arXiv:2303.08436v2 [math.OA] 4 Feb 2025

绝对可扩张的舒尔乘子的刻画

CHARLES DUQUET 和 CHRISTIAN LE MERDY

Abstract. 设 M 是一个配备正规半有限忠实迹（简称 nsf 迹）的冯·诺依曼代数，且 $T\colon M \to M$ 是一个压缩算子。若存在另一个配备 nsf 迹的冯·诺依曼代数 M'、一个 w^*-连续的保迹单位元 $*$-同态 $J\colon M \to M'$，以及一个保迹 $*$-自同构 $U\colon M' \to M'$，使得对所有整数 $k \geq 0$均有 $T^k = EU^kJ$，其中 $E\colon M' \to M$是与 J相关的条件期望，则称 T 是绝对可扩张的。给定一个 σ-有限测度空间 (Ω, μ)，我们刻画使舒尔乘法算子 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 绝对可扩张的有界舒尔乘子 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$。在可分情形下，它们可由如下条件刻画：存在一个具有可分预对偶的冯·诺依曼代数 N，其配备归一化正规忠实迹 τ_N；并存在一个 w^*-可测的本质有界函数 $d\colon \Omega \to N$，使得对几乎所有 $(s,t) \in \Omega^2$，都有 $\phi(s,t) = \tau_N(d(s)^*d(t))$。

2000 年数学主题分类：主要分类 47A20，次要分类 46L06、46E40。关键词：舒尔乘积、膨胀、张量积。

1. Introduction

Akcoglu 膨胀定理 [1, 2] 断言，对于任意 $1 < p < \infty$、任意测度空间 (Ω, μ) 以及任意正压缩算子 $T\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$，都存在另一个测度空间 (Ω', μ')、一个等距映射 $J\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega')$、一个等距同构 $U\colon L^p(\Omega') \to L^p(\Omega')$ 以及一个压缩算子 $Q\colon L^p(\Omega') \to L^p(\Omega)$，使得 $T^k = QU^kJ$对所有整数 $k \geq 0$均成立。这一结果对于涉及 L^p-算子的诸多领域至关重要。一方面，它是关于单个算子或 L^p-空间上算子半群的最精确函数演算结果的基础。特别参见 [8, 12, 27]，以及 [38],；后者将 Akcoglu 定理与傅里叶乘子定理结合起来，为各种微分算子提供有界的 H^∞函数演算。另一方面，它在半群的调和分析、遍历理论以及 L^p-空间上的极大不等式中发挥着关键作用，特别参见 Cowling 的开创性论文 [18], 、较新的文章 [13, 41, 56],，以及 [29, 第 I 节] 和其中的参考文献。

在过去二十年中，非交换 L^p空间上的算子理论与调和分析受到广泛关注，许多关于 $L^p(\Omega)$空间的经典结果也已推广到非交换情形（参见 [32] 了解入门介绍）。然而，Akcoglu 定理无法推广到非交换 L^p空间。更确切地说，设 M 是一个配备正规半有限忠实迹 τ的冯·诺依曼代数。在这种情况下，我们

日期：2025年2月5日。

称(M,τ)为迹冯诺依曼代数。设 $1<p<\infty$，并令 $L^p(M)$为相应的非交换 L^p空间。我们称压缩算子 $T\colon\ L^p(M)\ \to L^p(M)$具有等距 p膨胀，如果存在另一个迹冯诺依曼代数(M',τ')、一个等距映射 $J\colon\ L^p(M)\ \to L^p(M')$、一个等距同构 $U\colon\ L^p(M')\ \to L^p(M')$以及一个压缩算子 $Q\colon\ L^p(M')\ \to L^p(M)$，使得 $T^k=QU^kJ$对所有整数 $k\geq 0$均成立。随后，文献 [30] 证明，并非所有正压缩算子 $T\colon\ L^p(M)\ \to L^p(M)$都具有等距$p$膨胀。这个否定结果发表后，寻找那些确实具有等距 p膨胀的非交换 L^p空间上的正压缩算子类，便成为一项重要任务。此类例子见于文献 [31, 第9-10], 章，包括由二次量子化产生的克利福德代数上的压缩算子（更一般地说， q变形冯·诺依曼代数上的压缩算子），以及非交换泊松半群。另请参见文献 [40, 第 8] 节和 [4, 5, 6, 7]，其中给出了若干关于 Schur 乘子或（非交换）傅里叶乘子类的膨胀结果。我们还提及文献 [28]，其中近期证明了非交换 L^p空间上 Lamperti 型算子具有等距 p膨胀性质，由此得到一个（非交换）遍历极大不等式。

我们关注绝对膨胀这一概念。考虑上述的 (M,τ)，并设 $T\colon\ M\to M$ 是一个压缩算子。若存在另一个迹冯诺依曼代数 (M',τ')、一个 w^*-连续的保迹幺 $*$-同态 $J\colon\ M\to M'$，以及一个保迹 $*$-自同构 $U\colon\ M'\to M'$，使得对所有 $k\geq 0$，都有 $T^k=EU^kJ$，其中 $E\colon\ M'\to M$ 是与 J 相关联的条件期望，则称 T 是绝对可扩张的（或称其具有绝对膨胀）。若 M 有可分预对偶，且上述性质对某个具有可分预对偶的 M' 成立，则称 T 具有可分绝对扩张。事实证明，若 $T\colon\ M\to M$ 是绝对可扩张的，则对所有 $1<p<\infty$， T 都可延拓为 $L^p(M)$ 上的正压缩算子，并且该算子具有等距的 p-膨胀（见命题 2.3）。绝对可扩张算子在 [21] 中被正式引入。不过，它们也隐含地出现在 [37, 25] 中（其中没有提及非交换 L^p-空间），以及 [4, 5, 31], 中；在后者中，它们被用于获得等距的 p-膨胀。事实上，针对特定类别的 $L^p(M)$-算子，许多已知的等距 p-膨胀构造都源自绝对膨胀。此外，绝对膨胀与所谓的可分解算子 [3, 25, 33, 49] 密切相关。正如注2.2 (4) 所指出的，绝对膨胀将可分解性推广到了非归一化迹冯诺依曼代数。

本文研究作用于 $B(L^2(\Omega))$ 上的舒尔乘子；该空间是与一个 σ-有限测度空间 $(\Omega\ \mu)$ 相关联的 L^2-空间上的有界算子空间。对此情形下有界舒尔乘子的研究至少可追溯到 Haagerup [24] 和 Peller [44]（另见 Spronk [51]）。定义及背景介绍请参见第 4 节。舒尔乘子是非交换分析多个领域中的基本对象。特别是，它们在多重算子积分理论及其在扰动理论中的应用中发挥着关键作用（综述见 [45] ）；它们还用于研究算子代数的逼近性质（例如见 [39]），以及借助传递结果研究傅里叶乘子。关于舒尔乘子的近期重要进展，请参见 [15, 42] ；关于舒尔乘子膨胀的应用，请参见 [9]。

论文 [4, 21] 表明，与实值 $\phi\in L^\infty(\Omega^2)$ 相关联的正的保幺舒尔乘子算子 $T_\phi\colon\ B(L^2(\Omega))\ \to B(L^2(\Omega))$ 是绝对可扩张的。此外，Haagerup-Musat 论文 [25]给出了有限维情形下绝对可扩张的舒尔乘子的刻画，参见注释 7.3。本文旨在

在一般情形下建立绝对可扩张的舒尔乘子 $B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 的刻画。

我们先从离散情形开始。对于任意 $n \geq 1$，令 M_n 表示由复数项组成的 $n \times n$ 矩阵空间。设 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{i,\ j \geq 1}$ 为一族复数。回顾一下，若存在一个（必然唯一的） w^*-连续算子 $T_{\mathfrak{m}}\colon B(\ell^2) \to B(\ell^2)$，使得对所有 $n \geq 1$ 以及所有 $[a_{ij}] \in M_n \subset B(\ell^2)$ 都有 $T_{\mathfrak{m}}\big([a_{ij}]\big) = [m_{ij}a_{ij}]$，则称 $\mathfrak{m}$ 为有界舒尔乘子。我们证明，$T_{\mathfrak{m}}$ 存在绝对膨胀，当且仅当存在一个具有可分预对偶的归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N)，以及一列 $(d_k)_{k\geq 1}$，其中的元素是 N 的酉元，并且

$$m_{ij} = \tau_N(d_i^* d_j), \qquad i, j \geq 1. \tag{1.1}$$

在此情形下，$T_{\mathfrak{m}}$ 实际上存在可分绝对扩张，见推论 6.7。

在一般的可分情形下，取值于具有可分预对偶的冯·诺依曼代数 N 的有界族空间，被由 w^*-可测本质有界函数 $\Omega \to N$（的等价类）组成的空间 $L^\infty_\sigma(\Omega;\ N)$ 所取代。这些空间例如用于 [50,定理 1.22。13] 并且我们有如下识别：$L^\infty_\sigma(\Omega;\ N) \simeq L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N$。详情及相关信息见第 3 节。

下文中，当希尔伯特空间 $L^2(\Omega)$ 可分时，我们称 $(\Omega\ \mu)$ 是可分的。我们的主要结果如下。请注意，在这一一般情形下，(1.2) 取代了 (1.1)。

定理 1.1。假设 $(\Omega\ \mu)$ 是可分的，并令 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$。以下断言等价。

(i) 函数 ϕ 是一个有界舒尔乘子，且 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 具有可分绝对扩张。(ii) 存在一个具有可分预对偶的归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N)，以及一个酉元 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\ N)$，使得

$$\phi(s,t) = \tau_N\big(d(s)^* d(t)\big), \qquad \text{for a.e. } (s,t) \in \Omega^2. \tag{1.2}$$

第 2—4 节介绍了膨胀、$L^\infty_\sigma(\Omega;\bullet)$-空间、张量积和舒尔乘子的所有必要背景知识及预备结果。定理 1.1 的证明见第 6 节。该证明依赖于第 5 节中给出的若干预备结果。最后的第 7 节专门讨论不可分情形。我们给出了定理 1.1 的一个版本，适用于存在（不一定可分的）绝对膨胀的舒尔乘子。我们还在最后两节讨论了离散情形。

2. 膨胀

设 M 是一个冯·诺依曼代数。我们用 M^+ 表示其正部，除非另有说明，用 1_M 表示其单位元。若 M 配备了正规半有限忠实迹 $\tau_M\colon M^+ \to [0,\infty]$，则称 (M, τ_M) 为迹冯·诺依曼代数。进一步，若 $\tau_M(1_M) = 1$，则称 (M, τ_M) 是归一化的。在这种情况下，τ_M 是有限的，并可延拓为 M 上的正规迹状态。

给定作用于某个希尔伯特空间 H 上的任意迹冯·诺依曼代数 (M, τ_M)，令 $L^0(M, \tau_M)$ 表示 $*$-代数，其中包含 H 上所有可能无界且与 M 关联的算子。令 $\widetilde{\tau_M}\colon L^0(M, \tau_M)^+ \to [0,\infty]$ 表示 τ_M 在正

部 $L^0(M,\tau_M)$ 上的自然扩张。于是，对所有 $1 \le p < \infty$，非交换 L^p-空间 $L^p(M,\tau_M)$ 定义为所有满足 $\widetilde{\tau_M}(|x|^p) < \infty$ 的 $x \in L^0(M,\tau_M)$ 所构成的空间。它在范数 $\|x\|_p = (\widetilde{\tau_M}(|x|^p))^{\frac{1}{p}}$ 下是一个巴拿赫空间。为方便起见，我们记 $L^\infty(M,\tau_M) = M$。事实证明，$M \cap L^p(M,\tau_M)$ 在 $L^p(M,\tau_M)$ 中稠密。

迹 τ_M 在 $L^1(M,\tau_M) \cap M^+$ 上有限，并可延拓为 $L^1(M,\tau_M)$ 上的泛函，仍记为 τ_M。令 $1 \le p < \infty$，并令 $p' = \frac{p}{p-1}$ 为其共轭指标。对于任意 $x \in L^p(M,\tau_M)$ 和任意 $y \in L^{p'}(M,\tau_M)$，乘积 xy 属于 $L^1(M,\tau_M)$，并且满足 H¨older 不等式 $|\tau_M(xy)| \le \|x\|_p \|y\|_{p'}$。此外，我们还有一个等距同构

$$L^p(M,\tau_M)^* \simeq L^{p'}(M,\tau_M),$$

对于由 $\langle y, x\rangle = \tau_M(xy)$ 给出的对偶配对，对所有 $x \in L^p(M,\tau_M)$ 和 $y \in L^{p'}(M,\tau_M)$ 均成立。特别地，

$$M \simeq L^1(M,\tau_M)^*. \tag{2.1}$$

空间 $L^2(M,\tau_M)$ 是一个希尔伯特空间，其内积由 $(x|y) = \tau_M(xy^*)$ 给出，对所有 $x, y \in L^2(M, \tau_M)$ 均成立。

设 H 是一个希尔伯特空间，并令 $B(H)$ 表示 H 上所有有界算子构成的冯·诺依曼代数。令 tr: $B(H)^+ \to [0,\infty]$ 表示通常的迹。那么对于所有 $1 \le p < \infty$，$L^p(B(H), \mathrm{tr})$ 等于 Schatten p 类 $S^p(H)$。注意，$S^2(H)$ 与 H 上的希尔伯特–施密特算子空间相同。

关于迹的相关信息，请读者参阅 [52, Section V.2]；关于非交换 L^p-空间的详细内容，请参阅综述论文 [47] 以及 [54, Chapter I] 和 [23]（另见[26, Section 4.3]和 [36]）。

设 (M_1,τ_{M_1}) 和 (M_2,τ_{M_2}) 是两个迹冯·诺依曼代数，并令 $U\colon M_1 \to M_2$ 是一个正映射，即 $U(M_1^+) \subset M_2^+$。若 U 在 M_1^+ 上满足 $\tau_{M_2} \circ U = \tau_{M_1}$，则称其为保迹映射。若 U 是一个保迹的 $*$-同态，则 U 是单射（因为 τ_{M_1} 是忠实的）；众所周知，对于所有 $1 \le p < \infty$，U 在 $M \cap L^p(M,\tau_M)$ 上的限制可延拓为一个等距映射

$$U_p\colon L^p(M_1,\tau_{M_1}) \longrightarrow L^p(M_2,\tau_{M_2}).$$

此外，若 U 满射，则 U_p 也满射。关于这一事实，请参见 [57, 定理 2]；相关的补充结果请参见 [34, 引理 1.1]。

定义 2.1. 设 (M,τ_M) 是一个迹冯诺依曼代数。若存在另一个迹冯诺依曼代数 $(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})$、一个 w^*-连续的保迹含幺 $*$-同态 $J\colon M \to \mathcal{M}$，以及一个保迹 $*$-自同构 $U\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得下式成立，则称算子 $T\colon M \to M$ 是绝对可扩张的，或称其具有绝对膨胀。

$$T^k = J_1^* U^k J, \qquad k \ge 0. \tag{2.2}$$

此处，$J_1\colon L^1(M,\tau_M) \to L^1(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})$ 表示 J 的等距延拓，而 $J_1^*\colon \mathcal{M} \to M$ 是利用 (2.1) 定义的。

如果 M 具有可分预对偶，我们称 $T\colon M \to M$ 具有可分绝对扩张，若存在某个具有可分预对偶的 $\mathcal{M}$，使得上述性质成立。

注2.2。以下是关于上述定义的几点说明。

(1) 设 $J\colon M \to \mathcal{M}$ 是一个保迹的 $*$-同态。那么对于所有 $x \in M$ 以及所有$y \in M \cap L^1(M, \tau_M)$，我们有

$$\langle x, y\rangle = \tau_M(xy) = \tau_{\mathcal{M}}(J(xy)) = \tau_{\mathcal{M}}(J(x)J_1(y)) = \langle J(x), J_1(y)\rangle.$$

这意味着 $J_1^* J = I_M$是 M上的恒等算子。因此， $k = 0$的关系 (2.2) 自动成立。故 (2.2) 仅对 $k \geq 1$ 有意义。关于这一点的更多内容，参见注6.5。

(2) 若 $J\colon M \to \mathcal{M}$ 是一个 w^*-连续、保迹且保单位元的 $*$-同态，则 M可通过 J 视为 $\mathcal{M}$ 的一个冯·诺依曼子代数，其迹 τ_M 是 $\tau_{\mathcal{M}}$在该子代数上的限制。从这个意义上说，$J_1^*\colon \mathcal{M} \to M$ 是到M 上的自然条件期望（例如参见 $[52,$ 命题 V.2.36$]$）。特别地， J_1^* 是正的、保迹且保单位元的。

(3) 如果 $T\colon M \to M$ 具有绝对可扩张性，那么 T 必然是正的、保迹且保单位元的。这由分解 $T = J_1^* U J$和上一段可得。

(4) 假设 (M, τ_M) 已归一化。根据 $[25,$ 定理 4.4$],$，算子$T\colon M \to M$ 相对于 τ_M可分解（见 $[3],$），当且仅当它具有绝对可扩张性，并且定义 2.1 中的迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ 可以取为归一化的。因此，绝对可扩张性应被视为可分解性的非归一化版本。

(5) 冯·诺依曼代数 M 具有可分预对偶，当且仅当存在可分希尔伯特空间 H，使得 $M \subset B(H)$ 是一个冯·诺依曼子代数。

设 (M, τ_M) 是迹冯·诺依曼代数，设 $1 \leq p < \infty$，并设 $T_0\colon L^p(M, \tau_M) \to L^p(M, \tau_M)$ 是一个压缩算子。如引言所述，若存在另一个迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$、一个等距映射$J_0\colon L^p(M, \tau_M) \to L^p(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$、一个等距同构 $U_0\colon L^p(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}) \to L^p(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ 和一个压缩算子 $Q_0\colon L^p(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}) \to L^p(M, \tau_M)$，使得对所有 $k \geq 0$， $T_0^k = Q_0 U_0^k J_0$，则称 T_0 具有等距 p-膨胀。

命题 2.3. 设 $T\colon M \to M$ 是一个绝对可扩张算子，且设 $1 \leq p < \infty$。那么， T 在 $M \cap L^p(M)$ 上的限制可扩张为一个正压缩算子 $T_0\colon L^p(M, \tau_M) \to L^p(M, \tau_M)$，且后者存在一个等距的 p-扩张。

证明。设 $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$、 J 和 U 如定义 2.1 所述。则 $T_0 = J_{p'}^* U_p J_p$ 是一个正压缩算子，在 $M \cap L^p(M)$ 上与 T 一致。此外，对所有 $k \geq 0$，我们有 $T_0^k = J_{p'}^* U_p^k J_p$。由于 J_p 和 U_p 是等距映射，因此 T_0 存在一个等距的 p-扩张。□

3. L_σ^∞-SPACES AND NORMAL TENSOR PRODUCTS

设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间。对于任意 $1 \leq p \leq \infty$，我们记相应的 L^p 空间 $L^p(\Omega\ \mu)$ 为 $L^p(\Omega)$。在积分公式中， $d\mu(t)$ 简记为 dt。

给定任意巴拿赫空间 Y和任意 $1 \leq p \leq \infty$，我们用 $L^p(\Omega; Y)$ 表示由所有可测函数 $F\colon \Omega \to Y$组成的博赫纳空间，这些函数按几乎处处相等视为等价，并满足范数函数 $t \mapsto \|F(t)\|_Y$属于 $L^p(\Omega)$。在范数$\|F\|_p$下，这是一个巴拿赫空间，其中该范数定义为 $\|F(\ \cdot)\|_Y$的 $L^p(\Omega)$-范数（参见 $[19,$第一章和第二章$]$）。注意，若

$p \neq \infty$, $L^p(\Omega) \otimes Y$是 $L^p(\Omega;\, Y)$的稠密子空间。此外，若 $Y = H$是希尔伯特空间，则 $L^2(\Omega) \otimes H$到 $L^2(\Omega; H)$中的自然嵌入可延拓为一个酉等同

$$L^2(\Omega; H) \simeq L^2(\Omega) \overset{2}{\otimes} H, \tag{3.1}$$

[2]其中 $\otimes$ 表示希尔伯特张量积。

设 X 是可分巴拿赫空间。若对所有 $x \in X$，标量函数 $t \mapsto \langle d(t)\ x\rangle$ 在 Ω 上可测，则称函数 $d\colon \Omega \to X^*$ 是 w^*-可测。为简便起见，将后一个函数记为 $\langle d, x\rangle$。若 $d\colon \Omega \to X^*$是 w^*-可测的，则范数函数$t \mapsto \|d(t)\|$ 在 Ω 上可测。事实上，若 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是X的单位球中的一个稠密序列，则 $\|d(\,\cdot\,)\| = \sup_n |\langle d, x_n\rangle|$。我们用 $L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$表示所有 w^*-可测函数 $d\colon \Omega \to X^*$构成的空间，这些函数按几乎处处相等关系取等价类，且满足 $\|d(\,\cdot\,)\|$ 本质有界（此时我们称 d 本质有界）。该空间在范数下是一个巴拿赫空间

$$\|d\|_\infty := \big\|\|d(\,\cdot\,)\|\big\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

这里，下标 σ 指的是 X^* 上的 w^*-拓扑 $\sigma(X^*, X)$。

设 $F \in L^1(\Omega;\, X)$，且 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$。利用 $L^1(\Omega) \otimes X$在$L^1(\Omega;\, X)$ 中稠密这一事实，很容易看出函数 $t \mapsto \langle d(t)\ F(t)\rangle$ 可积，并且

$$\langle d, F\rangle := \int_\Omega \langle d(t), F(t)\rangle\, dt \tag{3.2}$$

满足 $|\langle d, F\rangle| \leq \|F\|_1 \|d\|_\infty$。因此，(3.2) 在 $L^1(\Omega;\, X)$ 与 $L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$ 之间定义了一个对偶配对。事实证明，(3.2) 可延拓为一个等距同构

$$L^\infty_\sigma(\Omega; X^*) \simeq L^1(\Omega; X)^*. \tag{3.3}$$

这一结果称为邓福德–佩蒂斯定理 [20, Theorem 2.1.6]。一个简单的证明见 [14, Theorem11]。

显然,

$$L^\infty(\Omega; X^*) \subset L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$$

根据 [19, 定理 IV.1.1], , 当且仅当 X^* 具有所谓的拉东–尼科迪姆性质时，这个包含关系才是等式。我们将利用希尔伯特空间具有这一性质这一事实[19, 推论 IV.14]。因此，对于任意可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，有

$$L^\infty(\Omega; \mathcal{H}) = L^\infty_\sigma(\Omega; \mathcal{H}). \tag{3.4}$$

请注意，更一般地说，所有自反巴拿赫空间都具有拉东–尼科迪姆性质。更多信息请参见 [19, 第 VII.7] 节。

设 $W \subset X^*$ 是任意 w^*-闭子空间。那么 W 有一个自然的预对偶，即商空间 $X/W_\perp$，且后者是可分的。这使得可以定义 $L^\infty_\sigma(\Omega;\, W)$。显然,

$$L^\infty_\sigma(\Omega; W) \subset L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$$

等距地。此外， $L^1(\Omega; W_\perp) \subset L^1(\Omega; X)$ 等距地，并且在识别 (3.3) 下，我们有

$$L^\infty_\sigma(\Omega; W) = L^1(\Omega; W_\perp)^\perp. \tag{3.5}$$

给定任意冯·诺依曼代数 M_1、M_2，我们用 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 表示它们的正规张量积。我们假设读者熟悉正规张量积及其基本性质，相关内容可参见 [52, 第 IV.5] 节（其中称为 W^*-张量积），或 [35, 第 11.2], 节；另见 [50, 第 1.22] 节。我们回顾一些可在后者参考文献中找到的事实。

首先，假设 $M_1 \subset B(H_1)$ 和 $M_2 \subset B(H_2)$ 是冯·诺依曼子代数，其中 H_1、H_2 为希尔伯特空间。于是

$$M_1\overline{\otimes}M_2 \subset B(H_1)\overline{\otimes}B(H_2) \simeq B(H_1 \overset{2}{\otimes} H_2).$$

更确切地说，若按通常方式看待 $M_1 \otimes M_2 \subset B(H_1 \overset{2}{\otimes} H_2)$，则 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 是 $M_1 \otimes M_2$ 在 $B(H_1 \otimes H_2)$ 中的$2w^*$-闭包。

其次，考虑 $\eta_1 \in (M_1)_*$ 和 $\eta_2 \in (M_2)_*$。令 I_{M_1}（分别为 I_{M_2}）表示作用在 M_1（分别为 M_2）上的恒等算子。于是，张量映射 $\eta_1 \otimes I_{M_2}\colon M_1 \otimes M_2 \to M_2$ 唯一延拓为一个 w^*-连续算子 $\eta_1\overline{\otimes}I_{M_2}\colon M_1\overline{\otimes}M_2 \to M_2$。同样，张量映射 $I_{M_1} \otimes \eta_2$ 唯一延拓为一个 w^*-连续算子 $I_{M_1}\overline{\otimes}\eta_2\colon M_1\overline{\otimes}M_2 \to M_1$。此外，$\eta_1 \otimes \eta_2$ 唯一延拓为 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 上的一个 w^*-连续泛函。我们仍用 $\eta_1 \otimes \eta_2$ 表示此延拓。显然，

$$\eta_1 \otimes \eta_2 = \eta_1 \circ (I_{M_1}\overline{\otimes}\eta_2) = \eta_2 \circ (\eta_1\overline{\otimes}I_{M_2}).$$

第三，上述 $\eta_1 \otimes \eta_2 \in (M_1\overline{\otimes}M_2)_*$ 的定义给出了一个自然嵌入

$$(M_1)_* \otimes (M_2)_* \subset (M_1\overline{\otimes}M_2)_*. \tag{3.6}$$

注 3.1. 上文考虑的算子 $\eta_1\overline{\otimes}I_{M_2}$ 和 $I_{M_1}\overline{\otimes}\eta_2$ 通常分别称为与 η_1 和 η_2相关联的切片映射。

设 $M_1 \subset B(H_1)$ 和 $M_2 \subset B(H_2)$ 如上，并令 $w \in B(H_1)\overline{\otimes}B(H_2)$。那么$w \in M_1\overline{\otimes}M_2$ 当且仅当

$$\big(I_{B(H_1)}\overline{\otimes}\eta_2\big)(w) \in M_1 \qquad \text{and} \qquad \big(\eta_1\overline{\otimes}I_{B(H_2)}\big)(w) \in M_2,$$

对所有 $\eta_1 \in B(H_1)_*$ 以及所有 $\eta_2 \in B(H_2)_*$均成立。这就是冯·诺依曼代数的所谓切片映射性质，参见 [55]。本文仅在 $M_2 = B(H_2)$ 时使用这一性质，此时证明很简单（例如参见 [22, 定理 2.4]及其证明）。

我们以 L^∞_σ-空间与正规张量积之间的自然联系结束本节。

引理 3.2. 设 M 是一个具有可分预对偶的冯·诺依曼代数。

(1) 对任意 $c, d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$，函数 $t \mapsto c(t)d(t)$ 和 $t \mapsto d(t)^*$ 都是 w^*-可测的。此外，$L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$在逐点乘积和逐点对合下是一个冯·诺依曼代数。(2) $L^\infty(\Omega) \otimes M$到 $L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$中的自然嵌入可延拓为一个冯·诺依曼代数同构

$$L^\infty_\sigma(\Omega; M) \simeq L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M. \tag{3.7}$$

证明。由 [50, 定理 1.22]13及其证明可得。 □

在下文中，我们记

$$d \sim D$$

若 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$ 和 $D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 在识别（3.7）下彼此对应。

注 3.3. 显然，对于任意 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$ 和 $D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$，有 $d \sim D$ 当且仅当

$$\int_\Omega f(t)\langle d(t), \eta\rangle\, dt = [f \otimes \eta](D)$$

对于所有 $f \in L^1(\Omega)$ 和所有 $\eta \in M_*$。

引理 3.4. 假设 M 有可分预对偶，取 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$，并取 $D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 使得 $d \sim D$。那么对于所有 $x \in M$，有

$$xd \sim (1 \otimes x)D,$$

其中 $xd \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$ 由 $(xd)(t) = xd(t)$ 定义，而 $1 = 1_{L^\infty(\Omega)}$。

证明。由引理 3.2，取常值函数 $c(t) = x$，即可得出结论。 . □

作为引理 3.2 的补充，我们指出，$L^\infty(\Omega) \otimes L^\infty(\Omega)$ 到 $L^\infty(\Omega^2)$ 的自然嵌入可扩张为一个冯·诺依曼代数同构

$$L^\infty(\Omega^2) \simeq L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty(\Omega). \tag{3.8}$$

事实上，由富比尼定理，$L^1(\Omega) \otimes L^1(\Omega)$ 到 $L^1(\Omega^2)$ 的嵌入可扩张为等距同一 $L^1(\Omega; L^1(\Omega)) \simeq L^1(\Omega^2)$。因此，(3.8) 可由 [50, 1.22.10–1.22.12] 得出。

注 3.5. 最后，我们回顾以下经典事实，相关内容可参见 [52, 命题 V.2.14]。设 (M, τ_M) 是任意一个迹冯·诺依曼代数。设 I 是一个指标集，并令 $(e_i)_{i\in I}$ 表示 ℓ^2_I 的标准希尔伯特基。则 $\mathrm{tr} \otimes \tau_M$ 唯一地扩张为一个正规半有限忠实迹

$$\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_M : (B(\ell^2_I)\overline{\otimes}M)^+ \longrightarrow [0, \infty],$$

可描述如下。任何 $z \in B(\ell^2_I)\overline{\otimes}M$ 都可以自然地视为一个无限矩阵 $[z_{ij}]_{(i,j)\in I^2}$，其元素为 $z_{ij} \in M$。若 z为正，则每个 z_{ii}均为正，并且我们有

$$\big[\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_M\big](z) = \sum_{i\in I} \tau_M(z_{ii}).$$

4. Bounded Schur multipliers on $B(L^2(\Omega))$

设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间。对于任意 $\varphi \in L^2(\Omega^2)$，记 S_φ: $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 为由下式定义的有界算子

$$[S_\varphi(h)](s) = \int_\Omega \varphi(s,t)h(t)\, dt, \qquad h \in L^2(\Omega).$$

我们回顾一下，S_φ 是一个希尔伯特–施密特算子，即 $S_\varphi \in S^2(L^2(\Omega))$。此外，映射 $\varphi \mapsto S_\varphi$ 给出了一个酉等同

$$L^2(\Omega^2) \simeq S^2(L^2(\Omega)), \tag{4.1}$$

例如，参见 [48, 定理 VI. 23]。

回顾一下，我们用 tr 表示 $B(L^2(\Omega))$ 上的通常迹。由上述酉等同和一个简单的极化论证可知，对于任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\Omega^2)$，有

$$\operatorname{tr}\big(S_{\varphi_1} S_{\varphi_2}\big) = \int_{\Omega^2} \varphi_1(s,t)\varphi_2(t,s)\, dtds. \tag{4.2}$$

给定任意 $u, v \in L^2(\Omega)$，我们按照约定 $(u \otimes v)(s,t) = u(t)v(s)$，其中 $(s,t) \in \Omega^2$，将 $u \otimes v$ 视为 $L^2(\Omega^2)$ 的一个元素。下文中，我们将算子 $S_{u\otimes v}$ 滥称为 $u \otimes v$。换言之，我们也用记号 $u \otimes v$ 表示由下式定义的 $B(L^2(\Omega))$ 的元素

$$[u \otimes v](h) = \Big(\int_\Omega u(t)h(t)\, dt\Big)v, \qquad h \in L^2(\Omega). \tag{4.3}$$

设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$。利用 (4.1)，我们定义 $T_\phi\colon\ S^2(L^2(\Omega)) \to S^2(L^2(\Omega))$，令

$$T_\phi(S_\varphi) = S_{\phi\varphi}, \qquad \varphi \in L^2(\Omega^2).$$

这个算子称为舒尔乘法算子。应用 (4.2)，我们得到，对所有 $u, v, a, b \in L^2(\Omega)$，均有

$$\operatorname{tr}\Big(\big[T_\phi(u \otimes v)\big]\big[a \otimes b\big]\Big) = \int_{\Omega^2} \phi(s,t)u(t)v(s)a(s)b(t)\, dtds. \tag{4.4}$$

令 $S^\infty(L^2(\Omega))$ 表示由 $L^2(\Omega)$ 上所有紧算子构成的巴拿赫空间，并回顾一下，$S^2(L^2(\Omega))$ 是 $S^\infty(L^2(\Omega))$ 的稠密子空间。若 ϕ 可延拓为从 $S^\infty(L^2(\Omega))$ 到其自身的有界算子，则称 ϕ 为有界舒尔乘子。在这种情况下，T_ϕ 存在唯一的 w^*-连续延拓，将 $B(L^2(\Omega))$ 映到其自身。事实上，$B((L^2(\Omega))$ 是 $S^\infty((L^2(\Omega))$ 的二次对偶（参见 [16, 第 19] 章）。在下文中，我们沿用记号

$$T_\phi\colon\ B(L^2(\Omega)) \longrightarrow B(L^2(\Omega))$$

表示这个延拓。本节定义的舒尔乘子至少可追溯到 Haagerup [24]（另见 [44, 51]）。有关详情及补充结果，请参阅 [21] 及其中所列参考文献。

有界舒尔乘子的以下刻画有着相当悠久的历史。在离散情形下，定理 4.1 的第 (1) 部分由 Paulsen 在 [43, 推论 8.8] 中提出，也由 Pisier 在 [46, 定理 5.1], 中提出；后者还引用了 Grothendieck 更早的一些工作。关于这一陈述的一般情形，参见 Haagerup [24], 、Peller [44] 和 Spronk [51, 第 3 节2]。第 (2) 部分是一个广为流传的结果，例如可由 [43, 练习 8.7] 以及 [39, 定理 1.7]的证明推出。

在下一个陈述中，$(\cdot \,\big|\, \cdot)_{\mathcal{H}}$ 表示某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的内积.

定理 4.1. 设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，并设 $C \geq 0$。

(1) 函数 ϕ 是一个有界舒尔乘子，且 $\|T_\phi\colon\ B(L^2(\Omega) \to B(L^2(\Omega))\| \leq C$当且仅当存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及两个函数 $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega; \mathcal{H})$，使得 $\|\alpha\|_\infty \|\beta\|_\infty \leq C$ 并且

$$\phi(s,t) = \big(\alpha(t) \,\big|\, \beta(s)\big)_{\mathcal{H}} \quad a.e.\text{-}(s,t) \in \Omega^2.$$

(2) 函数 ϕ 定义了一个有界的正舒尔乘子 T_ϕ，且 $\|T_\phi\| \leq C$ 当且仅当存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及 $\alpha \in L^\infty(\Omega; \mathcal{H})$，使得 $\|\alpha\|_\infty^2 \leq C$ 并且

$$\phi(s,t) = \big(\alpha(t) \,\big|\, \alpha(s)\big)_{\mathcal{H}} \quad a.e.\text{-}(s,t) \in \Omega^2. \tag{4.5}$$

回顾一下，若 $(\Omega\ \mu)$ 是可分的，则称其为可分空间，如果 $L^2(\Omega)$ 是可分的。对于任意 $1 \leq p < \infty$，这等价于 $L^p(\Omega)$ 的可分性。

注 4.2. 假设 $(\Omega\ \mu)$ 是可分的，令 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，并假设 ϕ 满足定理 1.1 的断言 (ii)。由于 (N, τ_N) 已归一化，我们有一个压缩嵌入 $\kappa\colon\ N \to L^2(N, \tau_N)$。令 $\alpha := \kappa \circ d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\ L^2(N, \tau_N))$。那么 $\|\alpha\|_\infty \leq 1$。根据 (3.4)，α 实际上属于 $L^\infty(\Omega;\ L^2(N, \tau_N))$。此外，对于几乎处处的 $(s,t)\ \in \Omega^2,$，我们有

$$\tau_N\big(d(s)^* d(t)\big) = \big(\alpha(t) \,\big|\, \alpha(s)\big)_{L^2(N,\tau_N)}.$$

因此，根据 (1.2)，ϕ 满足 (4.5)。所以，(1.2) 应被视为对分解 (4.5) 的加强。从这个意义上说，定理 1.1 表明，这种加强后的分解性质刻画了具有可分绝对扩张的舒尔乘子。

5. Preparatory results

在全文中，我们固定一个 σ-有限测度空间 $(\Omega\ \mu)$。对于任意 $\theta \in L^\infty(\Omega)$，令 $R_\theta \in B(L^2(\Omega))$ 为由 $R_\theta(h) = \theta h$ 定义的逐点乘法算子，其中对所有 $h \in L^2(\Omega)$ 均成立。由于 $\theta \mapsto R_\theta$ 是一个 w^*-连续的 1-1 $*$-同态，我们可以将 $L^\infty(\Omega)$ 与 $\{R_\theta\colon\ \theta \in L^\infty(\Omega)\}$ 等同。利用这一等同，以下我们将 $L^\infty(\Omega)$ 视为 $B(L^2(\Omega))$ 的冯·诺依曼子代数，并简记为

$$L^\infty(\Omega) \subset B(L^2(\Omega)). \tag{5.1}$$

我们回顾一下，$L^\infty(\Omega)$ 等于其自身的交换子。也就是说，算子 $T \in B(L^2(\Omega))$ 具有 R_{θ_0} 的形式，其中某个 $\theta_0 \in L^\infty(\Omega)$ 满足：当且仅当对所有 $\theta \in L^\infty(\Omega)$，都有 $TR_\theta = R_\theta T$，即对所有 $\theta \in L^\infty(\Omega)$ 和所有 $h \in L^2(\Omega)$，$T(\theta h) = \theta T(h)$（见 [17, 第九章，定理 6.6]）。

对于任意可测集 $E \subset \Omega$，我们用 χ_E 表示 E的示性函数。注意，χ_E 属于 $L^2(\Omega)$ 当且仅当 E 具有有限测度。

引理 5.1. 设 $T \in B(L^2(\Omega))$。那么，T 属于 $L^\infty(\Omega)$（按上述意义）当且仅当对于所有具有有限测度的可测集 $E \subset \Omega$，都有 $T(\chi_E) = \chi_E T(\chi_E)$。

证明。“仅当”部分显然。为证明“若”部分，令 $\mathcal{A}$ 为 Ω 中所有有限测度可测集 $E \subset$ 的集合。我们假设对于所有 $E \in \mathcal{A}$，$T(\chi_E) = \chi_E T(\chi_E)$。这立即推出，对于所有满足 $E \subset E'$ 的 E、$E' \in \mathcal{A}$，$T(\chi_E) = \chi_{E'} T(\chi_E)$。

设 $E, F \in \mathcal{A}$。由于 $\chi_E \chi_F = \chi_{E\cap F}$ 和 $E \cap F \subset E$，由上文可知，我们有 $\chi_E T(\chi_E \chi_F) = T(\chi_E \chi_F)$。令 E^c 为 E 的补集。由于 $\chi_{E^c} \chi_F = \chi_{E^c \cap F}$，我们有 $T(\chi_{E^c} \chi_F) = \chi_{E^c \cap F} T(\chi_{E^c} \chi_F)$，因此 $\chi_E T(\chi_{E^c} \chi_F) = 0$。写出分解 $T(\chi_F) = T(\chi_E \chi_F) + T(\chi_{E^c} \chi_F)$，我们推得

$$T(\chi_E \chi_F) = \chi_E T(\chi_F). \tag{5.2}$$

Let

$$\mathcal{E} = \mathrm{Span}\big\{\chi_E\ :\ E \in \mathcal{A}\big\}.$$

由线性性，恒等式 (5.2) 意味着对所有 $\theta, h \in \mathcal{E}$，都有 $T(\theta h) = \theta T(h)$。由于 $\mathcal{E}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，我们推得对所有 $h \in L^2(\Omega)$ 和所有 $\theta \in \mathcal{E}$，都有 $T(\theta h) = \theta T(h)$。此外，$\mathcal{E}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中是 w^*-稠密的。若 $(\theta_\iota)_\iota$ 是一个在 w^*-拓扑下收敛到某个 $\theta \in L^\infty(\Omega)$ 的 $\mathcal{E}$ 网，那么对所有 $h \in L^2(\Omega)$，$\theta_\iota h \to \theta h$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛。由此可得，$T(\theta_\iota h) \to T(\theta h)$ 且 $\theta_\iota T(h) \to \theta T(h)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛。因此，对所有 $h \in L^2(\Omega)$ 和所有 $\theta \in L^\infty(\Omega)$，都有 $T(\theta h) = \theta T(h)$。根据 (5.1) 后的讨论，$T$ 因此是一个乘法算子，也就是说，它是 $L^\infty(\Omega)$ 的一个元素。□

下文中，我们用 $L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)$ 代替 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty(\Omega)$，以表示第一个因子中的变量记为 $s \in \Omega$，而第二个因子中的变量记为 $t \in \Omega$。按照这一约定，我们将 (3.8) 改写为

$$L^\infty(\Omega^2) \simeq L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega). \tag{5.3}$$

设 M 是一个冯·诺依曼代数，并设

$$W = L^\infty(\Omega^2)\overline{\otimes}M = L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}M.$$

我们用 1_t（分别用 1_s）表示 $L^\infty_t(\Omega)$（分别表示 $L^\infty_s(\Omega)$）中的常值函数 1。考虑 D 和 C 属于 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$。令

$$1_s \otimes D_t \in W \tag{5.4}$$

通过以自然的方式将 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 与 $1_s\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}M \subset W$ 等同，可由 D 得到。同样，令

$$1_t \otimes C_s \in W \tag{5.5}$$

通过将 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 与 $L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}\,1_t\,\overline{\otimes}M \subset W$ 等同，可由 C 得到。

引理 5.2. 假设 M 具有可分预对偶。令 C, D 如上，并令 $c, d \in L^\infty_\sigma(\Omega;\, M)$，使得 $c \sim C$ 和 $d \sim D$。则函数 $c \odot d\colon \Omega^2 \to M$ 定义为

$$(c \odot d)(s,t) = c(s)d(t), \qquad (s,t) \in \Omega^2, \tag{5.6}$$

是 w^*-可测的，因此属于 $L^\infty_\sigma(\Omega^2;\, M)$。此外，我们有

$$c \odot d \sim (1_t \otimes C_s)(1_s \otimes D_t). \tag{5.7}$$

证明。令 $\eta \in M_*$。对于任意 $\delta \in M$，令 $\eta\delta \in M_*$ 由 $\langle a, \eta\delta\rangle = \langle \delta a, \eta\rangle$ 定义，其中对所有 $a \in M$ 均成立。由于 M 上的乘法分别关于 w^* 连续，因此这一定义良好。类似地，$\delta\eta \in M_*$ 由 $\langle a, \delta\eta\rangle = \langle a\delta, \eta\rangle$ 定义。

记 $\langle \delta, d(t)\eta\rangle = \langle d(t)\ \eta\delta\rangle$，对任意 $\delta \in M$，可见函数 $t \mapsto d(t)\eta$ 是从 Ω 到 M_* 的弱可测函数。因此，根据可分性假设及 [19, 定理 II. 1.2]，它是可测的。因此，函数 $t \mapsto d(t)\eta$ 几乎处处是序列 $(w_n)_{n\geq 1}$ 中 $L^\infty_t(\Omega) \otimes M_*$ 的极限。由于 c 是 w^*-可测的，对于任意 $n \geq 1$，函数 $(s,t) \mapsto \langle c(s)\ w_n(t)\rangle$ 是可测的。由此可得，$(s,t) \mapsto \langle c(s)\ d(t)\eta\rangle = \langle c(s)d(t)\ \eta\rangle$ 是可测的。这说明 $c \odot d$ 是 w^*-可测的。显然，$c \odot d$ 是本质有界的。因此，我们得到 $c \odot d \in L^\infty_\sigma(\Omega^2;\, M)$。

在此证明中，令 $\Delta = (1_t \otimes C_s)(1_s \otimes D_t)$。我们引入

$$m = \int_\Omega f(s)c(s)\, ds \in M,$$

此积分定义于 w^*-拓扑中。考虑切片映射

$$\widetilde{f} := f\overline{\otimes} I_{L_t^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M} \colon W \longrightarrow L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M.$$

对于任意的 $u, v \in L^\infty(\Omega)$ 和任意的 $a, b \in M$，我们有 $(u\otimes 1\otimes a)(1\otimes v\otimes b) = (u\otimes v\otimes ab)$ 属于 W，因此

$$\widetilde{f}\big((u\otimes 1\otimes a)(1\otimes v\otimes b)\big) = \Big(\int_\Omega fu\Big) v\otimes ab = \Big(1\otimes\Big(\int_\Omega f(s)u(s)a\,ds\Big)\Big)(v\otimes b).$$

由线性性可知，若 C 和 D 属于代数张量积 $L^\infty(\Omega)\otimes M$，则有

$$\widetilde{f}(\Delta) = (1\otimes m)D. \tag{5.8}$$

若 $(C_\iota)_\iota$ 是一个 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 网，在 w^*-拓扑下收敛于 C，其中拓扑取自 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$；且若 $c_\iota \in L^\infty_\sigma(\Omega; M)$ 满足 $c_\iota \sim C_\iota$，则 $\int_\Omega f(s)c_\iota(s)\,ds$ 在 w^*-拓扑下收敛于 m，其中拓扑取自 M。由于冯·诺依曼代数上的乘法分别具有 w^*-连续性[~]，且 f 是 w^*-连续的，我们可推出恒等式 (5.8) 实际上在一般情形下也成立。因此，

$$[f\otimes g\otimes\eta](\Delta) = [g\otimes\eta]\big((1\otimes m)D\big).$$

由于 $d\sim D$，引理 3.4 和注 3.3 的“仅当”部分保证

$$[g\otimes\eta]\big((1\otimes m)D\big) = \int_\Omega g(t)\langle md(t),\eta\rangle\,dt.$$

记

$$\langle md(t),\eta\rangle = \langle m, d(t)\eta\rangle = \int_\Omega f(s)\langle c(s), d(t)\eta\rangle\,ds = \int_\Omega f(s)\langle c(s)d(t),\eta\rangle\,ds,$$

并利用 $\langle c\odot d、\ \eta\rangle$ 的可测性，我们推得

$$[f\otimes g\otimes\eta](\Delta) = \int_{\Omega^2} g(t)f(s)\big\langle c(s)d(t),\eta\big\rangle\,dsdt.$$

应用注 3.3 的“若”部分，我们推得 (5.7)。 □

[2]设 H_1、H_2 是两个希尔伯特空间，并令 $H_1\oplus H_2$ 表示它们的希尔伯特直和。令 $B(H_1, H_2)$ 表示从 H_1 到 H_2 的所有有界算子构成的巴拿赫空间。任意[2]$L\in B(H_1\oplus H_2)$ 都可以自然地写成一个 2×2 矩阵

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}$$

其中对所有 $(i,j)\in\{1,2\}^2$，$L_{ij}\in B(H_j, H_i)$。因此，我们可以将其视为

$$B(H_1,H_2)\subset B(H_1\overset{2}{\oplus}H_2) \tag{5.9}$$

作为一个闭子空间。注意，$B(H_1, H_2)$ 实际上是 $B(H_1\overset{2}{\oplus}H_2)$ 的一个 w^*-闭子空间，因此是一个对偶空间。如果 H_1, H_2 是可分的，那么 $B(H_1, H_2)$ 的预对偶也可分。

对于任意冯·诺依曼代数 M_0，我们用 $M_0\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$ 表示代数张量积 $M_0\otimes B(H_1,H_2)$ 映入 $M_0\overline{\otimes}B(H_1\overset{2}{\oplus}H_2)$ 后的 w^*- 闭包。对于任意

$$D\in M_0\overline{\otimes}B(H_1,H_2)\qquad\text{and}\qquad C\in M_0\overline{\otimes}B(H_2,H_1),$$

冯·诺依曼代数 $M_0\overline{\otimes}B(H_1\overset{2}{\oplus}H_2)$ 中 D 与 C 的乘积给出

$$CD\in M_0\overline{\otimes}B(H_1).$$

设 K 是另一个希尔伯特空间，并设 $H=H_1\oplus H_2$。我们注意到，同一$B(K\otimes H)\simeq B(K)\overline{\otimes}B(H)$ 化为一个 w^*-同胚且等距的同一

$$B(K\overset{2}{\otimes}H_1,K\overset{2}{\otimes}H_2)\simeq B(K)\overline{\otimes}B(H_1,H_2).\tag{5.10}$$

引理 3.2 的第 (2) 部分可推广至以 $B(H_1,H_2)$ 替换 M 的情形。更确切地说，若 H_1、H_2 是可分的，则 $L^\infty(\Omega)\otimes B(H_1,H_2)$ 到 $L^\infty_\sigma(\Omega;B(H_1,H_2))$ 的自然嵌入可延拓为一个 w^*-同胚且等距的同一

$$L^\infty_\sigma(\Omega;B(H_1,H_2))\simeq L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1,H_2).\tag{5.11}$$

为证明这一点，应用引理 3.2，其中取 $M=B(H_1\overset{2}{\oplus}H_2)$，并使用嵌入 (5.9)。

对于任意的 $D\in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$，我们可以仿照引理 5.2 之前的做法，将其与

$$1_s\otimes D_t\in L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$$

通过将 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$ 与 $1_s\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$ 视为相同对象。

类似地，对于任意的 $C\in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_2,H_1)$，我们可以将其与

$$1_t\otimes C_s\in L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}B(H_2,H_1).$$

通过将 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_2,H_1)$ 与 $L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}1_t\overline{\otimes}B(H_2,H_1)$ 视为相同对象。

引理 5.3. 设 D,C 如上所述，并回顾 (5.1)，它们可分别视为 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1,H_2)$ 和 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_2,H_1)$ 的元素。设 $N_1\subset B(H_1)$ 是一个冯·诺依曼子代数。以下断言等价。

(i) 对于所有的 $u,v\in L^2(\Omega)$，$C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D$ 属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$。（这里，$u\otimes v$ 是 $B(L^2(\Omega))$ 中由 (4.3) 定义的元素。）(ii) 乘积 $(1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)$ 属于 $L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}N_1$。

证明。令 $u,v,a,b\in L^2(\Omega)$。按照 (4.3)，我们将 $a\otimes b$ 视为 $S^1(L^2(\Omega))$ 中的一个元素，并令 $(a\otimes b)\overline{\otimes}I$ 为相应的切片映射 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1)\to B(H_1)$。同样，我们将 $av\otimes bu$ 视为 $L^1_s(\Omega)\otimes L^1_t(\Omega)$ 中的一个元素，并令 $(av\otimes bu)\overline{\otimes}I$ 为相应的切片映射 $L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1)\to B(H_1)$。我们断言

$$\big[(a\otimes b)\overline{\otimes}I\big]\big(C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D\big)=\big[(av\otimes bu)\overline{\otimes}I\big]\big((1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)\big).\tag{5.12}$$

为证明这一点，假设先假设 $D\in L^\infty(\Omega)\otimes B(H_1,H_2)$ 且 $C\in L^\infty(\Omega)\otimes B(H_2,H_1)$。因此 ，

$$D=\sum_j f_j\otimes T_j\qquad\text{and}\qquad C=\sum_i g_i\otimes S_i$$

对于某些有限族 $(f_j)_j$ 属于 $L^\infty(\Omega)$、$(T_j)_j$ 属于 $B(H_1,H_2)$、$(g_i)_i$ 属于 $L^\infty(\Omega)$ 以及 $(S_i)_i$ 属于 $B(H_2,H_1)$。

回顾 (5.1)，每个 f_j （分别地，g_i）都被视为由 f_j （分别地，g_i）逐点相乘。经过简单计算可得 $g_i(u\otimes v)f_j=(uf_j)\otimes(vg_i)$ 属于 $B(L^2(\Omega))$。因此，

$$C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D=\sum_{i,j}(uf_j)\otimes(vg_i)\otimes S_iT_j.$$

因此，(5.12) 左端为

$$\begin{aligned}\big[(a\otimes b)\overline{\otimes}I\big]\big(C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D\big)&=\sum_{i,j}\mathrm{tr}\big((a\otimes b)[(uf_j)\otimes(vg_i)]\big)S_iT_j\\&=\sum_{i,j}\Big(\int_\Omega avg_i\Big)\Big(\int_\Omega buf_j\Big)S_iT_j.\end{aligned}$$

为计算 (5.12) 的右端，令

$$(1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)=\Big(\sum_i g_i\otimes 1\otimes S_i\Big)\Big(\sum_j 1\otimes f_j\otimes T_j\Big)=\sum_{i,j}g_i\otimes f_j\otimes S_iT_j.$$

这意味着

$$\big[(av\otimes bu)\overline{\otimes}I\big]\big((1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)\big)=\sum_{i,j}\Big(\int_\Omega avg_i\Big)\Big(\int_\Omega buf_j\Big)S_iT_j,$$

于是 (5.12) 得证。现在，由于冯·诺依曼代数上的乘积分别对 w^* 连续，上述特殊情形意味着 (5.12) 在一般情形下也成立。

现在证明等价性。假设 (i)，并令 $h,k\in L^1(\Omega)$。存在 $u,v,a,b\in L^2(\Omega)$，使得 $h=av$ 且 $k=bu$。由于 $C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D$ 属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$，由 (5.12) 可得 $\big[(h\otimes k)\overline{\otimes}I\big]\big((1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)\big)$ 属于 N_1。由于 $L^1(\Omega)_s\otimes L^1_t(\Omega)$ 在 $(L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega))_*$ 中稠密，应用切片映射性质（见注 3.1），我们推出 $(1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)\in L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}N_1$。

反过来，假设 (ii) 成立，并固定 $u,v\in L^2(\Omega)$。由于 $(1_t\otimes C_s)(1_s\otimes D_t)\in L^\infty_s(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty_t(\Omega)\overline{\otimes}N_1$，由 (5.12) 可得 $\big[(a\otimes b)\overline{\otimes}I\big]\big(C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D\big)$ 属于 N_1，对所有 $a,b\in L^2(\Omega)$ 均成立。由于 $L^2(\Omega)\otimes L^2(\Omega)$ 在 $B(L^2(\Omega))_*$ 中稠密，再次应用切片映射性质可推出 $C((u\otimes v)\otimes I_{H_2})D\in B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$。□

6. 定理 1.1 的证明

6.1. “$(i)\Rightarrow(ii)$”的证明。

令 $\phi\in L^\infty(\Omega^2)$，并假设 ϕ 满足定理 1.1 的断言 (i)。

将 (2.2) 应用于 $k=1$，我们得到一个具有可分预对偶的迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})$、一个保迹且保单位的 w^*-连续 $*$-同态 $J\colon B(L^2(\Omega))\to\mathcal{M}$，以及一个保迹的 $*$-自同构 $U\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$，使得

$$T_\phi=J_1^*UJ. \tag{6.1}$$

我们固定 $L^2(\Omega)$ 的一个希尔伯特基 $(e_i)_{i\in I}$，并对所有 $(i,j)\in I^2$ 定义 $E_{ij}=e_j\otimes e_i\in B(L^2(\Omega))$。由于 J 是一个保单位的 w^*-连续 $*$-同态，$\{J(E_{ij}):(i,j)\in I^2\}$ 是一个

$\mathcal{M}$ 的矩阵单位系（按 [52, 定义 IV.1.7] 的含义）。固定 $k_0 \in I$ 并令$q = J(E_{k_0k_0})$。这是 $\mathcal{M}$ 的一个投影。根据 [52, 命题 IV.1.8] 及其证明，

$$m_{ij} := J(E_{k_0i})mJ(E_{jk_0})$$

对所有 $m \in \mathcal{M}$ 和所有 $(i,j) \in I^2$，都属于 $q\mathcal{M}q$，且映射

$$\rho\colon \mathcal{M} \longrightarrow B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}(q\mathcal{M}q), \qquad \rho(m) = \sum_{(i,j)\in I^2} E_{ij} \otimes m_{ij},$$

是一个 $*$-同构。（这里的求和是在 $\mathcal{M}$ 的 w^* 拓扑下进行的。） $\tau_{\mathcal{M}}$ 在 $q\mathcal{M}q$ 上的限制是半有限的，记作 τ_1。在 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}(q\mathcal{M}q)$ 上赋予 $\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_1$，见注 3.5。于是 ρ 是保迹的。为验证这一点，注意到对于所有 $i \in I$， $J(E_{ik_0})J(E_{k_0i}) = J(E_{ii})$，且 $\sum_{i\in I} J(E_{ii}) = 1_{\mathcal{M}}$。因此，对于任意 $m \in \mathcal{M}^+$，每个 m_{ii} 都属于 $(q\mathcal{M}q)^+$，并且有

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_1)\big(\rho(m)\big) &= \sum_{i\in I} \tau_{\mathcal{M}}\big(J(E_{k_0i})mJ(E_{ik_0})\big)\\ &= \sum_{i\in I} \tau_{\mathcal{M}}\big(J(E_{ii})m\big)\\ &= \tau_{\mathcal{M}}\Big(\Big(\sum_{i\in I} J(E_{ii})\Big)m\Big) = \tau_{\mathcal{M}}(m).\end{aligned}$$

显然，对于所有 $(i,j) \in I^2$， $\rho\big(J(E_{ij})\big) = E_{ij} \otimes q$。由于 J 是 w^*-连续的，这意味着对于所有 $z \in B(L^2(\Omega))$， $\rho \circ J(z) = z \otimes q$。由于 J 和 ρ 都是保迹的，这意味着 $\tau_1(q) = 1$。

由 $N_1 = q\mathcal{M}q$，根据上述结论，将 J 改为 $\rho \circ J$，并将 U 改为$\rho \circ U \circ \rho^{-1}$，我们可以假设

$$\mathcal{M} = B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1,$$

对于某个归一化迹冯·诺依曼代数 (N_1, τ_1)，并且

$$J(z) = z \otimes 1_{N_1}, \qquad z \in B(L^2(\Omega)). \tag{6.2}$$

此外， N_1 具有可分预对偶。

我们固定一个希尔伯特空间 H_1，使得 $N_1 \subset B(H_1)$ 是一个冯·诺依曼子代数。我们可以假设 H_1 是可分的，见注2.2，(5)。由 (3.1)，我们有 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1) \simeq B(L^2(\Omega; H_1))$。因此， $\mathcal{M} \subset B(L^2(\Omega; H_1))$ 是一个冯·诺依曼子代数。我们再次使用 [52,命题 IV.1.8] 及其证明如下。注意，由于 U 是一个幺 w^*-连续

$*$-同态， $\{U(E_{ij} \otimes 1_{N_1}) : (i,j) \in I^2\}$是 $\mathcal{M}$的一组矩阵单位。于是我们定义

$$q_0 = U(E_{k_0k_0} \otimes 1_{N_1}), \quad H_2 = q_0\big(L^2(\Omega; H_1)\big) \quad \text{and} \quad N_2 = q_0\mathcal{M}q_0,$$

并在后一个冯·诺依曼代数上赋予 $\mathcal{M}$ 的迹的限制。我们用τ_2 表示 N_2 上的这一迹。然后，仿照上述论证，我们得到一个保迹的 $*$-同构

$$\pi\colon B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1 \longrightarrow B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_2 \tag{6.3}$$

使得对于所有 $z \in B(L^2(\Omega))$， $\pi \circ U(z \otimes 1_{N_1}) = z \otimes 1_{N_2}$。我们推得 τ_2 是归一化的。此外，$N_2 \subset B(H_2)$ 是一个冯·诺依曼子代数，而 H_2 是可分的。

如上所述，将 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1 \subset B(L^2(\Omega; H_1))$ 视为一体，并类似地将 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_2 \subset B(L^2(\Omega; H_2))$ 视为一体。于是，[52, 命题 IV.1.8] 的证明中的论证实际上表明，存在一个酉算子

$$D\colon L^2(\Omega; H_1) \longrightarrow L^2(\Omega; H_2)$$

使得

$$\pi(R) = DRD^*, \qquad R \in B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1. \tag{6.4}$$

这意味着

$$U(z \otimes 1_{N_1}) = D^*(z \otimes 1_{N_2})D, \qquad z \in B(L^2(\Omega)). \tag{6.5}$$

现在我们将使用舒尔乘子的性质。注意 $1_{N_1} = I_{H_1} \in L^1(N_1, \tau_1)$，并回顾嵌入 $S^1(L^2(\Omega)) \otimes L^1(N_1, \tau_1) \subset \mathcal{M}_*$（见 (3.6)）。关系式 (6.1) 和恒等式 (6.2) 表明，对于所有 $u, v, a, b \in L^2(\Omega)$，我们有

$$\big\langle U((u \otimes v) \otimes I_{H_1}), (a \otimes b) \otimes I_{H_1} \big\rangle_{\mathcal{M}, \mathcal{M}_*} = \operatorname{tr}\Big(\big[T_\phi(u \otimes v)\big] \big[a \otimes b\big] \Big). \tag{6.6}$$

在此公式中，$u \otimes v$（$a \otimes b$ 同理）是由 (4.3) 定义在 $L^2(\Omega)$ 上的秩一算子。注意，(6.6) 的右端可由 (4.4) 表示。

根据 (5.10)，我们将 D 视为 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1, H_2)$ 的一个元素。

引理 6.1。在表示 (5.1) 下，我们有

$$D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1, H_2).$$

证明。设 $E, F \subset \Omega$ 是有限测度的可测集。考虑

$$V_{E,F} = (\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_2})D(\chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1}) \in B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1, H_2).$$

由于 $(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_2})$ 是自伴投影，我们有

$$V_{E,F}^* V_{E,F} = (\chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1})D^*(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_2})D(\chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1}).$$

我们将此乘积视为 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H_1)$ 中的一个元素。根据 (6.5),

$$D^*(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_2})D = U(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_1})$$

属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$。因此，$V_{E,\,F}^* V_{E,\,F}$ 实际上属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$。此外，利用 (6.6) 和 (4.4), 我们有

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tr}\overline{\otimes}\tau_1)\big(V_{E,F}^* V_{E,F}\big) &= (\operatorname{tr}\overline{\otimes}\tau_1)\Big(\big[U(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_1})\big] \big[\chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1}\big] \Big) \\
&= \big\langle U(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_1}), \chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1} \big\rangle_{\mathcal{M}, \mathcal{M}_*} \\
&= \operatorname{tr}\Big(\big[T_\phi(\chi_F \otimes \chi_F)\big] \big[\chi_E \otimes \chi_E\big] \Big) \\
&= \int_{\Omega^2} \phi(s,t)\chi_F(t)\chi_F(s)\chi_E(s)\chi_E(t)\, dtds.
\end{aligned}$$

因此，$(\operatorname{tr}\overline{\otimes}\tau_1)\big(V_{E,\,F}^* V_{E,\,F}\big) = 0$ 若 E 与 F 不相交。因此，$V_{E,\,F} = 0$ 若 E 与 F 不相交。

对于任意 $\eta \in B(H_1, H_2)_*$，令 $D_\eta = (I_{B(L^2)} \overline{\otimes} \eta)(D) \in B(L^2(\Omega))$。对于所有 $z \in B(L^2(\Omega))$ 以及$w \in B(H_1, H_2)$，我们有

$$\begin{aligned}(I_{B(L^2)} \otimes \eta)\big[(\chi_F \otimes \chi_F \otimes I_{H_2})(z \otimes w)(\chi_E \otimes \chi_E \otimes I_{H_1})\big] \\ &= (I_{B(L^2)} \otimes \eta)\big[(\chi_F \otimes \chi_F) z (\chi_E \otimes \chi_E) \otimes w\big] \\ &= \eta(w)(\chi_F \otimes \chi_F) z (\chi_E \otimes \chi_E) \\ &= (\chi_F \otimes \chi_F)\big[(I_{B(L^2)} \otimes \eta)(z \otimes w)\big](\chi_E \otimes \chi_E).\end{aligned}$$

用代数张量积 $B(L^2(\Omega)) \otimes B(H_1, H_2)$ 中的元素逼近 D，可推出

$$(I_{B(L^2)} \overline{\otimes} \eta)(V_{E,F}) = (\chi_F \otimes \chi_F) D_\eta (\chi_E \otimes \chi_E).$$

因此

$$(\chi_F \otimes \chi_F) D_\eta (\chi_E \otimes \chi_E) = 0$$

若 E 和 F 不相交。由于

$$(\chi_F \otimes \chi_F) D_\eta (\chi_E \otimes \chi_E) = \Big(\int_\Omega D_\eta(\chi_E)\chi_F\Big)\chi_E \otimes \chi_F,$$

这意味着

$$\int_\Omega D_\eta(\chi_E)\chi_F = 0$$

若 E 和 F 不相交。我们推得，当 $E \subset \Omega$ 是有限测度可测集时，$D_\eta(\chi_E)$ 的支撑包含于 E。应用引理 5.1，可得对于所有 $\eta \in B(H_1, H_2)_*$，都有 $D_\eta \in L^\infty(\Omega)$。因此，由切片映射性质（见注 3.1）即可得到结论。□

引理 6.2. 乘积 $(1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)$ 属于 $L_s^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L_t^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N_1$。

证明。对于所有 $u, v \in L^2(\Omega)$，由 (6.4) 可得 $D^*((u \otimes v) \otimes I_{H_2})D = \pi^{-1}((u \otimes v) \otimes I_{H_2})$，而后者属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_1$。因此，结论由引理 5.3 得出。□

引理 6.3. 在空间 $L^\infty(\Omega^2)$中，我们有

$$\phi = \big[I_{L^\infty(\Omega^2)}\overline{\otimes}\tau_1\big]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big). \tag{6.7}$$

证明。令 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$ 等于 (6.7) 的右端。令 $a, b, u, v \in L^2(\Omega)$。由 (4.4)、(6.6)、(6.5) 和 (5.12)，可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^2} \phi(s,t)u(t)v(s)a(s)b(t)\,dtds &= \big\langle U((u \otimes v) \otimes I_{H_1}), (a \otimes b) \otimes I_{H_1}\big\rangle \\ &= \big\langle D^*((u \otimes v) \otimes 1_{N_2})D, (a \otimes b) \otimes 1_{N_1}\big\rangle \\ &= \tau_1\Big(\big[(a \otimes b)\overline{\otimes} I_{N_1}\big]\big(D^*((u \otimes v) \otimes 1_{N_2})D\big)\Big) \\ &= \tau_1\Big(\big[(av \otimes bu)\overline{\otimes} I_{N_1}\big]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big)\Big) \\ &= \big[av \otimes bu \otimes \tau_1\big]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big) \\ &= \int_{\Omega^2} \widetilde{\phi}(s,t)a(s)v(s)b(t)u(t)\,dtds.\end{aligned}$$

这里 I_{N_1} 表示 N_1上的恒等算子。因此,

$$\int_{\Omega^2} \phi(s,t) f(s) g(t)\, dtds = \int_{\Omega^2} \widetilde{\phi}(s,t) f(s) g(t)\, dtds$$

对所有 $f, g \in L^1(\Omega)$ 均成立。结论得证。 □

现在可以证明定理 1.1 的断言 (ii)。回顾一下, H_1 和 H_2 是可分的。令 $d \in L^\infty_\sigma(\Omega; B(H_1, H_2))$ 与识别 (5.11) 中的 D 相关联。由引理 5.2 和 6.2, 得 $d^* \odot d \sim (1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)$, 并且

$$d^* \odot d \in L^\infty_\sigma(\Omega; N_1). \tag{6.8}$$

此外, 对任意 $f, g \in L^1(\Omega)$, 由 (6.7) 和注 3.3 可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^2} f(s)g(t)\phi(s,t)\, dtds &= [f \otimes g \otimes \tau_1]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big) \\ &= \int_{\Omega^2} f(s)g(t)\tau_1\big(d(s)^* d(t)\big)\, dtds.\end{aligned}$$

这意味着

$$\phi(s,t) = \tau_1\big(d(s)^* d(t)\big), \qquad \text{for a.e. } (s,t) \in \Omega^2. \tag{6.9}$$

.

回顾一下, 作为从 $L^2(\Omega; H_1)$ 到 $L^2(\Omega; H_2)$ 的算子, D 是一个酉元。因此, 我们有 $D^*D = 1_{L^\infty} \otimes I_{H_1}$ 和 $DD^* = 1_{L^\infty} \otimes I_{H_2}$。由引理 3.2, 这意味着对几乎所有 $s \in \Omega$, $d(s)^* d(s) = 1_{H_1}$, 且 $d(s)d(s)^* = I_{H_2}$。将 d 在 Ω 的一个零测子集上的取值改变后, 今后可以假设对所有 $s \in \Omega$, $d(s) : H_1 \to H_2$ 是一个酉元。

考虑预湮灭子 $(N_1)_\perp \subset B(H_1)_*$。由 (6.8) 可知, 对所有 $f, g \in L^1(\Omega)$ 以及所有 $\eta \in (N_1)_\perp$, 有

$$\int_{\Omega^2} f(s)g(t)\langle d(s)^* d(t), \eta\rangle\, dtds = 0.$$

由于 (Ω, μ) 是可分的, 因此 $L^1(\Omega)$ 是可分的。此外, $B(H_1)_*$ 是可分的, 因此 $(N_1)_\perp$ 也是可分的。令 $(g_k)_{k\geq 1}$ 和 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 分别为 $L^1(\Omega)$ 和 $(N_1)_\perp$的稠密序列。由上可知, 对所有 $n, m \geq 1$, $\int_\Omega g_k(t)\langle d(s)^* d(t)\, \eta_n\rangle\, dt = 0$, 对几乎处处的 $s \in \Omega$ 均成立。因此, 存在 $s_0 \in \Omega$, 使得

$$\int_\Omega g_k(t)\langle d(s_0)^* d(t), \eta_n\rangle\, dt = 0 \tag{6.10}$$

对所有 $n, m \geq 1$。

定义 $\widetilde{d}: \Omega \to B(H_1)$ 定义为 $\widetilde{d}(t) = d(s_0)^* d(t)$。显然, $\widetilde{d}$ 是 w^*-可测且本质上有界的。由于 $d(s_0)$ 是一个酉元, 因此对几乎处处的 $t \in \Omega$, 有 $\widetilde{d}(t)^* \widetilde{d}(t) = d(t)^* d(t) = I_{H_1}$。因此, 作为 $L^\infty_\sigma(\Omega, B(H_1))$ 中的一个元素, $\widetilde{d}$ 是一个酉元。根据 (6.10), $\widetilde{d}$ 属于.....的湮灭子

$$\mathrm{Span}\{g_k \otimes \eta_n : k, n \geq 1\} \subset L^1(\Omega; B(H_1)_*).$$

由于 $\{g_k \otimes \eta_n : k, n \geq 1\}$ 在 $L^1(\Omega; (N_1)_\perp)$ 中稠密, 这意味着 $\widetilde{d}$ 属于 $L^1(\Omega; (N_1)_\perp)^\perp$. 根据 (3.5), 这意味着 $\widetilde{d} \in L^\infty_\sigma(\Omega, N_1)$。

最后，再次利用 $d(s_0)$ 是酉元这一事实，我们从 (6.9) 推得，对于几乎所有 $(s,t)\in\Omega^2$，$\phi(s,t) = \tau_1\big(\widetilde{d}(s)^*\widetilde{d}(t)\big)$。因此，定理 1.1 的断言 (ii) 成立，其中以 $N = N_1$ 和 d 代替 d。

6.2. "$(ii)\Rightarrow(i)$"的证明。假设 $\phi\in L^\infty(\Omega^2)$ 满足定理 1.1 的断言 (ii)，其中 (N,τ_N) 是某个具有可分预对偶的归一化迹冯·诺依曼代数，且 $d\in L^\infty_\sigma(\Omega;\, N)$ 是某个酉元。

由于 $\tau_N\colon N\to\mathbb{C}$ 是忠实态，我们可以定义

$$N^\infty = \overline{\bigotimes_{\mathbb{Z}}} N,$$

(N,τ_N) 在指标集 $\mathbb{Z}$ 上的无限张量积，如 [53, 定义 XIV.1.6] 所述。相应的态 $\tau_\infty := \overline{\otimes}_{\mathbb{Z}}\,\tau_N$ 在 N^∞ 上是正规忠实迹态。因此，(N^∞,τ_∞) 是归一化迹冯·诺依曼代数。令

$$\mathcal{M} = B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N^\infty,$$

并赋予其自然迹（见注 3.5）。冯·诺依曼代数 N^∞ 具有可分预对偶，因此 $\mathcal{M}$ 也具有可分预对偶。

令 1_∞ 表示 N^∞ 的单位元，并令 $J\colon B(L^2(\Omega))\to\mathcal{M}$ 为由下式定义的 w^*-连续保迹含幺 $*$-同态

$$J(z) = z\otimes 1_\infty,\qquad z\in B(L^2(\Omega)).$$

现在我们将构造一个保迹 $*$-自同构 $U\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$，使得 $T = T_\phi$ 满足 (2.2)。

令 1 表示 N 的单位元。对于任意整数 $m\geq 1$ 以及任意有限族 $(x_k)_{k=-m}^m$，其中元素属于 N，令

$$\bigotimes_k x_k = \cdots 1\otimes 1\otimes x_{-m}\otimes\cdots\otimes x_0\otimes x_1\otimes\ldots\otimes x_m\otimes 1\otimes 1\cdots,$$

其中每个 x_k 均位于位置 k。令 $\sigma\colon N^\infty\to N^\infty$ 为满足下式的 $*$-自同构

$$\sigma\Big(\bigotimes_k x_k\Big) = \bigotimes_k x_{k-1}$$

对于所有有限族 $(x_k)_k$，其中元素属于 N。显然，σ 保迹。我们令

$$S = I_{B(L^2(\Omega))}\overline{\otimes}\sigma\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}.$$

考虑 $N_+ = \overline{\otimes}_{k\geq 1}\,N$ 和 $N_- = \overline{\otimes}_{k\leq -1}\,N$，于是我们可以写成

$$N^\infty = N_-\overline{\otimes}N\overline{\otimes}N_+.$$

因此我们可以写成

$$\mathcal{M} = N_-\overline{\otimes}\big(B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N\big)\overline{\otimes}N_+. \tag{6.11}$$

设 $D\in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N$ 满足 $d\sim D$，并回顾 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N\subset B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$，由 (5.1) 可知。因此我们可以定义

$$\gamma\colon B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N\longrightarrow B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N,\qquad \gamma(y) = D^*yD.$$

由于 D 是酉元，γ 是保迹的 $*$-自同构。由分解式 (6.11)，我们可以定义

$$\Gamma = I_{N_-}\overline{\otimes}\gamma\overline{\otimes}I_{N_+}\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}.$$

现在我们设

$$U = \Gamma \circ S.$$

根据构造，$U\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个保迹的 $*$-自同构。

设 $u, v, a, b \in L^2(\Omega)$。另一方面，根据一个简单的归纳论证，由 (4.4) 可知，对于所有 $k \geq 0$，我们有

$$\operatorname{tr}\Big(\big[T_\phi^k(u \otimes v)\big]\big[a \otimes b\big]\Big) = \int_{\Omega^2} \phi(s,t)^k u(t)v(s)a(s)b(t)\, dtds.$$

另一方面，利用 (1.2)，由紧接其后的 [21, 引理 4.9] 的证明以及 [21, 定理 A] 的证明中的论证可知，对于所有 $k \geq 0$，我们有

$$\tau_{\mathcal{M}}\Big(\big[U^k((u \otimes v) \otimes 1_\infty)\big]\big[(a \otimes b) \otimes 1_\infty\big]\Big) = \int_{\Omega^2} \phi(s,t)^k u(t)v(s)a(s)b(t)\, dtds. \tag{6.12}$$

根据 J 的定义，这些恒等式意味着

$$\langle J_1^* U^k J(u \otimes v), a \otimes b\rangle = \langle T_\phi^k(u \otimes v), a \otimes b\rangle.$$

由于上述所有 $u \otimes v$ 的线性张成在 $B(L^2(\Omega))$ 中关于 w^* 稠密，上述所有$a \otimes b$ 的线性张成在 $S^1(L^2(\Omega))$ 中稠密，并且 J、U 和 T_ϕ 是 w^*- 连续的，这意味着 $T = T_\phi$ 满足 (2.2)。

注 6.4. 对 [21] 中用于建立 (6.12) 的逼近技巧不熟悉的读者，应先考察有限维情形，以便对这一证明获得直观认识。为方便起见，我们给出这个有限维证明。因此，现在假设 $\Omega = \{1, \dots, n\}$，其中 $n \geq 1$ 是某个整数，从而 $L^\infty(\Omega) = \ell_n^\infty$, $L^2(\Omega) = \ell_n^2$, $B(L^2(\Omega)) = M_n$且 $\mathcal{M} = M_n(N^\infty)$。那么 $d \in \ell^n(N)$ 可写为 $d = (d_1, \dots, d_n)$，其中每个 $d_k \in N$ 都是酉元，而 $\phi = [\phi(i,j)]_{1 \leq i,\ j \leq n}$ 由下式给出

$$\phi(i,j) = \tau_N(d_i^* d_j), \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

此外，$\gamma\colon M_n(N) \to M_n(N)$ 将任意 N 值矩阵 $[y_{ij}]$ 映射为 $[d_i^* y_{ij} d_j]$。

将 $u = (u_1, \dots, u_n)$ 写作 $\in \ell_n^2$，并对 v, a, b 作类似处理。那么在空间 $\mathcal{M} = M_n(N^\infty)$ 中，我们有 $u \otimes v \otimes 1_\infty = [u_j v_i \cdot 1_\infty]$。因此 $S(u \otimes v \otimes 1_\infty) = (u \otimes v \otimes 1_\infty)$，故

$$U(u \otimes v \otimes 1_\infty) = \big[u_j v_i (\cdots 1 \otimes d_i^* d_j \otimes 1 \cdots)\big],$$

其中 $d_i^* d_j$ 位于位置 0。接下来，

$$S\big(U(u \otimes v \otimes 1_\infty)\big) = \big[u_j v_i (\cdots 1 \otimes 1 \otimes d_i^* d_j \otimes 1 \cdots)\big],$$

其中 $d_i^* d_j$ 位于位置 1，且

$$U^2(u \otimes v \otimes 1_\infty) = \big[u_j v_i (\cdots 1 \otimes d_i^* d_j \otimes d_i^* d_j \otimes 1 \cdots)\big],$$

其中 $d_i^* d_j$ 出现在位置 0 和 1。由归纳法可得，对所有 $k \geq 0$，

$$U^k(u \otimes v \otimes 1_\infty) = \big[u_j v_i (\cdots 1 \otimes d_i^* d_j \otimes d_i^* d_j \otimes \cdots \otimes d_i^* d_j \otimes 1 \cdots)\big],$$

其中 $d_i^* d_j$ 出现在位置 0、1、$\dots k-1$。我们推导得出

$$\langle U^k(u \otimes v \otimes 1_\infty), a \otimes b \otimes 1_\infty\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{M}_*} = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j u_j v_i \tau_N(d_i^* d_j)^k,$$

这就是此处所需的恒等式 (6.12)。

6.3. 补充结果。

注6.5. 在定理 1.1 中“$(i) \Rightarrow (ii)$”这一蕴含关系的证明中，我们只在 $k = 1$ 的情形下使用恒等式 (2.2)。因此，定理 1.1 中的断言 (i) 和 (ii) 也等价于：

(i)’ 存在一个具有可分预对偶的迹冯·诺依曼代数 $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$、一个 w^*-连续的保迹保幺 $*$-同态 $J\colon B(L^2(\Omega)) \to \mathcal{M}$，以及一个保迹的 $*$-自同构 $U\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得 $T_\phi = J_1^* U J$.

注6.6. 设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$。由注2.2 的 (3) 可知，若 ϕ 是有界舒尔乘子，且 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 是绝对可扩张的，则 T_ϕ 是正且幺正的。反之则不成立，也就是说，存在不是绝对可扩张的正幺正舒尔乘子算子（见下文注释 7.3）。然而，[21,定理 A] 已证明，若 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 是正且幺正的，且 $T_\phi\colon S^2(L^2(\Omega)) \to S^2(L^2(\Omega))$ 是自伴的（等价地，若 ϕ 是实值的），则 T_ϕ 是绝对可扩张的。在离散情形下（见推论 6.7），这一结果归功于 Arhancet [4]。此外，由 [21, 定理 A] 的证明可知，若 $(\Omega\ \mu)$ 可分，则任意正幺正自伴的 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 都存在一个可分绝对扩张。

现在我们关注离散情形，即 $\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$。$L^\infty(\Omega^2)$ 的元素就是由复数组成的有界族 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{i,j\geq 1}$。那么，$\mathfrak{m}$ 是有界舒尔乘子，当且仅当存在常数 $C \geq 0$，使得对于所有 $n \geq 1$ 和所有$[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_n$,

$$\big\|[m_{ij}a_{ij}]\big\|_{M_n} \leq C\big\|[a_{ij}]\big\|_{M_n}.$$

此外，对于任意冯·诺依曼代数 M，我们可以将 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M$ 视为 $\ell^\infty(M)$，即所有项取自 M 的有界序列所构成的空间。同样，$L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}M \simeq \ell^\infty_{\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}(M)$。如果 $D = (d_k)_{k\geq 1} \in \ell^\infty(M)$，那么 D 是酉元，当且仅当对所有 $k \geq 1$，d_k 都是酉元。此外，乘积 $(1_j \otimes D_i^*)(1_i \otimes D_j)$ 与双指标序列 $(d_i^* d_j)_{i,j\geq 1}$ 相同。基于这些观察，下面的结论可直接由定理 1.1 得出。

推论 6.7. 对于任意有界复数族 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{i,j\geq 1}$，以下断言等价。

(i) 该族 $\mathfrak{m}$ 是有界舒尔乘子，且 $T_{\mathfrak{m}}\colon B(\ell^2) \to B(\ell^2)$ 有可分绝对扩张。(ii) 存在一个带有可分前对偶的归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N)，以及一列 N 中的酉元 $(d_k)_{k\geq 1}$，使得

$$m_{ij} = \tau_N\big(d_i^* d_j\big), \qquad i, j \geq 1.$$

7. The non separable case

设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间。若 X 是一个不可分巴拿赫空间，仍然可以定义一个空间 $L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$，其元素是 $\Omega \to X^*$ 上 w^*-可测函数的等价类，并使得 $L^1(\Omega;\ X)^* \simeq L^\infty_\sigma(\Omega; X^*)$ 等距地成立，见 [10, 11]。然而，这些空间

的定义和使用都很棘手，因为若 $d\colon \Omega \to X^*$ 是一个 w^*-可测函数，则范数函数 $t \mapsto \|d(t)\|$ 可能不可测。此外，给定一个冯·诺依曼代数N以及 w^*-可测函数 $c, d\colon \Omega \to N$，由 (5.6) 定义的函数 $c \odot d\colon \Omega^2 \to N$很可能不可测。因此，逐字将定理 1.1 推广到不可分情形似乎难以实现。

在这一一般框架下，我们只给出一个以冯·诺依曼张量积语言表述的定理 1.1 版本。在下面的陈述中，我们使用了第 5 节引入的一些记号，尤其参见 (5.4) 和 (5.5)。这里最重要的蕴含关系是“(i) $\Rightarrow$ (ii)$_1$”，它将定理 1.1 中的蕴含关系“(i) $\Rightarrow$ (ii)”推广到了不可分情形。

定理 7.1. 设 $\phi \in L^\infty(\Omega^2)$，且 $e \in L^2(\Omega)$ 满足 $\|e\|_2 = 1$。以下断言等价。

(i) 函数 ϕ 是一个有界舒尔乘子，且 $T_\phi\colon B(L^2(\Omega)) \to B(L^2(\Omega))$ 是绝对可扩张的。 (ii) 存在一个作用在某个希尔伯特空间 H 上的归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N)，以及一个酉元 $D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H)$，使得： (ii)$_1$ 乘积 $(1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)$ 属于 $L_s^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L_t^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N$，并且在恒等认定 (5.3) 下，我们有

$$\phi = \big[I_{L^\infty(\Omega^2)}\overline{\otimes}\tau_N\big]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big). \tag{7.1}$$

(ii)$_2$ *The trace of* $D^*(e \otimes e \otimes I_H)D$ *in* $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$ *is equal to* 1.

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$：假设 (i)，并应用第 6.1 小节中提出的构造。注意，在引理 6.3 之前，这一构造不涉及可分性。回顾引理 6.1，我们使用的是一个酉元 $D \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1, H_2)$。设 K 是一个（足够大的）$_2$ ^{2} $_{22}$希尔伯特空间，使得 $H_1 \otimes K$ 与 $H_2 \otimes K$ 同构，并设 $L\colon H_1 \otimes K \to H_2 \otimes K$ 是一个酉元。我们定义

$$\widetilde{D} = [I_{L^\infty(\Omega)}\overline{\otimes}L^*](D \otimes I_K) \in L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1 \overset{2}{\otimes} K),$$

其中 $D \otimes I_K$ 被视为 $L^\infty(\Omega)\overline{\otimes}B(H_1 \overset{2}{\otimes} K, H_2 \overset{2}{\otimes} K)$ 的一个元素。显然， $\widetilde{D}$ 是一个酉元。现在我们来验证，定理 7.1 的断言 (ii) 对希尔伯$_2$特空间 $H = H_1 \otimes K$以及冯·诺依曼代数成立

$$N = N_1 \otimes I_K \subset B(H),$$

$\widetilde{}$定义在 N 上的迹态 τ_N 为 $\tau_N(x \otimes I_K) = \tau_1(x)$，对所有 $x \in N_1$ 都成立，并以酉元 D 替代 D。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$首先，由于 $LL^* = I_{H_2} \otimes I_K$，我们有 $(1_s \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t) = (1_s \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t) \otimes I_K$。因此，根据引理 6.2，乘积 $(1_s \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)$ 属于 $L_s^\infty(\Omega)\overline{\otimes}L_t^\infty(\Omega)\overline{\otimes}N$。此外，我们有

$$\big[I_{L^\infty(\Omega^2)}\overline{\otimes}\tau_N\big]\big((1_t \otimes \widetilde{D}_s^*)(1_s \otimes \widetilde{D}_t)\big) = \big[I_{L^\infty(\Omega^2)}\overline{\otimes}\tau_{N_1}\big]\big((1_t \otimes D_s^*)(1_s \otimes D_t)\big).$$

应用引理 6.3，我们推得断言 (ii)$_1$ 成立。

接下来，我们再次利用 $LL^* = I_{H_2} \otimes I_K$ 注意到：

$$\widetilde{D}^*(e \otimes e \otimes I_H)\widetilde{D} = D^*(e \otimes e \otimes I_{H_2})D \otimes I_K = \pi^{-1}(e \otimes e \otimes 1_{N_2}) \otimes I_K,$$

其中 π 来自 (6.3)。由于 π 是保迹的，$B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$ 中 $D^*(e \otimes e \otimes I_H)D$ 的迹等于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N_2$中 $e \otimes e \otimes 1_{N_2}$ 的迹。后者等于 1（回想一下， τ_2 是归一化的）。因此，断言 $(ii)_2$ 成立。

$(ii) \Rightarrow (i)$：假设 (ii) 成立，并考虑 $*$-自同构

$$\pi\colon B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H) \longrightarrow B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H), \qquad \pi(y) = DyD^*.$$

设 $B = \pi\big(B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N\big)$。这是 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H)$ 的一个冯·诺依曼子代数。我们在其上赋予迹 $\tau_B = (\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_N) \circ \pi^{-1}$，因此， π在 $L^2(\Omega)\overline{\otimes}N \to B$ 上的限制 B天然是保迹的。

对于任意的 $u, v \in L^2(\Omega)$，根据假设 $(ii)_1$和引理 5.3， $D^*(u\otimes v\otimes I_H)D$ 属于 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$。（注意，这正是为什么在 $(ii)_2$中将 $D^*(e \otimes e \otimes I_H)D$视为 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$ 的元素是合理的原因。）由于 D 是一个酉元，我们有 $u \otimes v \otimes I_H = \pi(D^*(u \otimes v \otimes I_H)D)$，因此 $u \otimes v \otimes I_H$ 属于 B。由于所有上述 $u \otimes v$的线性张成在 $B(L^2(\Omega))$ 中是 w^*-稠密的，我们推得

$$B(L^2(\Omega)) \otimes I_H \subset B \subset B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}B(H).$$

设 $\{E_{ij} : (i,j) \in I^2\}$ 是 $B(L^2(\Omega))$ 中的一组矩阵单位。那么由上文可知， $\{E_{ij} \otimes I_H : (i,j) \in I^2\}$ 是 B中的一组矩阵单位。再次运用 [52, 命题 IV.1.8] 及其证明，我们得到存在一个冯·诺依曼子代数 $M \subset B(H)$，使得 $B = B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}M$。根据假设 $(ii)_2$ 和 τ_B的定义，我们有

$$\tau_B(e \otimes e \otimes 1_M) = (\mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_N)\big(D^*(e \otimes e \otimes I_H)D\big) = 1.$$

这意味着 $\tau_M\colon\ m \mapsto \tau_B(e \otimes e \otimes m)$ 是定义良好的迹态，作用于 M。经典的唯一性论证表明 $\tau_B = \mathrm{tr}\overline{\otimes}\tau_M$。

现在，我们可以按如下方式改写第 6.2 小节中的证明。我们令

$$M_- = \overline{\bigotimes_{k\le -1}} M \qquad \text{and} \qquad N_+ = \overline{\bigotimes_{k\ge 1}} N.$$

更确切地说， M_- 是以指标集 $\{-1,-2,\dots\}$ 为指标的 (M,τ_M) 的无限张量积，而 N_+ 是以指标集 $\{1,2,\dots\}$ 为指标的 (N,τ_N) 的无限张量积。接着我们定义

$$\mathcal{M} = B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}M_-\overline{\otimes}M\overline{\otimes}N\overline{\otimes}N_+,$$

并赋予其自然迹。我们定义 $J\colon\ B(L^2(\Omega)) \to \mathcal{M}$，使得 $J(z) = z \otimes 1$，其中 1 是 $M_-\overline{\otimes}M\overline{\otimes}N\overline{\otimes}N_+$ 的单位元。我们令

$$\mathcal{M}_1 = M_-\overline{\otimes}\big(B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}M\big)\overline{\otimes}N\overline{\otimes}N_+ \qquad \text{and} \qquad \mathcal{M}_2 = M_-\overline{\otimes}M\overline{\otimes}\big(B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N\big)\overline{\otimes}N_+,$$

并令 $\kappa_1\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$和 $\kappa_2\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}_2$为典范的 $*$-自同构。令$\sigma_-\colon\ M_- \to M_-\overline{\otimes}M$ 为满足下述条件的 $*$-同构：

$$\sigma_-\Big(\bigotimes_{k\le -1} x_k\Big) = \Big(\bigotimes_{k\le -1} x_{k-1}\Big) \otimes x_{-1},$$

对 M 中所有有限族 $(x_k)_{k\leq -1}$ 均成立。同样，令 $\sigma_+ \colon N\overline{\otimes}N_+ \to N_+$ 为满足下述条件的 $*$-同构：

$$\sigma_+\Big(x_0 \otimes \Big(\bigotimes_{k\geq 1} x_k\Big)\Big) = \bigotimes_{k\geq 1} x_{k-1},$$

对于 N 中的所有有限族 $(x_k)_{k\geq 0}$ 。这两个 $*$-同构均为保迹的。

由 M 的构造可知，我们可以定义一个 $*$-同构

$$\gamma \colon B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}M \longrightarrow B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N, \qquad \gamma(y) = D^*yD.$$

这是 π 在 $B(L^2(\Omega))\overline{\otimes}N$ 上的限制的逆，因此它是保迹的。最后，我们定义 $U\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ，如下：

$$U = \kappa_2^{-1} \circ \big(\sigma_- \overline{\otimes} \gamma \overline{\otimes} \sigma_+\big) \circ \kappa_1.$$

那么 U 是一个保迹的 $*$-自同构。接下来，再次按照 [21], 中的论证，我们得到 (6.12) 对所有 $u, v, a, b \in L^2(\Omega)$ 都成立。与第 6.2 小节中一样，我们推得 $T = T_\phi$ 满足 (2.2)。□

最后，我们回到离散情形，并对推论 6.7 作一补充。

推论 7.2. 对于任意有界复数族 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{i,\ j\geq 1}$ ，以下断言等价。

(i) 族 $\mathfrak{m}$ 是有界舒尔乘子，且 $T_{\mathfrak{m}}\colon B(\ell^2) \to B(\ell^2)$ 绝对可扩张。(ii) 存在一个归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N) 以及一个酉元序列 $(d_k)_{k\geq 1}$，它们属于 N ，使得

$$m_{ij} = \tau_N\big(d_i^* d_j\big), \qquad i, j \geq 1.$$

(iii) 族 $\mathfrak{m}$ 是有界舒尔乘子，且 $T_{\mathfrak{m}}\colon B(\ell^2) \to B(\ell^2)$ 存在可分绝对扩张。

证明。假设 (i) 成立，并对 $\mathfrak{m}$ 应用定理 7.1。我们得到一个作用在某个 H 上的归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N)，以及一个酉元序列 $(d_k)_{k\geq 1}$，它们属于 $B(H)$，使得 $d_i^* d_j \in N$，并且对所有 $i, j \geq 1$ 都有 $m_{ij} = \tau_N\big(d_i^* d_j\big)$。令 $d'_k = d_1^* d_k$, $k \geq 1$。d'_k 是 N 中的酉元，并且对所有 $i, j \geq 1$ 都有 $d_i'^* d'_j = d_i^* d_j$。因此，对所有 $i, j \geq 1$，都有 $m_{ij} = \tau_N\big(d_i'^* d'_j\big)$。这就证明了 (ii)。

假设 (ii)，并令 $\widetilde{N} \subset N$ 为由 $(d_k)_{k\geq 1}$ 生成的冯·诺依曼子代数。于是 $\widetilde{N}$ 有一个序列 $(a_n)_{n\geq 1}$，使得 $\widetilde{V} := \mathrm{Span}\{a_n \colon n \geq 1\}$ 在 $\widetilde{N}$ 中是 w^*-稠密的。令 $\tau_{\widetilde{N}}$ 为 τ_N 在 $\widetilde{N}$ 上的限制，并回忆一下，我们有一个压缩嵌入 $\widetilde{N} \subset L^1(\widetilde{N}, \tau_{\widetilde{N}})$。

若 $b \in \widetilde{N}$ 满足：对所有 $n \geq 1$，都有 $\tau_{\widetilde{N}}(a_n b) = 0$，则作为 $L^1(\widetilde{N}, \tau_{\widetilde{N}})$ 的一个元素，b 属于 $\widetilde{V}_\perp$。因此 $b = 0$。反过来，这表明 $\widetilde{V}$ 在 $L^1(\widetilde{N}, \tau_{\widetilde{N}})$ 中稠密。因此，$\widetilde{N}$ 有可分预对偶。由推论 6.7，族 $\mathfrak{m}$ 因此满足 (iii)。剩下的断言“$(iii) \Rightarrow (i)$”显然成立。□

注释 7.3. 在有限维情形中，我们同样发现，与一族 $\mathfrak{m} = \{m_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ 相关联的舒尔乘子算子 $T_{\mathfrak{m}}\colon M_n \to M_n$ 存在可分绝对扩张，当且仅当它存在绝对膨胀；而这又当且仅当存在一个归一化迹冯·诺依曼代数 (N, τ_N) 及其中的酉元 $d_1, \ldots, d_n$，使得

$m_{ij} = \tau_N\big(d_i^* d_j\big)$ 对所有 $1 \le i, j \le n$ 均成立。后一等价性结果隐含于 [25] 中。事实上，它可由该文献中的命题 2.8 和定理 4.4 推出。

考虑到这一等价性，[25, 例 3.2]给出了一个正的保幺舒尔乘子 $M_4 \to M_4$，它不是绝对可扩张的。

我们还要指出，存在大量绝对可扩张的舒尔乘子算子$T_{\mathfrak{m}}$: $M_n \to M_n$ 使得 $\mathfrak{m}$ 不是实值的。例如，由上文可知，对于任意满足 $|\omega| = 1$ 的复数 ω，与之对应的算子 $T_{\mathfrak{m}}$: $M_2 \to M_2$

$$\mathfrak{m} = \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \overline{\omega} & 1 \end{bmatrix}$$

是绝对可扩张的。

致谢。两位作者均受 ANR 项目“群与量子群上的非交换分析”（编号：ANR-19-CE40-0002）资助。我们感谢审稿人提出的若干意见，这些意见改进了本文的引言。

References

[1] M. A. Akcoglu，《L_p-空间中的逐点遍历定理》，Canadian J. Math. 27 (1975)，第 5 期，1075–1082 页。[2] M. A. Akcoglu 和 L. Sucheston，《L_p-空间上正压缩算子的扩张》，Canad. Math. Bull. 20 (1977)，第 3 期，285–292 页。[3] C. Anantharaman-Delaroche，《关于自由群作用于非交换空间的遍历定理》，Probab. Theory Related Fields 135 (2006)，第 4 期，520–546 页。[4] C. Arhancet，《关于非交换 L_p-空间上压缩算子的马察耶夫猜想》，J. Operator Theory 69 (2013)，第 2 期，387–421 页。[5] C. Arhancet，《冯·诺依曼代数和非交换 L_p-空间上半群的扩张》，《泛函分析杂志》276 (2019)，第 7 期，2279–2314 页。[6] C. Arhancet，《局部紧群上傅里叶乘子的马尔可夫半群的扩张》，Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020)，2551–2563 页。[7] C. Arhancet，《可测舒尔乘子的马尔可夫半群的扩张》，Canadian J. Math.，即将出版。（另见 arXiv:1910.14434。）[8] C. Arhancet、S. Fackler 和 C. Le Merdy，《有界解析半群和 Ritt 算子的等距扩张及 H^∞演算》，《美国数学会会刊》369 (2017)，第 10 期，6899–6933 页。[9] C. Arhancet 和 C. Kriegler，《Riesz 变换、霍奇-狄拉克算子及乘子的函数演算》，数学讲义，2304，施普林格，查姆，2022，xii+278页。[10] A. V. Bukhvalov，《具有抽象范数的算子的解析表示》（俄文），Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika 第 11 期（1975），21–32 页。[11] A. V. Bukhvalov，《向量值函数的 Hardy 空间》（俄文），Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 65 (1976)，5–16 页。[12] P. Cl´ement 和 J. Pr¨uss，《完全正测度与 Feller 半群》，Math. Ann. 287 (1990)，第 1 期，73–105 页。[13]G. Cohen、C. Cuny 和 M. Lin，《某些正 L_p压缩算子的幂几乎处处收敛》，J. Math. Anal. Appl. 420 (2014)，第 2 期，1129–1153 页。[14] C. Coine、C. Le Merdy 和 F. Sukochev，《三重算子积分何时取值于迹类？》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 71 (2021)，第 4 期，1393–1448 页。[15] J. M. Conde-Alonso、A. M. Gonz´alez-P´erez、J. Parcet 和 E. Tablate，《Schatten–冯·诺伊曼类中的舒尔乘子》，《数学年刊》，即将出版。（另见 arXiv:2201.05511。）[16] J. B. Conway，《算子理论教程》，《数学研究生教材》，21，美国数学会，普罗维登斯，RI，2000，xvi+372 页。

[17] J. B. Conway，《泛函分析教程》，数学研究生教材，96，施普林格出版社，纽约，1990，xvi+399 页。[18] M. Cowling，《半群上的调和分析》，《数学年刊》（第 2 辑）117 (1983)，第 2 期，267–283 页。[19] J. Diestel 和 J. J. Uhl，《向量测度》，数学调查丛书，第 15 卷，美国数学会，1977。[20] N. Dunford 和 B. J. Pettis，《可求和函数上的线性运算》，《美国数学会会刊》47 (1940)，323–392 页。[21] C. Duquet，《可测舒尔乘子和傅里叶乘子的膨胀性质》，《正性》26 (2022)，第 4 期，论文编号 69，共 41 页。[22] E. G. Effros、J. Kraus 和 Z.-J. Ruan，《关于两种量子化张量积》，《算子代数、数学物理与低维拓扑》（伊斯坦布尔，1991），125–145 页，Res. Notes Math.，5，A K Peters，韦尔斯利，MA，1993。[23] T. Fack 和 H. Kosaki，《 s-可测算子的广义 τ-数》，《太平洋数学杂志》123 (1986)，第 2 期，269–300 页。[24] U. Haagerup，《算子代数上完全有界映射的分解》，未发表，欧登塞大学，丹麦，1980。[25] U. Haagerup 和 M. Musat，《冯·诺依曼代数上完全正映射的分解与膨胀问题》，《数学物理通讯》303 (2011)，第 2 期，555–594 页。[26] F. Hiai，《冯·诺依曼代数若干专题讲义》，EMS 数学讲座系列，EMS 出版社，柏林，2021，viii+241 页。[27] M. Hieber 和 J. Pr¨uss，《通过传递原理研究向量值 L_p-空间中线性算子的函数演算》，《微分方程进展》3 (1998)，第 6 期，847–872 页。[28] G. Hong、S. Ray 和 S. Wang，《非交换 L_p-空间上某些正算子的极大遍历不等式》，《伦敦数学学会杂志》，即将出版。（另见 arXiv:1907.12967。）[29] T. Hyt¨onen、J. van Neerven、M. Veraar 和 L. Weis，《巴拿赫空间分析》，第二卷：概率方法与算子理论，数学及其边界领域成果，第三辑，现代数学调查丛书，67，施普林格，查姆，2017，xxi+616 页。[30] M. Junge 和 C. Le Merdy，《非交换 L_p-空间上的扩张与刚性分解》，《泛函分析杂志》249 (2007)，第 1 期，220–252 页。[31] M. Junge、C. Le Merdy 和 Q. Xu，《非交换 H^∞-空间上的函数演算与平方函数》，Ast´erisque 第 305 号（2006），vi+138页。[32] M. Junge、T. Mei 和 J. Parcet，《与算子半群相关的调和分析导论》，《当代数学》，612，美国数学会，普罗维登斯，RI，2014，107–122 页。[33] M. Junge、´E. Ricard 和 D. Shlyakhtenko，《非交换扩散半群与自由概率》，即将出版。[34] M. Junge 和 Q. Xu，《非交换极大遍历定理》，《美国数学会杂志》20 (2007)，第 2 期，385–439 页。[35] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》，第二卷：高级理论，《数学研究生教材》，16，美国数学会，普罗维登斯，RI，1997，第 i–xxii 页及 399–1074 页。[36]H. Kosaki，《复插值方法在冯·诺依曼代数中的应用：非交换 Lp 空间》，《泛函分析杂志》56 (1984)，29–78 页。[37] B. K¨ummerer，《 W^*代数上的马尔可夫扩张》，《泛函分析杂志》63 (1985)，第 2 期，139–177 页。[38] P. C. Kunstmann 和 L. Weis，《抛物型方程的极大 L_p-正则性、傅里叶乘子定理与 H^∞函数演算》，《演化方程的泛函分析方法》，65–311 页，数学讲义，1855，施普林格，柏林，2004。[39] V. Lafforgue 和 M. de la Salle，《不具有完全有界逼近性质的非交换 L_p-空间》，《杜克数学杂志》160 (2011)，第 1 期，71–116 页。[40] C. Le Merdy，《Ritt 算子的 H^∞ 函数演算与平方函数估计》，《伊比利亚美洲数学评论》30 (2014)，第 4 期，1149–1190 页。

[41] C. Le Merdy 和 Q. Xu，向量值 L_p空间上解析算子的极大定理与平方函数，《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）86（2012），第 2 期，343–365 页。[42] J. Parcet、 ́E. Ricard 和 M. de la Salle， $SL_n(\mathbb{R})$上的傅里叶乘子，《杜克数学杂志》171（2022），第 6 期，1235–1297 页。[43] V. I. Paulsen，《完全有界映射与算子代数》，剑桥高等数学研究丛书，第 78 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。xii+300 页。[44] V. V. Peller，酉算子与自伴算子扰动理论中的汉克尔算子（俄文），《函数分析及其应用》19（1985），第 2 期，37–51 页。[45] V. V. Peller，扰动理论中的多重算子积分，《数学科学通报》6（2016），第 1 期，15–88 页。[46]G. Pisier，相似问题与完全有界映射，《数学讲义》第 1618 卷。施普林格出版社，柏林，2001 年。viii+198 页。[47] G. Pisier 和 Q. Xu，非交换 L_p空间，《巴拿赫空间几何手册》第 2 卷，1459–1517 页，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2003 年。[48] M. Reed 和 B. Simon，《现代数学物理方法》I：泛函分析，第 2 版，Academic Press Inc.，1980 年。[49] ́E. Ricard，自伴舒尔乘子的马尔可夫扩张，《美国数学会会刊》136（2008），第 12 期，4365–4372 页。[50] S. Sakai， C^*代数与 W^*代数，《数学及其边界领域成果》第 60 卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1971 年。xii+253 页。[51] N. Spronk，可测舒尔乘子与傅里叶代数的完全有界乘子，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）89（2004），第 1 期，161–192 页。[52] M. Takesaki，《算子代数理论》I，施普林格出版社，纽约—海德堡，1979 年。vii+415 页。[53] M. Takesaki，《算子代数理论》III，《数学科学百科全书》第 127 卷，《算子代数与非交换几何》第 8 卷。施普林格出版社，柏林，2003 年。xxii+548 页。[54] M. Terp，与冯 · 诺依曼代数相关的 L_p 空间，1981 年，讲义，哥本哈根大学数学研究所。[55] J. Tomiyama， C^*代数的张量积与逼近问题，《数学科学研究所刊物》11（1975/76），第 1 期，163–183 页。[56] Q.Xu，向量值 H^∞ 空间上压缩半群的函数演算与极大不等式，《国际数学研究公告》（IMRN）（2015），第 14 期，5715–5732 页。[57] F. J. Yeadon，非交换 L_p空间的等距映射，《剑桥哲学学会数学会刊》90（1981），第 1 期，41–50 页。

电子邮箱地址：charles.duquet@univ-fcomte.fr

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, FRANCE

电子邮箱地址：clemerdy@univ-fcomte.fr

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, FRANCE