ε 的帽，它是将 F 的底面平行于自身平移（朝向 D的底面）得到的，如图 4(a) 所示）。显然 $E \subseteq D$，且满足引理中规定的条件。

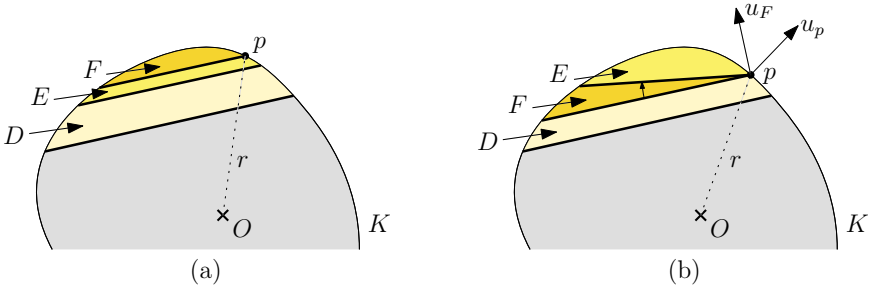


图4：引理的证明 2.11。

否则，如果帽的宽度 F 至少为 ε，那么直观地，我们可以绕 p旋转其底面（在此过程中缩小帽 F ），直到其宽度比 ε 小无穷小量（图 4(b)）。更正式地，设 u_F 表示 F底面的法向量，并设 u_p 表示在 K 处的（任意）曲面法向量 p （两者长度均为单位长度）。由于 p 位于边界上，与 u_p正交且经过 p 的帽宽度为零。由于 F 的宽度至少为 ε， $u_F \neq u_p$。

考虑由 u_F 和 u_p张成的二维线性子空间，我们从u_F 连续旋转到 u_p，并考虑经过 p 且与该向量正交的超平面。显然，相应帽的宽度从 $\mathrm{wid}(F)$ 连续变化到零。因此，必定存在一个角度，使帽的宽度比 ε小无穷小量。将该帽的底面平行于自身平移，即可扩展该帽，得到宽度为 ε的帽 E ，它满足引理中规定的所有条件。

□

2.4 对偶帽与圆锥

考虑对偶情形下帽的概念将很有用（例如参见 [10, 11]）。给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 和一个 z 位于 K外部的点，我们定义对偶帽： 相对于 K 和 z，记作 $\mathrm{dcap}_K(z)$，它是由经过 z 且不与 K的内部相交的（5）维超平面构成的集合（见图）。本文中， K 将是满维的，或比满维低一维。我们将对偶帽的极体定义为对偶帽中每个超平面的极体所构成的点集。

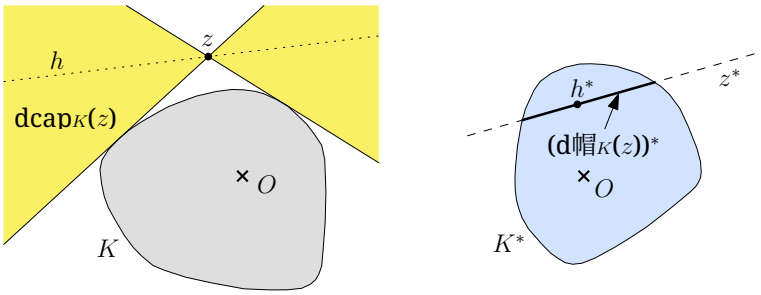


图5：一个对偶帽及其极体。

给定 z 位于 K 外部，并考虑由超平面 z^* 诱导的 K^* 的帽。根据极变换的标准性质，超平面 $h \in$ 属于 dcap$_K(z)$，当且仅当点 h^* 位于 $K^* \cap z^*$ 上。由此立即得到帽与对偶帽之间的如下关系。

引理 2.12。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含原点的满维凸体，并设$z \notin K$。那么 $(\text{dcap}_K(z))^* =$ 底面 (cap$_{K^*}(z^*)$)。

另一个有用的概念涉及由外部点诱导的圆锥。凸体 K 和点$z \notin K$ 自然定义两个无限凸锥。内锥记为 icone(K, z)，它是所有包含 K 且边界超平面经过 z 的半空间的交集（见图 11）。等价地，icone(K, z) 是满足射线 zp 与 K相交的点 p 的集合。外锥记为 ocone(K, z)，类似地定义为所有经过 z 且不包含 K 中任何点的半空间的交集（见图6）。显然，ocone(K, z) 是 icone(K, z) 关于 z 的反射。下面的引理表明，属于外锥与帽的包含关系通过对偶性联系起来。

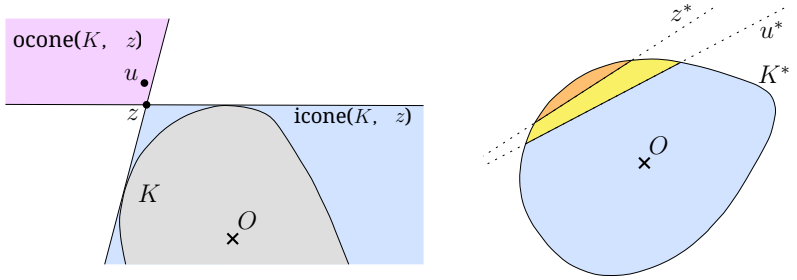


图6：内锥和外锥。

引理 2.13。 设 K 是一个凸体，且原点 O 位于其内部。那么 $u \in \text{ocone}(K, z)$ 当且仅当 帽$_{K^*}(z^*) \subseteq$ 帽$_{K^*}(u^*)$。

证明。 根据定义， $u \in$ ocone(K, z) 当且仅当任何将 z 与 K 分离的超平面 h 也将 u 与 K 分离。此外，根据极变换的标准性质，超平面h 将 z 与 K 分离，当且仅当点 $h^* \in$cap$_{K^*}(z^*)$。类似地，超平面 h 将 u与 K 分离，当且仅当点 $h^* \in$ cap$_{K^*}(u^*)$。因此，条件 $u \in$ ocone(K, z) 等价于条件 cap$_{K^*}(z^*) \subseteq$cap$_{K^*}(u^*)$。 □

2.5 麦克比斯区域

给定一个凸体 K、一个点 $x \in K$ 和一个缩放因子 $\lambda > 0$，麦克比斯区域 $M_K^\lambda(x)$ 定义为

$$M_K^\lambda(x) \;=\; x + \lambda((K-x) \cap (x-K)).$$

容易看出，$M_K^1(x)$是 K与 K关于 x的反射的交集，因此$M_K^1(x)$关于 x中心对称。实际上，它是以 x 为中心且包含于 K中的最大中心对称体。此外，$M_K^\lambda(x)$是$M_K^1(x)$以中心 x 为中心按比例因子 λ缩放得到的副本（见图 16 右侧）。当上下文已能明确凸体时，我们将省略下标 K 。为方便起见，我们定义 $M(x) = M^1(x)$。

下面我们给出若干引理，用以概括麦克比斯区域的标准性质。第一个引理表明，一个（收缩后的）麦克比斯区域可以作为与其相交的任意其他（收缩后的）麦克比斯区域的代理 [22, 35]。我们的版本采用了不同的参数，证明见 [9](引理 2.4)。

引理 2.14 K $\lambda \le \frac{1}{5}$ $x\ y \in K$ $M^\lambda\ x\ \cap$.. 设为一个凸体，且为任意 $M^\lambda\ y\ \neq \emptyset$ $M^\lambda\ y\ \subseteq M^{4\lambda}\ x$ 实数。如果，且满足 ()()，则 ()()。

以下引理适用于已知麦克比斯区域与 K 的帽相交的情况，并据此可得：对帽进行常数倍扩张后，便能完全包含该麦克比斯区域。第一个引理适用于收缩的麦克比斯区域，第二个则适用于具有任意缩放因子的麦克比斯区域。第一个引理的证明见 [8] (引理 2.5)，第二个则可由麦克比斯区域的定义直接推出。

引理 2.15. 设 K 为一个凸体。设 C 为 K 的一个帽，且 x 为 K 中的一个点，满足$C \cap M^{1/5}(x) \neq \emptyset$。则 $M^{1/5}(x) \subseteq C^2$。

引理 2.16. 设 K 是一个凸体，且 $\lambda > 0$。若 x 是 K的帽 C 中的一个点，则 $M^\lambda(x) \cap K \subseteq C^{1+\lambda}$。

缩小的麦克比斯区域中的点在许多方面都相似。例如，它们的射线距离相似。

引理 2.17. 设 K是一个凸体。若 x是 K中的一个$1/2$-浅点，且 $y \in M^{1/5}(x)$，则$\mathrm{ray}(x)/2 \le \mathrm{ray}(y) \le 2\mathrm{ray}(x)$。

证明。令 C_x 表示 x的最小宽度帽。由引理 2.7，wid(C_x) =ray(x)。此外，由引理 2.15，我们有 $M^{1/5}(x) \subseteq C_x^2$，因此 $y \in C_x^2$。由引理 2.6可得 ray(y) ≤wid(C_x^2) = 2wid(C_x)。因此 ray(y) ≤ 2ray(x)，这证明了第二个不等式。为证明第一个不等式，注意到除非 ray(y) ≤ $\frac{1}{4}$（因为 ray(x) ≤ $\frac{1}{2}$），否则结论显然成立。若 ray(y) ≤ $\frac{1}{4}$，考虑 y 的最小宽度帽 C_y。由引理 2.7，wid(C_y) = ray(y)。此外，由引理 2.15，我们有 $M^{1/5}(x) \subseteq C_y^2$，因此 $x \in C_y^2$。由引理 2.6可得 ray(x) ≤ wid(C_y^2) =2 wid(C_y)。因此 ray(x) ≤ 2ray(y)，证明完毕。 □

本节其余的引理将帽与其对应的麦克比斯区域联系起来。

引理 2.18 (B´ar´任何 [14])。 给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，设 C是 K的$1/3$-浅帽，且 p是底面(C)的质心。则 $C \subseteq M^{2n}(p)$。

引理 2.19。 设 $0 < \beta < 1$ 为任意常数。设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为中心良好的凸体， $p \in K$，且 C 为与 p相关联的最小体积帽。如果 C 包含原点或宽度$(C) \geq \beta$，则体积$_K(M(p)) \geq 2^{-O(n)}$。

证明。 我们声称， K 满足相对于 p的 Winternitz 性质。注意，这等价于声称 vol$_K(C) \geq 2^{-O(n)}$。

我们分两种情况讨论。首先，假设 C 包含原点。由于 K 中心良好，根据引理 2.2， K 满足相对于原点的 Winternitz 性质。因此，vol$_K(C) \geq 2^{-O(n)}$。否则，若 C 不包含原点，那么由于 C 的宽度至少为 β，扩展帽 $C^{1/\beta}$ 包含原点。根据引理 2.9，vol$(C^{1/\beta}) \leq 2^{O(n)}vol(C)$。再次利用 K 满足相对于原点的 Winternitz 性质这一事实，可得 vol$_K(C^{1/\beta}) \geq 2^{-O(n)}$。因此，在这两种情况下，均有 vol$_K(C) \geq 2^{-O(n)}$，从而证明了该结论。

由于 K 关于 p满足 Winternitz 性质，根据引理 2.2，它必定关于 p满足 Kovner-Besicovitch 性质。因此，体积$_K(M(p))$ =体积$_K((K-p) \cap (p-K)) \geq 2^{-O(n)}$，证毕。

□

引理 2.20。 给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，设 C 是 K的1 3-浅帽，并设 p 是底面(C)的质心。我们有

$$2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(C) \leq \text{vol}(M(p)) \leq 2 \cdot \text{vol}(C).$$

证明。 第二个不等式显然成立，因为一半的 $M(p)$ 位于 C内。为证明第一个不等式，设 B = 底面(C)，设 a = 面积(B)表示其$n-1$维体积，并设$B' = M(p) \cap B$。将 p 视为坐标系的原点，根据麦克比斯区域的定义， $B' = B \cap -B$。应用引理 2.2 (到包含 B的超平面)可得面积$(B') \geq a/2^{O(n)}$。

令 x 表示 C的顶点，并令 x' 表示线段 px 中包含于$M(p)$ 的最远点。根据引理 2.18，$\|px'\| \geq \|px\|/2n$。由凸性，广义锥 $P = \text{conv}(B' \cup \{x'\}$包含于 $M(p)$ 内。令 w 表示 C的绝对宽度，则此圆锥的高度至少为 $w/2n$。因此

$$\text{vol}(M(p)) \geq \text{vol}(P) \geq \frac{\text{area}(B') \cdot w/2n}{n} \geq \frac{(a/2^{O(n)}) \cdot w/2n}{n} = \frac{aw}{n^2 2^{O(n)}}.$$

根据引理 2.8，体积$(C) \leq 2^{n-1}aw$，因此，

$$\text{vol}(M(p)) \geq 2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(C),$$

正如所需。 □

推论 2.21. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸体， $p \in K$，且 C 是与 p 相关联的最小体积帽。我们有

$$2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(C) \leq \text{vol}(M(p)) \leq 2 \cdot \text{vol}(C).$$

证明。第二个不等式的成立理由与引理 2.20 相同。为证明第一个不等式，回顾最小体积帽的一个众所周知的性质： p 是其关联的最小体积帽 [35] 的底面的质心。将 K 的质心视为原点，我们分两种情况讨论。若 C 是 (1/3)-浅的，则由引理 2.20 可得该推论。否则，C 包含原点，或者其宽度至少为 $1/3$。注意到 K 相对于质心中心良好（引理 2.2），并应用引理 2.19，可得体积 $_K$($M(p)$) $\geq 2^{-O(n)}$。也就是说，体积($M(p)$) $\geq 2^{-O(n)}$ 体积(K) $\geq 2^{-O(n)}$ 体积(C)，证毕。

□

2.6 相似帽

凸体的麦克比斯区域 K，更具体地说，其收缩的麦克比斯区域，通过如下性质提供了一种仿射不变的点间接近程度的概念：两个点都位于同一个收缩的麦克比斯区域内。我们希望定义一种类似的、仿射不变的帽间接近程度概念。我们称两个帽 C_1 和 C_2 为 λ-相似，当$\lambda \geq 1$满足 $C_1 \subseteq C_2^\lambda$ 且 $C_2 \subseteq C_1^\lambda$ 时（见图7（a））。若两个帽对于某个常数 λ是 λ-相似的，我们就称这两个帽相似。

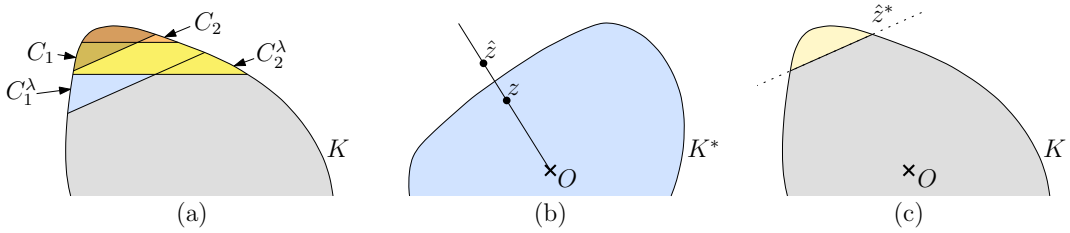


图7：相似帽和 ε-代表帽。

自然可以猜想，这两种相似性概念通过对偶性相互关联。为建立这种关系，考虑以下映射。取一点 $z \in K^*$。在射线$z \notin K^*$ 上取一点$\hat{}$ Oz ，使得 ray($\hat{}z$) $= \varepsilon$ （见图7（b））。对偶超平面$\hat{}z^*$ 与 K相交，从而确定一个帽，我们称之为 z的 ε-代表帽（见图7（c））。本节的主要结果是引理 2.23，它表明，位于同一收缩的麦克比斯区域内的点所对应的代表帽彼此相似。在证明该结果之前，我们先介绍一个技术引理。

引理 *2.22.* 设 $\alpha \leq \frac{1}{8}$。设 $y \in K^*$ 是一个 α-浅点。考虑从原点出发、经过 $M^{1/5}$ (y) 的两条射线 r 和 r' （见图 8）。设 $z \notin K^*$ 是 r 上的一个 α-浅点，且 $u \notin K^*$ 是 r' 上满足 ***ray(u)*** > 4 ***ray(y)*** $+ 2$ ***ray(z)*** 的一点。那么 ***cap$_K$(z*)*** $\subseteq$ ***cap$_K$(u*)***。

证明。设 h 是一个经过 z 且不与 K^*相交的超平面。我们将证明h 将 u 与 K^*分离。这将意味着 $u \in \text{ocone}(K^*, z)$，进而由引理 2.13可得结论。

令 p为 $r \cap M^{1/5}(y)$ 中的任意一点。由引理 2.17，可得射线(p) $\leq$ 2 射线(y)。考虑一个超平面 h'，它与 h 平行且经过 p （见图 9）。令 C 为由 h'所诱导的帽。令 t 表示射线 r 与 ∂K^*的交点，则有

$$\text{wid}(C) \leq \frac{\|pz\|}{\|Oz\|} = \frac{\|pt\| + \|tz\|}{\|Oz\|} \leq \frac{\|pt\|}{\|Ot\|} + \frac{\|tz\|}{\|Oz\|} = \text{ray}(p) + \text{ray}(z) \leq 2\,\text{ray}(y) + \text{ray}(z). \quad (1)$$

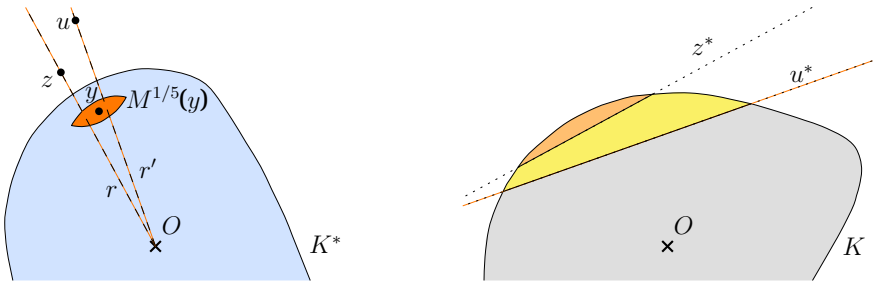


图 8：引理的陈述 2.22。

由于 C与 $M^{1/5}(y)$ 相交，根据引理 2.15，帽 C^2 包含 $M^{1/5}(y)$。由于 y和 z对于 $\alpha = \frac{1}{8}$ 是α-浅的，根据公式 (1)，有 $\mathrm{wid}(C) \le 3/8$。由此可得 $\mathrm{wid}(C^2) < 1$，因此 O位于 C^2之外。令 h'' 表示经过 C^2底面的超平面。由于 r' 与$M^{1/5}(y)$ 相交，因此 r' 必与 h'' 和 h相交。令 z' 表示 r' 与 h的交点。我们将证明射线$(z') \le 4$射线$(y)+2$射线(z)。回想引理陈述中，射线$(u) > 4$射线(y) $+ 2$射线(z)，这就意味着 h 将 u 与 K^*分离，证毕。

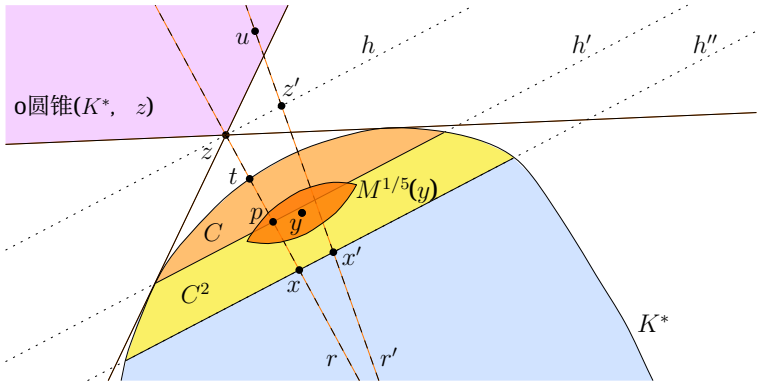


图 9：引理的证明2.22。

设 x 和 x' 分别表示射线 r 和 r'与 h''的交点。由相似三角形可得射线(z') $\le \|x'z'\|/\|Oz'\| = \|xz\|/\|Oz\|$。注意， h'' 与h' 之间的距离不大于 h' 与 h之间的距离，因此 $\|xz\| \le 2\|pz\|$。结合式（1），可得

$$\mathrm{ray}(z') \le \frac{\|xz\|}{\|Oz\|} \le \frac{2\|pz\|}{\|Oz\|} \le 2(2\,\mathrm{ray}(y) + \mathrm{ray}(z)) = 4\,\mathrm{ray}(y) + 2\,\mathrm{ray}(z),$$

至此，证明完成。 □

现在我们来证明本节的主要结果。

引理 2.23. 设 $\varepsilon \le \frac{1}{16}$，并设 $y \in K^*$满足 射线$(y) \le \varepsilon$。对于任意两个点 $x, z \in M^{1/5}(y)$，它们各自的 ε-代表帽彼此 *8*-相似。

证明。设 x_1 和 z_1 是位于 K^* 外部的点，分别在射线 Ox 和 Oz上，且二者的射线距离均为 ε （见图 10(a)）。令 C_x 和 C_z 分别表示 x 和 z的 ε-代表帽（见图 10(b)）。回忆一下， C_x 和 C_z 分别是 K 中由 x_1^* 和 z_1^*诱导的帽。根据极变换的标准性质，wid(C_x) =ray(x_1) $= \varepsilon$，类似地，wid(C_z) $=$ ray(z_1) $= \varepsilon$。设 x_2 和 z_2 是位于 K^* 外部的点，分别在射线 Ox和 Oz上，且二者的射线距离均为 8ε （见图 10）。根据我们对 ε的界，这些射线距离至多为 1 2。显然，x_2^* 和– z_2^* 分别在 K中诱导出帽 C_x^8 和 C_z^8。

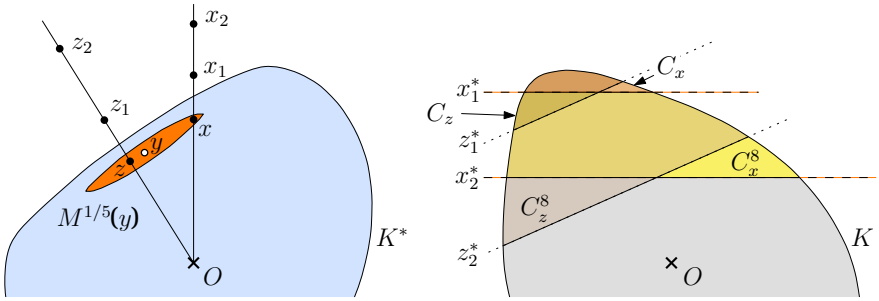


图 10：引理证明2.23。

由于射线(x_2) $= 8\varepsilon$，射线(y) $\leq \varepsilon$ 且射线(z_1) $= \varepsilon$，我们有射线(x_2) > 2 射线(z_1) $+ 4$ 射线(y)。由引理 2.22 可知 $C_z \subseteq C_x^8$。类似地可得 $C_x \subseteq C_z^8$。因此 C_x 和C_z 是 8-相似的，证毕。

□

下一个引理表明，即使射线距离被一个常数因子改变，相似性仍然成立。

推论 2.24。 设 $\varepsilon \leq \frac{1}{16}$，并设 $y \in K^*$ 满足 射线(y) $\leq \varepsilon$。设 C_x 是 K 的一个帽，满足 $\varepsilon/2 \leq$ 宽度(C_x) $\leq 2\varepsilon$，且从原点出发、垂直于 C_x 底面的射线与 $M^{1/5}(y)$相交。那么，帽 C_x 与任意点 $z \in M^{1/5}(y)$ 的 ε-代表帽 C_z 是 *16*-相似的。

证明。令 r 表示从原点沿着垂直于 C_x底面的方向发出的射线。令 x 为位于 $r \cap M^{1/5}(y)$ 中的任意一点。令 C'_x 为 x的 ε-代表帽。根据引理 2.23，帽 C'_x 和C_z 是 8-相似的。此外，由我们对点 x 的选择可知，帽 C_x 和 C'_x 具有平行底面，且它们的宽度之比至多为 2。因此， C_x 和 C'_x 是 2-相似的。利用 C'_x 和 C_z 是 8-相似这一事实，并应用引理 2.10，不难看出 C_x 和 C_z 是 16-相似的。

□

3 极体中的帽：Mahler 关系

如第1.2节所述，我们分析的一个核心要素，是建立 K 中的帽与 K^*中对应帽的体积之间的马勒型倒数关系。虽然我们的新结果在思路上与 Arya等人 [6] 以及 Nasz´odi 等人 [52], 的结果相似，但它比两者都更强。与 [6], 相比，马勒体积对维数的依赖从$2^{-O(n \log n)}$ 改进为 $2^{-O(n)}$；这在高维情形下至关重要，能将形如 $n^{O(n)}$ 的项缩减为 $2^{O(n)}$。此外，我们的结果形式更加简洁，且具有仿射不变性。

与 Nasz´odi 等人 [52], 的工作相比，后者仅关注从 K的边界采样，而我们的结果适用于宽度各异的帽，因此也适用于从 K的内部采样。这一点对于我们考虑的应用同样至关重要。我们的改进得益于更精细的几何分析和仿射不变方法。

为使表述具体，我们将本节的引理表述为适用于任意方向，并称该方向为“垂直方向”；任何与此方向正交的超平面都称为“水平”超平面。由于该方向是任意的，因此不失一般性。

3.1 对偶帽与差体

本小节致力于介绍我们分析中的一个关键构造。给定一个满维凸体 K 和一点 $z \notin K$，下面的引理确定了一个 $(n-1)$ 维凸体 Υ，使得 $\mathrm{dcap}_\Upsilon(z) = \mathrm{dcap}_K(z)$；其中，$\Upsilon$ 与某个 ε 宽帽的底面 B 有关，具体而言，Υ 可以夹在 B 与差体 B的一个缩放副本之间。

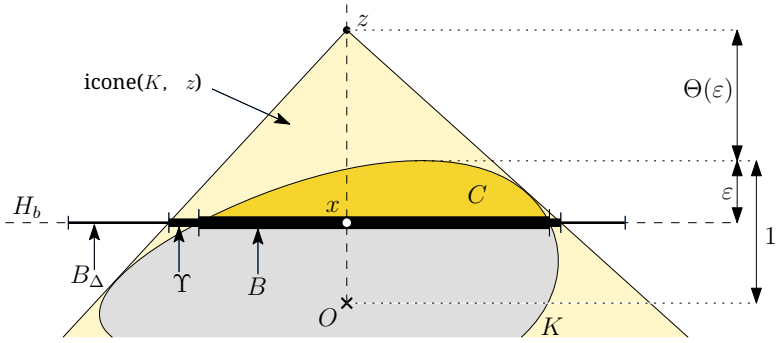


图11：引理 3.1的陈述。

引理 *3.1*。设 $\varepsilon \le \frac{1}{8}$。设 K 为一个凸体，原点 O 位于其内部。设 $z \notin K$为从原点沿垂直方向向上的射线上的一点，使得 $\mathit{ray}(z) = 2\varepsilon$。考虑原点上方一个宽度为 ε 的帽 C，其底面 B 与 Oz 相交且为水平的。令 H_b 为经过底面 B的超平面，并令 $\Upsilon = \mathit{icone}(K, z) \cap H_b$。令 x 表示 B 与 Oz 的交点，并令 $B_\Delta = 5\Delta(B) + x$。则 $B \subseteq \Upsilon \subseteq B_\Delta$ （见图 *11*）。

证明。 根据定义， $K \subseteq \mathrm{icone}(K,\ z)$，因此 $B \subseteq \Upsilon$。所以，只需证明 $\Upsilon \subseteq B_\Delta$。为此，我们将证明 $K \subseteq \mathrm{icone}(B_\Delta,\ z)$。

令 a 表示 C 的一个顶点，并令 a' 为将 a 正交投影到Oz 上得到的点（见图 12）。不失一般性，假设 $\|Oa'\| = 1$。注意， $\|xa'\| = \varepsilon$，其中 x 是射线 Oz 与帽 C的底面的交点。容易验证 $\varepsilon \le \|a'z\| \le 3\varepsilon$。

在本证明的其余部分中，方便起见，我们设想原点位于 x。我们的策略是证明 $C \subseteq \mathrm{icone}(2(1+2\varepsilon)B, z)$ 和 $K \setminus C \subseteq \mathrm{icone}(4(1+2\varepsilon)\Delta(B)\ z)$。由于 B包含原点，因此很容易得出 $B \subseteq \Delta(B)$。这意味着 $K \subseteq \mathrm{icone}(4(1+2\varepsilon)\Delta(B)\ z) \subseteq \mathrm{icone}(5\Delta(B)\ z)$，因为 $\varepsilon \le \frac{1}{8}$。根据 B_Δ的定义，这就完成了证明。

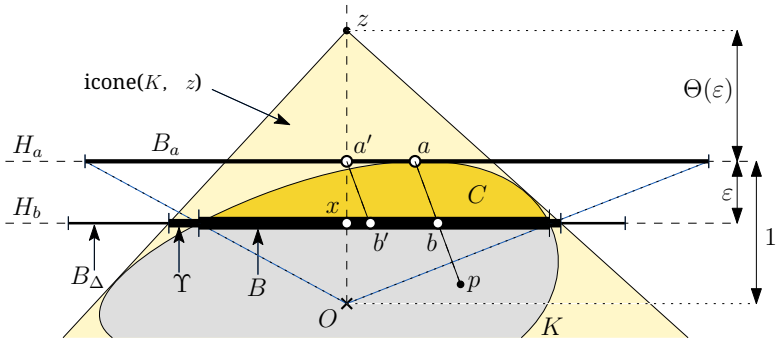


图12：引理的证明 3.1。

首先，我们将证明 $C \subseteq \text{icone}(2(1+2\varepsilon)B, z)$。由凸性可知，$C$ 包含在 $\text{icone}(B, O)$ 的截断部分中，该部分位于超平面 H_b 与其上方、与之平行且距离为 ε 的超平面之间（记作 H_a）。注意，$\text{icone}(B, O) \cap H_a$ 是一个 $(n-1)$ 维凸体，它由 B 以 x 为中心按比例因子 $1/(1-\varepsilon)$ 缩放，再沿垂直方向向上平移 ε而得到。将此凸体记作 B_a。（严格地说，$B_a = (1/(1-\varepsilon))B + a'$。）容易看出$C \subseteq \text{icone}(B_a, z)$。由于 $\|zx\| \leq 2\|za'\|$，可得 $\text{icone}(B_a, z) \cap H_b \subseteq 2(1/(1-\varepsilon))B$。因此$C \subseteq \text{icone}(2(1/(1-\varepsilon))B, z) \subseteq \text{icone}(2(1+2\varepsilon)B, z)$，其中在最后一个包含关系中，我们用到了 $\varepsilon \leq \frac{1}{8}$ 这一事实。

剩下要证明 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(4(1+2\varepsilon)\Delta(B)\ z)$。由凸性可知，$K \setminus C \subseteq \text{icone}(B, a)$。定义 $t = a' - a$ 和 $B^+ = \text{conv}(B \cup (B+t))$。我们声称 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(B^+, a')$。为证明这一点，任取 $K \setminus C$ 中的点 p。由于 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(B, a)$，因此 ap 与底面 B相交；设 b 为该交点。由于 $b \in B$，我们有 $b \in B^+$。定义 $b' = b + t$。显然 $b' \in B + t$，因此 $b' \in B^+$。注意，点 b、b'、a'、a 构成一个平行四边形（因为$b' - a' = b - a$）。根据初等几何，p 也位于该平行四边形所在的二维平面内，并且 $\overline{a'p}$ 与 bb'相交。由于 b、$b' \in B^+$ 且 B^+ 是凸的，因此 bb' 包含于 B^+。于是 $\overline{a'p}$ 与 B^+相交，这意味着 $p \in \text{icone}(B^+, a')$。由此可得 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(B^+, a')$，证毕。

接下来，考虑将 $\text{icone}(B^+,\ a')$ 沿垂直方向向上平移至 z 后得到的圆锥。显然，所得圆锥包含 $K \setminus C$，且由于 $\|zx\| \leq 4\|a'x\|$，可知该圆锥与 H_b 的交集包含于 $4B^+$。因此 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(4B^+,\ z)$。

为完成证明，我们需要建立 B^+ 与 $\Delta(B)$ 之间的关系。具体而言，我们将证明 $B^+ \subseteq (1+2\varepsilon)\ \Delta(B)$。回顾一下，$B^+ = \text{conv}(B \cup (B+t))$。根据我们之前的说明，$a \in B_a$，因此 $-t = a - a' \in (1/(1-\varepsilon))\ B$。由此可得，$B + t \subseteq (1/(1-\varepsilon))\ B - (-t) \subseteq \Delta((1/(1-\varepsilon))\ B)$，其中第一个包含关系显然成立，第二个则由差体的定义直接得出。此外，$B \subseteq \Delta((1/(1-\varepsilon))\ B)$ 显然成立。由差体的凸性可得，$B^+ \subseteq \Delta((1/(1-\varepsilon))\ B)$。因此，$B^+ \subseteq (1/(1-\varepsilon))\ \Delta(B) \subseteq (1+2\varepsilon)\ \Delta(B)$。回想起$K \setminus C \subseteq \text{icone}(4B^+,\ z)$，可得 $K \setminus C \subseteq \text{icone}(4(1+2\varepsilon)\ \Delta(B)\ z)$，至此证明完成。 □

3.2 原体与极体中的帽之间的关系

为了建立 K 和 K^*的帽体积之间的马勒型关系，考虑低一维空间中的投影将有所帮助， $n-1$。我们将用到 [6] 中一个结果的特殊情形（引理 3.1）。考虑一个凸体 K，它位于一个（$n-1$）维超平面上，以及一个点 z ，它位于该超平面上与原点相反的一侧（见图13）。相对于 K 的对偶帽的极体 z 是超平面$n-1$上的一个（ z^*）维凸体。令 G 表示这个对象，以下引理表明，如果我们将 K 和 G 都投影到一个适当的（$n-1$）维超平面上，那么 G 在相差一个缩放因子的意义下是 K 的极体。

引理 *3.2*（*Arya* 等人 [6]）。设 $z \in \mathbb{R}^n$ 是一条从原点 O 出发的竖直射线上的点，设 K 是一个（$n-1$）维凸体，其内部与线段 Oz 在某点 x 相交。此外，假设 K 位于一个与 Oz 正交的超平面上。令 $G = (d\text{帽}_K(z))^*$ ，并令 t 为从 O 出发的竖直射线与 z^* 的交点。那么 $G - t = \alpha(K-x)^*$，其中$\alpha = \|xz\|/\|Oz\|$。

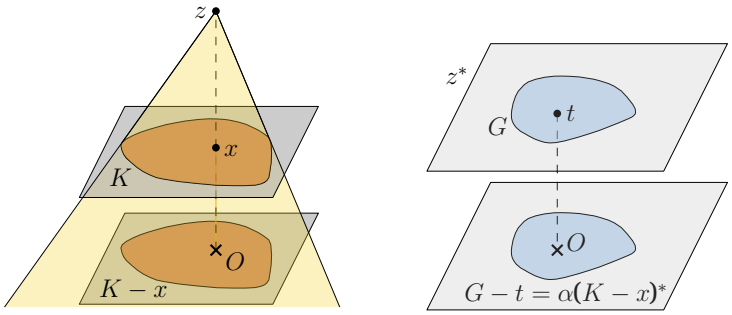


图 13：引理的陈述 3.2。

下面的引理描述了 K 中的帽与其极体 K^* 中的帽之间的对应关系，并建立了这些帽的体积之间关键的马勒型关系。

引理 3.3. 设 $0 < \varepsilon \le \frac{1}{8}$，并设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个中心良好的凸体。设 C 是 K的一个帽，其宽度至少为 ε。考虑一条从原点出发、垂直于 C底面的射线，并设 D 是 K^* 的一个帽，其宽度至少为 ε，且该射线与其底面的内部相交（见图 *14*）。则

$$\mathrm{vol}_K(C) \cdot \mathrm{vol}_{K^*}(D) \;\ge\; 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1}.$$

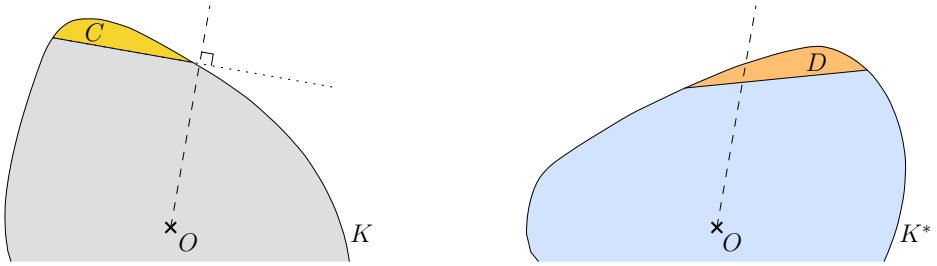


图 14：引理陈述3.3。

证明。设 C' 是一个帽，其宽度为 2ε，底面平行于 C 的底面，且与 C位于原点的同一侧。显然，可以通过将 C 的底面平行于自身平移来得到这样的帽。注意到 $C' \subseteq C^2$，因此根据引理 2.9，可得 vol(C') $\leq 2^{O(n)} \cdot$vol(C)。令 r表示极空间中的一条射线，它从 K^* 的原点出发，方向垂直于 C 的底面（见图 15）。回想一下，r 与 D底面的内部相交。根据引理 2.11，我们可以找到一个帽 $D' \subseteq D$，其宽度为 ε，且射线 r 与 D'底面的内部相交。现在很容易看出，只需证明将 C 和D 分别替换为 C' 和 D' 时引理成立即可。为方便起见，在本证明余下部分中，我们将用 C 和 D 分别代替 C' 和 D'。

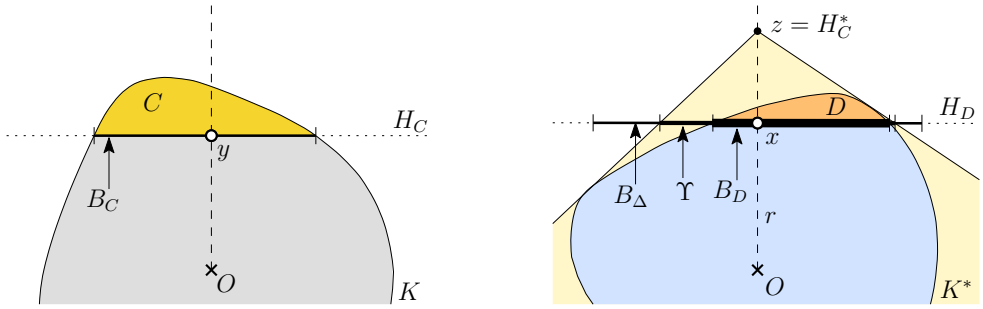


图 15：引理 3.3的证明。

由于本引理中考察的乘积是仿射不变的，我们将应用适当的线性变换来简化后续分析。具体而言，我们在极空间中应用一个线性变换，使 D 的底面变为水平，同时射线 r 垂直向上。在原空间中，这一变换会使帽 C 的底面变为水平（因为它是射线 r 上一点的极体），这一点显而易见。总而言之，变换之后，经过帽 C 和 D 底面的超平面均为水平且位于原点上方，并且作为相对测度，两帽的宽度均保持不变。此外，极空间中的射线 r 垂直向上，并与 D 底面的内部相交。再经过均匀缩放后，我们可以假设原点与平行于帽 C 底面的支撑超平面之间的绝对距离为单位长度。

令 B_C 表示帽 C 的底面，H_C 表示经过 B_C 的超平面。此外，令 B_D 表示帽 D 的底面，H_D 表示经过 B_D 的超平面。定义 $z = H_C^*$。注意，z 位于 K^* 外部，在从原点垂直向上的射线上，并且射线 (z) $=$ wid(C) $= 2\varepsilon$。由引理 2.12，$B_C =$ (d帽$_{K^*}$(z))*。定义 $\Upsilon =$ i圆锥(K^*, z) $\cap H_D$。显然，d 帽 $_{K^*}$(z) =d 帽 τ(z)。因此，$B_C =$ (d 帽 τ(z))*。

令 y 表示从 O 出发的竖直射线与 B_C的交点，并令 x 表示从 O 出发的竖直射线与 B_D的交点。因此，在本证明中，我们将y 视为原空间中的原点，并将 x 视为极空间中的原点。应用引理3.2（在该引理中取 K 为 Υ），可得 $B_C = \alpha\Upsilon^*$，其中 $\alpha = \|xz\|/\|Oz\|$。注意到B_C是（$n-1$）维的，且 $\alpha = \Theta$（ε），可得

$$\text{area}(B_C) \;\geq\; 2^{-O(n)}\varepsilon^{n-1} \cdot \text{area}(\Upsilon^*).$$

由引理2.8，我们有 $\text{vol}(C) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon \cdot \text{area}(B_C)$ 和 $\text{vol}(D) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon \cdot \text{area}(B_D)$。因此，

$$\text{体积}(C) \cdot \text{v}\ \text{ol}(D) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^2 \cdot \text{area}(B_C) \cdot \text{area}(B_D) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1} \cdot \text{area}(\Upsilon^*) \cdot \text{area}(B_D). \quad (2)$$

由引理 3.1，$\Upsilon \subseteq B_\Delta$，其中 $B_\Delta = 5\Delta(B_D)$。回顾引理 2.1 中的结论，面积$(\Delta(B_D)) \leq 4^{n-1}$ ·面积(B_D)，可得

$$\text{area}(\Upsilon) \leq \text{area}(B_\Delta) = 5^{n-1} \cdot \text{area}(\Delta(B_D)) \leq 5^{n-1} \cdot 4^{n-1} \cdot \text{area}(B_D) \leq 2^{O(n)} \cdot \text{area}(B_D).$$

将此界代入公式（2），得到

$$\text{vol}(C) \cdot \text{vol}(D) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1} \cdot \text{area}(\Upsilon^*) \cdot \text{area}(\Upsilon) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1} \cdot \omega_{n-1}^2,$$

其中，最后一步应用了引理2.5 对马勒体积取下界。由于 K中心良好，由引理 2.2 可知 K 满足 Santaló 性质，即，体积(K) ·体积$(K^*) \leq 2^{O(n)} \cdot \omega_n^2$。回顾第 ω_n 2.2 节中 $\omega_{n-1}/\omega_n = \Theta(\sqrt{n}$的定义，可得。因此

$$\text{vol}_K(C) \cdot \text{vol}_{K^*}(D) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1},$$

正如所需。 □

最后，我们给出本节的核心结论。此引理表明，前一个引理中关于体积乘积的界在射线邻域内仍然成立，具体而言，对任何与该射线相交的收缩麦克比斯区域都成立。

引理 3.4. 设参数 ε、凸体 K 和凸体 C 的帽 K 如引理 *3.3*中所定义。假设从原点发出且垂直于 C 底面的射线 r 与一个麦克比斯区域 $M^{1/5}(x)$相交，其中 K^*，且 射线$(x) = \varepsilon$ *(*见图 *16)*。那么

$$\text{vol}_K(C) \cdot \text{vol}_{K^*}(M^{1/5}(x)) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1}.$$

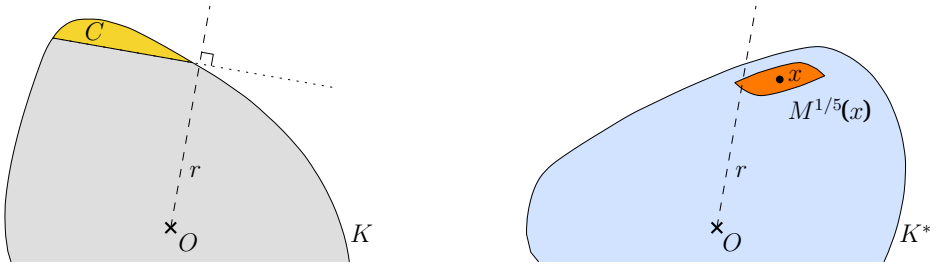


图 16：引理 3.4 的陈述。

证明。设 y 是射线 r 与 $M^{1/5}(x)$ 的交点，并令 D 表示包含 y 的 K^* 的最小体积帽。由于 $M^{1/5}(y) \cap M^{1/5}(x) \neq \emptyset$，根据引理 2.14，可得 $M^{1/5}(y) \subseteq M^{4/5}(x)$。因此，$\text{vol}(M^{1/5}(x)) \geq 2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(M^{1/5}(y))$。此外，根据推论 2.21，可得 $\text{vol}(M^{1/5}(y)) \geq 2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(D)$。因此，$\text{vol}(M^{1/5}(x)) \geq 2^{-O(n)} \cdot \text{vol}(D)$。为完成证明，只需证明引理陈述中的不等式，其中以 D 代替 $M^{1/5}(x)$。根据引理 2.17，可得 $\text{ray}(y) \geq \text{ray}(x)/2$；根据引理 2.6，可得 $\text{wid}(D) \geq \text{ray}(y)$。因此，$\text{wid}(D) \geq \text{ray}(x)/2 = \varepsilon/2$。对帽 C 和 D 应用引理 3.3，即可得到所需的不等式。

□

4 凸体的覆盖

如前所述，在近似最近向量问题的求解中，我们采用基于麦克比斯区域的 $(c,\ \varepsilon)$-覆盖改造。由于我们的构造将涉及对 K 的不同区域的覆盖进行组合，我们按以下受限方式定义覆盖。设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，Λ 为 $\text{int}(K)$ 的任意子集，$c \geq 2$ 为任意常数。定义 Λ- 有限制 c- 覆盖 为一族 $\mathcal{Q}$ 凸体，这些凸体覆盖 Λ，且每个凸体以其质心为中心进行 c 倍扩张后，所得集合包含于 K 中。

我们的覆盖将基于麦克比斯区域。给定 $X \subseteq K$，定义 $\mathscr{M}_K^{\lambda}(X) = \{M_K^{\lambda}(x) : x \in X\}$。将 $(K,\ \Lambda,\ c)$-*MNet*定义为点 $X \subseteq \Lambda$ 的任意极大集，使得收缩的麦克比斯区域 $\mathscr{M}_K^{1/4c}(X)$ 两两不相交。利用麦克比斯区域的基本性质，我们可以通过适当扩张得到一个覆盖，如下述引理所示；该引理总结了 M网的性质。

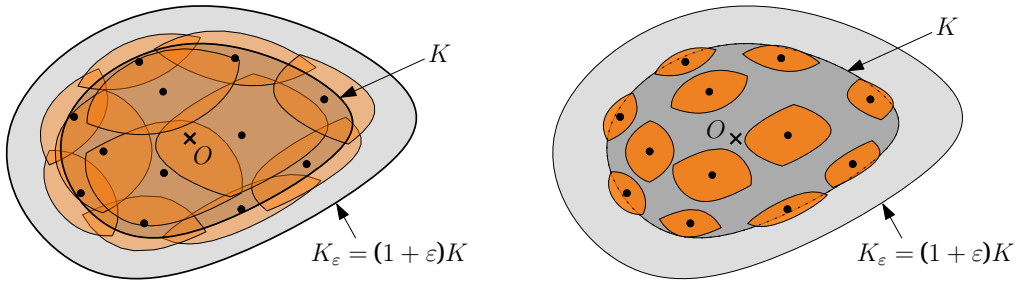
引理 4.1。给定凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \text{int}(K)$，以及 $c \geq 2$，一个 (K, Λ, c)-***MNet*** X 满足以下性质：

(a) （装填） $\mathscr{M}_K^{1/4c}(X)$ 的元素两两不相交

(b) *(覆盖)* $\mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 的并集覆盖了 Λ。(c) *(缓冲)* $\mathscr{M}_K(X)$ 的并集包含于 K 内。

证明。（a）是定义的直接推论。（c）由麦克比斯区域的基本性质得出。为证明（b），设 $\lambda = 1/c$，并任取一点 $y \in \Lambda$。由极大性可知，存在 $x \in X$ 使得 $M^{\lambda/4}(x)$ 与 $M^{\lambda/4}(y)$ 相交。由引理 2.14，$M^{\lambda/4}(y) \subseteq M^{\lambda}(x)$，这意味着 $y \in M^{\lambda}(x)$。 □

注意，性质 (b) 意味着，如果 X 是一个 (K, Λ, c)-MNet，那么 $\mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 是一个 Λ-limited$c$-覆盖。此外，回想起 $K_\varepsilon = (1+\varepsilon)K$，如果 X 是一个 (K_ε, K, c)-MNet，那么 $\mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 是 K 的一个 (c, ε)-覆盖（见图 17）。



(a) (b)

图 17: （a）由麦克比斯区域构成的 c, ε-覆盖，其中 K。（b）对应的不相交麦克比斯区域的极大集。

4.1 实例最优性

本节将证明，一个 K_ε 自然会生成一个实例最优$(2,\ \varepsilon)$-覆盖，其大小至多为任意一个，ε)-覆盖 K 大小的 $2^{O(n)}$倍（引理 4.4 和定理 4）。值得注意的是，无论原点位于 int(K) 中的何处，这一结论都成立。换言之，这一结果不需要任何中心性假设。

我们先给出两个引理，它们是对 [53]中引理的直接改编。第一个引理表明，将覆盖限制为 $2^{O(n)}$ 的 c-覆盖来覆盖中心对称凸体，只会带来 $2^{O(n)}$ 的规模惩罚。第二个引理表明，扩张因子发生常数级变化，也会导致类似的惩罚。

引理 4.2. 设 $c \geq 2$ 为一个常数。设 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个质心位于原点的凸体。存在一组 $2^{O(n)}$ 中心对称凸体，它们共同覆盖 Q，且这些凸体中任意一个的中心 c-扩张都包含于 $2Q$内。

证明。设 $R = M_Q(O) = Q \cap -Q$，并设 $R' = \frac{1}{c}R$和 $R'' = \frac{1}{2c}R$。显然，这些凸体都关于原点中心对称。由引理 2.2，体积(R) $\geq 2^{-O(n)}$体积(Q)，又由于 c 是一个常数，R' 和 R'' 的体积也有类似的界。设 $X \subset Q$ 是一个极大离散点集，使得平移集 $X \oplus R'' = \{x + R'' :\ x \in X\}$ 两两不相交。我们将证明凸体 $X \oplus R'$ 满足该引理。

为确立扩张性质，注意对所有 $x \in X$, $x + cR' = x + R \subseteq Q \oplus R \subseteq 2Q$ 均成立。为证明大小界，由于彼此不相交，我们有

$$|X| \cdot \mathrm{vol}(R'') \ \leq \ \mathrm{vol}(2Q) \ \leq \ 2^{O(n)}\,\mathrm{vol}(Q) \ \leq \ 2^{O(n)}\,\mathrm{vol}(R''),$$

因此 $|X| = 2^{O(n)}$。最后，为证明覆盖，任取 $y \in Q$。由极大性可知，存在 $x \in X$，使得 $x+R''$ 与 $y+R''$ 相交。由于 $c \geq 2$，可得 $y \in x+2R'' = x+R'$。 □

引理 4.3。设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，设 $\Lambda \subset \mathrm{int}(K)$，并设 $c \geq 2$ 为一个常数。设 $\mathcal{Q}$ 是关于 K 的一个 Λ-受限 c-覆盖。对于任意常数 $c' \geq 2$，存在一个关于 K 的 Λ-受限 c'-覆盖，由中心对称凸体组成，其大小至多为 $2^{O(n)}|\mathcal{Q}|$。

证明。根据引理 4.2，我们可以将每个凸体 $Q \in \mathcal{Q}$ 替换为一组 $2^{O(n)}$ 中心对称凸体，它们共同覆盖 Q，并且这些凸体中任意一个的 c'-扩张都包含于 Q（以其质心为中心的）2-扩张之内。容易看出，由此得到的凸体集合是一个相对于 Λ-受限 c'-覆盖，且其大小符合 K 所要求的条件。 □

现在我们可以证明，(K，Λ，c)-MNet 可用于生成实例最优受限覆盖。

引理 4.4。设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，$\Lambda \subset \mathrm{int}(K)$，且 $c \geq 2$ 为一个常数。设 X 为一个 (K, Λ, c)-*MNet*，且 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 为相对于 K的关联 Λ-受限 c-覆盖。给定任意相对于 K的 Λ-受限 c-覆盖 $\mathcal{Q}$，$|\mathscr{M}| \leq 2^{O(n)}|\mathcal{Q}|$。

证明。根据引理 4.3，存在一个关于 Λ-受限的 5-覆盖，其由至多 K 个$2^{O(n)}|\mathcal{Q}|$ 中心对称凸体组成。令 $\mathcal{Q}'$ 表示该覆盖，并令 Y 表示这些凸体的

中心集合。任取一个 $Q \in \mathcal{Q}'$，并令 y 表示其中心。根据定义，$M(y) = M_K(y)$ 是以 y为中心且包含于 K中的最大中心对称体。由于 Q 是一个中心对称凸体，其以 y 为中心的 5 倍扩张包含于 K中，因此可得 $Q \subseteq M^{1/5}(y)$。因此， $\mathscr{M}^{1/5}(Y)$ 是一个基数与 $\mathcal{Q}'$相同的 Λ-受限 5-覆盖。

根据引理 4.1 的装填性质，麦克比斯区域 $\mathscr{M}^{1/4c}(X)$ 两两不相交。为了关联这两个覆盖，将每个 $x \in X$ 分配给任意一个 $y \in Y$，使得 $x \in M^{1/5}(y)$。我们将证明，分配给任意一个 $y \in Y$的 $2^{O(n)}$ 中的元素至多有 X 个。暂且假设这一点成立，则有

$$|\mathscr{M}| \;=\; |X| \;\leq\; 2^{O(n)}|Y| \;=\; 2^{O(n)}|\mathcal{Q}'| \;\leq\; 2^{O(n)}|\mathcal{Q}|,$$

从而完成证明。

为证明该断言，考虑任意一个 $x \in X$，它被分配给某个 $y \in Y$。由于 $M^{1/5}(x) \cap M^{1/5}(y) \neq \emptyset$，根据引理 2.14 以及 $c \geq 2$这一事实，我们有

$$M^{1/4c}(x) \;\subseteq\; M^{1/5}(x) \;\subseteq\; M^{4/5}(y).$$

引理 2.14还蕴含 $M^{1/5}(y) \subseteq M^{4/5}(x)$，因此 $\mathrm{vol}(M^{1/4c}(x)) \geq 2^{-O(n)}\mathrm{vol}(M^{4/5}(y))$。由于 $M^{1/4c}(X)$ 的麦克比斯区域两两不相交，根据简单的装填论证，分配给任意一个 $y \in Y$的 X 中的点至多有 $2^{O(n)}$ 个，正如所需。 □

回顾一下，关于 $K_\varepsilon = (1+\varepsilon)K$ 的 K-受限 c-覆盖是针对 K 的 $(c,\ \varepsilon)$-覆盖。应用上述引理，我们便得到本节的主要结果。

定理 4。 设 $0 < \varepsilon \leq 1$，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，满足 $O \in \mathrm{int}(K)$，并设 $c \geq 2$ 为一个常数。设 X 为一个(K_ε, K, c)-*MNet*，且设 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{K_\varepsilon}^{1/c}(X)$ 为关于 K 的关联(c, ε)-覆盖。给定任意一个关于 K 的(c, ε)-覆盖 $\mathcal{Q}$， $|\mathscr{M}| \leq 2^{O(n)}|\mathcal{Q}|$。

4.2 最坏情况最优性

本节的主要结果见引理 4.6，它证明了存在一个大小为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 的 $(c,\ \varepsilon)$-覆盖。这直接推出定理 1。在陈述这一结果之前，先建立一个界将很有帮助：关于$\Theta(\varepsilon)$-宽度帽的互不相交麦克比斯区域的最大数量。证明基于 K 与 K^*中的帽之间的关系。

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为中心良好的凸体。给定 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{32}$，令 $\Lambda \subseteq K$表示所有相对宽度介于 ε 和 2ε 之间的帽的底面质心。给定常数 $c \geq 2$，令 X 为一个 $(K,\ \Lambda,\ c)$-MNet，并令 $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 为相关覆盖。我们将证明$|X| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$，由此可推出相关 Λ-受限c-覆盖的规模也有类似的界。

回顾一下，对于任意区域 $\Lambda \subseteq K$，其相对体积为 $\mathrm{vol}_K(\Lambda) = \mathrm{vol}(\Lambda)/\mathrm{vol}(K)$。令 $t = \varepsilon^{(n+1)/2}$。定义 $X_{\geq t} = \{x \in X : \mathrm{vol}_K(M_K^{1/c}(x)) \geq t\}$ 为覆盖中相对体积至少为 t 的“大型”麦克比斯区域的中心，并令 $X_{<t} = X \setminus X_{\geq t}$ 表示其余“小型”麦克比斯区域的中心。

为了界定小型麦克比斯区域的数量，我们将使用极体 K^*。令 Λ' 表示 $(1-\varepsilon)K^*$ 的边界。令 Y 为一个 $(K^*, \Lambda', 5)$-MNet，并令 $\mathscr{M}(Y) = \mathscr{M}_{K^*}^{1/5}(Y)$ 表示

相关覆盖。令 $t' = 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$，其中 $O(n)$ 中隐藏的常数足够大，并类似地定义 $Y_{\geq t'} = \{y \in Y : \mathrm{vol}_{K^*}(M_{K^*}^{1/5}(y)) \geq t'\}$ 为极性覆盖 $\mathscr{M}(Y)$ 中相对体积至少为 t' 的“较大”麦克比斯区域的中心集合。

以下引理概述了所得麦克比斯区域的基本性质。

引理 4.5. 给定一个中心良好的凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{32}$、常数 $c \geq 2$，以及上文定义的实体 Λ，Λ'，X，Y，t 和 t'，以下结论成立：

(a) 区域 $\mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 包含于 $\Lambda_K(\varepsilon) = K \setminus (1-4\varepsilon)K$ 中，且 $\mathrm{vol}_K(\Lambda_K(\varepsilon)) = O(n\varepsilon)$。*(b)* 对任意 $x \in X_{\geq t}$，$\mathrm{vol}_K(M^{1/c}(x)) \geq \varepsilon^{(n+1)/2}$，且 $|X_{\geq t}| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。*(c)* 区域 $\mathscr{M}_{K^*}^{1/5}(Y)$ 包含于 $\Lambda_{K^*}(\varepsilon) = K^* \setminus (1-2\varepsilon)K^*$ 中，且 $\mathrm{vol}_{K^*}(\Lambda_{K^*}(\varepsilon)) = O(n\varepsilon)$。*(d)* 对任意 $y \in Y_{\geq t'}$，$\mathrm{vol}_{K^*}(M^{1/5}(y)) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$，且 $|Y_{\geq t'}| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。*(e)* 对任意 $x \in X_{<t}$ $y \in Y_{\geq t'}$ C_z^{32} $M^{1/c}$ x $\geq 2^{-O(n)}$ C_z^{32} $C_z \subseteq K$ z ε y x $\subseteq$，存在使得对于任意点 $z \in M^{1/5}(\,)$，我们有 $M^{1/c}(\,)$，且 $\mathrm{vol}(\,(\,)) \,\mathrm{vol}(\,)$，其中 是 ’s -代表帽。*(f)* $|X| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。

证明。为证明 (a)，任取 x 为 X 中的一点，并令 $M_x = M^{1/c}(x)$ 为其相关覆盖麦克比斯区域。由于 X 是一个 (K, Λ, c)-MNet，M_x 以宽度介于 ε 和 2ε 之间的帽 C_x 底面的质心为中心。由于 $c \geq 1$，根据引理 2.16，$M_x \subseteq C_x^2$。由于 C_x^2 的宽度至多为 4ε，因此 $C_x^2 \subseteq \Lambda_K(\varepsilon)$，$M_x$ 也显然如此。显然，体积 $_K(\Lambda_K(\varepsilon)) = 1 - (1-4\varepsilon)^n = O(n\varepsilon)$。

为证明 (b)，注意到麦克比斯区域 $\mathscr{M}^{1/4c}(X_{\geq t})$ 两两不相交，且每个区域的相对体积至少为 $t/4^n \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$。根据简单的装填论证，$|X_{\geq t}| \leq$体积 $_K(\Lambda_K(\varepsilon))/(t/4^n) \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。

为证明 (c)，任取 y 为 Y 中的一点，并令 $M_y = M^{1/5}(y)$ 为其相关覆盖麦克比斯区域。由于 y 位于 $(1-\varepsilon)K^*$ 的边界上，y 位于由 $(1-\varepsilon)K^*$ 的支撑超平面所诱导的 K^* 的帽 C_y 的底面上。由引理 2.16，$M_y \subseteq C_y^2$。由于 C_y^2 的宽度为 2ε，可得 $C_y^2 \subseteq \Lambda_{K^*}(\varepsilon)$，$M_y$ 也同样如此。此外，$\mathrm{vol}_{K^*}(\Lambda_{K^*}(\varepsilon)) = 1 - (1-2\varepsilon)^n = O(n\varepsilon)$。

为证明 (d)，注意到由引理 4.1，麦克比斯区域 $\mathscr{M}^{1/(4\cdot 5)}(Y_{\geq t'})$ 两两不相交，且每个区域的相对体积至少为 $t'/4^n = 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$。由一个简单的装填论证可得，$|Y_{\geq t'}| \leq$体积$_{K^*}(\Lambda_{K^*}(\varepsilon))/(t'/4^n) \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。

为证明 (e)，令 x 为 $X_{<t}$ 中的任意一点，并令 $M_x = M^{1/c}(x)$ 为相关覆盖麦克比斯区域。与 (a) 中一样，M_x 以一个宽度介于 C_x 和 ε 之间的帽 2ε的底面质心为中心。由于 c 是常数，根据引理 2.20，体积$(C_x) \leq 2^{O(n)}$ 体积(M_x)。由于体积$_K(M_x) \leq t = \varepsilon^{(n+1)/2}$，因此体积$_K(C_x) \leq 2^{O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$。

在极体中，考虑从原点发出的射线 r，它与 C_x的底面正交。这条射线将与某个覆盖麦克比斯区域 $M_y = M^{1/5}(y)$ 相交，其中 $y \in Y$。我们将证明 y 满足 (e) 中给出的所有性质。由于 K 中心良好，我们可以应用引理 3.4 中的类马勒体积关系，得到 $\mathrm{vol}_K(C_x) \cdot \mathrm{vol}_{K^*}(M_y) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{n+1}$。利用上文给出的 $\mathrm{vol}_K(C_x)$ 的上界，可得 $\mathrm{vol}_{K^*}(M_y) \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$。因此，$y \in Y_{\geq t'}$。

容易验证，推论 2.24 的前提均得到满足，其中 C_x 起 C的作用，M_y 起 $M^{1/5}$(y)的作用，而 z 是 M_y中的任意一点。由此可得，帽 C_x 和 C_z 是 16-相似的，也就是说， $C_x \subseteq C_z^{16}$和 $C_z \subseteq C_x^{16}$。根据引理 2.16， $M_x \subseteq C_x^2$；根据引理 2.10， $C_x^2 \subseteq C_z^{32}$。因此 $M_x \subseteq C_z^{32}$。此外，由于 $C_z \subseteq C_x^{16}$，根据引理 2.9 可得 vol(C_x) $\geq 2^{-O(n)}$vol(C_z)。根据引理 2.20，vol(M_x) $\geq 2^{-O(n)}$vol(C_x)。因此 vol(M_x) $\geq 2^{-O(n)}$ vol(C_z) $\geq 2^{-O(n)}$ vol(C_z^{32})，这就证明了 (e)。

最后，为证明 (f)，注意到根据 (b)，只需证明 $|X_{<t}| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。通过以下收费论证可以给出该量的界。对于每个 $y \in Y_{\geq t'}$，我们称它收费所有满足以下条件的点 $x \in X$：其麦克比斯区域 $M^{1/4c}$(x) 包含于 C_y^{32}，且其体积至少为 $2^{-O(n)}$vol(C_y^{32})，其中 $O(n)$ 中隐含的常数足够大。注意，$Y_{\geq t'}$ 中的任意点最多对 X 中的 $2^{O(n)}$ 个点收费。应用 (e) 部分可知，每个$x \in X_{<t}$ 都会被某个 $y \in Y_{\geq t'}$ 收费。由于 $|Y_{\geq t'}| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$，且 $Y_{\geq t'}$ 中的每个点最多对 X 中的 $2^{O(n)}$ 个点收费，因此 $|X_{<t}| \leq 2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$，证明完毕。 □

现在我们可以给出本节的主要结果了。回顾一下， $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个中心良好的凸体。给定 $0 < \varepsilon \leq 1$，定义 K 的分层分解如下。回顾$K_\varepsilon = (1+\varepsilon)K$，对每个 $x \in K$，将其宽度记作 wid(x)，定义为与 K_ε关联的最小体积帽的宽度。由于射线K_ε(x) $\geq \varepsilon/(1+\varepsilon) \geq \varepsilon/2$，由引理 2.6 可得 wid(x) $\geq \varepsilon/2$。令 β 为一个充分小的常数，并令 $k_0 = \left\lceil \log \frac{\beta}{\varepsilon} \right\rceil$。对于 $0 \leq i \leq k_0$，将层 i 定义为点 $x \in K$ 的集合，其中 wid(x) $\in [2^{i-1}, 2^i)\varepsilon$。将层 k_0+1 定义为 K中其余点的集合，这些点的宽度至少为 β。注意，层数为$O(\log \frac{1}{\varepsilon})$。

–

引理 4.6. 令 $0 < \varepsilon \leq 1$，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为中心良好的凸体，且 $c \geq 2$ 为一个常数。设 X 为一个(K_ε, K, c)-*MNet*，且 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{K_\varepsilon}^{1/c}(X)$。那么， $\mathscr{M}$ 是 K 的一个(c, ε)-覆盖，由至多 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个中心对称凸体组成。

证明。 由引理 4.1， $\mathscr{M}$ 是 K的一个 (c, ε)-覆盖。我们将根据分层分解（如上所定义）对 X 中的点进行划分，从而给覆盖的大小设定上界；然后利用引理 4.5 对每一层中的点数设定上界。

对于 $0 \leq i \leq k_0$，令 X_i 为 X 中属于第 i层的点所构成的子集。由于 K 是中心良好的， K_ε 也中心良好。由引理 4.5(f)， $|X_i| \leq 2^{O(n)}/(2^i\varepsilon)^{(n-1)/2}$。对 $|X_i|$ 从第 0 层到第 k_0 层求和，我们得到所有这些层中至多有 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个点。

现在只需给出 $|X_{k_0+1}|$的界。考虑由相关装填麦克比斯区域组成的集合 $\mathscr{M}_{K_\varepsilon}^{1/4c}(X_{k_0+1})$。根据引理 4.1，这些麦克比斯区域两两不相交。回忆一下， X_{k_0+1} 中任意一点的最小体积帽的宽度至少为 β（用于k_0的定义）。因此，根据引理2.19 （并注意到 c 是一个常数），这些麦克比斯区域的相对体积均至少为 $2^{-O(n)}$。通过一个简单的装填论证可知， $|X_{k_0+1}| \leq 2^{O(n)}$，由此完成证明。

□

5 应用：Banach-Mazur 逼近

本节将证明，任意一个（c，ε）-覆盖的中心的凸包，都意味着存在一个在 Banach–Mazur 距离意义下的逼近多面体。主要结果由下面的引理给出。将此结果与定理1中的覆盖结合起来，即可证明定理2。

引理 5.1. 设 $0 < \varepsilon < 1$，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个中心良好的凸体，并设 $c \geq 2$ 是一个常数。设 X 是任意一个 $K(1+\varepsilon/c)$ 的 (c, ε') 覆盖的中心集合，其中 $\varepsilon' = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/c} - 1$。那么 $K \subset \mathrm{conv}(X) \subset K(1+\varepsilon)$。

证明。设 $\mathscr{M}$ 表示引理陈述中提到的覆盖。根据定义，$\mathscr{M}$ 的凸体合起来覆盖 $K(1+\varepsilon/c)$，并且任意此类凸体以其中心为中心作 c 扩张后，均包含于 $K(1+\varepsilon)$ 中。由于 $\mathscr{M}$ 的每个凸体都包含于 $K(1+\varepsilon)$ 中，因此可得 $X \subset K(1+\varepsilon)$，于是 $\mathrm{conv}(X) \subset K(1+\varepsilon)$。要证明 $K \subset \mathrm{conv}(X)$，只需证明由 K 的支撑超平面所定义的 $K(1+\varepsilon)$ 的每个帽中都存在一个 X 的点。

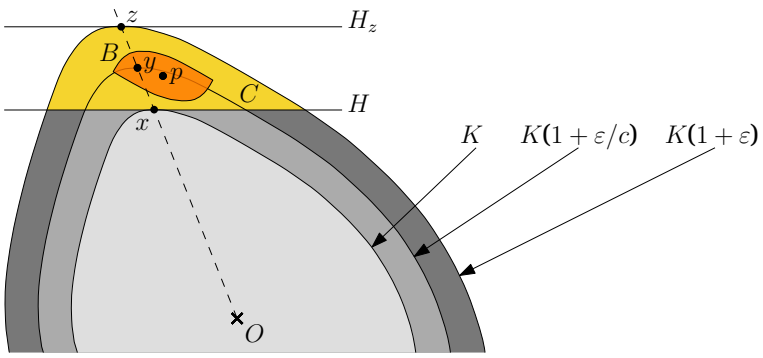


图 18：引理5.1的证明。

设 C 是由 K 的支撑超平面 H 定义的 $K(1+\varepsilon)$ 的一个帽。设 x 是 H 与 K 接触处的一个点。为便于具体说明，假设 H 是水平的，且 K 位于 H 下方。考虑一条从原点出发并经过 x 的射线。假设这条射线与 $K(1+\varepsilon/c)$ 的边界交于 y，与 $K(1+\varepsilon)$ 的边界交于 z。设 H_z 表示 $K(1+\varepsilon)$ 在 z 处的支撑超平面。显然，H_z 与 H 平行，且 H 与 H_z 之间的距离是 y 与 H 之间距离的 c 倍。

考虑 $\mathscr{M}$ 中任意一个包含点 y 的凸体 B。我们断言，凸体 B 的中心 p 位于 C 内。根据我们之前的论述，$p \in K(1+\varepsilon)$。因此，我们只需证明 p 不可能位于 H 下方。为此，回想一下，以中心 p 为中心将 B 扩大 c 倍后得到的凸体包含于 $K(1+\varepsilon)$ 内。特别地，点 $p + c(y-p) \in K(1+\varepsilon)$。然而，若 p 位于 H 下方，则点 $p + c(y-p)$ 将位于 H_z 上方，因此在 $K(1+\varepsilon)$ 之外。由此可知，p 不可能位于 H 下方，证明完毕。 □

根据引理4.6，存在一个（c，ε'）覆盖 $\mathscr{M}$，用于 K（$1+\varepsilon/c$），由至多 $2^{O(n)}/(\varepsilon')^{(n-1)/2}$个中心对称凸体组成。定理2 中的顶点数界现在可由上述引理立即推出（取 P =conv(X)，并注意到 $\varepsilon' = \Theta(\varepsilon)$），而面数界则可通过极性和按（$1+\varepsilon$）倍缩放得到。

6 应用：近似最近向量问题与整数规划

6.1 预备知识

一个 n维格 $L \subseteq \mathbb{R}^n$ 是由 $\mathbb{R}^n$的一组基 b_1，……， b_n的所有整数线性组合构成的集合。给定一个格 L、一个凸体 K 和一个目标点 $t \in \mathbb{R}^n$，最近向量问题（CVP）旨在寻找 L 中在 $\|\cdot\|_K$意义下距离 t 最近的格向量。给定参数 $\varepsilon > 0$，（$1+\varepsilon$）近似最近向量问题旨在寻找任意一个格向量，使其在 $\|\cdot\|_K$ 意义下到 t 的距离至多为真正最近距离的（$1+\varepsilon$）倍。

我们在近似最近向量问题算法中采用标准计算模型。给定实数 $0 < r \le r'$和 $x \in \mathbb{R}^n$，如果凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足 $x + rB_2^n \subseteq K \subseteq x + r'B_2^n$，其中 B_2^n 是以原点为中心的单位欧几里得球，则称其为 (x， r， r')-中心的。我们假设诱导范数的凸体 K是 (O， r， r')-中心的，其中 r和 r' 均作为输入显式给出。我们假设格 L 的基向量以有理数域上的 $n \times n$ 矩阵形式给出。输入规模按编码 r、r'、 t和 ε 以及 L 的基向量所需的总位数衡量（这些均为有理数）。

按照标准约定，我们假设通过成员判定预言机来访问 K ；该预言机以 $x \in \mathbb{R}^n$ 为输入，当 $x \in K$ 时返回 1，否则返回 0。我们的算法也适用于更一般的情形：此时 K 通过弱成员预言机给出，该预言机还接收一个额外参数$\delta > 0$ ，并且仅当 x 与 K的边界之间的欧几里得距离至少为 δ 时，才需要返回正确答案。

在预言机计算模型中，运行时间按预言机调用次数和算术运算的位复杂度来衡量。请注意，我们的（$1+\varepsilon$）-最近向量问题算法的运行时间将随维数 n呈指数增长。我们将遵循标准做法，省略关于 n 和输入规模的多项式因子。为简化表述，我们还将假设算法使用精确预言机，但将其调整为使用弱预言机十分直接。

我们对近似最近向量问题的处理沿用了 Eisenbrand 等人 [32] 针对 ℓ_∞ 提出的方法，并结合了后来多项工作 [33, 53, 58], 中的扩展；该方法使用对 K的覆盖。给定任意常数$c \ge 2$， （c， ε）-覆盖是指由一组凸体 $\mathcal{Q}$ 构成的覆盖，其中每个凸体 $Q \in \mathcal{Q}$ 以其质心为中心扩张因子-c 倍后，均包含于（O， r， r'）-中心对称凸体 K 中。Nasz´odi 和 Venzin 证明， K 的（2， ε）-覆盖可用于提升一般范数下任意 2-近似最近向量问题求解器的近似因子。

引理 6.1 (Nasz´odi 和 Venzin [53])。设 L 为一个格， K 为一个(O, r, r')中心凸体。给定由 N 个中心对称凸体组成的 K 的$(2, \varepsilon)$覆盖，我们$\widetilde{\ }$可以在 $\|\cdot\|_K$ 下求解$(1+7\varepsilon)$-最近向量问题，所需调用范数 *2*-近似最近向量问题求解器 $O(N)$ 次（其中 O 隐藏了多对数因子）。

6.2 最近向量问题算法

与引理 4.6一样，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个中心良好的凸体。本节将介绍我们的算法，用于计算关于由 K定义的范数的最近向量问题 (CVP) 的 $(1 + \varepsilon)$-近似解。

给定一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$、 $0 < \varepsilon \le 1$ 和一个常数 $c \ge 2$， (c， ε)-枚举器 是一个过程

它输出 K 的一个 $(c,\ \varepsilon)$-覆盖中的元素。覆盖中的每个元素都表示为一个 $(a,\ r,\ r')$-中心对称凸体的预言机，其中 a、r 和 r' 在输出中以有理数的形式明确给出。我们的枚举器采用蒙特卡罗意义下的随机化，即它能达到所声明的运行时间，但输出可能以给定概率无法构成一个 $(c,\ \varepsilon)$-覆盖。我们将枚举器的开销 定义为其总运行时间除以输出的元素数量，并将其空间复杂度 定义为其所需的内存量。

我们的枚举器基于为与某些 M网相关的覆盖构造击中集。下面的引理将会派上用场。

引理 6.2. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，$\Lambda \subset \mathrm{int}(K)$，且 $c \geq 2$。设 X 是一个$(K, \Lambda, 4c)$-***MNet***，并设 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_K^{1/4c}(X)$ 为相关覆盖。设 Y 是 $\mathscr{M}$ 的任意击中集，即对于每个 $M \in \mathscr{M}$，都有 $Y \cap M \neq \emptyset$。那么，$\mathscr{M}_K^{1/c}(Y)$ 是相对于 K 的一个 Λ-受限 c-覆盖。

证明。由于 $c > 1$，$M^{1/c}(Y)$ 的任意麦克比斯区域的 c-扩张都包含于 K 中。为证明覆盖性质，任取 Λ 中的一个点 z。根据引理 4.1，存在一个点 $x \in X$，使得 $z \in M^{1/4c}(x)$。设 y 是 Y 中包含于 $M^{1/4c}(x)$ 的一个点。由于 $M^{1/4c}(x) \cap M^{1/4c}(y) \neq \emptyset$，根据引理 2.14，$M^{1/4c}(x) \subseteq M^{1/c}(y)$。因此 $z \in M^{1/c}(y)$。由此可知，$M^{1/c}(Y)$ 是相对于 K 的一个 Λ-受限c-覆盖。 □

下面的引理表明，K 的成员预言机也可以扩展到其极体，以及深度为 ε 的麦克比斯区域和帽。

引理 6.3。 给定一个由弱成员预言机指定的(O, r, r')-中心对称凸体 K，我们可以在关于 n、$\log \frac{1}{\varepsilon}$ 和 $\log \frac{r'}{r}$ 的多项式时间内完成以下操作：

(i) 构造 K^* 的弱成员预言机。(ii) 给定一点 $x \in K$，使得 $\mathrm{ray}(x) \geq \varepsilon$，为任意常数 $\lambda > 0$ 构造 $M_K^\lambda(x)$ 的弱成员预言机。(iii) 给定一个与 K 相交的超平面 h，它确定了一个宽度至少为 ε 的帽 C，构造 C 的弱成员预言机。

证明。断言 (i) 直接由标准归约得出（参见 Gr¨otschel、Lov´asz 和 Schrijver [37] 的定理 4.3.2 和引理 4.4.1）。注意，K^* 是 $(O, \frac{1}{r'}, \frac{1}{r})$-中心的。为证明 (ii)，注意到利用以下事实即可构造 $M(x)$ 的成员预言机：当且仅当 $y \in K$ 且 $2x - y \in K$ 时，点 $y \in M(x)$ 属于其中。若 $\mathrm{ray}(x) \geq \varepsilon$，很容易证明 $M(x)$ 是 $(x, \Omega(\varepsilon r)\ r')$-中心的。对于任意常数 $\lambda > 0$，将这一构造推广到 $M_K^\lambda(x)$ 是显而易见的。最后，为证明 (iii)，注意成员预言机容易构造，但中心性才是问题。我们首先通过寻找与 h 平行的 K 的支撑超平面，确定 C 的顶点 a（近似值）。设 b 为线段 Oa 上的中点，该线段连接帽的底面与 a。容易证明，可以在 b 处放置一个半径为 $\Omega(\varepsilon r)$ 的欧几里得球，且该球包含于 C 内。因此，C 是 $(b, \Omega(\varepsilon r)\ 2r')$-中心的。 □

我们将使用标准抽样结果（例如，参见 [30, 62]），该结果表明，给定 $\eta > 0$，存在一种算法，至多使用 $\mathrm{poly}\left(n, \ln \frac{1}{\eta}, \ln \frac{r'}{r}\right)$ 次对 K 的成员预言机的调用以及算术运算，即可输出一个 η-均匀的 $X \in K$。（随机点 $X \in K$ 是 η-均匀 的，当且仅当

样本 X 与 K 中均匀向量之间的总变差距离至多为 η。）与成员预言机一样，为了简化表述，我们将以真正的均匀采样器来陈述我们的构造，但推广是直接的。

引理 6.4. 给定 $0 < \varepsilon \le 1$、常数 $c \ge 2$，以及一个凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 的预言机，其中该凸体既中心良好，又是(O, r, r')-中心的，则存在一个针对 K 的随机(c, ε)-枚举器，可生成大小为

$$2^{O(n)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{(n-1)/2}} \cdot \log \frac{1}{\varepsilon},$$

的覆盖，使得覆盖元素$(a, O(\varepsilon r)\ r')$-中心良好。该枚举器以概率$1 - 2^{-O(n)}$成功，其开销和空间复杂度均为关于 n、$\log \frac{r'}{r}$ 和 $\log \frac{1}{\varepsilon}$ 的多项式。

在我们的构造中，覆盖的元素将是中心对称的；更具体地说，以点 $a \in K$ 为中心的覆盖元素将是形如 $M_{K_\varepsilon}^{1/c'}(a)$ 的麦克比斯区域，其中 $c' = O(c)$。

证明。回顾引理 4.6 之前描述的 K 的分层分解。对于 $0 \le i \le k_0$，第 i 层由满足 $\mathrm{wid}(x) \in [2^{i-1}, 2^i)\varepsilon$ 的点 $x \in K$ 组成，而第 $k_0 + 1$ 层则由其余的点 $x \in K$ 组成。注意，对于第 $k_0 + 1$ 层中的点，$\mathrm{wid}(x) \ge \beta$。这里 β 是一个常数，层数 $k_0 + 2 = O(\log \frac{1}{\varepsilon})$。令 Λ_i 表示第 i 层中的点。我们的枚举器分阶段运行，其中第 i 阶段会生成关于 K_ε 的 Λ_i-受限 c-覆盖的元素。显然，所有阶段生成的元素合在一起构成了 K 的 (c, ε)-覆盖。

对于 $0 \le i \le k_0$，为了描述枚举器的阶段 i，将 K、Λ、ε 和 c 分别记作 K_ε、Λ_i、$2^{i-1}\varepsilon$ 和 $4c$，可以简化记号。本阶段我们的（新）目标是生成一个 Λ-受限的 $(c/4)$-覆盖。设 X 为一个 (K, Λ, c)-MNet，设 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_K^{1/c}(X)$ 为相关覆盖，并设 X' 为 $\mathscr{M}$ 的击中集。根据引理 6.2，$\mathscr{M}_K^{4/c}(X')$ 是一个 Λ-受限的 $(c/4)$-覆盖。

我们将说明如何以所需形式生成 $\mathscr{M}$ 的击中集 X'，以及 $\mathscr{M}_K^{4/c}(X')$ 的元素。除上文定义的量 K、Λ、ε、c、X 外，还按引理 4.5 定义量 Λ'、Y、t、t'。根据引理 4.5(a)，$\mathscr{M}$ 的区域包含在 $\Lambda_K(\varepsilon) = K \setminus (1 - 4\varepsilon)K$ 中。回顾一下，$\mathscr{M}$ 的麦克比斯区域根据其相对体积是否至少为 t，分为“大”和“小”两类。我们将采用不同策略来击中这两类区域。

首先，考虑大型麦克比斯区域。我们声称，只需在 $\Lambda_K(\varepsilon)$ 中均匀选择 $(2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}) \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}$ 个点，就能以高概率命中所有大型麦克比斯区域。在证明这一点之前，请注意，我们可以通过以下方式从 $\Lambda_K(\varepsilon)$ 中均匀采样：首先从 K 的均匀分布中选取一个点 p，然后从射线 $Op \cap \Lambda_K(\varepsilon)$ 的一部分中均匀选取一个点。使用二分搜索，我们可以在 $O(\log \frac{r'}{r} + \log \frac{1}{\varepsilon})$ 步内以常数概率找到这样一个点。我们省略显而易见的细节。

为证明该结论，令 M 为一个大型麦克比斯区域。由引理 4.5(a) 和 (b)，$M \subseteq \Lambda_K(\varepsilon)$，体积$_K(M) \ge \varepsilon^{(n+1)/2}$，且体积 $_K(\Lambda_K(\varepsilon)) = O(n\varepsilon)$。因此，体积 $(M)/$ 体积 $(\Lambda_K(\varepsilon)) \ge 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n-1)/2}$。此外，由引理 4.5(b)，大型麦克比斯区域的数量至多为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。通过标准计算可知，在某一层中未能击中任何一个大型麦克比斯区域的概率不超过 $\varepsilon^{O(n)}$。

接下来，我们说明如何为小型麦克比斯区域构造击中集。直观地说，由于这些区域很小，无法通过在 $\Lambda_K(\varepsilon)$ 中进行均匀抽样来高效地击中。相反，我们将利用 $\mathscr{M}$ 的小型麦克比斯区域与 $\mathscr{M}' = \mathscr{M}_{K^*}^{1/5}(Y)$ 的大型麦克比斯区域之间的关系来击中它们。回顾一下， Y是一个 $(K^*, \Lambda', 5)$-MNet，其中 Λ'是 $(1-\varepsilon)K^*$ 的边界，而 $\mathscr{M}'$ 的大型麦克比斯区域体积至少为 $t' = 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$。我们击中 $\mathscr{M}$ 的小型麦克比斯区域的总体思路，是先击中$\mathscr{M}'$ 的大型麦克比斯区域，然后对相应的 ε-代表帽 K进行均匀抽样。

更准确地说，我们执行以下过程 $(2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}) \cdot \log(1/\varepsilon)$ 次迭代。首先，在 $\Lambda_{K^*}(\varepsilon) = K^* \setminus (1-2\varepsilon)K^*$ 中均匀选择一个点 p。（这可以用与上述均匀采样 $\Lambda_K(\varepsilon)$ 类似的方式完成。）接着，在帽 C_p^{32} 中均匀采样，其中 C_p 是 p 在 K 中的 ε 代表帽。我们声称，以高概率，该过程会击中 $\mathscr{M}$ 的所有小型麦克比斯区域。

为说明原因，回想引理 4.5(e)：对于任意小型麦克比斯区域 $M \in \mathscr{M}$，都存在一个大型麦克比斯区域 $M' \in \mathscr{M}'$，满足以下性质。令 y 为 M' 中的任意一点，并令 C_y 为 y 在 K 中的 ε 代表帽。那么 $M \subseteq C_y^{32}$，且 $\mathrm{vol}(M) \geq 2^{-O(n)}\,\mathrm{vol}(C_y^{32})$。此外，根据引理 4.5 的性质 (c) 和 (d)，有 $M' \subseteq \Lambda_{K^*}(\varepsilon)$、$\mathrm{vol}_{K^*}(M') \geq 2^{-O(n)}\varepsilon^{(n+1)/2}$，以及 $\mathrm{vol}_{K^*}(\Lambda_{K^*}(\varepsilon)) = O(n\varepsilon)$。由此可知，在任意一次试验中击中 $\mathscr{M}$ 的某个固定小型麦克比斯区域 M 的概率（即在 $\Lambda_{K^*}(\varepsilon)$ 中均匀采样 p，然后在帽 C_p^{32} 中均匀采样一个点）至少为 $2^{-O(n)}\varepsilon^{(n-1)/2}$。此外，根据引理 4.5(f)， $\mathscr{M}$ 的小型麦克比斯区域数量至多为 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$。对大型麦克比斯区域所作的同样计算表明，未能击中 $\mathscr{M}$ 的某个小型麦克比斯区域的概率不超过 $\varepsilon^{O(n)}$。

综上可知，我们可以击中所有层 $i, 0 \leq i \leq k_0$ 中的麦克比斯区域，失败概率不超过 $2^{-O(n)}$。

最后，我们介绍枚举器的阶段 k_0+1。回顾一下， Λ_{k_0+1} 由满足以下条件的点组成：其相关的最小体积帽的宽度至少为 β，其中 β 是一个常数。令 X 为一个（K_ε， Λ_{k_0+1}， $4c$）-MNet，并令 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{K_\varepsilon}^{1/4c}(X)$ 为其相关覆盖。由引理 2.19可知， $\mathscr{M}$ 的麦克比斯区域的相对体积至少为 $2^{-O(n)}$。因此，我们可以用 $2^{O(n)}$ 个在 K 中均匀采样的点击中 $\mathscr{M}$ 的所有麦克比斯区域，失败概率不超过$2^{-O(n)}$。

最后，我们提及引理 6.3 表明，枚举器能够构造其运行所需的三个成员资格预言机。具体而言，对于击中集中的每个点，根据 (ii)，我们可以为其相关的麦克比斯区域构造一个预言机。根据 (i)，我们可以为 K^*构造一个预言机，以便在 K^*中均匀采样；根据 (iii)，我们可以为 K 的帽构造预言机，以便对其进行均匀采样。证明至此完成。 □

我们的算法及其分析遵循 Eisenbrand 等人 [32]以及 Nasz´odi 和 Venzin [53]提出的一般框架。我们通过将（$1+\varepsilon$）-最近向量问题（CVP）归约为该范数下的（ $\|\cdot\|_K$ ）-间隙最短向量问题来求解范数$1+\varepsilon$下的（$1+\varepsilon$）-间隙最短向量问题。对于（ t ）-间隙最短向量问题，给定目标点 $\gamma > 0$ 和一个数 t ，我们必须找到一个格向量，使其到 γ 的距离至多为 $\gamma/$（$1+\varepsilon$），或者断言所有格向量到$1+\varepsilon$的距离都大于 n（ ε）。我们通过对目标点距离进行二分搜索来求解（ $\rho = \frac{r'}{r}$）-最近向量问题。给定问题参数b ，并令$1+\varepsilon$表示数值输入中的比特数，则需要测试的不同距离值的数量

可以证明为 $O(\log\ n+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\ \rho+\log\ b)$。令 $\Phi(n,\varepsilon,\rho,b)$ 表示该数量。对于每个距离，我们都需要求解（$1+\varepsilon$）-间隙最短向量问题。进而，通过调用（$1+\varepsilon$）-枚举器来求解（c）-间隙最短向量问题。对于枚举器生成的每个 N 个凸体，我们都需要调用一个 2-间隙最短向量问题求解器。为此，我们采用 Dadush 和 Kun 的确定性算法 [25] 作为 2-间隙最短向量问题求解器。由于该求解器总能给出正确答案，我们的算法唯一的错误来源是可能无法生成有效覆盖。（c,ε）-枚举器的失败率为 $2^{-O(n)}$；我们通过运行 $\log\ \Phi(n,\varepsilon,\rho,b)$ 次来进一步降低该失败率。这确保了在求解（$1+\varepsilon$）-最近向量问题的过程中生成的所有覆盖以至少 $1-2^{-O(n)}$ 的概率均正确。回顾一下，Dadush 和 Kun 的算法需要 $2^{O(n)}$ 时间和 $O(2^n)$ 空间，由此我们证明了定理 3（忽略输入规模的多项式因子）。

6.3 近似整数规划

通过 Dadush 的归约，我们的最近向量问题结果也意味着一种新的近似整数规划（整数规划）算法。给定一个凸体 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 和一个 n维格$L\subset\mathbb{R}^n$，我们需要判断 $K\cap L=\emptyset$，或者返回一个点 $y\in K\cap L$。目前已知解决此问题的最佳算法需要 $n^{O(n)}$ 时间 [42],，这引发了人们对其近似版本的兴趣。在近似整数规划中，算法必须返回一个位于（$1+\varepsilon$）K 内的格点（其中，$1+\varepsilon$的扩张是以 K 的质心为中心），或者断言 K中没有格点。

Dadush [24] 证明，在良好居中的范数下，近似整数规划可归约为（$1+\varepsilon$）-最近向量问题。他的方法是先求出一个近似质心 p，然后针对由 $K-p$ 诱导的范数，调用一次（$1+\varepsilon$）-最近向量问题求解器。代入我们的求解器后，我们立即获得改进，具体体现在 ε 相关的依赖关系上（忽略输入规模中的多项式因子）。

定理 5。 存在一种 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$时间、$O$（$2^n$）空间的随机化算法，能够以至少 $1-2^{-n}$ 的概率解决近似整数规划问题。

7 结论

本文证明了凸体存在简洁覆盖。特别地，我们证明了：给定实参数 $0<\varepsilon\leq 1$ 和常数 $c\geq 2$，任意位于 $\mathbb{R}^n$ 中的中心良好的凸体 K 都具有一个（c，ε）-覆盖，该覆盖由至多 $2^{O(n)}/\varepsilon^{(n-1)/2}$ 个中心对称凸体组成，且 K 。关于 ε依赖关系而言，这一界是最优的。此外，我们还证明，覆盖的大小在相差 $2^{O(n)}$倍因子的意义下是实例最优的。覆盖是很有用的结构。改进覆盖的一个结果，是在 Banach-Mazur 度量下构造 ε逼近多面体的一种新的（也可以说更简单的）方法。我们还改进了一般范数下最近向量问题和整数规划的近似算法。

与以往方法不同，我们的覆盖元素基于凸体 K 的缩放麦克比斯区域。这引出了一个问题：覆盖元素的最佳选择是什么？Eisenbrand等人 [32] 证明，即使被覆盖的域是一个超立方体，基于椭球的任何覆盖的规模也会以 $\Omega(n^{n/2})$ 的速度增长。我们基于麦克比斯区域的方法将维数依赖性降低到

$2^{O(n)}$，且适用于任意凸体。麦克比斯区域有许多优良性质，包括可以根据原凸体的成员判定预言机构造成员判定预言机。不幸的是，麦克比斯区域也有缺点，包括其边界复杂度最高可达 K 的边界复杂度。

自然会让人想知道，采用均匀覆盖元素的基于椭球的覆盖是否还有改进空间。例如，我们能否基于其他某个固定凸体的仿射变换，构造出更经济的覆盖？体积比理论的最新结果表明，一般而言这是不可能的。Galicer、Merzbacher 和 Pinasco [36]的工作（结合极性）表明，对于任意凸体 L，都存在一个凸体 K，使得对于任意仿射变换 T，若 $T(L)$ 包含于 K中，则 vol($T(L)$) 至多为 vol(K)$/(bn)^{n/2}$，其中b 是一个绝对常数。直接运用装填论证可知，如果将覆盖元素限制为某个固定凸体的仿射像，则（c，ε）覆盖的最坏情况规模为 $\Omega(n^{n/2})$，且与 ε 无关。

参考文献

[1] A. Abdelkader 和 D. M. Mount. 用于逼近凸体的经济德洛内集。第16届斯堪的纳维亚算法理论研讨会论文集。2018年，4:1–4:12. DOI: 10.4230/LIPIcs.SWAT. 2018.4.[2] D. Aggarwal、H. Bennett、A. Golovnev 和 N. Stephens-Davidowitz. CVP(P) 的精细化困难性——我们能够证明的一切（且仅限于此）。第32届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集。2021年，第1816–1835页。 DOI: 10.1137/1.9781611976465.109.[3] D. Aggarwal、D. Dadush 和 N. Stephens-Davidowitz. 在 2^n 时间内求解最近向量问题——离散高斯分布再度出击！第56届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会论文集。2015，第563–582页。 DOI: 10.1109/FOCS.2015.41.[4] M. Ajtai、R. Kumar 和 D. Sivakumar. 最短格向量问题的筛算法。第33届 ACM 计算理论年度研讨会论文集。2001，第601–610页。 DOI: 10 . 1145/380752.380857.[5] S. Arora. “证明的概率检验与近似问题的困难性”。博士论文。加州大学伯克利分校，1994年。[6] R. Arya、S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 逼近多面体组合复杂度的最优界。ACM 算法汇刊 18 (2022)，第1–29页。 DOI: 10.1145/3559106.[7] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 近乎最优的 ε-核构造及相关问题。第33届国际计算几何研讨会论文集。2017年，10:1–15。 DOI: 10.4230/LIPIcs. SoCG.2017.10. URL: https://arxiv.org/abs/1703.10868.[8] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 关于逼近多面体的组合复杂度。离散与计算几何 58.4 (2017)，第849–870页。 DOI: 10.1007/s00454- 016-9856-5.[9] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 最优近似多面体成员判定。第28届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集。2017年，第270–288页。 DOI: 10. 1137/1.9781611974782.18.

[10] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 多面体近似的最优面积敏感界。第28届计算几何年度研讨会论文集。2012年，第363–372页。 DOI: 10.1145/ 2261250.2261305.[11] S. Arya、G. D. da Fonseca 和 D. M. Mount. 多面体近似与马勒体积。第23届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集。2012年，第29–42页。 DOI: 10.1137/1.9781611973099.3.[12] S. Arya、T. Malamatos 和 D. M. Mount. 角点对近似范围查询复杂度的影响。离散与计算几何 41 (2009)，第398–443页。 DOI: 10.1007/ s00454-009-9140-z.[13] S. Arya、D. M. Mount 和 J. Xia. 半空间范围查询的紧下界。离散与计算几何 47 (2012)，第711–730页。 DOI: 10.1007/s00454-012-9412-x.[14] I. B´ar´any. 随机多胞体、凸体与近似。随机几何。W. Weil 编。第1892卷。数学讲义。Springer，2007年，第77–118页。 DOI: 10.1007/978-3-540-38175-4_2.[15] I. B´ar´any. M-区域与帽覆盖技术：综述。Rend. Circ. Mat. Palermo 65 (2000)，第21–38页。 URL: https://users.renyi.hu/~barany/.[16] I. B´ar´any 和 D. G. Larman. 凸体、经济帽覆盖与随机多胞体。Mathematika 35 (1988)，第274–291页。[17] A. Barvinok. 用多面体对凸体进行节约型逼近。国际数学研究通知 2014 (2013)，第4341–4356页。 DOI: 10.1093/imrn/rnt078.[18] H. Bennett、A. Golovnev 和 N. Stephens-Davidowitz. CVP 的定量困难性。第58届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会论文集。2017年，第13–24页。 DOI: 10.1109/FOCS. 2017.11.[19] J. Bl¨omer 和 S. Naewe. 最短向量、最近向量和连续极小值的抽样方法。理论计算机科学 410 (2009)，第1648–1665页。 DOI: 10.1016/j.tcs.2008.12.045.[20] K. B¨or¨oczky, Jr. 一般光滑凸体的逼近。Adv. Math. 153 (2000)，第325–341页。 DOI: 10.1006/aima.1999.1904.[21] J. Bourgain 和 V. D. Milman. 凸对称体的新体积比性质。Invent. Math. 88 (1987)，第319–340页。 DOI: 10.1007/BF01388911.[22] H. Br¨onnimann、B. Chazelle 和 J. Pach. 半空间范围查询有多难? 离散与计算几何 10 (1993)，第143–155页。 DOI: 10.1007/BF02573971.[23] E. M. Bronshteyn 和 L. D. Ivanov. 用多面体逼近凸集。Siberian Math. J. 16 (1976)，第 852–853 页。[24] D. Dadush. 近似整数规划的随机筛法算法。Algorithmica 70 (2014)，第208–244页。 DOI: 10.1007/s00453-013-9834-8.[25] D. Dadush 和 G. Kun. 格稀疏化与近似最近向量问题。Theo. of Comput. 12 (2016)，第1–34页。 DOI: 10.4086/toc.2016.v012a002.[26] D. Dadush、C. Peikert 和 S. Vempala. 通过 M-椭球覆盖在任意范数下进行格枚举算法。第52届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会论文集。2011年，第580–589页。DOI: 10.1109/FOCS.2011.31.

[27] I. Dinur、G. Kindler、R. Raz 和 S. Safra。将最近向量问题逼近到几乎多项式因子以内是 NP-hard。Combinatorica 23（2003），第 205–243 页。 DOI: 10.1007/s00493-003-0019- y.
[28] R. M. Dudley。具有可微边界的某些集合类的度量熵。Journal of Approximation Theory 10.3（1974），第 227–236 页。 DOI: 10.1016/0021-9045(74)90120-8.[29] K. Dutta、A. Ghosh、B. Jartoux 和 N. H. Mustafa。浅层装填、半代数集合系统、麦克比斯区域与多项式划分。离散与计算几何 61（2019），第 756–777 页。 DOI: 10.1007/s00454-019-00075-0.[30] M. Dyer、A. Frieze 和 R. Kannan。用于逼近凸体体积的随机多项式时间算法。计算机协会期刊 38（1991），第 1–17 页。 DOI: 10.1145/ 102782.102783.[31] H. G. Eggleston。凸性。剑桥大学出版社，1958 年。 DOI: 10.1017/CBO9780511566- 172.[32] F. Eisenbrand、N. H¨ahnle 和 M. Niemeier。覆盖立方体与最近向量问题。第27届年度计算几何研讨会论文集，2011年，第 417–423 页。 DOI: 10 .1145 / 1998196. 1998264.[33] F. Eisenbrand 和 M. Venzin。时间 $2^{0.802n}$内的近似最近向量问题。J. Comput. Sys. Sci. 124（2022），第 129–139 页。 DOI: 10.1016/j.jcss.2021.09.006.[34] P. van Emde Boas。另一个 NP完全问题及计算格中短向量的复杂度。数学系技术报告，阿姆斯特丹大学（1981年）。[35] G. Ewald、D. G. Larman 和 C. A. Rogers。欧几里得空间中凸体边界上线段的方向以及r维球的方向。Mathematika 17（1970），第 1–20 页。 DOI: 10.1112/S0025579300002655.[36] D. Galicer、M. Merzbacher 和 D. Pinasco。凸体最大体积比的渐近估计。Revista Matem´atica Iberoamericana 37（2021），第 2347–2372 页。 DOI: 10.4171/RMI/1263.[37] M. Gr¨otschel、L. Lov´asz 和 A. Schrijver。几何算法与组合优化。施普林格出版社，1988年。 DOI: 10.1002/bimj.4710320805.[38] P. M. Gruber。凸体最佳逼近与分步逼近的渐近估计 I。Forum Math. 5（1993），第 281–298 页。 DOI: 10.1515/for m.1993.5.281.[39] B. Gr¨unbaum。凸集的对称性度量。纯数学研讨会论文集，第 VII 卷。1963 年，第 233–270 页。 DOI: 10.1090/pspum/007/0156259.[40] G. Hanrot、X. Pujol 和 D. Stehl´e。最短格向量问题与最近格向量问题的算法。国际编码与密码学会议。2011年，第 159–190 页。 DOI: 10.1007/978-3- 642-20901-7_10.[41] A. Joux 和 J. Stern。格约化：密码分析员的工具箱。J. Cryptology 11（1998），第 161–185 页。 DOI: 10.1007/s001459900042.[42] R. Kannan。闵可夫斯基凸体定理与整数规划。Math. Oper. Res 12（1987），第 415–440 页。 DOI: 10.1287/moor.12.3.415。

[43] G. Kuperberg。从马勒猜想到高斯链接积分。Geom. Funct. Anal. 18（2008），第 870–892 页。 DOI: 10.1007/s00039-008-0669-4.[44] A. K. Lenstra、H. W. Lenstra Jr. 和 L. Lov´asz。具有有理系数的多项式因式分解。Math. Ann. 261（1982），第 515–534 页。 DOI: 10.1007/BF01457454.[45] H. W. Lenstra Jr.。变量数固定的整数规划。Math. Oper. Res 8（1983），第 538–548 页。 URL: https://www.jstor.org/stable/3689168.[46] A. M. Macbeath。关于非齐次格的一个定理。Ann. of Math. 56（1952），第 269–293 页。 DOI: 10.2307/1969800.[47] M. Meyer 和 A. Pajor。关于 Blaschke-Santal´o 不等式。Arch. Math. 55（1990），第 82–93 页。 DOI: 10.1007/BF01199119.[48] M. Meyer 和 E. M. Werner。凸体的 Santal´o 区域。Trans. Amer. Math. Soc. 350（1998），第 4569–4591 页。 DOI: 10.1090/S0002-9947-98-02162-X.[49] D. Micciancio 和 P. Voulgaris。一种基于沃罗诺伊胞计算、用于求解大多数格问题的确定性单指数时间算法。SIAM J. Comput. 42（2013），第 1364–1391 页。 DOI: 10.1137/100811970.[50] V. D. Milman 和 A. Pajor。非对称凸体的熵与渐近几何。Adv. Math. 152（2000），第 314–335 页。[51] N. H. Mustafa 和 S. Ray。Macbeath 定理的近乎最优推广。第31届理论计算机科学国际研讨会论文集，2014年，第 578–589 页。 DOI: 10.4230/ LIPIcs.STACS.2014.578.[52] M. Nasz´odi、F. Nazarov 和 D. Ryabogin。用多面体精细逼近凸体。Amer. J. Math 142（2020），第 809–820 页。 DOI: 10.1353/ajm.2020.0018.[53] M. Nasz´odi 和 M. Venzin。凸体覆盖与最近向量问题。离散与计算几何 67（2022），第 1191–1210 页。 DOI: 10.1007/s00454-022-00392-x.[54] F. Nazarov。Bourgain-Milman定理的 H¨ormander 证明。泛函分析的几何方面。Springer，2012年，第 335–343 页。 DOI: 10.1007/978-3-642-29849-3_20.[55] P. Q. Nguyen 和 J. Stern。密码学中格的两面。国际密码学与格会议，2001年，第 146–180 页。 DOI: 10.1007/3-540-45537-X_24.[56] A. M. Odlyzko。背包密码系统的兴衰。应用数学研讨会，1990年，第 75–88 页。 DOI: 10.1090/psapm/042.[57] C. A. Rogers 和 G. C. Shephard。凸体的差体。Arch. Math. 8（1959），第 220–233 页。 DOI: 10.1007/BF01899997.[58] T. Rothvoss 和 M. Venzin。时间 $2^{0.802n}$ 内的近似最近向量问题——现在适用于任意范数！第23届整数规划与组合优化国际会议（IPCO 2022）论文集。2022年，第 440–453 页。 DOI: 10.1007/978-3-031-06901-7_33.[59] L. A. Santal´o。 n维空间中凸体的一个仿射不变量。Port. Math. 8（1949）。（西班牙语），第 155–161 页。[60] R. Schneider。凸体：布伦–明可夫斯基理论。剑桥大学出版社，1993年。DOI: 10.1017/CBO9780511526282。

[61] G. Toth. 凸集的对称性度量与稳定性。Springer，2015。 DOI: 10.1007/978-3-319-23733-6。[62] S. Vempala。几何随机游走：综述。 组合与计算几何。编者：J. Goodman、J. Pach 和 E. Welzl。MSRI，2005，第 573–612 页。[63] C. Vernicos 和 C. Walsh。“凸体的旗可逼近性与希尔伯特几何的体积增长”。HAL Archive（hal-01423693i）。2016。 URL：https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01423693。