arXiv:2303.08413v3 [math.AC] 5 Apr 2024

关于交换环上的矩阵可逆扩张

GRIGO RE C ˘ALUG ˘AREANU、HORIA F. POP、ADRIAN VASIU

Abstract. 我们引入交换环的环类 E_2 （分别为 SE_2），其中每个元素属于该环的幺模 2×2 矩阵 R 都可扩张为可逆 3×3 矩阵（分别为其 (3, 3) 元素为 0 的可逆 3×3 矩阵）。在维数 1 的戴德金整环、多项式环或 Hermite 环中，只有初等约化环属于该环类。利用这一点，以及稳定秩、单位元和投射模的诠释，我们重新得到（并常常改进）Kaplansky、McGovern、Roitman、Shchedryk 和 Wiegand 的判据，并为 Hermite 环成为初等约化环给出新的判据。例如，我们通过（1）涉及幺模三元组的方程，以及（2）涉及商环对主理想取商所得环的单位元的某些映射的满射性，刻画了初等约化环 Hermite 环。我们运用这些判据证明，每个 B´ezout 环 R，只要它是 $J_{2,\ 1}$ 整环，或是一个 $(SU)_2$ 环（由 Lorenzini 引入），且对每个非零 $a\in R$，都不存在由 2 个元素生成的秩 1 自对偶投射 R/Ra-模（例如，其所有元素都是平方），便是初等约化环，从而解决或部分解决了 Lorenzini 提出的问题。我们还引入并研究了许多其他环类。

1. Introduction

对于带恒等元的交换环 R，我们用 $U(R)$ 表示其单位群，用 $J(R)$ 表示其雅各布森根，并用 $Pic(R)$ 表示其皮卡群。对于 $n\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$，我们用 $\mathbb{M}_n(R)$ 表示元素属于 R 的 $n\times n$ 阶矩阵环，用 I_n 表示其恒等元，用 $GL_n(R)$ 表示其可逆矩阵群，并用 $SL_n(R):=\{M\in GL_n(R)|\det(M)=1\}$ 表示 $GL_n(R)$ 的特殊线性子群。

对于自由 R-模 F，令 $Um(F)$ 表示 F 中幺模元素的集合，即满足以下条件的元素 $v\in F$：存在一个 R-线性映射 $L:F\to R$，使得 $L(v)=1$；我们有集合恒等式 $U(R)=Um(R)$。

对于 $A\in\mathbb{M}_n(R)$，令 A^T 表示其转置，并令 $\chi_A(\lambda)\in R[\lambda]$ 表示其（首一）特征多项式。由于我们将广泛使用有序对、三元组和四元组，R^n 的元素将记作 n 元组；但对于由 A 定义的 R- 线性映射 $L_A:R^n\to R^n$，则将其视为 $n\times 1$ 列。令 K_A 和 Q_A 分别表示 L_A 的核与像。

回顾一下，若存在矩阵 $M,N\in GL_n(R)$ 使得 $A=MBN$，则称两个矩阵 A, $B\in\mathbb{M}_n(R)$ 等价；此外，若可以取 $N=M^{-1}$，则称 A 和 B 相似。若 A 和 B 的所有元素都属于 I，则称它们模 R 的理想 I 同余。所谓将 A模 I 约化，是指 A 在 $\mathbb{M}_n(R/I)\cong\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(I)$中的像。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：15A83、13G05、19B10。次要分类：13A05、13F05、13F25、15B33、16U10。*Key words and phrases.* B´ezout 环、初等因子环、Hermite 环、投射模、稳定秩、幺模。

对于 $Q \in SL_3(R)$，令 $\Theta_R(Q) \in \mathbb{M}_2(R)$ 为删除最后一行和最后一列后得到的矩阵。$\Theta_R(Q)$模R 的极大理想的约化均非零，因此 $\Theta_R(Q) \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。规则 $Q \to \Theta_R(Q)$ 定义了一个映射

$$\Theta := \Theta_R : SL_3(R) \to Um(\mathbb{M}_2(R))$$

本文研究 Θ 的像，尤其研究 R 环中使 Θ 满射（即它有一个右逆）的那些环。

If $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(R)$, let $\sigma(M) = \sigma_R(M) := \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \det(M)^{-1} \end{bmatrix} \in SL_3(R)$。显然 $\Theta(\sigma(M)) = M$，因此 $GL_2(R) \subseteq Im(\Theta)$。

定义 1.1。若存在 $A^+ \in SL_3(R)$ 使得 $A = \Theta(A^+)$，则称矩阵 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 是 SL_3-可扩张的，并称 A^+ 为 A 的一个 SL_3-扩张。若可选取 A^+ 使其 (3, 3) 项为 0，则称 A 是简单的 SL_3-可扩张，并称 A^+ 是 A 的一个简单 SL_3-扩张。

由于本文不考虑满足 $n \geq 4$ 的 SL_n-扩张，以下“可扩张”均指 SL_3-可扩张。

判定 $A \in U(\mathbb{M}_2(R))$ 是否存在（简单）可逆扩张$A^+ \in SL_3(R)$的问题，与有限生成稳定自由模的经典研究有关；这类研究旨在将元素属于 R、且其 $m \times m$子式生成 R 的 $m \times (m+n)$ 矩阵扩张为 $GL_{m+n}(R)$ 中的可逆矩阵（例如，参见 [23]）。不过，这个问题更适合置于一个更一般的问题框架中，即寻找具有指定元素和特征多项式系数的 $(m+n) \times (m+n)$ 矩阵。为说明这一点，对于 $B \in \mathbb{M}_n(R)$，令 $\nu_B := \chi'_B(0) \in R$，并令 $\mathrm{Tr}(B) \in R$ 表示其迹；例如，对于 $n = 3$，有 $\chi_B(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{Tr}(B)\lambda^2 + \nu_B\lambda - 1$。如果 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 有一个简单扩张 A^+，那么 A^+ 有 5 个指定元素（共 9 个），而 $\chi_{A^+}(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{Tr}(A)\lambda^2 + \nu_{A^+}\lambda - 1$ 有 2 个指定系数（共 3 个）；非空子集

$$\nu_A := \{\nu_{A^+} | A^+ \; is \; a \; simple \; extension \; of \; A\} \subseteq R$$

在注 3.3(5) 和第 5.1 小节中有所涉及。对于域，这类一般问题历史悠久，且往往已有非常完整的结果（例如，见 [10] 和 [17]）。

下文中，我们将用“iff”作为“当且仅当”的简写。

第 3.1 小节中证明的以下引理给出了一些基本事实。

引理 1.2。以下结论成立：

(1) 矩阵 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 可扩张，当且仅当其模 $R\det(A)$ 约化后可简单扩张。因此，若 $\det(A) = 0$，则 A 可扩张，当且仅当它可简单扩张。

(2) 对于 $M, N \in GL_2(R)$ 和 $Q \in SL_3(R)$，有恒等式

$$\Theta(\sigma(M)Q\sigma(N)) = M\Theta(Q)N$$

而 Q和 $\sigma(M)Q\sigma(N)$ 的 (3, 3) 元素等价（因此其中一个元素为 0，当且仅当另一个元素为 0）。此外，$\Theta(Q^T) = \Theta(Q)^T$。

(3) 矩阵 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 是否可扩张（或可简单扩张）仅取决于双陪集 $[A] \in GL_2(R)\backslash\mathbb{M}_2(R)/GL_2(R)$。此外，$A$ 可扩张（或可简单扩张）当且仅当 A^T 也如此。因此，$Im(\Theta)$ 在转置和等价下保持不变。

一般而言， Θ 不是满射。事实上，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个维数为 n 的正则有限生成 $\mathbb{Z}$-代数 R，使得某个适当的 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 不可扩张（见定理 1.12(4) 以及例 4.3、6.1 和 7.3）；若 $n \geq 2$，我们甚至可以假设 R 是唯一分解整环（UFD）。

对于环类 Z， SZ（分别为 WZ）通常表示一个子类（分别为一个较大的类），其中 S（分别为 W）表示“强”或“简单”（分别为“弱”）。如果 R 是可逆环且为整环，我们就称 R 为可逆整环。

本文借鉴 [13] 和 [24], 的思路，使用带下标的字母来命名并研究十三类环。定义 1.1 自然引出了前五类。

定义 1.3。我们称 R 为：

(1) 可扩张环，如果每个满足 $\det(A) = 0$ 的 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都可扩张；(2) 可逆环，如果 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中的每个矩阵都可扩张（即 Θ 是满射）；(3) 可逆环，如果 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中的每个矩阵都可简单扩张；(4) 三角矩阵环，如果 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中的每个上（或下）三角矩阵都可扩张；(5) 三角矩阵环，如果 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中的每个上（或下）三角矩阵都可简单扩张。

显然，每个 SE_2 环都是 $SE_2^{\triangle}$ 环。我们也讨论 Π_2 整环等。

我们回顾一下：如果对所有 m、$n \in \mathbb{N}$，每个元素属于 R 的 $m \times n$ 矩阵都可以进行对角化约简，即等价于一个非对角元均为 0、对角元为 $a_{1,\ 1}$，……，$a_{s,\ s}$ 的矩阵，其中 $s := \min\{m, n\}$ 满足：对所有$i \in \{1, \ldots, s-1\}$，$a_{i,\ i}$整除 $a_{i+1,\ i+1}$，那么称 R 为初等因子环，简称 EDR。等价地， R 是 EDR，当且仅当 $\mathbb{M}_2(R)$ 中的每个矩阵都等价于一个对角矩阵；也当且仅当每个有限表示的 R-模都是循环R-模的直和（参见 [22], 推论 (3.7) 和定理 (3.8)；另见 [43], 定理 2.1）。初等因子整环简称 EDD。

例 1.4. 设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。若存在矩阵 $M, N \in GL_2(R)$，使得 $MAN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}$（例如，当 R 是初等约化环时，这一条件成立），则根据引理 1.2(2)，乘积 $\sigma(M^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sigma\det(\ )(N^{-1})$ 是 A 的一个简单扩张。因此，每个初等约化环都是一个 SE_2 环。

Π_2 环的下述分类在第4.1小节中得到证明。

定理 1.5. 对于环 R，下列命题等价：

(1) 环 R 是一个 Π_2 环。(2) $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中每个行列式为零的矩阵都是非满的，即它是两个尺寸分别为 2×1 和 1×2 的矩阵的乘积（等价地， R-线性映射 L_A 可分解为复合的 R-线性映射 $R^2 \to R \to R^2$）。

(3) 对于 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中每个行列式为零的矩阵，R-模 K_A 和 Q_A 中的一个（因此两个）都与 R 同构。

(4) 每个由两个元素生成的秩 1 射影 R-模都同构于 R。

关于前 Schreier 整环，参见第 2.2 小节。回顾一下，整环 R 是前 Schreier 整环，当且仅当 $\mathbb{M}_2(R)$ 中每个行列式为零的矩阵都是非满秩的（参见 [8], 定理 1 或 [29], 引理 1）。因此，每个前 Schreier 整环都是 Π_2 整环。类似地，如果 $Pic(R)$ 是平凡的，那么 R 是 Π_2 环。

下文将经常用到 Bass（见 [1]）、Shchedryk（见 [36]）和 McGovern（见 [26]）分别引入的以下概念。

定义 1.6。设 $n \in \mathbb{N}$。回忆一下， R 具有:

(1) 稳定秩 n，记作 $sr(R) = n$，如果 n 是具有如下性质的最小自然数：每个 $(a_1, \ldots, a_n, b) \in Um(R^{n+1})$ 都是可约的，即存在 $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$，使得 $(a_1 + br_1, \ldots, a_n + br_n) \in Um(R^n)$（当不存在满足 $sr(R) = n$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 时，则 $sr(R) := \infty$，并约定 $\infty > n$）；

(2)（分式）稳定秩1.5，若对每个 $(a, b, c) \in Um(R^3)$ 且 $c \neq 0$，都存在 $r \in R$，使得 $(a + br, c) \in Um(R^2)$，则记作 $fsr(R) = 1.5$；
(3) 几乎稳定秩 1，若对每个不包含于 $J(R)$ 的理想 I of R，都有 $sr(R/I) = 1$，则记作 $asr(R) = 1$。

环的所有适当幺模元组所满足的稳定秩类型条件，至少可以追溯到 Kaplansky。例如， [19], Thm. 5.2 的核心可用本文的术语表述如下：环 R 是 $SE_2^{\triangle}$ 环，当且仅当对所有 $(a, b, c) \in Um(R^3)$，都存在 $(e, f) \in R^2$，使得 $(ae, be + cf) \in Um(R^2)$。定理 3.2 除了许多其他内容外，还证明了上述文献结果的一般（非三角形）形式：环 R 是 SE_2 环，当且仅当对所有 $(a, b, c, d) \in Um(R^4)$，都存在 $(e, f) \in R^2$，使得 $(ae + cf, be + df) \in Um(R^2)$。

我们回顾一下，若 R 的（Krull）维数为 d，则 $sr(R) \leq d + 1$（诺特情形见 [1], 定理 11.1，一般情形见 [16], 推论 2.3）。此外，若 R 是维数为 2 的有限域上的有限生成代数，或者 R 是域（该域是有限域的代数扩张）上的二元多项式代数，则 $sr(R) \leq 2$（见 [42], 推论 17.3 和 17.4）。

每个 SE_2 环都是 E_2 环，但我们不知道逆命题何时成立。不过，若 $sr(R) \leq 2$，则逆命题成立（见推论3.7(3)）；例 6.2 表明，存在可扩张但不可简单扩张的 2×2 矩阵。

接下来的两个环类由引理 1.2(1) 和环类 Π_2所启发。

定义 1.7. 我们称 R 为:

(1) Z_2 环，若对每个矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，都存在一个矩阵 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，它模 R $\det(A)$ 与 A 同余，且 $\det(B) = 0$;

(2) WZ_2环，若对每个矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，都存在一个矩阵$B \in \mathbb{M}_2(R)$，它模 $R\det(A)$ 与 A 同余，且 $\det(B) = 0$。

我们在第4.3小节证明了 Z_2 环的如下分类。

定理 1.8. 对于环 R，以下三个命题等价:

(1) 环 R 是 Z_2 环。

(2) 对于每个矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，都存在一个矩阵 $C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得 $A + \det(A)C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，并且 $\det(C) = \det(A + \det(A)C) = 0$。

（3）对于每个矩阵 $A \in \mathbb{M}_2(R)$，都存在一个矩阵 $C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得 $A + \det(A)C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，并且 $\det(C) = \det(A + \det(A)C) = 0$。

此外，以下第四个命题蕴含这三个命题：

(4) 对每个非零 $a \in R$，集合映射

$$\{A \in Um(\mathbb{M}_2(R)) | \det(A) = 0\} \to \{\bar{A} \in Um(\mathbb{M}_2(R/Ra)) | \det(\bar{A}) = 0\},$$

由模 Ra 约化定义，是满射。

若 $sr(R) \leq 4$，则这四个命题等价。

若 $sr(R) = 1$，或 $asr(R) = 1$，或 $fsr(R) = 1$，则存在经典的单位元解释（参见推论 2.4），因此，最后六类环为将这些解释推广到 Hermite 环和 $sr(R) = 2$ 等情境提供了框架。

定义 1.9。我们称 R 为：

(1) 一个 U_2 环，若对于每个 $(a, b) \in Um(R^2)$ 和 $c \in R$，自然乘积同态

$$U(R/Rac) \times U(R/Rbc) \to U(R/Rc)$$

是满射，即交换图

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ccc} U(R/(Rac \cap Rbc)) & \xrightarrow{\text{red}} & U(R/Rac) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{red}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{red}} \\ U(R/Rbc) & \xrightarrow{\text{red}} & U(R/Rc) \end{array}$$

其箭头为自然约化，不仅是一个拉回，而且也是一个推出；

(2) 一个 WU_2 环，若对于每个 $(a, b) \in Um(R^2)$ 和 $c \in R$，(1) 中的自然乘积同态包含 $\{x^2 | x \in U(R/Rc)\}$；

(3) 一个 V_2 环，若对于每个 $(a, b, c) \in Um(R^3)$，方程

$$\text{(II)} \qquad (1 - ax)(1 - cw) = y(b + acz)$$

关于不定元 x, y, z, w 有一个解，且该解在 R^4 中满足 $xw = yz$（注意，对每个这样的解，我们有 (x, y, w)、$(1 - ax, y, 1 - cw) \in Um(R^3)$）；

(4) 若对于每个 $(a, b, c) \in Um(R^3)$，都存在 $x, y, z_1, z_2, w, a', c', a''$ 以及 c'' 中的元素 R，使得 $(a'' - ax, y, a'c'b + az_1 + cz_2, c'' - cw) \in Um(R^4)$、$(a, a'a'')$、$(c, c'c'') \in U(R^2)$，并且

$$\text{(III)} \qquad (a'' - ax)(c'' - cw) = y(a'c'b + az_1 + cz_2);$$

(5) 若对于每个 $(a, b) \in Um(R^2)$ 和 $c \in R$，同态 $U(R/Rabc)) \to U(R/Rab) \cong U(R/Ra) \times U(R/Rb)$ 的像是两个同态 $U(R/Rabc) \to U(R/Ra)$ 和 $U(R/Rabc) \to U(R/Rb)$ 的像的乘积，则称其为一个 W_2 环；

（6）一个 WW_2 环，若对于每个 $(a, b, c) \in R^3$ 且 $(b, c) \in Um(R^2)$，其在乘积群 $U := U(R/(Ra + Rc)) \times U(R/[R(1 - a) + Rc])$ 中的像 $(b_0, b_1) \in U$ 属于两个自然约化同态 $U(R/Ra) \times U(R/R(1 - a)) \to U$ 和 $U(R/Rc) \to U$ 的像的乘积。

每个 V_2 环都是一个 WV_2 环，因为在定义 1.9(4) 中取 $a' = c' = a'' = c'' = 1$、$z_2 = 0$ 和 $z_1 = zc$ 时，方程（III）就变成方程 (II)。

注 1.10. 参见定义 1.9，我们注意到，R 是一个 U_2 环（分别地，一个 WU_2 环），当且仅当条件 (1)（分别地，条件 (2)）仅对满足 $a + b = 1$ 的三元组 $(a, b, c) \in R^3$ 成立。类似地，R 是一个 WW_2 环，当且仅当条件 (6) 仅对满足 $c - 1$ 可被 b 整除的三元组 $(a, b, c) \in R^3$ 成立。

本文的核心思路是找出能够“编码”环的算术性质和稳定秩性质的方程，这也解释了为何引入诸如 SE_2、 V_2 和 Z_2 这样的环类（另见第 3.2 小节中的 R-代数）。

第 4.4 小节中证明的下一个定理，汇总了我们已介绍的各类环之间的重要联系。

定理 1.11。以下命题成立：

(1) 每个 E_2 环都是 WZ_2 环，每个 SE_2 环都是 Z_2 环。此外，若$sr(R) \leq 2$，则每个 E_2 环都是 Z_2 环。(2) 设 R 是前 Schreier 整环的直积。那么， R 是幺模环当且仅当它是 WZ_2 环。(3) 若 R 是 Π_2 环，则 R 是 SE_2 环当且仅当它是 Z_2 环。(4) 若 R 是 $SE_2^{\triangle}$ 环，则 R 是 V_2 环。若 R是 $SE_2^{\triangle}$ 整环，则 R是 U_2 环。若 R 既是 Π_2 环又是 WV_2 环，则 R 是 U_2 环。(5) 假设 $sr(R) \leq 4$。若 R 是 E_2（分别是 SE_2）环，则对所有 $a \in R$， R/Ra 都是 E_2（分别是 SE_2）环。

(6) 如果对所有 $a \in R$， R/Ra 都是 Π_2 环，那么 R 就是 E_2 环。

对于一维整环，根据定理 1.5 和 1.11(4)，我们在第 4.5 小节证明以下定理。

定理 1.12。设 R 是维数 1 的整环。那么以下性质成立：

(1) $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中每个行列式非零的矩阵都可简单扩张。(2) 环 R 是一个 $SE_2^{\triangle}$ 整环、一个 V_2 整环和一个 Z_2 整环。(3) 环 R 是一个 Π_2 整环，当且仅当它是一个 SE_2 （或一个 E_2）整环；这又当且仅当$Pic(R)$ 是平凡的。(4) 假设 R 是一个 Dedekind 整环。环 R 是一个 Π_2 整环，当且仅当它是主理想整环（PID）。

回顾一下，如果对每个 $(a,b) \in R^2$， R 都满足 a 整除 b 或 b 整除 a （见 [19], 第 10 节，定义），则称 R 为赋值环；等价地， R 的理想按集合包含关系全序排列。每个约化赋值环都是整环[1]，因此也是赋值整环（这已在 [19], 第 10 节中说明）。

回顾一下，如果 R 的每个有限生成理想都是主理想，则称 R 为 B´ezout 环。每个 B´ezout 环都是算术环，也就是说，其理想格是分配格，并且在素理想处的所有局部化都是赋值环（见 [18], 定理 1 和 2）。众所周知， R 是 B´ezout 环，当且仅当每个元素属于 R 的对角矩阵都可以进行对角化约简（见 [22], 定理 (3.1) ）。另外，回顾一下，若满足 $RUm(R^2) = R^2$，则称 R 为 Kaplansky 意义下的 Hermite 环；等价地，若每个元素属于 R 的 1×2 矩阵都可以进行对角化约简，也称 R 为 Hermite 环。因此，每个 EDR 都是 Hermite 环。如果 R 是 Hermite 环，则 $sr(R) \in \{1, 2\}$ （见 [28], 命题 8(i)；另见 [44], 定理 2.1.2 ）。注意，Hermite 环是 B´ezout 环，但逆命题不成立（见 [13], 例 3. 4, [43], 例 3.3，或 [5], 命题 8）；不过，Hermite 整环与 B´ezout 整环相同。另外， R 是 Hermite 环，当且仅当对所有 p、 $q \in \mathbb{N}$ 以及每个 $p \times q$ 矩阵

[1]如果 R 是一个不是整环的约化局部环，那么存在非零元素a、 $b \in R$使得 $ab = 0$，因此交集 $Ra \cap Rb$是幂零的，故为 0，由此可知有限生成理想 $Ra + Rb \cong Ra \oplus Rb$不是主理想。

B 的元素属于 R，存在 $M \in GL_p(R)$ 和 $N \in GL_q(R)$，使得 MB 和 BN 都是下三角矩阵（等价地，都是上三角矩阵）（见 [14], 定理 3）。如果 R 是 B´ezout 整环，那么它是最大公因数整环（最大公因数均存在），因此 $Pic(R)$ 是平凡的；于是 R 也是一个 Π_2 整环。

若 R 是最大公因子整环，则对于 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$，有 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 当且仅当其元素整体互素，即 $\gcd(a,b,c,d) = 1$。

稳定秩为 1 或 1.5 的 B´ezout 整环也分别在 [33] 和 [38], [39] 及 [3] 中得到研究。交换主理想整环、半局部整环（尤其是赋值整环）以及稳定秩为 1 的 B´ezout 整环，其稳定秩为 1.5，因此也具有几乎稳定秩 1（见推论 2.3）。为方便读者，详情见第 2.3 小节（参见例 2.6 和 2.7）。

我们对 B´ezout 整环以及更一般的 Hermite 环的应用汇总于以下定理，该定理在第 4.6 小节中证明。

定理 1.13. 设 R 是一个 Hermite 环。则以下十个命题等价：

(1) 环 R 是初等约化环。（2）环 R 是一个 SE_2（等价地，是一个 $SE_2^{\triangle}$）环。（3）环 R 是一个 Π_2 环和一个 Z_2 环。（4）环 R 是一个 E_2 环。（5）环 R 是一个 Π_2 环和一个 V_2 环。（6）环 R 是一个 Π_2 环和一个 WV_2 环。（7）环 R 是一个 U_2 环。（8）给定两个幺模对 (a,b)、$(c,d) \in Um(R^2)$，存在 $t \in R$，使得

t我们可以用 (a,d_1)、$(b,d_2) \in Um(R^2)$ 分解 $d + ct = d_1 d_2$。

(9) 给定 $(a,d) \in R^2$，对于 $b := 1 - a$ 和 $c \in 1 + Rd$，存在 $t \in R$，使得我们可以用 (a,d_1)、$(b,d_2) \in Um(R^2)$ 分解 $d + ct = d_1 d_2$。

(10) 对每个 $a \in R$, R/Ra 都是一个 Π_2 环（等价地，对每个 $a \in R$，由两个元素生成的每个秩 1 射影 R/Ra-模都是自由的）。

此外，这十个命题均可由以下第十一个命题推出：

(11) *The ring R is a W_2 domain.*

例 1.14. 设 R 是一个 Hermite 环，但不是初等约化环（参见 [13], 第 4 节和例 4.11）。由定理 1.13 可知，R 既不是 E_2 环，也不是 U_2环，并且存在 $a \in R$，使得 R/Ra 不是一个 Π_2 环。

在讨论接下来的应用之前，我们回顾 Lorenzini 在 [24], 引理 4.1 和定义 4.6 中引入的若干环类，包括它们的“弱”推广。

定义 1.15. 设 $n \in \mathbb{N}$。我们称 R 为：

(1) 一个 $J_{2,1}$ 环（分别为 $WJ_{2,1}$环），如果对每个 $(a,b,c,d,\alpha,\Delta) \in R^6$，使得方程

$$ax + by + cz + dw = \alpha \tag{IV}$$

在不定元 x,y,z,w 中有一个在 R^4 中的解（分别地，使得 $(a,b,c,d) \in Um(R^4)$），方程 (IV) 在 R^4 中有一个解，且满足 $xy - zw = \Delta$；

(2) 若对每个 $A \in \mathbb{M}_n(R)$（分别地，对每个 $A \in Um(\mathbb{M}_n(R))$），都存在 $N \in SL_n(R)$ 使得 AN 是对称的（等价地，存在 $M \in SL_n(R)$ 使得 MA 是对称的；等价地，存在 M，$N \in SL_n(R)$ 使得 MAN 是对称的），则称其为一个 $(SU')_n$ 环（分别地，一个 $(WSU')_n$ 环）；

(3) 若对于每个 $A \in \mathbb{M}_n(R)$（分别地，对于每个 $A \in Um(\mathbb{M}_n(R))$），都存在 $N \in GL_n(R)$ 使得 AN 为对称矩阵（等价地，存在 $M \in GL_n(R)$ 使得 MA 为对称矩阵；等价地，存在 M、$N \in GL_n(R)$ 使得 MAN 为对称矩阵），则称其为一个 $(SU)_n$（分别地，一个 $(WSU)_n$）环；

(4) 若每个对称 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都是可扩张的（分别地，可简单扩张的），则称其为一个 E_2^{sym}（分别地，SE_2^{sym}）环。

上述 (2) 和 (3) 的等价性源于这样一个事实：对于每个对称矩阵 $A \in \mathbb{M}_n(R)$ 以及任意 $M \in GL_n(R)$，MAM^T 都是对称的。

取 (1) 中的 $(a, b, d) \in Um(R^3)$ 和 $(c, \alpha, \Delta) = (0, 1, 0)$，可得每个 $WJ_{2,1}$ 环都是 V_2 环。由于每个 $J_{2,1}$ 环都是 Hermite 环（见 [24], 命题 4.11），每个 $J_{2,1}$ 整环都是 B´贝祖整环，因此也是 Π_2 整环。由此以及定理 1.13 中的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (5)，可得：

推论 1.16. 设 R 为一个 $J_{2,1}$ 环。那么 R 是初等约化环当且仅当它是一个 Π_2 环（因此每个 $J_{2,1}$ 整环都是初等除环）。

因此，对于任意交换环，在 [24],例 3.5 中所作的构造总会得到初等约化环，或得到非 Π_2 环（特别地，所得到的整环是初等除环）。

每个 $(SU')_n$ 环都是一个 $(SU)_n$ 环。此外，一个 $(WSU)_2$ 环是 E_2（分别为 SE_2 环）当且仅当它是 E_2^{sym}（分别为 SE_2^{sym}）环。而且，每个 $(SU)_n$ 环都是 Hermite 环（见 [24], 命题 3.1）。我们在第 4.7 小节证明：

定理 1.17. 设 R 是一个 $(WSU)_2$ 环。则以下性质成立：

(1) 环 R 是一个 WU_2 环。

(2) 假设 R 的每个元素都是 R 中某个元素的平方（例如，若 R 是一个分式域代数闭的整闭整环，或是一个特征 2 的完美环，则此条件成立）。那么 R 是一个 U_2 环。此外，若 R 是一个 $(SU)_2$ 环，则 R 是一个初等约化环。

关于如何用皮卡群中阶为 1 或 2 的元素来解释定理 1.17(1)，请参见例 4.14。由此直接结合定理 1.13 和定理 1.17 可得：

推论 1.18. 设 R 是一个 Hermite 环，且对每个 $a \in R$，由 2 个元素生成的所有秩 1 自对偶射影 R/Ra-模都是自由的。那么以下性质成立：

(1) 环 R 是一个 WU_2 环，当且仅当它是初等约化环。
(2) 若 R 是一个 $(SU)_2$ 环，则 R 是一个初等约化环。

为了与佩尔型方程建立联系，并提供更多（WSU）$_2$ 环是初等约化环的例子，我们首先在第 4.8 小节证明以下非满佩尔型判据。

判据 1.19. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 是对称的且行列式为零。那么以下性质成立：

(1) 如果存在 $(e, f) \in R^2$ 使得$ae^2 - cf^2 \in U(R)$，则矩阵 A 可简单扩张；若 R的特征为 2，逆命题也成立。

(2) 假设 R 是特征为 2 的约化 Hermite 环。如果 b 不是零因子，则 A 可简单扩张。

结合定理 1.13 和判据 1.19，我们得到以下在第 4.9 小节中证明的 Pell 型判据。

判据 1.20. 设 R是一个 $(SU)_2$环。那么，对于所有 $(a, b, c) \in Um(R^3)$，若存在 $(e, f) \in R^2$ 使得 $(ae^2 - cf^2, ac - b^2) \in Um(R^2)$，则 R是一个初等约化环；若 R 的特征为 2，逆命题也成立。

例 1.21. 假设 R 的特征为 2。回顾一下，其完美化R_{perf} 是由 $n \in \mathbb{N}$ 索引的归纳系统的归纳极限，其中所有过渡同态都是 R 的弗罗贝尼乌斯自同态。若 R 是一个 WU_2环，则 R_{perf} 是一个 U_2 环。由此以及定理 1.17(2) 可知，特征为 2 的$(WSU)_2$环的完美化是 U_2环。

对于几乎稳定秩 1，我们有以下应用：

推论 1.22. 假设 $asr(R) = 1$。则以下性质成立：

(1) 环 R 是一个 $SE_2^{\triangle}$ 环。(2)（McGovern）若 R 是 Hermite 环，则 R 是一个初等约化环。

推论 1.22(1) 在第 3.5 小节中证明。推论 1.22(2) 直接由推论 1.22(1) 以及定理 1.13 的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 得出。若 $asr(R) = 1$，则 R 是一个 U_2 环（见推论 2.3(4)），因此推论 1.22(2) 也可由此以及定理 1.13 的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (7) 得出。推论 1.22(2) 的第三种证明见注 5.2。推论 1.22(2) 最早见于 [26], 的定理 3.7。

Kaplansky 证明了，每个克鲁尔维数至多为 1 的 B´ezout 整环都是初等除环（例如，参见 [40], Cor.）。[12], Thm. 1 声称，Hermite 环也满足同样的结论；[12], Thm. 2 则验证，若 [12], Thm. 1 成立，那么每个半遗传且克鲁尔维数为 2 的 B´ezout 环都是初等约化环。由于 [12], Thm. 1 的证明并不完整，例 7.4 和 7.5 在适当的环假设下证明了较弱的结果。因此，我们仍不知道每个克鲁尔维数为 2 的 B´ezout 整环是否都是初等除环。不过，我们有以下新判据，它在第 4.10 小节中得到证明，并且是定理 1.13 的直接应用：

判据 1.23. 对于 B´ezout 整环，R 以下命题彼此等价：

(1) 环 R 是一个初等除环。

(2) 对于所有三元组 $(a, b, s) \in R^3$，存在一对 $(q, r) \in R^2$，使得定义 $y := r + s - asq - bqr$ 和 $t := 1 + q - aq - br$ 后，我们有 $t \in Ry + Rat$（等价地，存在一个乘积分解 $y = y_1y_2$，使得 y_1 整除 t且 $(a, y_2) \in Um(R^2)$）。

(3) 对于每个三元组 $(a, b, s) \in R^3$，存在 $(e, f) \in Um(R^2)$，使得 (a, e)、$(be + af, 1 - bs - a) \in Um(R^2)$。

例如，若 $(a,s) \in Um(R^2)$，则命题 (3) 成立，因为可以取 $(e,f) := (s,1)$；若 $(1-a,b) \in Um(R^2)$，则可以取 $(e,f) := (1,0)$；或者，若存在 $q \in R$，使得 $(b+aq, 1-bs-a) \in Um(R^2)$，则可以取 $(e,f) := (1-a, q+b)$。因此，每个满足如下性质的贝祖整环 B´ezout domain R：对于所有满足 (a,s)、$(b,1-a) \notin Um(R^2)$ 的 $(a,b,s) \in R^3$，都存在 $q \in R$ 使得 $(b+aq, 1-bs-a) \in Um(R^2)$，都是初等除环。

1.1. 关于文献与论文结构的补充。文献中提出的隐含和明确问题，例如“有限克鲁尔维数的贝祖域[是否至少是 2] 初等除环？”（见 [11], 第 III 章，问题 5，第 122 页），以及“有哪些不是初等除环的贝祖域类？”，仍未得到解答。不过，定理 1.13 重新得出了文献中关于 Hermite 环何时为初等约化环的多个其他判据，或者可轻易用于重新得出这些判据。例如，定理 1.13 的等价条件 (1) $\Leftrightarrow$ (10) 可视为对 [43], 定理 2.1 或[46], 定理 3 和 5 的加强；后者要求更多有限生成投射模为自由模。此外，该结果还可用于为这些文献中的结论提供新的证明。

定理 1.13 中等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (8) 最初是在 B´ezout 整环的情形下证明的，见 [37], 定理 5；其一个变体最初是在 Hermite 环的情形下证明的，见 [30], 命题 2.9。方程 (II) 对依据 [30],备注 2.8 得出的方程进行了推广和改进。最后两篇参考文献中的结果后来被重新表述为整洁稳定秩 1 的形式，见 [45], 定理 31 和定理 33（关于 clean 环和整洁环，见 [27]；关于整洁稳定秩 1 的环，见 [45], 定义 21）。

证明上述结果所需的额外术语见第 2 节。第 3 节给出了判定幺模 2×2 矩阵何时（可）扩张的基本准则。第 4 节的各小节证明上述结果。第 5 节介绍整环上的具体扩张与计算。

与 E_2、SE_2、Z_2 和 WZ_2 环相关的泛环见第 6 节。第 7 节介绍稳定性性质，并证明 R 是 SE_2（或 E_2 或 U_2）环，当且仅当 $R[[x]]$ 也是如此。第 8 节列出未解决问题/疑问。

2. Basic terminology and properties

令 $N(R)$ 表示 R 的幂零根，并令 $Z(R)$ 表示 R 的零因子集合。令 $SpecR$ 为 R 的谱，并令 $MaxR$ 和 $MinR$ 分别为赋予诱导扎里斯基拓扑的 R 的极大素理想集和极小素理想集。对于 R 的子集 J，令 $V(J)$ 表示 $SpecR$ 中由包含 J 的素理想构成的闭子集。令 $char(R) \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ 表示 R 的特征。对于秩 1 的射影 R-模 P，令 $[P] \in Pic(R)$ 表示它在皮卡群中的类。令 $Pic_2(R)$ 表示由类 $[P]$ 生成的 $Pic(R)$ 的子群，其中 P 由 2 个元素生成。令 $Pic_2(R)[2]$ 表示由满足 $P \oplus P \cong R^2$ 的类 $[P]$ 生成的 $Pic_2(R)$ 的子群（因此 $2[P] = [R]$ 和 P 由 2 个元素生成）。

对于 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$，令 $Diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{M}_n(R)$ 为对角矩阵，其 (i,i) 项对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 均为 α_i。

第 2.1 至 2.5 小节回顾术语和基本性质，而第 2.6 小节介绍了定义在 $\mathbb{Z}[x,y,z]$ 上的“通用测试矩阵”；$\mathbb{Z}[x,y,z]$ 是一个维数 4 的正则唯一分解整环，这些矩阵将用于研究 $SE_2^{\triangle}$ 和 SE_2 环（参见推论 3.10 和 4.10）。

2.1. 关于幺模向量。下文将不加额外说明地使用以下四个基本性质。

(1) 对于 $(a,b,c) \in R^3$，我们有 $(a,bc) \in Um(R^2)$ 当且仅当 (a,b)、$(a,c) \in Um(R^2)$。(2) 若 $(a,b) \in Um(R^2)$ 且 $c \in R$，则 a 整除 bc 当且仅当 a 整除 c。

(3) 若 $I \subseteq J(R)$ 是 R 的理想，且 $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$，则 $(a_1, \ldots, a_n) \in Um(R^n)$ 当且仅当 $(a_1 + I, \ldots, a_n + I) \in Um\big((R/I)^n\big)$。

(4) 若 $Um(R^m)$ 的一个元素的各元素是 R 上系数、关于 $a_1, \ldots, a_n \in R$ 的齐次多项式之和，则 $(a_1, \ldots, a_n) \in Um(R^n)$。

2.2. 关于前 Schreier 环。若环 R 中每个非零元素 $a \in R$ 都是素性元素，则称该环为前 Schreier 环；也就是说，若 a 整除 R 中元素的乘积 bc，则存在 $(d, e) \in R^2$，使得 $a = de$, d 整除 b，且 e 整除 c。Zafrullah 在 [48] 中引入了前 Schreier 整环。Cohn 在 [6] 中将前 Schreier 整闭整环称为 Schreier 整环。每个最大公因子整环（特别是每个 B´ezout 整环）都是 Schreier 整环（见 [6], 定理 2.4）。前 Schreier 整环的直积是前 Schreier 环，但我们不知道其他前 Schreier 环的例子。

在整环中，一个不可约元素是素性元素，当且仅当它是素元。因此，含有非素元不可约元素的整环（例如任何非唯一分解整环的诺特整环）都不是预施赖尔环。

环上一个 $m \times n$ 矩阵的内秩定义为最小正整数 r，使得该矩阵可以表示为一个 $m \times r$ 矩阵与一个 $r \times n$矩阵的乘积；在域上，这一概念与通常的秩概念一致。若一个平方矩阵的内秩等于其阶数，则称其为满秩矩阵，否则称为非满矩阵。一个 2×2矩阵是非满矩阵，当且仅当其内秩为 1（即它具有列行分解）。

2.3. 关于小于或等于 2 的稳定秩。我们考虑集合

$$T_3(R) := Um(R^2) \times (R \setminus \{0\}) \text{ and } J_3(R) := Um(R^2) \times (R \setminus J(R)).$$

命题 2.1. 我们有 $fsr(R) = 1.5$ 当且仅当对所有的 $(a, b, c) \in T_3(R)$，都存在$r \in R$ 使得 $(a + br, c) \in Um(R^2)$。

证明。“仅当”部分显然。为验证“若”部分，设 $(a, b, c) \in Um(R^3)$ with$c \neq 0$，并设 $x, y, z \in R$ 满足 $ax + by + cz = 1$。于是 $(a, by + cz, c) \in T_3(R)$，因此存在 $r \in R$ 使得 $(a + byr + czr, c) \in Um(R^2)$。这意味着 $(a + byr, c) \in Um(R^2)$，从而 $fsr(R) = 1.5$。□

由命题 2.1 可知，若 $sr(R) = 1$，则 $fsr(R) = 1.5$。

命题 2.2。 $asr(R) = 1$ 成立，当且仅当对于所有 $(a, b, c) \in J_3(R)$，都存在$r \in R$ 使得 $(a + br, c) \in Um(R^2)$。

证明。仅当部分见 [26], 定理 3.6。对于当部分，设 I 为R 中未包含于 $J(R)$ 的理想，我们验证 $sr(R/I) = 1$。若 $(a, b) \in R^2$ 满足 $(a + I, b + I) \in Um\big((R/I)^2\big)$，取 $(d, e) \in R^2$，并令 $c \in I$满足 $ad + be + c = 1$。若 $c \notin J(R)$，则对于 $(f, g) := (c, c) \in \big(I \setminus J(R)\big) \times I$，有 $(a, be + g, f) \in J_3(R)$。若 $c \in J(R)$，则 $ad + be = 1 - c \in U(R)$，因此对于 $(f, g) \in \big(I \setminus J(R)\big) \times \{0\}$，有 $(a, be + g, f) \in J_3(R)$。若 $r \in R$满足 $(a + (be + g)r, f) \in Um(R^2)$，则$a + I + (b + I)(er + I) \in U(R/I)$；因此 $sr(R/I) = 1$。□

推论 2.3. (1) 如果 $fsr(R) = 1.5$，那么 $asr(R) = 1$。

(2) 如果 $asr(R) = 1$，那么 $sr(R) \leq 2$。

证明. 由于 $J_3(R) \subseteq T_3(R)$，(1) 由命题 2.1 和 2.2 得出。

为验证（2），只需证明每个 $(a, b, c) \in Um(R^3)$ 都是可约的。若$b \notin J(R)$，则 R/Rb的稳定秩为 1，且 $(a+Rb, c+Rb) \in Um\big((R/Rb)^2\big)$；因此存在 $r \in R$，使得 $a+rc+Rb \in U(R/Rb)$，从而对于 $(r_1, r_2) := (r, 0)$，我们

有 $(a+r_1c, b+r_2c) \in Um(R^2)$。若 $b \in J(R)$，则 $(a,b,c) \in Um(R^3)$ 蕴含 (a,c)、$(a, b+c) \in Um(R^2)$，因此对于 $(r_1, r_2) := (0,1)$，我们有 $(a+r_1c, b+r_2c) \in Um(R^2)$。由此得出 (a, b, c) 是可约的。□

推论 2.3(2) 首次在 [26], 定理 3.6 中得到。我们有以下
单位元刻画。

推论 2.4. (1) 我们有 $sr(R) = 1$ 当且仅当对每个 $b \in R$，同态$U(R) \to U(R/Rb)$ 都是满射。

(2) 我们有 $fsr(R) = 1$ 当且仅当对所有满足 $c \neq 0$ 的 $(b,c) \in R^2$，同态$U(R/Rc) \to U(R/(Rb+Rc))$ 都是满射。

(3) 我们有 $asr(R) = 1$ 当且仅当对所有满足 $c \notin J(R)$ 的 $(b,c) \in R^2$，同态$U(R/Rc) \to U(R/(Rb+Rc))$ 都是满射。

(4) 若 $asr(R) = 1$，则 R 是一个 U_2 环。

证明。(1) 和 (2) 由定义可得。

我们先验证 (3) 的“若”部分。若 $(a,b,c) \in J_3(R)$，则 $a + Rb + Rc$ 是 $R/(Rb+Rc)$ 的一个单位，因此是 R/Rc 中某个单位的像，该单位的形式为$a + rb + Rc$，其中 $r \in R$。因此 $(a+rb, c) \in Um(R^2)$。由此及命题 2.2 可得 $asr(R) = 1$。

为验证 (3) 的“仅当”部分，设 $a + Rb + Rc \in U(R/(Rb+Rc))$。因此 $(a,b,c) \in Um(R^3)$。由于 $Rc \not\subseteq J(R)$，且我们假设 $asr(R) = 1$，可得 $sr(R/Rc) = 1$，因此存在 $r \in R$，使得 $a + rb + Rc \in U(R/Rc)$ 映射到 $a + Rb + Rc \in U(R/(Rb+Rc))$。于是，同态 $U(R/Rc) \to U(R/(Rb+Rc))$ 是满射。

对于第 (4) 部分，注意对于 $c \in J(R)$，图表（I）是一个推出。若 $c \notin J(R)$ 且 $(a,b) \in Um(R^2)$，则 $U(R/Rbc) \to U(R/(Rbc+Rc)) = U(R/Rc)$ 和$U(R/Rac) \to U(R/(Rac+Rc)) = U(R/Rc)$ 是满同态（见第 (3) 部分），因此图表（I）仍是一个推出。故 R 是一个 U_2 环。□

例2.5。设 $(a,b,c) \in Um(R^3)$，且 $(b,c) \in Um(R^2)$。将 $a-1 = eb+fc$写作 $e, f \in R$，对于 $r := -e$，我们有 $(a+rb, c) \in Um(R^2)$。

例 2.6. 设 R 是一个半局部环（例如赋值整环）。由于对每个 $b \in R$，同态 $U(R) \to U(R/Rb)$ 都是满射，由推论2.4(1)可知，$sr(R) = 1$。

例 2.7. 设 R 是一个维数 1 的诺特整环。对于满足 $c \neq 0$ 的 $(b,c) \in R^2$，环 R/Rc 和 $R/(Rb+Rc)$ 都是阿廷环，因此同态$U(R/Rc) \to U(R/(Rb+Rc))$ 是满射。由此以及推论2.4(2)可知，$fsr(R) = 1.5$；因此 $sr(R) \leq 2$（见推论 2.3(2)）。

类似于例 2.7 中的论证表明，每个作为 Dedekind 整环的滤过并的 B´ezoutdomain 都具有稳定秩1.5。

例2.8. 我们有 $sr(\mathbb{Z}) = 2$ 和 $fsr(\mathbb{Z}) = 1.5$，而环 $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ 具有几乎稳定秩 1，但不具有稳定秩1.5。

2.4. 关于任意稳定秩。若 $n \geq 2$ 我们没有类似于推论 2.4 的稳定秩的单位解释，但这里将以适用于下文的形式，借助标准的投射模相关结论来替代。首先，若P_1 和 P_2 是两个秩 1 的投射 R-模，且满足 $P_1 \oplus P_2 \cong R^2$，那么由

取行列式可得 $P_1 \otimes_R P_2 \cong R$，因此 $[P_1] = -[P_2] \in Pic（R）$。其次，根据稳定秩的定义，我们有：

事实 2.9. 若 $n \in \mathbb{N}$ and $sr(R) \leq n$，则对每个 $a \in R$，模约化集合映射 Ra map of sets $Um(R^n) \to Um\big((R/Ra)^n\big)$ 都是满射。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $(a_1, \ldots, a_n, b) \in Um(R^{n+1})$，其中 $b \notin Z(R)$。我们考虑 R-模的短正合列 $0 \to R \xrightarrow{b} R \xrightarrow{\pi} R/Rb \to 0$ 和 $0 \to Q \to R^n \xrightarrow{f} R/Rb \to 0$，其中 f 将 R^n 的标准基元素映射到 $a_1 + Rb, \ldots, a_n + Rb$，且 $Q := Ker(f)$。若 $Q^+ \to R^n$ 和 $Q^+ \to R$ 定义 f 与 π 的拉回，则有短正合列 $0 \to Q \to Q^+ \to R$ 和 $0 \to R \to Q^+ \to R^n \to 0$，这意味着 Q^+ 是一个秩为 $n+1$ 的自由 R-模，而 Q 是一个秩为 n 、由 $n+1$ 个元素生成的投射 R-模；此外，若 $n = 1$，则 $Q \cong R$。

我们考虑满足 $\pi \circ g = f$ 的 R-线性映射 $g\colon R^n \to R$。那么，$(a_1, \ldots, a_n, b)$ 可约，当且仅当我们可以选择 g 为满射。因此，若 $sr(R) \leq n$，则我们可以选择 g 为满射。

若 $A \in \mathbb{M}_n(R)$ 等价于 $Diag(1, 1, \ldots, 1, b)$，且 Q_A 是 R^n 的 R-子模 Q，则我们可以选择 g 为满射，从而 $(a_1, \ldots, a_n, b)$ 可约。

在本段中，我们假设 $(a_1, \ldots, a_n, b)$ 可约，并且选取 g 为满射。于是， $Ker(g)$ 是一个秩为 $n-1$ 、由 n 个元素生成的投射 R-模；我们有一个短正合列 $0 \to Ker(g) \to Q \to Rb \to 0$，而 $0 \to Q \to R^n \xrightarrow{f} R/Rb \to 0$ 是两个投射分解 $0 \to R \xrightarrow{b} R \xrightarrow{\pi} R/Rb \to 0$ 和 $0 \to Ker(g) \to Ker(g) \to 0 \to 0$的直和。若 $n = 2$，则$Ker(g) \cong R$。因此，若 $n = 2$，且 R^2 的 R-子模 Q 对某个 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 而言为 Q_A，则 A 等价于 $Diag(1, b)$。同样，若 $n \geq 3$ 且 $Ker(g) \cong R^{n-1}$，则 Q 是一个秩为 n 的自由 R-模；因此，若 R^n 的 R-子模 Q 对某个$A \in \mathbb{M}_n(R)$ 而言为 Q_A，则 A 等价于 $Diag(1, 1, \ldots, 1, b)$。

¯2.5. 投射模。设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 且 $R := R/R\det(A)$。 L_A 的余核记为 E_A，它被 $\det(A)$ 消去，因此我们可以将其视为一个 R-模，且同构于 $C_{\bar{A}}$，其中 A 是 A 模 $\det(R)\det(A)$ 的约化。

¯在 $SpecR$ 的扎里斯基拓扑下局部地， A 的某个元素是单位，因此¯矩阵 A 和 $Diag(1, 0)$ 等价。因此，$Q_{\bar{A}}$ 是一个秩为 1、由两个元素生成的投射 R-模，并且我们有两个可裂的投射 $\bar{R}$-模短正合列 $0 \to Q_{\bar{A}} \to \bar{R}^2 \to C_{\bar{A}} \to 0$ 和 $0 \to K_{\bar{A}} \to \bar{R}^2 \to Q_{\bar{A}} \to 0$。由存在 $\bar{R}$-线性同构 $\bar{R}^2 \cong K_{\bar{A}} \oplus Q_{\bar{A}} \cong K_{\bar{A}} \oplus C_{\bar{A}}$¯ ¯可知， $K_{\bar{A}} \cong C_{\bar{A}}$ 是 $Q_{\bar{A}}$ 的对偶。因此，$K_{\bar{A}} \cong R$ 当且仅当 $Q_{\bar{A}} \cong R$（等价地，$C_{\bar{A}} \cong R$），故 $[K_{\bar{A}}] = [C_{\bar{A}}] = -[Q_{\bar{A}}] \in Pic_2(R)$。

2.6. 通用测试矩阵。本小节中，我们假设 R 是 Hermite 环，也就是说，对于每一对 $(p, q) \in R^2$，都存在 $(r, s, t) \in R^3$，使得 $p = rs, q = rt$ 且 $(s, t) \in Um(R^2)$。此外，若 R 是整环（即 R 是 B´ezout 整环），那么 r 在相差一个 R 的单位因子时唯一，称为 p 和 q 的最大公因数，记作 $r = \gcd(x, y)$。我们的约定是 $\gcd(0, 0) = 0$（这样我们仍可写作 $0 = 0 \cdot 1$，其中 $\gcd(1, 1) = 1$）。

设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 和 $M \in SL_2(R)$ 满足 $B := MA = \begin{bmatrix} g & u \\ 0 & h \end{bmatrix}$ 为上三角矩阵。记 $g = ac$ 和 $h = bc$，其中 $(a, b) \in Um(R^2)$ 且 $c \in R$。由于

$B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 和 $Rg + Rh = Rc$，我们有 $(c, u) \in Um(R^2)$。设 a'、b'、c'、$d' \in R$ 满足 $aa' + bb' = cc' + uu' = 1$。对于 $d \in R$，A 和 B 等价于

$$C := \begin{bmatrix} 1 & db' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1 & da' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & u + cd(aa' + bb') \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & u + cd \\ 0 & bc \end{bmatrix}.$$

此处，$u + cd$ 表示 R 中的任意元素，其模 Rc 约化为“固定”的单位 $u + Rc \in U$（R/Rc）。每个形如

$$D := \begin{bmatrix} aa'cc' & u \\ 0 & bb'cc' \end{bmatrix}$$

的幺模矩阵都称为与 A 关联的伴随检验矩阵。

请注意，D 是“Hermite 环的第一通用测试矩阵”

$$\mathcal{D} := \begin{bmatrix} x(1 - yz) & y \\ 0 & (1 - x)(1 - yz) \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x, y, z]))$$

在同态 ϕ_D：$\mathbb{Z}[x, y, z] \to R$ 下的像；该同态将 x、y 和 z 映射到 aa'、u 和 u'（因此，$1 - x$ 映射到 $bb' = 1 - aa'$，而 $1 - yz$ 映射到 $1 - uu' = cc'$）。请注意，$\mathcal{D}$ 与矩阵等价

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z(x - 1)(1 - yz) & 1 \end{bmatrix} \mathcal{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ xz & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & (1 - x)(1 - yz)^2 \end{bmatrix}$$

它是“Hermite 环的第二通用测试矩阵”的像

$$\mathcal{F} := \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & (1 - x)(1 - yz) \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x, y, z]))$$

通过 $\mathbb{Z}[x, y, z]$ 的自同态，该自同态固定 x 和 y，并将 z 映射到 $2z - yz^2$。有关本段中通用测试矩阵的用法，请参见推论 4.10。

“适用于所有环的通用测试矩阵”为（见推论 3.10）

$$\mathcal{G} := \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 - x - yz \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x, y, z])).$$

3. Criteria on extending 2×2 matrices

对于 R-代数的一个元素 v，(v) 表示由它生成的主理想，而 $\bar{v}$ 表示它在某些给定的满射环同态下的约化。

第 3.1 小节证明引理 1.2。第 3.2 和第 3.3 小节分别引入研究 $\mathbb{M}_2(R)$ 中的幺模矩阵何时可简单扩张所需的 R-代数和命题，并分别证明定理 3.1 和定理 3.2。第 3.4 和第 3.5 小节还包括定理 3.1 和定理 3.2 在 SE_2、E_2 和 $SE_2^{\triangle}$ 环中的直接应用。

3.1. 引理 1.2 的证明。为验证第 (1) 部分的“仅当”方向，设 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 可扩张，且 $A^+ \in SL_3(R)$ 是它的一个扩张。若将 A_0^+ 由 A^+ 的 (3, 3) 项替换为 0 得到，则 A^+ 和 A_0^+ 模 $R\det(A)$ 的约化具有相同的行列式 1，因此 A 模 $R\det(A)$ 可简单扩张。为验证第 (1) 部分的“当”方向，设 $B \in \mathbb{M}_3(R)$ 满足：它模 $R\det(A)$ 的约化是 A 模 $R\det(A)$ 的约化的一个简单扩张。因此存在 $w \in R$，使得 $\det(B) = 1 + w\det(A)$。若将 B 的 (3, 3) 项减去 w，得到 $A^+ \in \mathbb{M}_3(R)$，则 A^+ 是 A 的一个扩张，因为 $\det(A^+) = \det(B) - w\det(A) = 1$。因此第 (1) 部分成立。第 (2) 部分可通过简单计算得到，而第 (3) 部分直接由第 (2) 部分推出。因此引理 1.2 成立。

3.2. 五种 R-代数。对于 $v=(a,b,c,d)\in Um(R^4)$ 及其关联矩阵$A:=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，

我们将考虑以下五种 R-代数。

R代数

$$U_v := R[x,y,z,w]/(1-ax-by-cz-dw)$$

表示（参数化） $ax+by+cz+dw=1$ R代数中的幺模关系。 R代数

$$E_v := R[x,y,z,w,v]/\big(1-axw-bxz-cyw-dyz-v(ad-bc)\big),$$

表示在元素取自 R代数的 2×2 矩阵环中，对 A 的扩张（像）。类似地， R代数

$$SE_v := R[x,y,z,w]/(1-axw-bxz-cyw-dyz) = E_v/(\bar{v}),$$

表示在元素取自 R代数的 2×2 矩阵环中，对 A 的（像）进行简单扩张。最后两个 R 代数

$$WZ_v := R[x,y,z,w]/\big(1-ax-by-cz-dw+(ad-bc)(xw-yz)\big)$$

and

$$Z_v := R[x,y,z,w]/(1-ax-by-cz-dw, xw-yz) = WZ_v/(\bar{x}\bar{w}-\bar{y}\bar{z}) = U_v/(\bar{x}\bar{w}-\bar{y}\bar{z})$$

分别表示定义 1.7(2)和(1)中的矩阵，这些矩阵对应于元素取自 R代数的 2×2 矩阵环中的 A 的（像）。

注意，多项式 $1-ax-by-cz-dw+(ad-bc)(xw-yz)\in R[x,y,z,w]$是一个 2×2 矩阵的行列式，因此它有许多形如 $f_{1,\ 1}f_{2,\ 2}-f_{1,\ 2}f_{2,\ 1}$ 的分解，例如，

$$WZ_v = R[x,y,z,w]/\big((1-ax-cz)(1-by-dw)-(ay+cw)(bx+dz)\big).$$

例如，若 $c=0$，则

$$\begin{aligned} WZ_v &= R[x,y,z,w]/\big((1-ax)(1-dw)-y(b+adz)\big) \\ &= R[x,y,z,w]/\big((1-ax)(1-by-dw)-ay(bx+dz)\big), \end{aligned} \tag{V}$$

这两个恒等式分别引出了我们对 V_2 环的研究以及判据 1.23。

若 $b=c$，则所有这五个 R-代数都有一个对合：固定 x 和w，并交换 y 和 z；于是我们有

$$WZ_v/(\bar{y}-\bar{z}) = R[x,y,w]/\big((1-ax-by)(1-by-dw)-(bx+dy)(ay+bw)\big),$$

$$SE_v/(\bar{y}-\bar{z}) = R[x,y,w]/\big[(1-axw)-y\big(b(x+w)+dy\big)\big].$$

我们有一个由 R-代数同态构成的箭头图

$$\begin{array}{ccccc} WZ_v & \xrightarrow{\epsilon} & Z_v & \xleftarrow{\varepsilon} & U_v \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\ E_v & \xrightarrow{\psi} & SE_v & & \end{array} \tag{VI}$$

定义如下。水平同态是满同态，由识别 $WZ_v/(\bar{x}\bar{w}-\bar{y}\bar{z}) = Z_v = U_v/(\bar{x}\bar{w}-\bar{y}\bar{z})$ 和 $SE_v = E_v/(\bar{v})$ 定义；而 ρ 由映射 $\bar{x}$、 $\bar{y}$、 $\bar{z}$、 $\bar{w}$ 到 $\bar{x}\bar{w}$、 $\bar{x}\bar{z}$、 $\bar{y}\bar{w}$、 $\bar{y}\bar{z}$（分别对应）定义。定理 1.11 的核心要义之一是图（VI）的存在。

R-模

$$P_v := \{(x,y,z,w) \in R^4 | ax+by+cz+dw = 0\}$$

是将 $[x,y,z,w]^T$ 映射到 $ax+by+cz+dw$ 的 R-线性映射 $R^4 \to R$ 的核。由于 $v \in Um(R^4)$，存在 $(a',b',c',d') \in R^4$，使得 $aa'+bb'+cc'+dd' = 1$，因此所提及的 R- 线性映射是满射。因此，P_v 及其对偶 P_v^* 是秩为 3 的投射 R- 模，并满足性质 $P_v \oplus R \cong P_v^* \oplus R \cong R^4$。由 [20], 第 III 章第 6 节定理 6.7 (1) 可得 $P_v \cong P_v^*$。

定理 3.1。以下性质成立：

(1) 对于 $f \in \{a,b,c,d\}$，R_f-代数 $(U_v)_f$ 是一个由 3 个不定元生成的多项式 R_f-代数。此外，R-代数 U_v 与 P_v 的对称 R-代数同构（因此同态 $R \to U_v$ 是相对维数为 3 的光滑同态）。此外，如果 R 是 Hermite 环，那么 $P_v \cong R^3$，从而 R- 代数 U_v 是一个由 3 个不定元生成的多项式 R- 代数。

(2) R-代数 Z_v 是相对维数为 2 的光滑代数。

(3) R-代数 E_v 是相对维数为 4 的光滑代数，而 R-代数 $(WZ_v)^{1-(ad-bc)(xw-yz)}$ 是相对维数为 3 的光滑代数（因此，若 $ad-bc \in J(R)$，则 R-代数 WZ_v 是相对维数为 3 的光滑代数）。

(4) 由 ρ 定义的概形态射 $Spec(SE_v) \to Spec(Z_v)$ 是一个 $\mathbb{G}_{m,\ Z_v}$-扭子，因此相对维数为 1 的光滑态射（因此 R-代数 SE_v 的相对维数为 3 且光滑）。

(5) 假设 $ad = bc$。那么存在一个秩为 2 的射影 R-模 Q_v，使得 R-代数 Z_v 同构于 Q_v 的对称 R-代数。此外，$WZ_v = U_v$ 同构于 P_v 的对称 R-代数，并且存在一个同构 $Q_v \oplus R \cong P_v$。此外，若 R 是 Hermite 环，则 $Q_v \cong R^2$，R-代数 Z_v 是含 2 个不定元的多项式 R-代数，而第 (4) 部分的 $\mathbb{G}_{m,\ Z_v}$-扭子是一个 $\mathbb{G}_{m,\ R}$-扭子的拉回。

(6) 假设 $c = b$ 和 $ad = b^2$（即 A 是对称的且行列式为零）。那么 $(a,d) \in Um(R^2)$，并且存在两个典范的 R-代数识别 $(SE_v)_a \cong R_a[x',y,z,w']/(1-x'w')$ 和 $(SE_v)_d \cong R_d[x,y',z',w]/(1-y'z')$，其中 $x' := ax+by$，$w' := w + \frac{b}{a}z$，$y' := y + \frac{b}{d}x$，且 $z' := dz+bw$。

证明. (1) 由于 $v \in Um(R^4)$，我们有 $SpecR = \cup_{f\in\{a,b,c,d\}} SpecR_f$。要验证 R_f-代数 $(U_v)_f$ 是一个多项式 R_f-代数，我们可以假设 $f = a$；将 (R,x) 替换为 $(R_f, a^{-1}x)$ 后，我们可以假设 $a = 1$，在这种情况下我们有 $U_v \cong R[y,z,w]$。由 [2], 定理 4.4 可知，U_v 同构于某个秩 3 投射 R-模 P 的对称 R-代数。$P \cong P_v$ 这一事实可由以下事实推出：$P_v \cong P_v^*$，并且在替换 $(x',y',z',w') = (a',b',c',d') + (x,y,z,w)$ 后，$U_v = R[x',y',z',w']/(ax'+by'+cz'+dw')$。

如果 R 是 Hermite 环，那么 P_v 是稳定自由的，因此也是自由的（[43], 推论 3.2）；故 $P_v \cong R^3$。因此，R-代数 U_v 是一个含有 3 个不定元的多项式 R-代数。

（2）只需证明：如果 $\mathfrak{n} \in Max\,(R[x,y,z,w])$ 包含 $xw-yz$ 和 $1-ax-by-cz-dw$，那么记 $\kappa := R[x,y,z,w]/\mathfrak{n}$，$\kappa$-向量空间

$$\kappa\delta x \oplus \kappa\delta y \oplus \kappa\delta x \oplus \kappa\delta w/(\kappa\delta(ax+by+cz+dw) + \kappa\delta(xw-yz))$$

维数为 2（见 [34], Exp. II, Thm. 4.10）；这里 δ 是微分算子，为避免与元素 $d \in R$ 混淆，采用了不寻常的记法。要

验证这一点，只需证明以下假设：矩阵的约化 x

$$E := \begin{bmatrix} -a & -b & -c & -d \\ w & -z & -y & x \end{bmatrix}$$

模 $\mathfrak{n}$ 的秩不为 2，导致矛盾；由于 E 模 $\mathfrak{n}$ 具有幺模行，因此存在 $\alpha \in U(\kappa)$，使得 $(-a,-b,-c,-d)-\alpha(w,-z,-y,x) \in \mathfrak{n}^4 \subseteq R^4$。由此，由于 $xw-yz$，$1-ax-by-cz-dw \in \mathfrak{n}$，可得 $2\alpha(xw-yz)$ 与 0 模 $\mathfrak{n}$同余，这意味着 0 与 1 模 $\mathfrak{n}$ 同余，矛盾。因此，(2) 成立。

(3) 对于 E_v，根据 [34], Exp. II, Thm. 4.10，只需证明对于

$$F(x,y,z,w,v) := 1 - axw - bxz - cyw - dyz - v(ad-bc) \in R[x,y,z,w,v],$$

F及其偏导数 F_x, F_y, F_z, F_w和 F_v生成 $R[x,y,z,w,v]$，但这可由恒等式推出

$$1 = F - vF_v + xF_x + yF_y.$$

对于 WZ_v，根据前引文，只需证明对于

$$G(x,y,z,w) := 1 - ax - by - cz - dw + (ad-bc)(xw-yz) \in R[x,y,z,w],$$

G及其偏导数 G_x、 G_y、 G_z和 G_w生成 $R[x,y,z,w]$的一个理想，该理想包含 $1-(ad-bc)(xw-yz)$；但这可由恒等式推出

$$1-(ad-bc)(xw-yz) = G - xG_x - yG_y - zG_z - wG_w.$$

(4) $\mathbb{G}_{m,Z_v}$-作用

$$Spec(SE_v[u,u^{-1}]) = Spec(Z_v[u,u^{-1}]) \times_{Spec(Z_v)} Spec(SE_v) \to Spec(SE_v)$$

由 R-代数同态 $SE_v \to SE_v[u,u^{-1}]$ 给出，该同态将 $\bar{x}$、 $\bar{y}$、$\bar{z}$和 $\bar{w}$ 分别映射到 $u\bar{x}$、 $u\bar{y}$、$u^{-1}\bar{z}$和 $u^{-1}\bar{w}$；它使态射 $Spec(SE_v) \to Spec(Z_v)$ 成为 $\mathbb{G}_{m,Z_v}$-扭子这一事实，是一个标准练习。

(5) 对于 WZ_v，第 (5) 部分由第 (1) 部分推出，因为 $ad=bc$意味着 $WZ_v = U_{v\circ}$ 与第 (1) 部分类似，要验证 Z_v 的第 (5) 部分，只需证明对每个 $f \in \{a,b,c,d\}$， R_f-代数 $(Z_v)_f$是一个由 2 个不定元生成的多项式 R_f-代数。为此，我们可以假设 $f=a$，因此 R_a-代数 $(Z_v)_a$ 同构于

$$R_a[y,z,w]/\big(yz - a^{-1}w(1-by-cz-dw)\big),$$

它通过不定元的变换 $(y_1,z_1,w_1) := (ay+cw, az+bw, aw)$，作为 $ad=bc$，与 $R_f[y_1,z_1,w_1]/(y_1z_1-w_1) \cong R_f[y_1,z_1]$同构。

由于 Z_v是一个对称 R-代数，存在一个 R-代数满同态（按 [2]的术语，称为回缩或增广） $Z_v \to R$，因此存在一个四元组 $\zeta := (a',b',c',d') \in R^4$，使得 $1-aa'-bb'-cc'-dd' = 0 = a'd'-b'c'$。作代换 $(x',y',z',w') = (a',b',c',d') + (x,y,z,w)$ 后，我们将其视为

$$Z_v = R[x',y',z',w']/(ax'+by'+cz'+dw', a'w'-c'y'-b'z'+d'x'-x'w'+y'z').$$

赋予 R^4 标准内积

$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle := \sum_{i=1}^{4} x_iy_i,$$

我们有 $\zeta \perp (d', -c', -b', a')$ 和 $\langle \zeta, (a,b,c,d)\rangle = 1$。因此，和 $W := R(a,b,c,d) + R(d', -c', -b', a')$ 是直和（所以 $W \cong R^2$），也是 R^4 的直和项（即，R^4/W 是一个秩为 2 的射影 R-模）。令

$$Z'_v := R[x', y', z', w']/(ax' + by' + cz' + dw', a'w' - b'z' - c'y' + d'x').$$

注意，对于 $SpecR = \cup_{f\in\{a,b,c,d\}} SpecR_{ff'}$ 以及 $f \in \{a, d\}$（分别为 $f \in \{b, c\}$），$R_{ff'}$-代数 $(Z'_v)_{ff'}$ 同构于 $R_{ff'}[y', z']$（分别为 $R_{ff'}[x', w']$）。令 J_v和J'_v 分别为 Z_v 和 Z'_v 的理想，它们由 x'、y'、z'、w'的像生成。根据第三同构定理，R-模 $Q_v := J_v/J_v^2$ 和 $Q_v := J'_v/(J'_v)^2$ 可识别为以下 R-模

$$(x', y', z', w')/[(ax' + by' + cz' + dw', a'w' - b'z' - c'y' + d'x') + (x', y', z', w')]$$

它是 $R[x', y', z', w']$ 的理想的商，且同构于 R^4/W。根据 [2], 推论 4.3 以及上文关于局部化 $(Z_v)_f$ 和 $(Z'_v)_{ff'}$ 的同构的部分（其中涉及的不定元是 x'、y'、z、w'的线性多项式，不一定是齐次多项式），可知 Z_v和 Z'_v 分别同构于由Q_v 和 Q'_v 构成的对称 R-代数，因而它们同构。由于 W 是 R^4的直和项，存在一个由 R-模构成的分裂短正合列 $0 \to R \to P_v \to Q_v \to 0$。第（5）部分的第二部分由最后两句话得出。

如果 R 是 Hermite 环，那么 $P_v \cong R^3$（见第 (1) 部分），因此 Q_v 是稳定自由的，故由 [43], 推论 3.2 可知它是自由的。根据 $\mathbb{G}_m$-主丛与线丛之间的等价关系，要完成第 (5) 部分的证明，只需证明对于每个多项式R-代数 R_1，函子同态 $Pic(R) \to Pic(R_1)$ 是一个同构。为验证这一点，我们可以假设 R 是约化的。由于 R 是约化 Hermite 环，对于每个 $\mathfrak{p} \in SpecR$，局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是赋值整环。因此 R 是正规环（也就是说，它的所有局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ 都是整环，且在其分式域中整闭），从而也是 [15] 意义下的半正规环。由此以及 [15], 定理 1.5 可得，$Pic(R) \to Pic(R_1)$ 是一个同构。

(6) 由于 $(a,b,c,d) \in Um(R^4)$ 且 $b = c$，我们有 $(a,b,d) \in Um(R^3)$，因此也有 $(a,b^2,d) = (a,ad,d) \in Um(R^2)$。这意味着 $(a,d) \in Um(R^2)$。所提及的同一认定的存在显而易见。□

3.3. 十个命题。对于 $v = (a,b,c,d) \in Um(R^4)$ 及其相关矩阵$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，我们还考虑以下十个命题：

①矩阵 A 等价于对角矩阵 $Diag(1, \det(A))$。

②矩阵 A 可简单扩张。

◯3 存在 $(e,f) \in R^2$，使得 $(ae + cf, be + df) \in Um(R^2)$（注意，$(e,f) \in Um(R^2)$）。

◯4 存在 $(x,y,z,w) \in R^4$ 使得 $ax + by + cz + dw = 1$，且矩阵$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ 是非满的。5 存在 $(x,y,z,w) \in R^4$ 使得 $ax + by + cz + dw = 1$，且 $xw - yz = 0$。

◯

◯6 存在 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得 $(ad - bc)B + A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，并且 B 和 $(ad - bc)B + A$ 的行列式均为零。

◯7 存在 $C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，它与 A 模 $R(ad-bc)$ 同余，且 $\det(C) = 0$。

⑧ 存在 $B \in \mathbb{M}_2(R)$，使得 B 和 $(ad-bc)B+A$ 的行列式均为零。

⑨ 存在 $(x,y,z,w) \in R^4$ 使得 $ax+by+cz+dw-(ad-bc)(xw-yz) = 1$。

⑩ 存在 $C \in \mathbb{M}_2(R)$ 同余于 A 模 $R(ad-bc)$，且 $\det(C) = 0$。

定理 3.2。以下蕴含关系成立：

$$① \Leftrightarrow ② \Leftrightarrow ③ \Leftrightarrow ④ \Rightarrow ⑤ \Leftrightarrow ⑥ \Leftrightarrow ⑦ \Leftrightarrow ⑧ \Rightarrow ⑨ \Rightarrow ⑩.$$

此外，若 R 是约化的，则 $9 \Leftrightarrow 10$。

证明。关于蕴含关系 $1 \Rightarrow ②$，参见例 1.4。对于 $(e,f,s,t) \in R^4$，我们有两个恒等式

$$\text{(VII)}\quad \det\begin{bmatrix} a & b & f \\ c & d & -e \\ -t & s & 0 \end{bmatrix} = (be+df)t+(ae+cf)s = a(es)+b(et)+c(fs)+d(ft).$$

等价关系 $2 \Leftrightarrow ③$ 由第一个恒等式得出。等价关系 $3 \Leftrightarrow 4$ 由第二个恒等式得出。显然，$4 \Rightarrow ⑤$、$⑥ \Rightarrow ⑦ \wedge ⑧$ 和 $7 \vee ⑧ \Rightarrow 10$。

为验证 $③ \Rightarrow ①$，设 $(e,f) \in R^2$ 满足存在 $(s,t) \in Um(R^2)$，使得 $(ae+cf)s+(be+df)t = 1$。那么 (e,f)、$(s,t) \in Um(R^2)$，因此存在 $M \in SL_2(R)$，其第一行为 $[e\ \ f]$；并且存在 $N \in SL_2(R)$，其第一列为 $[s\ t]^T$。矩阵 MAN 的行列式为 $\det(A)$，且其 $(1,1)$ 项为 1，因此它等价于矩阵 $Diag(1,\det(A))$，命题 1 得证。

蕴含关系 $5 \Rightarrow ⑥$ 由以下事实推出：若 $x,y,z,w \in R$ 满足 $ax+by+cz+dw = 1$ 和 $xw-yz = 0$，那么对于 $\delta := ad-bc$ 以及 $B := \begin{bmatrix} -w & z \\ y & -x \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，矩阵的行列式

$$C := A+\delta B = \begin{bmatrix} a-(ad-bc)w & b+(ad-bc)z \\ c+(ad-bc)y & d-(ad-bc)x \end{bmatrix}$$

等于

$$\text{(VIII)}\qquad \delta(1-ax-by-cz-dw)+\delta^2(xw-zy) = 0$$

而关系 $C \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 则由恒等式推出

$$x(a-\delta w)+y(b+\delta z)+z(c+\delta y)+w(d-\delta x) = ax+by+cz+dw-2\delta(xw-yz) = 1.$$

若 $\delta \notin Z(R)$，则可以反向运用上一段的论证，从而得到 $8 \Rightarrow 5$。

为了验证 $8 \Rightarrow ⑤$ 一般成立，只需用 R 的有限生成 $\mathbb{Z}$-子代数 S 替换 R，使得 $A,B \in Um(\mathbb{M}_2(S))$，于是可假设 R 是诺特的。因此，集合 $MinR = \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_j\}$ 有限 $j \in \mathbb{N}$。命题 5 成立，当且仅当存在一个 R-代数满同态（截面）$Z_v \to R$。由于同态 $R \to Z_v$ 光滑（见定理 3.1(2)），每个 R-代数同态 $Z_v \to R/N(R)$ 都能提升为一个 R-代数满同态 $Z_v \to R$。因此，用 $R/N(R)$ 替换 R 后，可假设 $N(R) = \cap_{i=1}^{j}\mathfrak{p}_i = 0$。令 δ_i 为 δ 在 $R/\mathfrak{p}_i$ 中的像。根据定理 3.1(5)，可假设 $\delta \neq 0$，因而存在一个 $i \in \{1,\dots,j\}$ 使得 $\delta_i \neq 0$。可假设极小素理想的编号满足：存在 $j' \in \{1,\dots,j\}$ 使得 δ_1、……、$\delta_{j'}$ 均非零，而 $\delta_{j'+1}$、$\dots\delta_j$ 均为零。

若 $\mathcal{I}_1 := \cap_{i=1}^{j'} \mathfrak{p}_i$ 且 $\mathcal{I}_2 := \cap_{i=j'+1}^{j} \mathfrak{p}_i$，则有 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = 0$ 和 $\delta \in \mathcal{I}_2$。由于 δ 在 $R/\mathcal{I}_1$ 中的像不是零因子，由上一段可知，存在一个 R-代数同态 $h_1 : Z_v \to R/\mathcal{I}_1$；令 $h_{1,2} : Z_v \to R/(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$ 为由 h_1 诱导的映射。由于 A 模 $\mathcal{I}_2$ 的行列式为零，$Z_v/\mathcal{I}_2 Z_v$ 是一个秩为 2 的射影 $R/\mathcal{I}_2$-模 Q_2 的对称代数（见定理 3.1(5)），因此 R-代数同态$h_{1,2}$ 唯一地由一个 $R/\mathcal{I}_2$-线性映射$l_{1,2} : Q_2 \to R/(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$ 确定。若 $l_2 : Q_2 \to R/\mathcal{I}_2$ 是一个提升 $l_{1,2}$ 的 $R/\mathcal{I}_2$-线性映射，且若 $h_2 : Z_v \to R/\mathcal{I}_2$ 是由 l_2 唯一确定的 R-代数同态，则 h_2 提升了 $h_{1,2}$。由于 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = 0$，自然图表

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/\mathcal{I}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/\mathcal{I}_2 & \longrightarrow & R/(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \end{array}$$

是一个拉回，因此存在唯一的 R-代数同态 $Z_v \to R$，它同时提升 h_1 和 h_2。因此命题 5 成立。

我们得出结论：命题 5、6 和 8 等价。显然，$5 \Rightarrow 9$，因此 $8 \Rightarrow 9$。

蕴含关系 $9 \Rightarrow 10$ 由以下事实得出：若 $(x, y, z, w) \in R^4$ 满足 $1 - ax - by - cz - dw + (ad - bc)(xw - yz) = 0$，则方程 (VIII) 成立，因此，取如上所述的 $C := A + \delta \begin{bmatrix} -w & z \\ y & -x \end{bmatrix}$，有 $\det(C) = 0$。注意，C 的元素满足线性恒等式

$$\begin{aligned} &x(a - \delta w) + y(b + \delta z) + z(c + \delta y) + w(d - \delta x) \\ &= ax + by + cz + dw - 2\delta(xw - yz) = 1 - \delta(xw - yz). \end{aligned} \tag{IX}$$

若 R 是约化的（即 $N(R) = 0$），则证明 $10 \Rightarrow 9$ 与在 $N(R) = 0$ 的情形下证明蕴含关系 $8 \Rightarrow 5$ 相似。

因此我们只需证明 $7 \Rightarrow 6$。由于 $5 \Leftrightarrow 6$，如上所述，我们只需证明当 R 是诺特且约化的时，$7 \Rightarrow 6$ 成立。

回顾一下，$\delta = \det(A)$，并记 $C = A + \delta B = AD$，其中 $D := I_2 + A^* B$，且 $A^* \in \mathbb{M}_2(R)$ 是 A 的伴随矩阵。

由于 $C = AD \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，我们有 $D \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。我们还要验证逆命题成立，即若 $E \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 且 AE 与 A 模 $R\delta$ 同余，则 $AE \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。令 J 为由 AE 的元素生成的 R 的理想。为证明 $J = R$，只需说明若 $\mathfrak{m} \in MaxR$，则 $J \not\subseteq \mathfrak{m}$。显然，当 $\delta \in \mathfrak{m}$ 时这成立。但若 $\delta \notin \mathfrak{m}$，则 A 模 $\mathfrak{m}$ 可逆，因此 AE 模 $\mathfrak{m}$ 非零，因为 E 模 $\mathfrak{m}$ 非零，故可得 $J \not\subseteq \mathfrak{m}$。

由于 $7 \Rightarrow 10$，且 $10 \Rightarrow 9$ 的证明与蕴含关系 $8 \Rightarrow 5$ 的证明相似，因此存在 $B' \in \mathbb{M}_2(R)$，使得对于 $D' := I_2 + A^* B'$，我们有 $\det(D') = 0$，并且 B' 和 B 模每个不包含 δ 的 $\mathfrak{m} \in MaxR$ 同余（参见上文涉及 $\delta \in I_2$ 的部分）。因此，若 J' 是由 D' 的元素生成的 R 的理想，则 J' 不包含于任何不含 δ 的 $\mathfrak{m} \in MaxR$ 中；由方程 (IX) 可知，J' 不包含于任何不含 $1 - \delta \det(B')$ 的极大理想中。因此，J' 不包含于任何 $\mathfrak{m} \in MaxR$ 中，从而 $J' = R$，即 D' 是幺模的。

由前两段可知，将 (B, D) 替换为 (B', D') 后，我们可以假设 $\det(D) = 0$。由于 $D = I_2 + A^* B$ 的行列式为零，因此可得 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。

因此，要完成 $7 \Rightarrow$ ⑥的证明，只需证明我们可以将 B 替换为矩阵 $B_1 \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得 $\det(B_1) = 0$，并且对于 $D_1 := I_2 + A^*B_1$，有 $\det(D_1) = 0$，且 $D_1 \in Um(\mathbb{M}_2(R))$（因此 $C_1 := AD_1$ 与 A 模 $R\delta$ 同余，根据上述逆命题，它是幺模的，并且 $\det(C_1) = 0$）。回想一下，K_D 和 Q_D 是秩为 1 的射影 R-模，且短正合列 $0 \to K_D \to R^2 \to Q_D \to 0$ 可分裂，即它有一个截面 $s_D : Q_D \to R^2$（参见第 2.5 小节）。令 $B_1 \in \mathbb{M}_2(R)$ 为满足 $K_D \subseteq K_{B_1-B}$ 且 $s_D(Q_D) \subseteq K_{B_1}$ 的唯一矩阵。由于 K_D 是 R^2 中秩为 1 的直和项，并且对于所有 $t \in K_D$，都有 $A^*B_1(t) = A^*B(t) = -t$，因此首先可得 $K_D \subseteq K_{D_1}$；其次，

$$Q_{B_1} = B_1(K_D) = B(K_D)$$

是 R^2 的一个秩 1 直和项，且与 K_D 同构；第三，K_{B_1} 是一个秩 1 的投射 R-模，且是 R^2 的一个直和项；由此

$$Q_{D_1} = D_1(s_D(Q_D)) = s_D(Q_D) \subseteq K_{B_1},$$

可得 $K_{B_1} = s_D(Q_D)$。我们得出，B_1、$D_1 \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，且 $\det(B_1) = \det(D_1) = 0$。□

注 3.3. (1) 由于 $2 \Leftrightarrow$ ③，且一个 2×2 矩阵有（简单）扩张当且仅当其转置有扩张，因此陈述 3 成立当且仅当存在 $(e', f') \in R^2$，使得 $(ae' + bf', ce' + df') \in Um(R^2)$。

(2) 矩阵 A 可扩张（可简单扩张）当且仅当 R-代数同态 $R \to E_v$（分别为 $R \to SE_v$）有一个截面。类似地，陈述 9 成立当且仅当 R-代数同态 $R \to WZ_v$ 有一个截面。

(3) 当 R 不是约化环时，我们不知道蕴含关系 $10 \Rightarrow$ ⑨是否成立。除此之外，定理 3.2 是最佳的。原因是，通常陈述 7 并不蕴含陈述 4（对于不是主理想整环的 Dedekind 整环，参见定理 1.12），而且即使 R 是正则的，陈述 9 也不蕴含陈述 7（参见例 6.2；该例基于定理 6.3(2)，涉及一个维数为 9 的正则环 $\mathcal{E}_2$）。

(4) 假设 R 是一个 $WJ_{2,\,1}$ 环。由于 $(a, b, c, d) \in Um(R^4)$，方程 $1 - ax - by - cz - dw = 0$ 在 R^4 中有解，因此根据 $WJ_{2,\,1}$ 环的定义，陈述 5 成立。

(5) *If* $A^+ = \begin{bmatrix} a & b & f \\ c & d & -e \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$ *is a simple extension of* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$,

那么 A 的特征多项式 χ_{A^+} 具有如下形式

$$x^3 - Tr(A)x^2 + \nu_{A^+}x - 1$$

（关于 $Tr(A) = a + d$ 以及 $\nu_{A^+} = \det(A) + es + ft$，见第 1 节）。因此，$A$ 的简单扩张的特征多项式集合与第 1 节中引入的子集 $\nu_A \subseteq R$ 一一对应，并且我们有

$$\nu_A = \{\det(A) + es + ft | (e, f, s, t) \in R^4,\ a(es) + b(et) + c(fs) + d(ft) = 1\}.$$

我们给出一些简单的例子，以说明 ν_A 可以是 R 的仿射子集，且可以是或不是一个理想。若 $R = \mathbb{Z}$，$A = Diag(7, 11)$，$\{(8 + 11k, -5 - 7k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 是方程 $7es + 11ft = 1$ 在 es 和 ft 中的解集，则 $\nu_A = 4\mathbb{Z}$。此外，$\nu_{Diag(1,d)} = 2 + R(d - 1)$。

(6) 对每个 $\mathfrak{m} \in MaxR$， A在 $Um(\mathbb{M}_2(R_{\mathfrak{m}}))$ 中的像都是可简单扩张的（例如，见下文推论 3.5(2)）。因此，如果 $ab = bc$ 和 Z_v 是含 2 个不定元的多项式 R-代数，那么 Quillen 拼接定理（见 [32], 定理 1）表明（参见定理 3.1(5) 的证明最后部分），定理 3.1(4) 的 $\mathbb{G}_{m,\ Z_v}$-扭子是一个 $\mathbb{G}_{m,\ R}$-扭子的拉回。

例 3.4. 我们用初等方法验证，每个贝祖整环都是一个整环。设$A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，且 $\det(A) = 0$。由于 A 等价于一个上三角矩阵，根据引理 1.2(3)，我们可以假设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ 是上三角矩阵，且$ad = 0$；我们只需假设 b 的某个因子不是零因子。设 p、q、$r \in R$ 满足 $1 = ap + bq + dr$。我们有$(1 - ap)(1 - dr) = bq$，因此，若 $\gcd(b, 1 - ap)$ 或 $\gcd(b, 1 - dr)$ 不是零因子，则存在 $(e, s, t, v) \in R^4$，使得我们可以写成 $b = tv$、$1 - ap = st$、$1 - dr = ev$。于是$a = a(1 - dr) = aev$ 且 $be = evt = t - dtr$，因此 $be + dtr = t$。所以，理想$Rae + R(be + dtr)$ 包含 t 和 a，因此它是 R，因为 $1 = ap + st$。由此以及定理 3.2（应用于 $f := tr$）可得，A 可简单扩张。

3.4. 在 SE_2 和 E_2 环中的应用。

推论 3.5. ***(1)*** 环 R是一个 SE_2环，当且仅当对于每个 $(a,\ b,\ c,\ d) \in Um(R^4)$等价命题 1、2、3 和 4 均成立。◯ ◯ ◯ ◯

每个半局部环都是一个 SE_2 环。

证明。第 (1) 部分由定义和定理 3.2 得出。第 (2) 部分由第 (1) 部分以及以下事实得出：由于 R 是半局部的，对于每个 $(a, b, c, d) \in Um(R^4)$，都存在 $(e, f) \in R^2$，使得交集 $U(R) \cap \{ea + cf, be + df\}$ 非空。□

推论 3.6. 设 $(a, b, c, d) \in Um(R^4)$。以下命题等价：

(1) 矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是可扩张的。(2) 存在 $(e, f) \in R^2$ 使得 $(ae + cf, be + df, ad - bc) \in Um(R^3)$。

同理，将 (1) 中的“可扩张”改为“可简单扩张”，等价于 (2) 中的 $(e, f) \in Um(R^2)$。此外，若 $sr(R) \leq 2$，则矩阵在 $\mathbb{M}_2(R)$ 上的可扩张性与可简单扩张性等价。

证明。“可扩张”的情形，以及“可简单扩张”情形中的蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)，由引理 1.2(1) 和定理 3.2 得出。我们验证：若存在 $(e, f) \in Um(R^2)$，使得 $(ae + cf, be + df, ad - bc) \in Um(R^3)$，则 A 是可简单扩张的。根据定理 3.2，只需证明 $(ae + cf, be + df) \in Um(R^2)$。令 $I := R(ae + cf) + R(be + df)$，并令 $\mathfrak{m} \in MaxR$。若 $ad - bc \in \mathfrak{m}$，则 $(ae + cf, be + df, ad - bc) \in Um(R^3)$ 蕴含 $I \not\subseteq \mathfrak{m}$。若$ad - bc \notin \mathfrak{m}$，则 A模 $\mathfrak{m}$可逆，因此 $I \subseteq \mathfrak{m}$ 当且仅当 $Re + Rf \subseteq \mathfrak{m}$；由此以及 $(e, f) \in Um(R^2)$，可推得 $I \not\subseteq \mathfrak{m}$。由于 I不包含于 R 的任何极大理想中，因此 $(ae + cf, be + df) \in Um(R^2)$。

要完成证明，只需证明：如果 $sr(R) \leq 2$，那么每个可扩张的$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都是可简单扩张的。由 (1) $\Leftrightarrow$(2)，令 $(e', f') \in R^2$ 满足 $(ae' + cf', be' + df', ad - bc) \in Um(R^3)$。因此 $(e', f', ad - bc) \in Um(R^3)$。由于 $sr(R) \leq 2$，存在 $(q, r) \in R^2$ 使得

$$(e, f) := \big(e' + q(ad - bc), f' + r(ad - bc)\big) \in Um(R^2).$$

由于由 $ae+cf, be+df, ad-bc$ 生成的 R 中的理想与由 $ae'+cf', be'+df', ad-bc$ 生成的理想相等，我们有 $(ae+cf, be+df, ad-bc) \in Um(R^3)$。因此，由上一段可知，$A$ 是可简单扩张的。□

推论 3.7。以下性质成立：

(1) 环 R 是 E_2 环，当且仅当对于每个 $(a,b,c,d) \in Um(R^4)$，都存在 $(e,f) \in R^2$，使得 $(ae+cf, be+df, ad-bc) \in Um(R^3)$。(2) 环 R 是 SE_2 环，当且仅当对于每个 $(a,b,c,d) \in Um(R^4)$，都存在 $(e,f) \in Um(R^2)$，使得 $(ae+cf, be+df, ad-bc) \in Um(R^3)$。(3) 若 $sr(R) \leq 2$，则环 R 是 SE_2 环，当且仅当环 R 是 E_2 环。

证明。三部分均可直接由定义和推论 3.6 中相应的三个陈述得出。□

例 3.8。设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。在许多简单情形下，可以轻易地指定 $(e,f) \in R^2$，使得命题 3 成立，从而得出A 可简单扩张。下面列出四种这样的情形。

(1) 如果 $\{a,b,c,d\} \cap U(R) \neq \emptyset$，那么我们可以取 $(e,f) \in R^2$，使得 $\{e,f\} = \{0,1\}$。例如，若 $a \in U(R)$，则 $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & -1 \\ 0 & a^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ 是 A的简单扩张。

(2) 如果 $\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,d)\} \cap Um(R^2) \neq \emptyset$，那么我们可以取 $(e,f,e',f') \in R^4$，使得 $1 \in \{ae+cf, be+df, ae'+cf', be'+df'\}$。例如，若 $(a,b) \in Um(R^2)$ 且 $s,t \in R$ 满足 $as+bt=1$，则 $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & -1 \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$ 是 A 的简单扩张。(3) 如果元素 a, b, c 和 d 中至少有两个属于 $J(R)$（例如，它们为 0），那么我们可以取 e, f，使得 $1 \in \{ae+bf, ce+df, ae+bf+ce+df\}$。例如，若$c=d=0$ 且 s, $t \in R$ 满足 $as+bt=1$，则 $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$ 是 A的简单扩张。同样，若 $b=c=0$ 且 $e,f \in R$ 满足 $ae+df=1$，则 $\begin{bmatrix} a & 0 & f \\ 0 & d & -e \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是 A的简单扩张。

(4) 若 $a,b,c,d,f,q \in R$ 满足 $aq+df=1$，则 $\begin{bmatrix} a & ab \\ ac & d \end{bmatrix}$ 的一个简单扩张为 $\begin{bmatrix} a & ab & f \\ ac & d & -q+cf \\ -1 & 1-b & 0 \end{bmatrix}$ ( )。

3.5. 上三角矩阵的应用。在最后四个例子中的三个例子里，简单扩张的 (2, 3) 项为 -1，也就是说，我们可以选择 $e=1$。如下结果表明，这类扩张与稳定秩 1 和 1.5 有关。

推论 3.9. 以下性质成立：

(1) 当且仅当每个上三角矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都有一个简单扩张 A^+，其 (2,3) 项为 -1 时，我们有 $sr(R)=1$。(2) 当且仅当每个 (1,1) 项非零的上三角矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都有一个简单扩张 A^+，其 (2,3) 项为 -1 时，我们有 $fsr(R)=1.5$。

(3) 当且仅当每个 (1,1) 项不属于 $J(R)$ 的上三角矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都有一个简单扩张 A^+，其 (2,3) 项为 -1 时，我们有 $asr(R) = 1$ 。

证明。设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。若 $a = 0$，则 $(b, d) \in Um(R^2)$，由公式 (VII) 可知，A 有一个简单扩张，其 (2, 3) 项为 -1，当且仅当存在 $(f, t) \in R^2$，使得 $bt + dft = 1$，因此当且仅当存在 $f \in R$，使得 $b + df \in U(R)$。因此，所有这些满足 $a = 0$ 的矩阵 A，都有一个简单扩张，其 (2, 3) 项为 -1，当且仅当 $sr(R) = 1$。

类似地，若 $a \neq 0$ （分别地，若 $a \notin J(R)$），则由公式 (VII) 可知，A有一个简单扩张，其 (2, 3) 项为 -1，当且仅当存在 $(e, f, t) \in R^3$，使得$ae + bt + dft = 1$，因此当且仅当存在 $f \in R$，使得 $(b + df, a) \in Um(R^2)$。将稳定秩1.5（分别地，几乎稳定秩 1）的定义应用于 $(b, c, a) \in Um(R^3)$，可知所有这些满足 $a \neq 0$ （分别地，满足 $a \notin J(R)$）的矩阵，都有一个简单扩张，其 (2, 3) 项为 -1，当且仅当 $fsr(R) = 1.5$ （分别地，$asr(R) = 1$）。□

推论 1.22(1) 的证明。我们验证，若 $asr(R) = 1$，则每个矩阵$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都可简单扩张。根据例 3.8(3)，我们可以假设 $a \notin J(R)$，而此情形可由推论 3.9(3) 得出。

推论 3.10。环 R是一个 $SE_2^{\triangle}$环，当且仅当对于所有同态 $\phi\colon \mathbb{Z}[x, y, z] \to R$，矩阵 $\mathcal{G} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x, y, z]))$（见第 2.6 小节）在 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中经由 ϕ 所得的像都可简单扩张。

证明。“仅当”部分显然。为证明“若”部分，设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。令 $(a', b', c') \in R^3$ 满足 $aa' + bb' + cc' = 1$。考虑同态 $\phi\colon \mathbb{Z}[x, y, z] \to R$，它将 x、y和 z分别映到 aa'、b和 b'。矩阵 $\mathcal{G}$ 在该同态下的像是矩阵 $B = \begin{bmatrix} aa' & b \\ 0 & cc' \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，因此 B 可简单扩张。由定理 3.2 可知，存在 $(e, f') \in R^2$ 使得 $(aa'e, be + cc'f') \in Um(R^2)$。记 $f := c'f' \in R$ 为 $(aa'e, be + cf) \in Um(R^2)$，则可知 $(ae, be + cf) \in Um(R^2)$，并由命题 3.2 可知 A 可简单扩张。□

4. The proofs of the general results and applications

4.1. 定理 1.5 的证明。

命题 4.1. 设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。则有以下性质：

(1) 若 $\det(A) = 0$，则 A 可简单扩张当且仅当它是非满的。*(2)* 矩阵 A 可扩张当且仅当其模 $R\det(A)$ 约化是非满的。*(3)* 若 A可扩张，则命题 10 成立（因此，若 R 是约化的，则命题9 也成立）。

证明。为证明 (1) 的“若”部分，我们写作 $A = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & q \end{bmatrix}$。由于 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，可知 (l, m)、$(n, q) \in Um(R^2)$，因此存在数对 (e, f) 和 $(s, t) \in R^2$ 使得 $el + fm = sn + tq = 1$。于是 $\begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} n & q \end{bmatrix}$，并且

由定理 3.2 可知， A 可简单扩张，其一个简单扩张为 $\begin{bmatrix} ln & lq & f \\ mn & mq & -e \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$ 。

为证明 (1) 的“仅当”部分，我们假设 $\det(A) = 0$ and A 可简单扩张。由推论 3.6 的第二部分可知，存在 $(e, f) \in Um(R^2)$，使得 $(ae + cf, bf + df) \in Um(R^2)$，因此存在数对 (p, r) 和 $(s, t) \in Um(R^2)$，使得 $ep + fr = (ae + cf)s + (be + df)t = 1$。矩阵 $M := \begin{bmatrix} e & f \\ -p & r \end{bmatrix}$ and $N := \begin{bmatrix} s & -be - df \\ t & ae + cf \end{bmatrix}$ 的行列式为 1。简单计算可得，由于 $\det(A) = 0$，对于某个 $w \in R$，有 $MAN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$。因此， $A = (M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ w \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} N^{-1})$ 非满秩。于是 (1) 成立。

部分 (2) 由部分 (1) 和引理 1.2(1) 得出。

为证明部分 (3)，我们首先注意到，部分 (2) 蕴含存在 $l, \bar{m}, \bar{n}, \bar{q} \in R/R\det(A)$，使得 A 模 $R\det(A)$ 为 $\begin{bmatrix} l \\ \bar{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n} & \bar{q} \end{bmatrix}$。若 $l, m, n, q \in R$ 分别提升 $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{q}$，则 $B := \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & q \end{bmatrix}$ 与 A 模 $R\det(A)$ 同余，且 $\det(B) = 0$。因此陈述 10 成立，进而部分 (3) 成立。 □

现在我们可以证明定理 1.5 了。回顾第 2.5 小节，若 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 的行列式为零，则 K_A 和 Q_A 是彼此对偶且 $K_A \oplus Q_A \cong R^2$ 的秩 1 投射 R-模。

由上一段可知 (4) $\Rightarrow$ (3)。蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (2) 显然成立。等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 可由命题 4.1(1) 得出。

蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (4) 可由以下事实得出：每个由 2 个元素生成的秩 1 投射 R-模都同构于某个幂等元 $A \in \mathbb{M}_2(R)$ 对应的 Q_A，其秩为 1（因而是行列式为 0 的幺模）；将 (1) 部分应用于 A，可得 Q_A 同构于 R。因此定理 1.5 得证。

例 4.2。对于行列式 $\det(A) = 0$ 的 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，我们考虑 K_A 的 R-子模 $K'_A := R \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix}$。对于每个 $\mathfrak{m} \in MaxR$， $K'_A \not\subseteq \mathfrak{m}\mathbb{M}_2(R)$，因此 $K'_A \not\subseteq \mathfrak{m}K_A$。这意味着 $K_A = K'_A$。对于 $(e, f) \in R^2$，陈述 3 成立当且仅当 K_A 是自由的，且以 $e \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix}$ 为生成元。

例 4.3. 设 x 是一个不定元，并设 $k \in \mathbb{N}$。设 $q := 4k+1, r := 2k+1$ 且 $\theta := i\sqrt{q} \in \mathbb{C}$。我们验证， $\mathbb{Z}[x]$ 是一个 Π_2 环，但不是一个 E_2 环。由于 $\mathbb{Z}[x]$ 是唯一分解整环，它也是 Schreier 整环，因此是一个 Π_2 环（见第 1 节）。因此，只需证明矩阵

$$A := \begin{bmatrix} r & 1 - x \\ 1 + x & 2 \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x]))$$

不可扩张。由于 $\det(A) = x^2 + q$，根据引理 1.2(1)，只需证明 A 经复合同态后所得的像 $B := \begin{bmatrix} r & 1 - \theta \\ 1 + \theta & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[\theta])$

同态 $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]/(x^2+q) \to \mathbb{Z}[\theta]$ 将 x 映到 θ，不是可简单扩张的，等价地说，它是满秩的。关于范数的标准论证表明，元素 $2 \in \mathbb{Z}[\theta]$ 是不可约元，因此它唯一的两个元素乘积表示为 $2 = u(2u^{-1})$，其中 $u \in U(\mathbb{Z}[\theta])$。于是，由于 $2u^{-1}$ 既不整除 $1-\theta$，也不整除 $1+\theta$， B 是满秩的。我们还可得出结论，整环 $\mathbb{Z}[\theta]$ 不是一个 Π_2 环。若 $4k+1$ 无平方因子，则 $\mathbb{Z}[\theta]$ 是 Dedekind 整环，但不是主理想整环。

注4.4。（1）显然，命题1至4在相似变换（ R-代数 $\mathbb{M}_2(R)$的内自同构）下保持不变，但一般而言，它们在 $\mathbb{M}_2(R)$的任意 R-代数自同构下并不保持不变。为验证这一点，设R 满足：存在一个 R-模 P，使得 $P \oplus P = R^2$ 但 $P \ncong R$；因此 $[P] \in Pic(R)$的阶为2。于是， $\mathbb{M}_2(R)$中的幂等元 A是沿着 P的第二个副本投影到 P的第一个副本上的投影，并满足 $Q_A = P$。因此， A不可简单扩张，但它在 R-代数自同构 $\mathbb{M}_2(R) = End_R(P \oplus P) \cong \mathbb{M}_2(R)$下的像（该自同构由 $End_R(P) \cong R$定义）将 A映射为 $Diag(1,0)$。具体例子：若 R 是一个满足 $Pic(R) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 Dedekind 整环（例如$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$），那么我们可以取 P 为 R 的任意一个在 $Pic(R)$中的类非平凡的极大理想。

(2) 如果 $Pic(R)$ 是平凡的，那么 R 也是一个 Π_2 环；这一点也可由定理 3.1(3) 和 (4) 通过 $\mathbb{G}_m$-挠子与线丛之间的等价性轻易得到。

推论 4.5. 若 R 是一个 Π_2 环，则对于每个 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，命题 1 至 8 等价。

证明. 根据定理 3.2，只需证明 $7 \Rightarrow 2$。我们可以假设 $\det(A) \notin 0$。设 $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 满足 $\det(B) = 0$ 且B 与 A 模 $R\det(A)$ 同余。由于 R 是一个 Π_2 环， B 可简单扩张。由此以及定理 3.2 可知，存在 $(e,f) \in Um(R^2)$，使得 $(a'e+c'f, b'e+d'f) \in Um(R^2)$，从而 $(a'e+c'f, b'e+d'f, ad-bc) \in Um(R^2)$。因此，由于 B与 A模 $R\det(A)$ 同余，可得 $(ae+cf, be+df, ad-bc) \in Um(R^2)$。推论 3.6 的第二部分表明， A 可简单扩张。□

推论 4.6. 若 R 是稳定秩至多为 2 的前 Schreier 整环的直积，则对每个 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，命题 1 至 10 等价。证明. 我们可以假设 R 是前 Schreier 整环，且 $sr(R) \leq 2$。因此， R是约化的幺模环。所以，根据推论 4.5 和定理 3.2，只需证明 10 蕴含 2。设 $B \in \mathbb{M}_2(R)$ 满足 $\det(B) = 0$，且B 模 $R\det(A)$ 同余于 A。由于 B 是前 Schreier 整环， B 是非满的，因此 A模 $R\det(A)$ 是非满的。于是 A模 $R\det(A)$ 可简单扩张（见定理 1.5），从而我们推得 A 可扩张（见引理 1.2(1)）。由此以及推论 3.6 的最后一部分可知， A 可简单扩张。□

4.2. 定理 1.5 的一个应用。我们回顾以下广为人知的引理。

引理 4.7. 设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，设 $t \in R$ 满足 $\det(A) \in Rt$，并设 $\hat{R}$ 为 R 的 t-进完备化。那么存在 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，其模 Rt 的约化为 A 模 Rt 的约化，且 $\det(B) = 0$。

证明. 设 $B_0 := A$。对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳法，我们证明存在 $B_n \in \mathbb{M}_2(R)$，使其与 B_{n-1} 模 $Rt^{2^{n-1}}$ 同余，且 $\det(B_n) \in Rt^{2^n}$。对于 $n = 1$，设 $s \in R$ 满足 $\det(A) = st$。写作 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，对于 $B_1 := A + t\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$，$\det(B_1)$ 模 Rt^2 同余于 $st + (dx + cy + bz + aw)t$。由于 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，线性方程 $dx + cy + bz + aw = -s$ 有一个解 $(x, y, z, w) \in R^4$，且对于这样的解，我们有 $\det(B_1) \in Rt^2$。从 n 到 $n+1$ 的过渡可由将 $n = 1$ 的情形应用于 B_n 和 $Rt^{2^{n+1}}$（而非 A 和 Rt^2）得到。归纳法至此完成。

由于 $t \in J(\hat{R})$，序列 $(B_n)_{n\geq 1}$ 的极限 $B \in \mathbb{M}_2(\hat{R})$ 存在。我们有 $\hat{\det}(B) = 0$。由于 $t \in J(R)$，我们有 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。□

引理 4.7 也可通过标准的提升论证，由定理 3.1(2) 中关于光滑性的部分推出。

命题 4.8. 设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。如果 R 的 $\det(A)$-完备化 $\hat{R}$ 是一个 Π_2环，那么 A 是可扩张的。

证明. 由于 $\hat{R}$ 是一个 Π_2 环，引理 4.7 中的每个 $B \in Um(\mathbb{M}_2(\hat{R}))$ 都是可简单扩张的；因此，其模 $R\det(A)$ 的约化，即 A 模 $R\det(A)$，也是可简单扩张的。故该命题由引理 1.2(1) 得出。□

4.3. 定理 1.8 的证明。命题 (1)、(2) 和 (3) 的等价性由命题 6、7 和 8 的等价性推出（见定理 3.2）。

为验证 (4) $\Rightarrow$ (1)，令 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。为证明存在 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使其同余于 A 模 $R\det(A)$，且 $\det(B) = 0$，我们可以假设 $\det(A) \neq 0$；此时，B 的存在性由将命题 (4) 应用于 $a := \det(A)$ 以及 A 在 $\{A \in Um(\mathbb{M}_2(R/Ra)) | \det(A) = 0\}$中的像得到。

接下来需要验证：若 $sr(R) \leq 4$，则 (1) $\Rightarrow$ (4)。令 $a \in R$ 为非零元，并令 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R/Ra))$，使得 $\det(A) = 0$。由于 $sr(R) \leq 4$，存在 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，其模 Ra 约化后为 A；我们有 $\det(A) \in Ra$。由于假设 R 是一个 Z_2 环，存在 $B \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得 $\det(B) = 0$，且 B 同余于 A 模 $R\det(A)$，因此也模 Ra同余。由此命题 (4) 成立，定理 1.8 也就成立。

4.4. 定理 1.11 的证明。为证明 (1)，设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。若 R 是一个E_2 环，那么首先由命题 4.1(3) 可知，存在 $B \in \mathbb{M}_2(R)$，使其模 $R\det(A)$ 与 A 同余，且 $\det(B)$ 为 $= 0$；因此 R 是一个 WZ_2 环。其次，采用命题 4.1(3) 的证明中的记号，由于 A 是幺模的，可得 $(l, \bar{m})$、$(\bar{n}, \bar{q}) \in Um(R/R\det(A))$。由此及事实 2.9，若 $sr(R) \leq 2$，我们可以假设 (l, m)、$(n, q) \in Um(R^2)$，于是 $B := \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n & q \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 模 $R\det(A)$ 与 A 同余，且其行列式为零；因此 R 是一个 Z_2 环。此外，若 R 是一个 SE_2 环，则 A 可简单扩张，而定理 3.2 蕴含结论 6 成立；因此 R 是一个 Z_2 环。故 (1) 成立。

根据第 (1) 部分，为了证明第 (2) 部分，我们可以假设 R 是前 Schreier 整环，只需证明：如果 R 是一个 WZ_2 环，那么它也是一个 E_2 环。由于 R 是一个 Π_2 整环，只需证明：如果 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 的行列式非零，那么 A 是可扩张的。对此的论证与推论 4.6 的证明中涉及矩阵 B 的论证相似（由于 R 是前 Schreier 整环，每个行列式为零的 $B \in \mathbb{M}_2(R)$ 都是非满的）。因此，第 (2) 部分成立。

第 (3) 部分由推论 4.5 得出，因为对于每个 $A \in Um（\mathbb{M}_2（R））$，命题 2 和 7 等价。

对于部分 (4)，设 $(a,b,c) \in Um(R^2)$。在本段中，我们假设 R 是一个 $SE_2^{\triangle}$ 环；因此矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ 可简单扩张。由此以及定理 3.2 可知，陈述 5 成立，因此存在 $(x,y,z,w) \in Um(R^4)$，使得 $xw = yz$ 且 $1 = ax + by + cw$。因此，R 是一个 V_2 环这一事实可由以下计算得出

$$(1-ax)(1-cw) = 1 - ax - cw + acxw = by + acyz = y(b + acz).$$

对于部分 (4) 证明的其余部分，我们假设 $(a,b) \in Um(R^2)$。对于固定的单位 $\bar{u} \in U(R/Rc)$，取 $u \in R$ 使得 $\bar{u} = u + (c)$，并考虑矩阵 $\begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。

若 R 是一个 Π_2 且为 WV_2 的环，将三元组 $(ab,u,ac) \in Um(R^3)$ 代入 WV_2 环的定义，可得存在一个九元组 $(x,y,z_1,z_2,w,q,r,s,t) \in R^9$，使得（见方程（III））

$$D := \begin{bmatrix} s - acx & qru + acz_1 + bcz_2 \\ y & t - bcw \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$$

其行列式为零，且 (ac,sq)、$(bc,rt) \in Um(R^2)$。由定理 1.5，鉴于我们假设 R 是一个 Π_2 环，可知 D 是非满的，因此我们可以分解 $qru + acz_1 + bcz_2 = u_a u_b$，其中 $u_a \in R$ 整除 $s - acx$，且 $u_b \in R$整除 $t - bcw$。于是 $(q + Rac)^{-1} \cdot (u_a + Rac) \in U(R/Rac)$ 和 $(r + Rbc)^{-1} \cdot (u_b + Rbc) \in U(R/Rbc)$ 满足它们在 $U(R/Rc)$ 中的像之积为 $\bar{u}$。因此，R 是一个 U_2 环。

我们现在假设 R 是一个 $SE_2^{\triangle}$ 整环，并要证明 R 是一个 U_2 环。对于 $(a, b) \in Um(R^2)$ 和 $c \in R$，为了验证自然乘积同态 $U(R/Rac) \times U(R/Rbc) \to U(R/Rc)$ 是满射，我们可以假设 $abc \neq 0$。由于矩阵 $\begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix}$ 可简单扩张，由定理 1.5 可知，$\begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix}$ 模 (abc^2) 的约化是非满的，因此同余方程组

$$xy \equiv ac \text{ 模 } abc^2, \quad xw \equiv u \text{ 模 } abc^2, \quad yz \equiv 0 \text{ 模 } abc^2, \quad zw \equiv bc \text{ 模 } abc^2$$

有解 $(x,y,z,w) \in R^4$。由第二个同余式可知，$(xw,c) \in Um(R^2)$。由此以及第一个和第四个同余式可知，存在 $(y',z') \in R^2$，使得 $y = cy'$ 且 $z = cz'$。因此，上述第一个同余方程组等价于第二个方程组

$$xy' \equiv a \text{ 模 } abc, \quad xw \equiv u \text{ 模 } abc^2, \quad y'z' \equiv 0 \text{ 模 } ab, \quad z'w \equiv b \text{ 模 } abc.$$

由于 $(a,b) \in Um(R^2)$，由最后两个同余式首先可得 $(z',a) \in Um(R^2)$，其次可得存在 $y'' \in R$ 使得 $y' = ay''$。因此，第二个同余方程组等价于第三个方程组

$$xy'' \equiv 1 \mod bc, \quad xw \equiv u \mod abc^2, \quad y''z' \equiv 0 \mod b, \quad z'w \equiv b \mod abc.$$

由第一个和第三个同余式，首先可得 $(y'',b) \in Um(R^2)$；其次，存在 $z'' \in R$ 使得 $z' = bz''$。因此，第三个方程组的

同余方程组等价于第四个方程组

$$xy'' \equiv 1 \mod bc,\ xw \equiv u \mod abc^2,\ z''w \equiv 1 \mod ac$$

它只有三个同余。因此， $x \in U(R/Rbc)$ 和 $w + Rac \in U(R/Rac)$ 满足：它们在 R/Rc 中的像的乘积为 $\bar{u}$。于是， R 是一个 U_2 环，因此结论 (4) 成立。

结论 (5) 可由事实 2.9 应用于 $n = 4$ 及定义得出。

结论 (6) 源于以下事实：每个 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都是可扩张的，因为它模 $R\det(A)$ 的约化是可简单扩张的（见引理 1.2(1)，并注意假设 $R/R\det(A)$ 是一个 Π_2 环）。因此，定理 1.11 成立。

4.5. 定理 1.12 的证明。设 R 是一个维数 1 的整环。

为证明结论 (1)，设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，其中 $\det(A) \neq 0$。环 $\bar{R} := R/\det(A)R$ 的维数为 0，因此 $Pic(\bar{R})$ 是平凡的。由此及定理 1.5 可知， $\bar{R}$ 是一个 Π_2 环，因此 A 模 $R\det(A)$ 的约化 $\bar{A}$ 是可简单扩张的。由定理 1.5 可知 $Q_{\bar{A}} \cong R/R\det(A)$。由于 R 是整环，我们有两个投射分解 $0 \to R\det(A) \to R \to Q_{\bar{A}} \to 0$，以及（见第 4.4 小节） $0 \to \det(A)R^2 \to Q_A \to Q_{\bar{A}} \to 0$。由此及应用于 $b = \det(A)$ 的第 2.4 小节（回忆 $sr(R) \leq 2$），可知 A 等价于 $Diag(1, \det(A))$，因此是可简单扩张的（见定理 3.2）。

中的每个三角矩阵 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都有两个零元素，或具有非零行列式。由此以及例 3.8(3) 和 (1) 可知， R 是一个 $SE_2^{\triangle}$ 环。由此以及定理 1.11(4) 可知， R 是一个 V_2 环。为了验证R 是一个 Z_2 环，我们必须证明命题7 对每个 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都成立。我们可以假设 $\det(A) \neq 0$，此时命题 7 由 (1) 和定理 3.2 得出。因此 (2) 成立。

(3) 中第一个“当且仅当”由 (1) 和定义得出。秩 1 射影 R-模的同构类，就是 R 的非零理想的同构类，这些理想在扎里斯基拓扑下局部为主理想；由于对每个 $a \in R \setminus \{0\}$，$\dim(R/Ra) = 0$，因此 $Pic(R/Ra)$ 是平凡的，所有这类非零理想都由 2 个元素生成。由此以及定理 1.5 可知， R 是 Dedekind 整环，当且仅当 $Pic(R)$ 是平凡的。因此 (3) 成立。由于主理想整环恰好是皮卡群平凡的 Dedekind 整环，(4) 由 (3) 中第二个“当且仅当”得出。因此定理 1.11 成立。

备注 4.9。在 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中，矩阵是否存在扩张并不只取决于其元素集合。正如例 4.3 所示，矩阵 $\begin{bmatrix} 1+\theta & 1-\theta \\ r & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[\theta])$ 与 B 的元素相同，具有非零行列式，并且是可扩张的（见定理 1.12(1)）。

4.6. 定理 1.13 的证明。蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 对所有环都成立（见例 1.4 以及定理 1.11(1) 和 (3)）。由于恒等式 $\mathbb{M}_2(R) = RUm(\mathbb{M}_2(R))$ 对 Hermite 环 R 成立，因此由定理 3.2 可得蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1)。(4) $\Rightarrow$ (2) 是推论3.7(3) 的一个特例，因为$sr(R) \leq 2$。因此，命题 (1) 至 (4) 等价。

由于每个 SE_2 环都是一个 $SE_2^{\triangle}$ 环和一个 Π_2 环，且每个 V_2 环都是一个 WV_2 环，由定理 1.11(4)可知 (2) $\Rightarrow$ (5) 且 (6) $\Rightarrow$ (7)。显然，(5) $\Rightarrow$ (6)。我们有 (7) $\Leftrightarrow$ (8)，因为 (8) 只是将单位$d + Rc \in U(R/Rc)$的 U_2 环定义换一种方式表述。显然，(8) $\Rightarrow$ (9)。

为验证 (9) $\Rightarrow$ (8)，设 (a,b)、$(c,d) \in Um(R^2)$。若 $(e,f,s,t) \in R^4$ 满足 $ae+bf = cs+dt = 1$，则将 (9) 应用于 (ae,d) 和 $sc \in 1+Rd$，可知存在 $t_1 \in R$，使得我们可以将 $d+t_1sc = d_1d_2$ 分解为 (ae,d_1)、$(1-ae,d_2) = (b,d_2) \in Um(R_2)$，从而 (a,d_1)、$(b,d_2) \in Um(R_2)$；取 $t:= t_1s$ 即得 (8) 成立。

等价 (4) $\Leftrightarrow$ (10) 由定理 1.11(5) 和 (6) 得出。

我们验证 (7) $\Rightarrow$ (4)。我们需要证明，若 R 是一个 U_2 环，那么每个$A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都是可扩张的。根据引理 1.2(3)，我们可以假设 A 是上三角的，因此可以写成 $A = \begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix}$，其中 a、b、c、$u \in R$ 满足 $\det(A) = abc^2$，$(a,b) \in Um(R^2)$，且 $u \in R$ 是固定单位 $u+Rc \in U(R/Rc)$ 的任意代表。因此，由于我们假设 R 是一个 U_2 环，可以假设存在乘积分解 $u = de$，其中 d、$e \in R$ 满足$d+Rac \in U(R/Rac)$ 且 $e+Rbc \in U(R/Rbc)$。令 d'、$e' \in R$ 满足 $d'+Rac$ 是 $d+Rac$ 的逆，且 $e'+Rac$ 是 $e+Rbc$ 的逆。令 f_a、$f_b \in R$ 满足 $dd' = 1+acf_a$ 和 $ee' = 1+bcf_b$。矩阵

$$B := \begin{bmatrix} ac(1+bcf_b) & u \\ abc^2d'e' & bc(1+acf_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} acee' & de \\ abc^2d'e' & bcdd' \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$$

与 A 模 $R\det(A)$ 同余且是非满的。因此，A 模 $R\det(A)$ 是非满的，因而可简单扩张（见定理 1.5）；由引理 1.2(1)可知，A 是可扩张的。

因此，定理 1.13 的命题 (1) 至 (10) 等价。

剩下需要验证的是，当 R 是 B´ezout 整环时，(11) $\Rightarrow$ (7)。给定单位元 $d+Rc \in U(R/Rc)$ 和 $(a,b) \in Um(R^2)$，令 $a' := \gcd(a,c)$，且 $b' := \gcd(b,c)$。由于 $\gcd(a,b) = 1$，存在 $c' \in R$ 使得 $c = a'b'c'$。将三元组 (a',b',c') 代入 W_2 环的定义可知，存在单位元 $e+Rc, f+Rc \in U(R/Rc)$，使它们在 $U(R/Ra') \times U(R/Rb')$ 中的像分别为 $(d+Ra', 1+Rb')$ 和 $(1+Ra', d+Rb')$。于是，$(d+Ra, 1+Rb) \in R/Rab \cong R/Ra \times R/Rb$和 $e+Rc \in R/Rc$（分别为 $(1+Ra, d+Rb) \in R/Rab \cong R/Ra \times R/Rb$和 $f+Rc \in R/Rc$）在 $R/Ra'b' \cong R/Ra' \times R/Rb'$ 中映到同一个元素；因此，由于 abc' 是 c 和 ab 的最小公倍数，存在 $(g,h) \in R^2$，使得 $g+Rabc'$（分别为 $h+Rabc'$）约化后与它们都相同。由于 $abc'+Rabc \in R/Rabc$ 是幂零的，同态 $U(R/Rabc) \to U(R/Rabc')$ 是满射，因此我们得到 $(e+Rc)(f+Rc) \in Im(U(R/Rac) \to U(R/Rc))Im(U(R/Rbc) \to U(R/Rc))$。因此可假设 $d-1 \in Ra'b'$，即 $d+Rc$ 和 $1+Rab$ 在 $Ra'b'$ 中的像相等，这意味着 $d+Rc$ 属于 $Im(U(R/Rabc') \to U(R/Rc))$，因而也属于 $Im(U(R/Rabc) \to U(R/Rc))$。因此定理 1.13 得证。

推论 4.10. 设 R 是一个 Hermite 环。那么 R 是初等约化环，当且仅当对于所有同态 $\phi\colon \mathbb{Z}[x,y,z] \to R$，$\mathcal{D} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x,y,z]))$ 的像（等价地，参见第 2.6 小节中的 $\mathcal{F} \in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}[x,y,z]))$）在 $Um(\mathbb{M}_2(R))$ 中经由 ϕ 可扩张。

证明。“仅当”部分显然。为证明“若”部分，根据定理 1.13，只需证明 R 是一个 U_2 环，即对于所有 a、$c \in R$，约化乘积同态 $\rho_{a,\,c}\colon U(R/Rac) \times U(R/R(1-ac)) \to U(R/Rc)$ 是满射（见注 1.10）。设 $u \in R$ 满足 $(u,c) \in Um(R^2)$。我们要证明 $u+Rc \in Im(\rho_{a,\,c})$。设 s、$t \in R$ 满足 $cs+tu = 1$。由于 $u+Rcs \in U(R/Rcs)$，只需证明 $u+Rcs \in Im(\rho_{a,\,cs})$。因此，以 c 替换

cs 后，我们可以假设 $c = 1 - tu$。因此， $A = \begin{bmatrix} a & u \\ (1-tu)\,0 & 1-a \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 是 $\mathcal{D}$ 在同态 $\phi\colon \mathbb{Z}[x,y,z] \to R$ 下的像，该同态将 x、 y 和 z 分别映到 a、 u 和 t ，因此 A 可扩张。由于 $\mathcal{D}$ 等价于 $\mathcal{E}$ （见第 2.6 小节），可知 A 等价于矩阵 $B := \begin{bmatrix} a & u \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，其中 w :

$= 2t - ut^2$。由引理 1.2(3) 可知 B 可扩张，因此其模 $Ra(1-a)(1-uw) = Ra(1-a)c^2$ 的约化是非满的（见命题4.1(2)）。我们将 $\bar{*}$ 记为 $*$ 模 $Ra(1-a)c^2$ 的约化，其中 $*$ 或为 R，或为 R 的一个元素。我们有乘积分解 $\bar{u} = \bar{u_1}\bar{u_2}$，其中 $\bar{u_1} = u_1 + Ra(1-a)c^2 \in \bar{R}$ 整除 $\bar{a}$，且 $\bar{u_2} = u_2 + Ra(1-a)c^2 \in \bar{R}$ 整除 $(1-\bar{a})(1-\bar{w}\bar{u})$，因此也整除 $1-\bar{a}$。于是存在 $(d,e,f) \in R^3$，使得 $u_1u_2 = u + a(1-a)c^2d$， u_1 整除 $a + a(1-a)c^2e$，且 u_2 整除 $1 - a + a(1-a)c^2f$。由此可得 $\big(u_1、\ c(1-a)\big)、(u_2, ca) \in Um(R^2)$，因此有恒等式 $u + Rc = u_1u_2 + Rc = \rho_{a、\ c}\big(u_2 + Rac、\ u_1 + R(1-a)c\big)$. □

推论4.11. 设 R 是一个贝祖整环 B ´。那么 R 是初等除环，当且仅当对所有 (a,u,t)，$\in R^3$ 满足 $u \neq 0$，都存在 $(s,l,z) \in R^3$，使得

$$(1 - su - la)^2 + l - sul - l^2a - z(s + t - sut) = 0. \tag{X}$$

证明. 如推论 4.10 的证明所示，Hermite 环 R 是初等约化环，当且仅当对所有 (a,u,t)，矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & u \\ (1-tu)\,0 & 1-a \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 是可简单扩张的；根据推论 4.5，这又当且仅当存在 $(x,y,z,w) \in R^4$，使得

$$1 - a(1-tu)x - yu - w(1-a)(1-tu) = 0 = xw - yz.$$

若 $u = 0$，则 A 是对角矩阵，因此可简单扩张（见例 3.8(3)）。因此我们可以假设 $u \neq 0$。方程 $1 - a(1-tu)x - yu - w(1-a)(1-tu) = 0$ 可改写为 $(1-tu)(ax - aw + w) = 1 - yu$ ；对 Ru 模 $u \neq 0$ 运算可知，其通解为 $ax + w(1-a) = 1 - su$ 和 $y = s + t - sut$，其中 $s \in R$。由于 R 是整环， $ax + w(1-a) = 1 - su$ 的通解为 $x = 1 - su + l(1-a)$ 和 $w = 1 - su - la$ ，方程 $xw - yz = 0$ 可写为

$$[1 - su + l(1-a)](1 - su - la) - z(s + t - sut) = 0,$$

由此即可得出该推论。 □

4.7. 定理 1.17 的证明及其应用。我们先证明定理 1.17。设 $\rho_{a,c}$ 如上所述，为约化乘积同态。与推论 4.10 的证明类似，只需证明对于所有的 $(u,c) \in Um(R^2)$ 和 $a \in R$，都有 $u^2 + Rc \in Im(\rho_{a,c})$。为验证这一点，我们可以假设 $c \neq 0$。如前述证明所示，我们可以假设存在 $t \in R$ 使得 $c = 1 - tu$。由于我们假设 R 是一个 $(WSU)_2$ 环，因此存在 $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in GL_2(R)$ 使得 $M \begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} c$ 是一个对称矩阵，即方程

$$zac = xu + y(1-a)c \tag{XI}$$

成立。由此方程可知， c 整除 xu。因此，由于 $(u,c) \in Um(R^2)$，c 整除 x。令 $s \in R$ 满足 $x = cs$。

令 $\mu := \det(M) = csw - yz \in U(R)$。因此 $(cs, yz) \in Um(R^2)$。

我们首先假设 $c \notin Z(R)$。将方程（XI）除以 c，可得

$$za + y(a-1) = su. \tag{XII}$$

我们验证，假设（s, a） $\notin Um(R^2)$会导致矛盾。该假设意味着存在 $\mathfrak{m} \in MaxR$ 使得 $Rs + Ra \subseteq \mathfrak{m}$。由此以及方程（XII）可得 $y(a-1) \in \mathfrak{m}$。由于 $a - 1 \notin \mathfrak{m}$，可知$y \in \mathfrak{m}$，因此（$s, yz$） $\notin Um(R^2)$，这就产生了矛盾。

因此（s, a） $\in Um(R^2)$，即 $s + Ra \in U(R/Ra)$。

由方程（XII）可知，$(-y + Rc)(u + Rc)^{-1} \in U(R/Rc)$与 $s + Ra \in U(R/Ra)$在 $U(R/(Ra + Rc))$中的像相同，因此存在商环 $R/(Ra \cap Rc)$的一个单位，它映至$(-y + Rc)(u + Rc)^{-1} \in U(R/Rc)$。由于$(Ra \cap Rc)/Rac$ 是 R/Rac的一个幂零理想，满射同态 $U(R/Rac) \to U(R/(Ra \cap Rc))$成立，由此得出$(-y + Rc)(u + Rc)^{-1} \in Im(\rho_{a,c})$。

由于方程（XII）关于 az 和 $y(a-1)$ 对称，类似的论证可得 $s + R(1-a) \in U\big(R/R(1-a)\big)$ 以及 $(z + Rc)(u + Rc)^{-1} \in Im(\rho_{a,c})$。显然$\mu + Rc \in Im(\rho_{a,c})$。由于 $\mu + Rc = (-y + Rc)(z + Rc)$，因此

$$(u + Rc)^2 = [(-y + Rc)(u + Rc)^{-1}]^{-1}[(z + Rc)(u + Rc)^{-1}]^{-1}(\mu + Rc) \in Im(\rho_{a,c}).$$

我们将利用湮灭子这一技巧，证明方程（XII）的类似形式总是成立（即使在 $c \in Z(R)$ 的情况下也成立）。由于 (c, u)、$(c, yz) \in Um(R^2)$，因此 $(c, uyz) \in Um(R^2)$。这意味着 c在 R中的湮灭子包含于$Ruyz$。由此以及恒等式 $c[za+y(a-1)-su] = 0$ 可知，存在$q \in R$使得 $za+y(a-1) - su = quyz$。若 $s_1 := s+qyz$，则 $(s_1, yz) \in Um(R^2)$，且恒等式 $za + y(a-1) = s_1 u$ 成立。因此，如上所述，用 s_1 和最后一个恒等式替代 s 和方程（XII），可论证得到 $(u + Rc)^2 \in Im(\rho_{a,c})$。由此，(1) 部分成立。

第 (2) 部分的第一部分由第 (1) 部分和定义得出。第 (2) 部分的第二部分由第 (2) 部分的第一部分和定理 1.13 得出（请回忆， SU_2环是 Hermite 环）。因此，定理 1.17 成立。

推论 4.12。对于 Bézout 整环，以下命题等价：

(1) 环 R是一个 $(SU)_2$（分别为 $(SU')_2$）环。

(2) 对所有满足 $abc \neq 0$ 的 (a, b)、$(c, u) \in Um(R^2)$，如果给定 $(a', b') \in R^2$ 使得 $aa' + bb' = 1$，那么存在一个三元组 $(s, l, w) \in R^3$，具有如下性质：$csw + (a'su - bl)(b'su + al) \in U(R)$（分别为 $csw + (a'su - bl)(b'su + al) = 1$）。

证明。若 $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_2(R)$ 等价，则存在 $M_1 \in GL_2(R)$，使得 M_1A_1 对称，当且仅当存在 $M_2 \in GL_2(R)$，使得 M_2A_2 对称。这是因为，对于 $M, N, M_1 \in GL_2(R)$，若 $A_2 = MA_1N$且 M_1A_1对称，记 $M_2 := N^T M_1 M^{-1} \in GL_2(R)$，则 $M_2A_2 = N^T(M_1A_1)N$对称。此外，若 $M, N, M_1 \in SL_2(R)$，则 $M_2 \in SL_2(R)$。

根据上一段、第 2.6 小节和例 3.8(3)，环 R 是一个 $(SU)_2$（分别是 $(SU')_2$）环，当且仅当对于所有满足 $abc \neq 0$ 的 (a, b)、$(c, u) \in Um(R^2)$，都存在 $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in GL_2(R)$（分别是 $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in SL_2(R)$），使得矩阵 $M \begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix}$ 对称，即方程 $zac = xu + ybc$ 成立。与定理 1.17 的证明一样，我们将 $x = cs$ 写成 $s \in R$，并利用恒等式 $za = su + yb$

成立。方程 $za = su + yb$ 关于不定元 y, z 的通解为 $z = a'su - bl$ 和 $y = -b'su - al$，其中 $l \in R$。因此，由于 $\det(M) = xw - yz = csw + (a'su - bl)(b'su + al)$，推论得证。□

注 4.13。(1) 参照推论 4.12 的陈述 (2) 中的 $b = 1 - a$，我们可以取 $a' = 1 = b'$，因此要寻找 $(s, l, w) \in R^3$ 使得$csw + (su + al - l)(su + al) \in U(R)$（分别地，且 $csw + (su + al - l)(su + al) = 1$），对于 $c = 1 - tu$ 其中 $t \in R$，通过形如 $z := -w$ 的代换，这与方程 (X) 密切相关。

(2) 我们回顾一下第 [47]，节中的内容：若 R 具有平方稳定秩 1，则称之为如此，并记作 $ssr(R) = 1$；如果对每个 $(a, b) \in Um(R^2)$，都存在 $r \in R$ 使得 $a^2 + rb \in U(R)$。显然，若 $sr(R) = 1$，则 $ssr(R) = 1$。若 $ssr(R) = 1$，则对所有 $b \in R$，约化同态 $U(R) \to U(R/Rb)$ 的余核是一个初等阿贝尔 2-群，因此 R 是一个 WU_2 环。此外，若 $(c, u) \in Um(R^2)$，取 $w \in R$ 使得 $w^2 + cw \in U(R)$。则 $M := \begin{bmatrix} c & -u \\ u & w \end{bmatrix} \in GL_2(R)$，且乘积矩阵 $M \begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}$ 是对称的。因此，若 R 是一个 Hermite 环，且 $ssr(R) = 1$，则 $\mathbb{M}_2(R)$ 中的每个上三角矩阵都有一个伴随检验矩阵（见第 2.6 小节）与某个对称矩阵等价；由此以及推论 4.10 的证明可知，R 是初等约化环，当且仅当它是一个 SE_2^{sym} 环。

例 4.14。假设 R 是一个 Hermite 环和一个 WU_2 环，并令 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$。令 $\bar{R} := R/R\det(A)$，并令 $\bar{A} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 为 $\bar{A}$ 模 $R\det(A)$ 的约化。我们知道，$K_{\bar{A}}$ 和 $Q_{\bar{A}}$ 是由两个元素生成的秩 1 对偶投射 $\bar{R}$-模。我们来验证

$$[K_{\bar{A}}] = [Q_{\bar{A}}] \in Pic_2(\bar{R})[2]$$

（等价地，$K_{\bar{A}}^2$ 或 $Q_{\bar{A}}^2$ 是秩 2 自由 $\bar{R}$-模）。为简化记号，$\bar{\ }$ 将 (R, A) 替换为 $(\bar{R}, \bar{A})$，我们可以假设 $\det(A) = 0$。为验证 $K_A^{\otimes 2} := K_A \otimes_R K_A$ 同构于 R，我们可以假设 R 是约化的。根据第 2.6 小节，我们可以假设 $A = \begin{bmatrix} ac & u \\ 0 & bc \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$，其中 $a, b, c \in R$ 满足 $abc^2 = 0$，且 (a, b)、$(c, u) \in Um(R^2)$；由于 R 是约化的，我们有 $abc = 0$。取 $(s, t) \in R^2$ 使得 $sc + tu = 1$。由例 4.2 可知 $K_A = Rv_1 + Rv_2$，其中 $v_1 := \begin{bmatrix} -u \\ ac \end{bmatrix}$ 且 $v_2 := \begin{bmatrix} -bc \\ 0 \end{bmatrix}$。由于 $(a, b) \in Um(R^2)$，我们有 $SpecR = SpecR_a \cup SpecR_b$。此外，$(K_A)_a = R_a v_1$ 且 $(K_A)_b = R_b(tv_1 + \frac{s}{b}v_2)$。在 R_{ab} 上，我们有 $c = 0$，因此 $v_1 = u(tv_1 + \frac{s}{b}v_2)$。于是 $(K_A^{\otimes 2})_a = R(v_1 \otimes v_1)$，$(K_A^{\otimes 2})_b = R\big((tv_1 + \frac{s}{b}v_2) \otimes (tv_1 + \frac{s}{b}v_2)\big)$，并且在 R_{ab} 上我们有一个恒等式

$$v_1 \otimes v_1 = u^2\big((tv_1 + \frac{s}{b}v_2) \otimes (tv_1 + \frac{s}{b}v_2)\big).$$

由于 R是一个 WU_2环（见定理 3.2），因此存在单位元 $u_a \in U(R/Rbc)$和$u_b \in U(R/Rac)$，使得它们在 $U(R/Rc)$中的像的乘积为 u^2。由于 R_a是 R/Rbc 的局部化，而 R_b 是 R/Rac 的局部化，我们也将它们在 R_a 和 R_b 中的像（分别）记作 u_a 和 u_b。因此，$u_a^{-1}(v_1 \otimes v_1)$ 和$u_b^{-1}\big((tv_1 + \frac{s}{b}v_2) \otimes (tv_1 + \frac{s}{b}v_2)\big)$ 在 R_{ab}上重合，于是存在一个元素

$v \in K_A^{\otimes 2}$，其在$(K_A^{\otimes 2})_a$和$(K_A^{\otimes 2})_b$中的像分别等于 $u_a^{-1}(v_1 \otimes v_1)$和$u_b^{-1}\big((tv_1 + \frac{s}{b}v_2) \otimes (tv_1 + \frac{s}{b}v_2)\big)$。因此 $Rv = K_A^{\otimes 2}$，故$K_A^{\otimes 2} \cong R$。

4.7.1. 推论 1.18 的证明。为证明推论 1.18(1)，我们假设 R 是一个 Hermite 环，使得对于所有非零的 $a \in R$，$Pic_2(R/Ra)[2]$ 都是平凡的。每个 U_2 环都是一个 WU_2 环。由例 4.14 可知，若 R 是一个 WU_2 环，那么对于每个 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，$A$ 模 $R\det(A)$ 的约化 $\bar{A}$ 满足 $K_{\bar{A}} \cong R/R\det(A)$，因此 A 是可扩张的（见定理 1.5 和引理 1.2(1)）。由前两句话和定理 1.13 可知，推论 1.18(1) 成立。推论 1.18(2) 由推论 1.18(1) 和定理 1.17 得出，因为每个 $(SU)_2$ 环都是一个 $(WSU)_2$ 环，并且（见 [24], 命题 3.1）是一个 Hermite 环。因此推论 1.18 成立。

4.8. 判据 1.19 的证明。根据定理 3.2，要证明第 (1) 部分，只需证明：给定 $(a,b,c,e,f) \in R^5$ with $ac = b^2$ and $(a,c) \in Um(R^2)$，若 $ae^2 - cf^2 \in U(R)$，则有 $(ae-bf, be-cf) \in Um(R^2)$；而若 $char(R) = 2$，则逆命题也成立。第一部分由以下事实可得：$ae^2 - cf^2 = e(ae - bf) + f(be - cf)$。对于第二部分，我们假设 $char(R) = 2$ and $(ae - bf, be - cf) \in Um(R^2)$。要证明 $ae^2 - cf^2 \in U(R)$，只需说明假设存在 $\mathfrak{m} \in MaxR$ such that $ae^2 - cf^2 \in \mathfrak{m}$ 会导致矛盾。将R 替换为 $R/\mathfrak{m}$后，我们可以假设 R 是一个域，并且知道 a 和 c 不同时为零，$ae - bf$ 和 $be - cf$ 不同时为零，$ac = b^2$ 和 $ae^2 = cf^2$；因此 e 和 f 也不同时为 0。若 $acef = 0$，则由 (a,c) 与 (e,f) 的对称性，可假设 $ae = 0$；若 $a = 0$，则 $b = 0$，$c \neq 0$，从而 $f = 0$，于是$ae - bf$和 $be - cf$都为零，矛盾；若 $e = 0$，则 $f \neq 0$，从而$c = 0$，再利用数对 (a,c) 的对称性，同样可得矛盾。因此可假设 $acef \neq 0$，此时 $b^2 = ac = e^{-2}c^2f^2 = f^{-2}a^2e^2$；由于 $char(R) = 2$ 且 R 是一个域，可知 $b = e^{-1}cf = f^{-1}ae$，因此 $ae - bf$和 $be - cf$ 都为零，矛盾。故第 (1) 部分成立。

为证明 (2)，注意到，由于 $b \notin Z(R)$，对每个 $\mathfrak{m} \in MaxR$，b 是 $R_{\mathfrak{m}}$ 的非零元素。我们回顾一下，由于 R 是约化 Hermite 环，每个 $R_{\mathfrak{m}}$ 都是赋值整环。

设 $d \in R$ 和 $(a', b') \in Um(R^2)$ 满足 $a = da'$ 和 $b = db'$。由于 d 整除 a，且 $(a,c) \in Um(R^2)$，我们有 $(d,c) \in Um(R^2)$。因此 $(d^2,c) \in Um(R^2)$ 也成立。由此，由于 d^2 整除 ac，可知 d^2 整除 a，因而存在 $u \in R$ 使得 $a = d^2u$。由于 b 是赋值整环 $R_{\mathfrak{m}}$ 的非零元素，很容易看出，对于所有 $\mathfrak{m} \in MaxR$，u 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中的像都是单位。因此 $u \in U(R)$。

由对称性，存在 $g \in R$ 和 $v \in U(R)$，使得 $c = g^2v$。

为完成矩阵 A 可扩张的证明，根据第 (1) 部分，只需证明存在 $(e,f) \in R^2$，使得 $ae^2 - cf^2 = ae^2 + cf^2 \in U(R)$。将 A 替换为 $u^{-1}A$（见引理 1.2(3)），我们可以假设 $u = 1$。因此 $a = d^2$。由此以及恒等式 $ac = b^2$ 和 $c = g^2v$，经过简单论证可知存在 $w \in R$，使得 $v = w^2$。将 (v,g) 替换为 $(1, gw)$ 后，我们可以假设 $v = 1$ 和 $c = g^2$。由于 $(a,c) = (d^2, g^2) \in Um(R^2)$，可得 $(d,g) \in Um(R^2)$，因此存在 $(e,f) \in Um(R^2)$，使得 $de + gf = 1$，从而$ae^2 + cf^2 = 1 \in U(R)$。因此第 (2) 部分成立，判据 1.19 也就成立。

4.9. 判据 1.20 的证明。由于 R 是一个 $(SU)_2$ 环，因此它是一个 Hermite 环；并且它是一个 E_2 环，当且仅当它是一个 E_2^{sym} 环。由此及定理 1.13 可知，R

是一个初等约化环，当且仅当它是一个 E_2^{sym} 环。令 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in Um(\mathbb{M}_2)$。

根据引理 1.2(1) 和判据 1.19(1)，如果存在 $(e,f)\in R^2$ 使得$ae^2-cf^2+R(ac-b^2)\in U(R/[R(ac-b^2)])$，则 A 可扩张；等价地，如果 $(ae^2-cf^2,ac-b^2)\in Um(R^2)$，则 A 可扩张；而当 $char(R)=2$ 时，逆命题也成立；因此判据 1.20 成立。

4.10. 判据 1.23 的证明。由于 R 是 Hermite 环，因此它是初等约化环，当且仅当它是一个 $SE_2^{\triangle}$ 环；进而（见推论 3.10），当且仅当对所有 $a,b,s\in R$，矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1-a-bs \end{bmatrix}$ 都可简单扩张。由于 $sr)R)\le 2$，根据推论 3.6 的最后一部分，我们可以用可扩张替代可简单扩张。由于每个 B´ezout 整环都是 Schreier 整环，根据推论 4.6，我们可以用对 $\upsilon:=(a,b,0,1-a-bs)$ 成立的陈述 9 替代可扩张；也就是说，方程 (V) 对每个这样的 υ 给出一个方程

$$(\mathrm{XIII})\qquad [1-(1-a-bs)w-by](1-ax)=ay[(1-a-bs)z+bx]$$

该方程涉及不定元 x、y、z 和 w，并且在 R^4中有解。为了解这个方程，我们注意到，由于 $(a,1-ax)\in Um(R^2)$，a整除 $1-(1-a-bs)w-by$。

因此，由于 R 是整环，方程 (XIII) 在 R^4 中有解，当且仅当由两个方程组成的方程组

$$(\mathrm{XIV})\qquad 1-(1-a-bs)w-by=ta\ \ and\ \ t(1-ax)=y[(1-a-bs)z+bx]$$

关于不定元 t、x、y、z 和 w 在 R^5 中有解（即使 $a=0$ 也成立！）。

第一个方程 $1-(1-a-bs)w-by=ta$，改写为 $w=1+a(w-t)+b(sw-y)$ 后，其通解为 $w=1-aq-br$、$t=q+w=1+q-aq-br$ 和 $y=r+sw=r+s(1-aq-br)$，其中 $(q,r)\in R^2$ 可以任意取值。

第二个方程可改写为 $t=x(at+by)+yz(1-a-bs)$，且有解当且仅当 $t\in R(at+by)+Ry(1-a-bs)$。由于 $1=(1-a-bs)w+(at+by)$，我们有 $t\in R(at+by)+Ry(1-a-bs)$ 当且仅当 $t\in R(at+by)+Ry=Rat+Ry$。

由前两段可知，系统 (XIV) 在 R^5 中有解，当且仅当存在 $(q,r)\in R^2$，如陈述 (2) 中所述。因此 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。

若 $(1-a,b)\in Um(R^2)$，则我们可以选取 $(q,r)\in Um(R^2)$，使得 $t=1+q(1-a)+rb=0$，从而 $t=0\in Rat+Ry=Ry$；对于 $e:=1$ 和 $f:=0$，我们有 (a,e)、$(be+af,1-bs-a)\in Um(R^2)$。因此，为了证明 (2) $\Leftrightarrow$ (3)，我们可以假设 $(1-a,b)\notin Um(R^2)$，从而总是有 $t\neq 0$。

对于 $t_1:=\gcd(r-qs,t)$，我们记 $t=t_1t_2$和 $r-qs=\alpha t_1$，其中 $(\alpha,t_2)\in Um(R^2)$；因此 $y=r+s(t-q)=st+t_1\alpha$。我们希望找到 $(q,r)\in R^2$，使得存在 $(g,h)\in R^2$ 满足性质 $gy+hat=t$，等价地，$tgs+t_1g\alpha+tah=t$，因此必有 $g\in Rt_2$。设 $g=t_2\beta$，其中 $\beta\in R$，我们希望找到 $(q,r)\in R^2$，使得存在 $(\beta,h)\in R^2$ 满足 $1=\beta(st_2+\alpha)+ha$，等价地，使得 $(a,st_2+\alpha)\in Um(R^2)$。将 $r=qs+\alpha t_1$ 代入 t，可得 $t=1+q-qbs-t_1\alpha b-aq$，因此存在 $\gamma\in R$ 使得$1+q(1-bs-a)=t_1\gamma$；我们有 $t_2=\gamma-\alpha b$，故 $e:=st_2+\alpha=s\gamma+(1-bs)\alpha$。由于 $(\alpha,t_2)\in Um(R^2)$，可得 $(\alpha,\gamma)\in Um(R^2)$。存在唯一的 $f\in R$使得 $\alpha=e-fs$且 $\gamma=be+f(1-bs)$；事实上，我们有 $f=t_2=\gamma-\alpha b$，因此 $R=R\alpha+R\gamma=Re+Rf$，即 $(e,f)\in Um(R^2)$。存在 $q\in R$使得 $be+f(1-bs)$ 整除 $1+q(1-bs-a)$ 当且仅当 $\big(be+f(1-bs)\ 1-bs-a\big)\in Um(R^2)$，因而当且仅当 $(be+af,1-bs-a)\in Um(R^2)$。因此 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。所以判据 1.23 成立。

5. Explicit computations for integral domains

设 $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$，使得我们可以写成 $a = ga'$, $c = gc'$, $b = hb'$, $d = hd'$，其中 $a', b', c', d', g, h \in R$，且 (a', c')、$(b', d') \in Um(R^2)$。我们有 $(g, h) \in Um(R^2)$。设 $e', f' \in R$满足 $a'e' + c'f' = 1$。令$l := b'c' - a'd' \in R$ 且 $m := b'e' + d'f' \in R$; 注意 $\det(A) = -ghl$。由于 $\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' & e' \\ -a' & f' \end{bmatrix}$，矩阵 $\begin{bmatrix} c' & e' \\ -a' & f' \end{bmatrix}$ 的行列式为 1，并且 $(b', d') \in Um(R^2)$，由此可得 $(l, m) \in Um(R^2)$。

设 $(e, f, w) \in R^3$ 满足 $ae + cf = gw$。若 R是一个整环且$g \neq 0$，则存在 $v \in R$ 使得 $(e, f) = (we' + c'v, wf' - a'v)$，因此$be+df = h(b'e+d'f) = h($ $b'we'+b'c'v+d'wf'-a'd'v) = hw(b'e'+d'f')+hv(b'c'-a'd')$ 等于 $h(wm + vl)$。于是 $(ae + cf, be + df) = \big(gw, h(wm + vl)\big)$。

命题 5.1。设 R 是一个整环。设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 满足上述记号 g, h, a', b', c', d' 适用，并令 $(e', f', l, m) \in R^4$ 如上所述得到。我们假设 $g \neq 0$。

(1) 矩阵 A 可简单扩张，当且仅当存在 $(w, v) \in R^2$ 使得 $(g, wm + vl)$, $(w, hvl) \in Um(R^2)$，此时 A 的一个简单扩张为

$$\begin{bmatrix} a & b & wf' - a'v \\ c & d & -we' - c'v \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $s, t \in R$ 满足 $gws + h(wm + vl)t = 1$。

(2) 若交集 $\{(g, l), (g, m), (h, l), (h, m)\} \cap Um(R^2)$非空（例如，若 $hlm = 0$），则 A 可简单扩张，且 $w, v \in R$ 由公式给出。

证明。存在 $(e, f) \in R^2$ 使得 $(ae + cf, be + df) \in Um(R^2)$，当且仅当存在 $(w, v) \in R^2$ 使得 $\big(gw, h(wm + vl)\big) \in Um(R^2)$（见上文）。我们有$\big(gw, h(wm + vl)\big) \in Um(R^2)$，当且仅当 $\big(g, h(wm + vl)\big), \big(w, h(wm + vl)\big) \in Um(R^2)$。由于 $(g, h) \in Um(R^2)$，我们有 $\big(g, h(wm + vl)\big) \in Um(R^2)$，当且仅当 $(g, wm + vl) \in Um(R^2)$；此外，$Rw + Rh(wm + vl) = Rw + Rhvl$。因此，$\big(gw, h(wm + vl)\big) \in Um(R^2)$，当且仅当 $(g, wm + vl)$, $(w, hvl) \in Um(R^2)$。根据本段中的“当且仅当”命题以及定理 3.2，可得（1）成立。

为验证第 (2) 部分，我们首先注意到，若 $hlm = 0$，例如 $h = 0$，则 $g = 1$，因而 (g, l)、$(g, m) \in Um(R^2)$。根据第 (1) 部分，只需证明在所有四种可能情形下，都可以选取 $(w, v) \in R^2$，使得 $(g, wm+vl)$、$(w, hvl) \in Um(R^2)$。

若 $(g, l) \in Um(R^2)$，对于 $(w, v) := (g, 1)$，我们有 $Rg + R(wm + vl) = Rg + Rl = R$。由于 (g, h)、$(g, l) \in Um(R^2)$，因此 $(w, hvl) = (g, hl) \in Um(R^2)$。

若 $(g, m) \in Um(R^2)$，对于 $(w, v) := (1, 0)$，我们有 $(g, wm + vl) = (g, m) \in Um(R^2)$，且 $(w, hvl) = (1, 0) \in Um(R^2)$。

若 $(h, m) \in Um(R^2)$，则 $(hl, m) \in Um(R^2)$，且存在 $(w, v') \in R^2$ 使得 $wm + hv'l = 1$；因此 $Rw + Rhv'l = R$。对于 $v := hv'$，我们有 $wm + vl = 1$，于是 $(g, wm+vl) \in Um(R^2)$，且 $(w, hvl) = (w, h^2v'l) \in Um(R^2)$，因为 $(w, hv'l) \in Um(R^2)$。

若 $(h, l) \in Um(R^2)$，令 $(p, q) \in R^2$ 满足 $1 = pl + qm$。对于 $w := hq + l$和$v := hp - m$，我们计算得 $wm + vl = h(pl + qm) + ml - ml = h$，因此 $(g, wm + vl) = (g, h) \in Um(R^2)$。此外，$Rw + Rh = R(hq + l) + Rh = Rl + Rh = R$且 $Rw + Rvl$

包含 $wm+vl=h$，因此也包含 $Rw+Rh=R$。于是 $(w,vl)\in Um(R^2)$。由于 (w,h)，$(w,vl)\in Um(R^2)$，可推出 $(w,hvl)\in Um(R^2)$。□

注 5.2. 我们为推论 1.22(2) 在 Bézout 整环上的情形补充第三种证明。假设 R 是 Bézout 整环，且 $asr(R)=1$。根据等价关系 $1\Leftrightarrow 2$，只需证明每个矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 都可简单扩张。由于 R 是 Hermite 整环，本节的记号适用。由于 $\gcd(g,h)=1$，利用数对 (a,c) 和 (b,d) 的对称性，不妨设 $g\notin J(R)$。由于 $(m,l,g)\in J_3(R)$ 且 $asr(R)=1$，存在 $v\in R$ 使得 $\gcd(m+lv,g)=1$。令 $w:=1$。因此 $\gcd(w,hvl)=1$，且 $\gcd(g,wm+lv)=\gcd(g,m+lv)=1$。由命题 5.1(1) 可知，$A$ 可简单扩张。

5.1. 数值示例。对于命题 2 和 5，我们给出示例矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in Um(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}))$，其简单扩张 $A^+{}_{(e,f,s,t)}=\begin{bmatrix} a & b & f \\ c & d & -e \\ -t & s & 0 \end{bmatrix}$

由集合参数化（见公式 (VII)）

$$\gamma_A:=\{(e,f,s,t)\in\mathbb{Z}^4 | a(es)+b(et)+c(fs)+d(ft)=1\}$$

最初是用第二作者为 $R=\mathbb{Z}$ 编写的代码加以示例说明的。我们有 $\nu_{A^+{}_{(e,\ f,\ s,\ t)}}=\chi'_{A^+}(0)=\det(A)+es+ft$。

(1) 若 $a=0$ 且 $d=1+b+c$，则我们可以取 $A^+=\begin{bmatrix} 0 & b & -1 \\ c & 1+b+c & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

具体而言，设 $(b,c)=(3,2)$；则 $d=6$，$\det(A)=-6$，$\gamma_A=\{(e,f,s,t)\in\mathbb{Z}^4 | 3et+2fs+6ft=1\}$ 且 $\nu_A=\{-6+es+ft | (e,f,s,t)\in\gamma_A\}$。

为求解方程 $3et+2fs+6ft=1$，令 $w:=et+2ft$。我们得到 $2fs+3w=1$，其通解为 $fs=-1+3k$, $w=1-2k$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。方程 $et+2ft=1-2k$ 的通解为 $et=2k-1-2l$ 和 $ft=1-2k+l$，其中$l\in\mathbb{Z}$。令 $m:=l-2k+1$。由此可得

$$ft=m,\ et=1-2k-2m,\ fs=-1+3k,$$

且唯一的约束是 $ft=m$ 整除 $etfs=(3k-1)(1-2k-2m)$，即整除 $(3k-1)(2k-1)$。由于 $es+ft=m+\dfrac{-6k^2+5k-1}{m}-6k+2$，由此可得

$$\nu_A=\{-4+m-6k+\frac{-6k^2+5k-1}{m} | (m,k)\in\mathbb{Z}^2,\ m \text{ divides}_b -6k^2+5k-1\}.$$

(2) 如果 $c=0$和 $d=1-a+b$，那么我们可以取 $A^+=\begin{bmatrix} a & b & -1 \\ 0 & 1-a+b & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$（参见

推论 3.9(2)：对于环 R 上具有非零 (1, 1) 元素的上三角矩阵的简单扩张，若有 $fsr(R)=1.5$，我们可以选择 $e=1$）。

具体而言，假设 $(a,b)=(6,-10)$；因此 $d=15$ 且 $\det(A)=-90$。于是$\gamma_A=\{(e,f,s,t)\in\mathbb{Z}^4 | 6es-10et-15ft=1\}$。

为求解方程 $6es-10et-15ft=1$，令 $w:=2et+3ft$。我们得到$6es-5w=1$，其通解为 $es=1+5k$, $w=1+6k$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。于是

$2et+3ft=1+6k$的通解为 $et=-1-6k+3l$, $ft=1+6k-2l$, 其中 $l\in\mathbb{Z}$。令 $m:=l-2k$。由此可得

$$es=1+5k,\ et=-1+3m,\ ft=1+2k-2m$$

满足唯一的约束: $et=-1+3m$ 整除 $esft=(1+5k)(1+2k-2m)$, 也就是说, 它整除$(1+5k)(2k+m)$。由于 $es+ft=2+7k-2m$, 可得

$$\nu_A=\{-88+7k-2m|(m,k)\in\mathbb{Z}^2,\ -1+3m \text{ divides } (1+5k)(2+2k+m)\}.$$

对于 $m=0$ （分别地, 对于 $m=1$）, 可得 $\nu_A\supseteq 3+7\mathbb{Z}$ （分别地, $\nu_A\supseteq 1+14\mathbb{Z}$。）

若将 $\mathbb{Z}$ 替换为 $R_0:=\mathbb{Z}[\frac{1}{21}]$, 则 $A_0:=A\in\mathbb{M}_2(R_0)$与 $Diag(6,-15)$相似, 并且容易验证 $\nu_{A_0}=-90+\frac{1}{6}+\frac{7}{2}+2R_0=-86-\frac{1}{3}+2R_0$。

(3) 若 $A=\begin{bmatrix}15&6\\10&14\end{bmatrix}$, 我们可以取 $A^+=\begin{bmatrix}15&6&-2\\10&14&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$; 事实上, $\det(A^+)=1\cdot 15-1\cdot 6+2\cdot 10-2\cdot 14=1$。 A的元素使用素数 2、3、5、7 的双重乘积。我们有 $\gamma_A=\{(e,f,s,t)\in\mathbb{Z}^4|15es+6et+10fs+14ft=1\}$, $\det(A)=150$, $\nu_{A^+}=149$, 以及 $\nu_A=\{150+es+ft|(e,f,s,t)\in\gamma_A\}$。

为了解方程 $15es+6et+10fs+14ft=1$, 令 $x:=5es+2et$ 和$y:=5fs+7ft$, 于是得到 $3x+2y=1$, 其通解为 $x=1+2k, y=-1-3k$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$。于是 $5es+2et=1+2k$ 的通解为 $es=1+2k+2l$,$et=-2(1+2k)-5l$, 其中 $l\in\mathbb{Z}$; 而 $5fs+7ft=-1-3k$的通解为$fs=3(-1-3k)+7r$, $ft=-2(-1-3k)-5r$, 其中 $r\in\mathbb{Z}$。令 $o:=k+l$, 于是$et=-2+4l-4o-5l=:q$。因此 $es=1+2o, et=q, l=-2-q-4o$, $k=2+q+5o$, 所以 $fs=-3-18-9q-45o+7r$且 $ft=2+12+6q+30o-5r$。令$p:=r-6o-q-3$。因此 $ft=-5p+q-1$ 且 $fs=-3o-2q+7p$。由于 $(es)(ft)=(et)(fs)$, 我们有恒等式 $(1+2o)(q-1-5p)=q(7p-3o-2q)$, 可将其改写为

$$o(-2-10p+5q)=1+5p-q-2q^2+7pq,$$

而对于 $q=2p$, 结果变为 $-2o=6p^2+3p+1$, 要求 p 为奇数。对于$q=2p$, 结果变为 $es+ft=2o+q-5p$。因此 $\nu_A=\{150+2o+q-5p|(o,q,p)\in\mathbb{Z}^3, o(-2-10p+5q)=1+5p-q-2q^2+7pq\}$ 包含集合 $\{150-6p^2-6p-1|p-1\in 2\mathbb{Z}\}$。

(4) 若 $A=\begin{bmatrix}30&42\\70&105\end{bmatrix}$, 我们可以取 $A^+=\begin{bmatrix}30&42&1\\70&105&3\\1&1&0\end{bmatrix}$; 事实上, $\det(A^+)=-3\cdot 30+3\cdot 42+1\cdot 70-1\cdot 105=1$。 A 的元素使用了素数 2、3、5、7 的三重乘积, 因此它们并非两两互素。

6. Universal rings, retractions and smooth homomorphisms

对于 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{P}_n:=\mathbb{Z}[x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n]$, 并考虑第一类泛'幺模'环

$$\mathcal{U}_n:=\mathcal{P}_n/(\eta_n)$$

其中 $\eta_n:=1-(\sum_{i=1}^n x_iy_i)$。环中元素 x 在商同态下的像记为 $\bar{x}$; 例如, 对于 $i\in\{1,\ldots,n\}$, 我们用 $\bar{x}_i$ 和 $\bar{y}_i$ 分别表示 x_i 和 y_i 在 $\mathcal{U}_n$ 的商环中的像。

例 6.1。由于 $\sum_{i=1}^{4}\bar{x}_i\bar{y}_i=1$，$X:=\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \bar{x}_4\end{bmatrix}\in Um(\mathbb{M}_2(\mathcal{U}_4))$。“普适的”幺模 2×2 矩阵 X 不可扩张（若可扩张，则每个 R 都会是一个 E_2 环，这与例 4.3 矛盾）。

记作 $\vartheta_4:=1-x_1y_1y_4-x_2y_1y_3-x_3y_2y_4-x_4y_2y_3\in\mathcal{P}_4$，我们还考察四类额外的泛环（参见第 3.2 小节）

$$\mathcal{E}_2:=\mathcal{P}_4[w]/\big(\vartheta_4-w(x_1x_4-x_2x_3)\big),$$
$$\mathcal{SE}_2:=\mathcal{P}_4/(\vartheta_4)=\mathcal{E}_2/(\bar{w}),$$
$$\mathcal{WZ}_2:=\mathcal{P}_4/\big(\eta_4+(x_1x_4-x_2x_3)(y_1y_4-y_2y_3)\big),$$
$$\mathcal{Z}_2:=\mathcal{P}_4/(\eta_4,y_1y_4-y_2y_3)=\mathcal{U}_4/(\bar{y}_1\bar{y}_4-\bar{y}_2\bar{y}_3)=\mathcal{WZ}_2/(\bar{y}_1\bar{y}_4-\bar{y}_2\bar{y}_3).$$

例 6.2。矩阵 $Y:=\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \bar{x}_4\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_2(\mathcal{E}_2)$ 是一个可扩张的“泛”幺模 2×2 矩阵，其“标准”扩张为$Y^+:=\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2\\ \bar{x}_3 & \bar{x}_4 & -\bar{y}_1\\ -\bar{y}_3 & \bar{y}_4 & \bar{w}\end{bmatrix}\in SL_3(\mathcal{E}_2)$。要验证 Y 并非仅仅可扩张——

要证明这一点，只需说明存在可扩张但不可简单扩张的 2×2 矩阵。设 R 是一个整环，使得 $sr(R)=3$，且每个满足$P\oplus R\cong R^3$ 的有限生成投射 R-模 P 都是自由的。例如，若 κ 是 $\mathbb{R}$的子域，则$sr(\kappa[x_1,x_2])=3$（见 [41], 定理 8），并且 Seshadri 证明了其上的所有有限生成投射模都是自由的（见 [35], 定理；另见 [21], 第 XXI 章第 3 节定理 3.5，其中给出了 Quillen–Suslin 定理）。令$(a_1,a_2,b)\in Um(R^3)$不可约；因此 $b\neq 0$。我们有投射分解 $0\to Rb\to R\to R/Rb\to 0$和 $0\to P\xrightarrow{g}R^2\xrightarrow{f}R/Rb\to 0$，其中 R-线性映射 f 将 R^2 标准基的元素映到 a_1+Rb 和 a_2+Rb，$P=$是f的核，而 R-线性映射 g 是包含映射。由此可知，P 属于上述类型（见第 2.4 小节中事实 2.9 后的段落）；因此我们将 $P=R^2$视为同一对象。取满足 $L_A=g$：$R^2=P\to R^2$的 $A\in\mathbb{M}_2(R)$；我们有 $A\in Um(\mathbb{M}_2(R))$且 $R\det(A)=Rb$。$R/R\det(A)$-模 E_A同构于 $R/R\det(A)$（记号见第 2.5 小节）。由此，结合第 2.5 小节和定理 1.5 可知，A 模 $R\det(A)$的约化是可简单扩张的。因此 A 是可扩张的（见引理 1.2(1)）。然而，A不可简单扩张：若它可简单扩张，则它将等价于 $Diag(1,\det(A))$（见定理 3.2），并由第 2.4 小节可推出$(a_1,a_2,b)\in Um(R^3)$可约，这与假设矛盾。若 R是一个域（例如，若$R=\kappa[x_1,x_2]$，且 κ 如上所述），则陈述 9 对 A 成立（见命题 4.1(3)），但陈述 7 对 A 不成立（见推论 4.5）。

◯

◯

定理 6.3。以下性质成立：

(1) 环 $\mathcal{U}_n$ 是维数为 $2n$ 的正则唯一分解整环，而环 $\mathcal{Z}_2$ 是维数为 7 的正则整环，但不是唯一分解整环。

(2) 环 $\mathcal{E}_2$、$(\mathcal{WZ}_2)_{\left(1-(\bar{x}_1\bar{x}_4-\bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{y}_1\bar{y}_4-\bar{y}_2\bar{y}_3)\right)}$ 和 $\mathcal{SE}_2$ 分别是维数为 9、8 和 8 的正则环。

证明。（1）由于 $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\in Um(\mathcal{U}_n^n)$，就正则性而言，只需证明对于 $f\in\{x_1,\dots,x_n\}$，$(\mathcal{U}_n)_{\bar{f}}$，以及当 $n=4$时，$(\mathcal{Z}_2)_{\bar{f}}$，分别是维数为$2n$ 和 7 的正则环。对于 $n=4$，这可由定理 3.1(1) 和 (2)

（分别）推出，其中 R 是维数为 5 的正则环 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4][f^{-1}]$，而 υ 是 (x_1, x_2, x_3, x_4)。一般情形 $n \in \mathbb{N}$ 的论证与情形 $n = 4$ 相同。

由于 $\mathcal{P}_n$ 是唯一分解整环，没有素整数整除 η_n，且 η_n 的所有偏次数均为 1，因此 η_n 是 $\mathcal{U}_n$ 的一个素元，即 $\mathcal{U}_n = \mathcal{P}_n/(\eta_n)$ 是一个整环。由于 $\mathcal{U}_1 \cong \mathbb{Z}[x_1][x_1^{-1}]$ 是唯一分解整环，要证明 $\mathcal{U}_n$ 是唯一分解整环，我们可以假设 $n \geq 2$。由相同的论证可得

$$\mathcal{U}_n/(\bar{x}_1) \cong \mathbb{Z}[y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n]/(1 - \sum_{i=2}^{n} x_i y_i) \cong \mathcal{U}_{n-1}[z]$$

是一个整环（这里 z 是一个不定元），即 $\bar{x}_1$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的一个素元。局部化 $(\mathcal{U}_n)_{\bar{x}_1}$ 同构于 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n][x_1^{-1}]$，因此是唯一分解整环。根据前两句话以及唯一分解整环的永田判别法（见 [25], 定理 20.2），我们得出：若 $n \geq 2$，则 $\mathcal{U}_n$ 是唯一分解整环。

由于 $\mathcal{Z}_2/(\bar{y}_1 - 1, \bar{y}_2 - 1, \bar{y}_3 - 1, \bar{y}_4 - 1) \simeq \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]/(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \simeq \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ 是一个整环，且 $\mathcal{Z}_2$ 是正则的，要验证 $\mathcal{Z}_2$ 是一个整环，只需验证对于每个 $f \in \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，$(\mathcal{Z}_2)_{\bar{f}}$ 都是整环。这是成立的，因为它是 $\mathbb{Z}$ 上的 6 个不定元的多项式代数的局部化；例如，若 $f = y_1$，则 $(\mathcal{Z}_2)_{\bar{f}} \cong \mathbb{Z}[\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{x}_4][\bar{y}_1^{-1}]$。

最后，我们证明，假设 $\mathcal{Z}_2$ 是唯一分解整环会导致矛盾。由于 $\mathcal{Z}_2$ 是诺特的，因此 $\mathcal{Z}_2$ 是 Schreier 整环（见 [6], 定理 2.3 ）。于是，对于所有满足 $ad = bc$ 的 $(a, b, c, d) \in Um(\mathcal{Z}_2^4)$，命题 1 至 10 均成立（见推论 4.6）。由此，根据 $\mathcal{Z}_2$ 的泛构造可知，对于每个环 R 以及每个满足 $ad = bc$ 的 $(a, b, c, d) \in Um(R^4)$，上述十个命题均成立。然而，参照例 4.3, 对于 $(2k+1, 1-\theta, 1+\theta, 2) \in Um(\mathbb{Z}[\theta])$，命题 2 不成立，因而产生矛盾。

○

(2) 与第 (1) 部分中 $\mathcal{Z}_2$ 的情形类似，应用定理 3.1(1) 至 (4)，并令 U_υ 等于 $(\mathcal{U}_4)_{\bar{f}}$（其中 $f \in \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_4\}$ 任意取定），即可推出第 (2) 部分的正则性。□

注记 6.4。每一种稳定秩类型的条件背后（即通过同态的扩张来控制它）都存在一个泛代数。例如，以 p、s、t、u 为不定元，对于 [19], 定理 5.2 中引入的 Kaplansky 条件，该泛代数是 $\mathcal{U}_3$-代数 $\mathcal{K}_3 := \mathcal{U}_3[p, q, s, t]/(1 - ps\bar{x}_1 - pt\bar{x}_2 - qt\bar{x}_3)$。类似地，对于陈述 3，该泛代数是 $\mathcal{U}_4$-代数

$$\mathcal{K}_4 := \mathcal{U}_4[p, q, s, t]/(1 - ps\bar{x}_1 - pt\bar{x}_2 - qs\bar{x}_3 - qt\bar{x}_4).$$

如定理 3.1(3) 的证明中那样，取 $n \in \{3, 4\}$，可以验证 $\mathcal{K}_n$ 是一个相对维数为 3 的光滑$\mathcal{U}_n$-代数。由定理 1.13 和 3.2，若 $n = 4$；由 [19], 定理 5.2，若 $n = 3$，可得：一个 B´ezout 整环 R 是初等除环，当且仅当每个同态 $\mathcal{U}_n \to R$ 都可扩张为同态 $\mathcal{K}_n \to R$。

7. Stability properties

为了提供更多属于或不属于 E_2 或 SE_2 环的例子，我们列出以下稳定性性质。

命题 7.1. (1) 设 I 是包含于 $J(R)$ 中的 R 理想（例如， R 在 I-进拓扑下是完备的）。那么 R 是 E_2（或 SE_2 或 U_2）环，当且仅当 R/I 也是如此。

(2) 设 $n \in \mathbb{N}$。那么， R 是 E_2（或 SE_2）环，当且仅当形式幂级数环 $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ 也是如此。

(3) 设 $R \to S$ 是一个具有截面的环嵌入。如果 R 不是 E_2（分别为 SE_2）环，那么 S 也不是 E_2（分别为 SE_2）环。

(4) 若 I 是 R 的幂零理想，则 R 是幺模环当且仅当 R/I 也是幺模环。

(5) 设 I 是 R 的一个理想，且包含于 $J(R)$。若 R/I 是幺模环，则 R 也是幺模环；若 I 是幂零理想，则逆命题也成立。

证明。(1) 对于 E_2 和 SE_2，由第 2.1 小节的性质 (3) 和定理 3.2 可得。对于 U_2，这是因为对于 R 的每个理想 J，$U(R/J)$ 都是 $U\big(R/(J+I)\big)$ 在满同态 $R/J \to R/(J+I)$ 下的逆像。

(2) 由 (1) 得出，取特殊情形 $I = (x_1, \ldots, x_n)$ 即可。

(3) 设 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 不可扩张（分别地，不可简单扩张）。我们证明，假设 A 有一个扩张（分别地，一个简单扩张） $A^+ \in SL_3(S)$ 会导致矛盾。但若 $\tau\colon S \to R$ 是截面，则由 A^+ 对其元素施加 τ 后得到的矩阵 $\tau(A^+) \in SL_3(R)$ 是 A 的一个扩张（分别地，一个简单扩张），这就产生了矛盾。

(4) 根据等价关系 $5 \Leftrightarrow ⑦$ (见定理 3.2)，只需证明对每个 $v \in Um(R^2)$，每个 R-代数同态 $Z_v \to R/I$ 都可提升为一个截面 $Z_v \to R$。为验证这一点，我们可以假设 R 是诺特的，而结论由定理 3.1(2) 中关于光滑性的部分推出。

(5) 设 P 是由两个元素生成的秩 1 投射 R-模。若 R/I是一个 Π_2 环，则由定理 1.5 可知，P/IP 是秩 1 自由模。由于$R \to R/I$ 和 $P \to P/IP$ 是投射覆盖（见第 9 节、命题 10 及其后的推论 2），根据投射覆盖在同构意义下的唯一性（见第 9 节、命题 8 及其后的推论 1），可知存在一个 R-线性同构$R \to P$。因此，由定理 1.5 可推得 R 是一个 Π_2 环。由第 9 节、命题 11 可知，若 I 是幂零理想，则逆命题成立；实际上，即使 I 只是幂零理想，结论也成立，因为我们的投射模是有限生成的，因而是有限表示的，所以定义在 R的有限生成 $\mathbb{Z}$-子代数上。□

例 7.2. 如果 R 是初等约化环，那么由例 1.4 和命题 7.1(2) 可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$R[[x_1, \ldots, x_n]]$ 都是一个 SE_2 环。

例 7.3. 由例 4.3 和命题 7.1(3) 可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，多项式环 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ 都不是一个 E_2 环。

例 7.4. 设 R 是一个克鲁尔维数至多为 1 的 Π_2 Hermite 环。我们验证 R 是一个初等约化环。根据命题 7.1(1)和定理 1.13，可以假设 R 是约化的。根据定理 1.13 和推论 4.5，只需证明对每个矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$，命题 5 对其成立。由于 R 是一个 Π_2 环，可以假设 $\det(A) \neq 0$。集合 $MinA \setminus V(R\det(A))$ 在 $MinA$中是既开又闭的，因此存在根理想 $\mathcal{I}_1$和 $\mathcal{I}_2$，使得 $MinA \setminus V(R\det(A)) = MinA \cap V(\mathcal{I}_1)$ 且 $MinA \cap V(R\det(A)) = MinA \cap V(\mathcal{I}_2)$；由于 R 是约化的，我们有 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = 0$。元素 $\det(A) + \mathcal{I}_1 \in R/\mathcal{I}_1$ 不属于 $R/\mathcal{I}_1$ 中任何非极大的极小素理想，因此 $S := R/(\mathcal{I}_1 + R\det(A))$ 的克鲁尔维数为 0。Hermite 环 $S/N(S)$ 是 von Newman 正则环，因而是半遗传环（等价地说，它是约化的且具有紧致极小谱，见 [9], 定理 2 和 [31], 命题 10）。众所周知，这些条件蕴含 S 是一个初等约化环（例如，见 [22], 定理 2.4）。由此以及推论 4.5 可知，存在一个 R-代数同态

h_1： $Z_v \to R/\mathcal{I}_1$。由于 det(A) 在 $R/\mathcal{I}_2$ 中的像为 0，按照定理 3.2 证明中关于蕴含关系 $8 \Rightarrow 5$的部分，我们得出命题 5 对 A成立。

例 7.5。设 R 是一个贝祖环，具有如下性质： $R := R/N(R)$ 是一个半遗传环。我们验证 R 是一个 Π_2 环。每个由 2 个元素生成的秩 1 射影 R-模 P都同构于直和 $R/Ra \oplus R/Rb$，其中 $a, b \in R$ （见 [40], 命题），由秩 1 的性质首先可得 $(a, b) \in Um(\bar{R}^2)$，其次可得 $\bar{R}a \cap \bar{R}b = 0$。因此 $\bar{P} \cong \bar{R}$，由定理 1.5 可得 R 是一个 Π_2 环。由命题 7.1(5) 可得 R 本身是一个 Π_2 环。在 [22], 定理 2.4 中证明了 R 是一个 Hermite 环；在 [7], 定理 III. 3（另见 [45], 定理 2.2.1）中证明了 R 本身是一个 Hermite 环。

我们进一步假设， R 的克鲁尔维数为 2，且对每个 $a \in \bar{R} \setminus Z(\bar{R})$, R/Ra 是一个 Π_2 环。由于 $Z(R)$ 是 R的极小素理想之并， R/Ra 的克鲁尔维数至多为 1。由于 R/Ra 是 Hermite 环，由例 7.4 可知它是初等约化环。由此以及 [40], 定理可知， R 是初等约化环。再由此以及定理 1.13 和命题 7.1(1)可知， R 本身是初等约化环。

例 7.6. 设 I 是 R 的一个理想，使得有序对 (R, I) 是 Hensel 对。每个有限生成的射影 R/I-模都可提升为射影 R-模（参见 https://stacks.math.columbia.edu/tag/0D4A）；若预先指定秩和生成元个数，结论仍然成立。因此，若 R 是一个 Π_2 环，则 R/I 是一个 Π_2 环。

8. Open problems

OP1. 是否存在 E_2 环 R 满足 $sr(R) \geq 3$? 如果存在，它们是否全都是 SE_2 环? OP2. 是否存在不是 Π_2 环的J_2、1 环? OP3. 是否存在既是 Π_2 环又不是初等约化环的 Hermite 环? OP4. 对于 n¿2，可以类似地定义 E_n 和 SE_n 环，并且容易看出每个 E_n 环都是 E_{n-1} 环。是否每个 SE_n 环都是 SE_{n-1} 环? OP5. 是否存在不是 Π_2 环的 V_2 环? OP6. WW_2、 W_2、 WU_2 和 U_2 环之间确切的“联系”是什么? OP7. 对具有以下性质的 B´ezout 整环 R ，对其所有元素 t 进行分类： R 的t-进完备化是 B´ezout 环。OP8. 能否去掉例 7.4 和 7.5 中的 Π_2 假设? OP9. 如果 $sr(R) \leq 2$，求出保证每个秩 1 的投射 R-模由 2 个元素生成的 R 所需满足的条件。 [例如，当 $\dim(R/J(R)) \leq 1$时，这一结论成立。]OP10. 对满足以下五个命题之一的所有环 R 进行分类：(1) 若 R 是 Π_2 环，则 $R/J(R)$是 Π_2 环；(2) 每个由 2 个元素生成的秩 1 投射 $R/J(R)$-模都可提升为秩 1 投射 R-模；(3) 约化同态 $Pic(R) \to Pic(R/J(R))$ 是满射；(4) $R/J(R)$上的每个有限生成投射模都可提升为有限生成投射R-模；(5) $R/J(R)$上的每个投射模都可提升为投射 R-模。OP11. 对具有以下性质的所有环进行分类：以下两个命题之一可以推出另一个：(1) 矩阵 $A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 可扩张；(2) 矩阵$A \in Um(\mathbb{M}_2(R))$ 等价于一个对称矩阵。

OP12. 如果 R 是一个素特征的约化 Hermite 环，那么其完美化是初等约化环这一假设，是否意味着 R 本身也是初等约化环?

致谢。第三位作者感谢纽约州立大学宾汉姆顿分校提供良好的工作条件，并感谢 Ofer Gabber 分享脚注中的论证，以及指出例 7.6 与某篇参考文献中的一个错误之间的联系。利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

References

[1] H. Bass *K-theory and stable algebra.* 高等科学研究所出版物《数学》22 (1964), 5–60. [2] H. Bass, E. H. Connell, D. Wright *Locally polynomial algebras are symmetric algebras.* 《发明数学》38 (1977), 第3期，279–299. [3] V. A. Bovdi, V. P. Shchedryk *Commutative Bézout domains of stable range 1.5.* 《线性代数及其应用》568 (2019), 127–134. [4] N. Bourbaki *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8: Modules et anneaux semi-simples.* 2012 施普林格出版社，柏林，海德堡，。[5] P. Carbonne *Anneaux de Bézout, Hermite et Kaplansky "universels".* 《加拿大数学通报》30 (1987), 第4期，461–470. [6] P. M. Cohn *Bézout rings and their subrings.* 《剑桥哲学学会数学论文集》64 (1968), 251–264. [7] P. Couchot *The λ-dimension of commutative arithmetic rings.* 代数通讯31 (2003), 第7期，3143–3158. [8] G. C˘alug˘areanu, H. F. Pop *On zero determinant matrices that are full.* 《泛诺尼亚数学》新系列27 /NS 1/ (2021), 第2期，81–88. [9] S. Endo *On semi-hereditary rings.* 《日本数学会杂志》13 (1961), 109–119. [10] H. K. Farahat, W. Ledermann *Matrices with prescribed characteristic polynomials.* 《爱丁堡数学学会会刊》11 1958/1959, 143–146. [11] L. Fuchs, L. Salce *Modules over non-Noetherian domains.* 《数学调查专著》84，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001. [12] A. Gatalevich *Bézout rings of finite Krull dimension.* **19** 2014 6, 《基础与应用数学》（），第–期；译载于《数学科学杂志》（纽约）（），第3期，313–。[13] L. Gillman, M. Henriksen *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal.* **82** 1956 366 391 《美国数学会汇刊》（），–。[14] L. Gillman, M. Henriksen *Some remarks about elementary divisor rings.* 《美国数学会汇刊》82 (1956), 362–365. [15] R. Gilmer, R. C. Heitmann *On Pic(R[X]) for R seminormal.* 《纯粹与应用代数杂志》16 (1980), 第3期，251–257. [16] R. C. Heitmann *Generating non-Noetherian modules efficiently.* 《密歇根数学杂志》31 (1984), 第2期，167–180. [17] D. Hershkowitz *Existence of matrices with prescribed eigenvalues and entries.* 《线性与多线性代数》14 (1983), 第4期，315–342. [18] C. U. Jensen *Arithmetical rings.* 《匈牙利科学院数学学报》17 (1966), 115–123. [19] I. Kaplansky *Elementary divisors and modules.* 《美国数学会汇刊》66 (1949), 464–491. [20] T. Y. Lam *Serre's problem on projective modules.* 《数学专著丛书》，施普林格出版社，柏林，2006. [21] S. Lang *Algebra. Revised third edition.* 《数学研究生教材》211，施普林格出版社，纽约，2002. [22] M. D. Larsen, W. J. Lewis, T. S. Shores *Elementary divisor rings and finitely presented modules.* **187** 1974 231 248 《美国数学会汇刊》（），–。[23] J. Liu, D. Li *The generalized Serre problem over K-Hermite rings.* 《系统科学与复杂性杂志》30 (2017), 第2期，510–518. [24] D. Lorenzini *Elementary divisor domains and Bézout domains.* 《代数杂志》371 (2012), 609–619. [25] H. Matsumura *Commutative ring theory. Second edition.* 《剑桥高等数学研究丛书》第8卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989. [26] W. W. McGovern *Bézout rings with almost stable range 1.* 《纯粹与应用代数杂志》212 (2008), 第2期，340–348. [27] W. W. McGovern *Neat rings.* 《纯粹与应用代数杂志》205 (2006), 第2期，243–265. [28] P. Menal, J. Moncasi *On regular rings with stable range 2.* 《纯粹与应用代数杂志》24 (1982), 第1期，25–40.

[29] S. McAdam, D. E. Rush *Schreier rings.* 伦敦数学学会会刊10, 1 (1978), 77–80. [30] M. Roitman *The Kaplansky condition and rings of almost stable range 1.* 美国数学会会刊141 (2013), 第9期，3013–3018. [31] Y. Quentel *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau.* （法文）《法国数学会通报》99 (1971), 265–272. [32] D. Quillen *Projective modules over polynomial rings.* 《发明数学》36 (1976), 167–171. [33] D. E. Rush *Bézout domains with stable range 1.* 《纯粹与应用代数杂志》158 3, 309 2001 2, 324 ( ), 第–期。 [34] *Revêtements Étales et groupe fondamental. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1).* 亚历山大·格罗滕迪克主编。增补了 M. Raynaud 的两篇讲座，数学讲义第224卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1971. [35] C. S. Seshadri *Triviality of vector bundles over the affine space K^2.* 《美国国家科学院院刊》44 (1958), 456–458. [36] V. P. Shchedryk *Some properties of primitive matrices over Bézout B-domain.* 《离散代数数学》2005, 第2期，46–57. [37] V. P. Shchedryk *Commutative domains of elementary divisors and some properties of their elements.* **64** 2012 1, 140 155 乌克兰数学杂志（），第–期。 [38] V. P. Shchedryk *Bézout rings of stable range 1.5.* 乌克兰数学杂志译本67 (2015), 第6期，849–860. [39] V. P. Shchedryk *Bézout rings of stable rank 1.5 and the decomposition of a complete linear group into products of its subgroups.* **69** 2017 1, 113 120 乌克兰数学杂志（），第–期；译载于乌克兰数学杂志69 (2017), 第1期，138–147. [40] T. S. Shores *Modules over semihereditary Bézout rings.* 美国数学会会刊46, 第2期 (1974), 211–213. [41] L. N. Vaserˇsteˇın *The stable range of rings and the dimension of topological spaces.* （俄文）《功能分析与应用》5 (1971), 第2期，17–27. [英文译本：《功能分析与应用》 **5** 1971 102 110] （），–。 [42] L. N. Vaserˇsteın, A. A. Suslin *Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory.* **40** 1976 5, 993 （俄文）《苏联科学院消息·数学辑》（），第–期，1054, 1199. [43] R. Wiegand, S. Wiegand *Finitely generated modules over Bézout rings.* 《太平洋数学杂志》58 (1975), 第2期，655–664. [44] B. V. Zabavsky *Diagonal reduction of matrices over rings.* 数学研究专著丛书第16卷，VNTL出版社，利沃夫，2012。251页。 [45] B. V. Zabavsky *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings.* 数学研究41 (2014), 第1期，101–108. [46] B. V. Zabavsky, S. I. Bilavska *Decomposition of finitely generated projective modules over Bézout ring.* **40** 2013 1, 104 107 数学研究（），第–期。 [47] B. V. Zabavsky, O. Romaniv *A Bézout ring of stable range 2 which has square stable range 1.* **47** 2019 5397 代数通讯（），第12期，5392–。 [48] M. Zafrullah *On a property of pre-Schreier domains.* 代数通讯15 (1987), 第9期，1895–1920.

Grigore C˘alug˘areanu 电子邮箱：calu@math.ubbcluj.ro 地址：数学系，巴贝什-博雅伊大学，克卢日-纳波卡，罗马尼亚。

Horia F. Pop 电子邮箱：hfpop@cs.ubbcluj.ro 地址：计算机科学系，巴贝什-博雅伊大学，克卢日-纳波卡，罗马尼亚。

Adrian Vasiu，电子邮箱：avasiu@binghamton.edu 地址：数学与统计系，宾厄姆顿大学，邮政信箱 6000，宾厄姆顿，纽约 13902-6000，美国。