AD(1, n)模型及其最大似然估计量的渐近性质

Mohamed Ben Alaya[1], Houssem Dahbi*[1,2], 以及 Hamdi Fathallah[2]

[1]鲁昂诺曼底大学，法国国家科学研究中心，LMRS UMR 6085，法国鲁昂 F-76000。[2]苏塞大学，LAMMDA 实验室，苏塞哈马姆苏斯高等科学与技术学院，Rue Lamine El Abbessi 4011，突尼斯哈马姆苏斯。

2023年3月16日

arXiv:2303.08467v1 [math.ST] 15 Mar 2023

摘要

本文研究仿射扩散的全局参数估计问题，文中将其记为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$AD(1, n)，其中 n 是一个正整数；该模型是 Duffie 等人在 [14] 中提出的仿射扩散子类。AD(1, n) 模型可用于债券和股票期权定价，Vasicek、Cox-Ingersoll-Ross 和 Heston 模型展示了这一应用。我们的首个结果是根据亚临界、临界和超临界情形对 AD(1, n) 过程进行分类。随后，我们给出该模型的平稳性和遍历性定理，并建立最大似然估计量在亚临界情形和一种特殊超临界情形下的渐近性质。

1 引言

仿射过程包含一大类重要的马尔可夫过程，例如连续状态分枝过程。最重要的马尔可夫仿射模型之一是仿射扩散模型，它在状态空间 $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ 上具有良好的刻画，其中 m 和 n 为非负整数（例如，参见 [14]）。本文研究 $AD(1, n)$ 模型的一个子类，其中 AD 表示仿射扩散，参数 1 指第一个分量 $m = 1$ 的维数，该分量是 Cox-Ingersoll-Ross（CIR）过程； n 则是包含其余分量的向量的维数。因此，我们考虑 d 维典范状态空间 $\mathcal{D} := [0, \infty)$ 上的一个 $AD(1, n)$ 过程 $Z = (Y, X)^\intercal : \ \times (-\infty, \infty)^n$，其中 $d = n + 1$，且 n 为正整数。它是以下随机微分方程（SDE）的强解

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\ \mathrm{d}t + \rho_{11}\sqrt{Y_t}\ \mathrm{d}B_t^1 \\ \mathrm{d}X_t = (m - \kappa Y_t - \theta X_t)\ \mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\tilde{\rho}\ \mathrm{d}B_t, \end{cases} \qquad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

其中 $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)^\intercal$, $t \in [0, \infty)$ 是一个 d 维布朗向量，$(Y_0, X_0)^\intercal$ 是与 B 独立的任意初值，满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in (0, \infty)) = 1$, $a \in (0, \infty)$, $m \in (-\infty, \infty)^n$,

*通讯作者电子邮箱：mohamed.ben-alaya@univ-rouen.fr，houssem.dahbi@univ-rouen.fr 和 houssemdahbi@essths.u-sousse.tn，hamdi.fathallah@essths.u-sousse.tn

关键词：仿射扩散（AD）、分类、指数遍历性、平稳性、参数推断、最大似然估计（MLE）。本研究得到卓越实验室 MME-DII 的资助，项目编号：ANR11-LBX-0023-01（http://labex-mme-dii.u-cergy.fr/）。

$b \in (-\infty, \infty)$, $\kappa \in (-\infty, \infty)^n$, θ 是一个 $n \times n$ 维实矩阵，且 $\tilde{\rho} = [\rho_{J1}\ \rho_{JJ}]$，其中 $J = \{2, \ldots, d\}$，$\rho_{J1} = (\rho_{i1})_{i \in J}$ 和 $\rho_{JJ} = (\rho_{ij})_{i,j \in J}$ 是通过满足以下条件的正定下三角矩阵 $d \times d$ 的分块表示引入的：对于所有 $i \in \{1, \ldots, d\}$，$\sum_{j=1}^{d} \rho_{ij}^2 = \sigma_i^2$，其中 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)^\intercal \in (0, \infty)^d$。注意，一方面，根据 [14]，$\rho$ 是适定的，即 AD$(1, n)$ 是仿射扩散。另一方面，该模型的第一个分量是一个 CIR过程，同时也是一个连续状态分枝过程，其分枝机制为 $by + \frac{\rho_{11}^2}{2} y^2$，移民机制为 ay；并且在给定 $\sigma(Y_t, t \in [0, \infty))$ 的条件下，第二个分量是一个 n 维瓦西切克过程。

近几十年来，仿射模型，尤其是$AD(1, n)$模型，已应用于金融领域。由于其计算可处理性，以及能够捕捉金融时间序列中的实证特征，这类模型日益受到关注，参见 Duffie 等人 [14] 以及 Filipovic 和 Mayerhofer 在 [17], 中的研究；他们介绍了仿射模型在金融领域的更多应用，并通过典范状态空间的随机不变性证明了存在性与唯一性。这些应用以 Vasicek、Cox-Ingersoll-Ross 和 Heston 等著名扩散模型为例进行了说明。此外，许多作者对仿射扩散过程的平稳性和遍历性进行了研究，参见 [4, 10, 18, 19, 25, 26, 27] 和 [43], ；他们给出了存在唯一平稳分布以及满足遍历性质的充分条件。此外，还有若干论文研究了不同模型中的漂移参数估计，参见 [2, 3, 5, 6, 7, 9, 15] 及其中的参考文献。值得注意的是，关于$AD(1, n)$模型的统计推断尚未得到研究；更广泛地说，多维仿射扩散的统计推断也鲜有涉及。我们还引用 [1, 第 4] 章和 [13]„ 其中介绍了金融与计量经济领域中多维仿射扩散的一些实例和模拟。

与我们的工作相关，从统计学的角度来看，在 [6] 和 [7], 中，Ben Alaya 和 Kebaier 研究了 CIR 模型，也称为平方根模型，它指的是满足 $n = 0$ 的模型 (1)。他们展示了遍历情形（$b > 0$）和非遍历情形（$b < 0$ 和 $b = 0$）下最大似然估计量（MLE）的渐近性质。

后来，在 [3], 中，Barczy 等人研究了一种仿射双因子模型，它是满足$n = 1$、$\kappa = \mathbf{0}$ 和 $\rho = \mathbf{I}_2$的模型 (1) 的一个子模型。他们基于连续时间观测，展示了遍历情形下漂移参数的最大似然估计量和最小二乘估计量的一些渐近性质，并证明了它们的强相合性和渐近正态性。稍微一般一些，在 [9], 中，Bolyog 和 Pap 研究了双因子仿射扩散漂移参数的条件最小二乘估计量的渐近性质；在我们的模型 (1) 中，这对应于情形 $n = 1$，即向与 X相关的随机微分方程中加入第三个维纳过程。在亚临界情形（$b > 0$ 和 $\theta > 0$）、特殊临界情形（$b = 0$ 和 $\theta = 0$）以及特殊超临界情形（$\theta < b < 0$）下，他们在对漂移参数和扩散参数附加一些假设的条件下，证明了条件最小二乘估计量具有不同类型的相合性和渐近正态性。

从遍历性的角度来看，Jin 等人最近于 2020年（参见 [26]）针对一般典范状态空间上的跳跃仿射过程的平稳性给出了一个一般条件 $[0, \infty)^m \times (-\infty,\ \infty)^n$，其中 m 和 n为非负整数。他们证明了该过程的极限分布存在，并且可以通过其特征函数加以确定。此外，对于同一模型，[18], Friesen 等人研究了转移密度的存在性和正则性，并证明在满足 Hörmander型条件及参数的其他假设时，该过程关于全变差距离具有指数遍历性。

本文的目的有两个方面。一方面，我们将研究$AD(1, n)$模型的平稳性和遍历性。另一方面，我们将运用所得结果证明漂移参数最大似然估计量的相合性和渐近正态性。本文结构安排如下：第二节首先介绍所需的主要符号和工具，然后根据 $\mathbb{E}(Z_t)$在 t 趋于无穷时的渐近行为，给出模型(1)关于 b 和 θ 的特征值的分类。具体而言，当$\mathbb{E}(Z_t)$收敛时，定义为亚临界情形；当 $\mathbb{E}(Z_t)$呈多项式增长时，定义为临界情形；当$\mathbb{E}(Z_t)$呈指数增长时，定义为超临界情形。更多细节请参见命题 2.1。第三节利用该过程的仿射性质，给出唯一平稳分布$Z_\infty = (Y_\infty, X_\infty)$存在的充分条件，该分布由傅里叶-拉普拉斯变换给出

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_\infty + i\mu^\intercal X_\infty}\right) = \exp\left(a\int_0^\infty \mathcal{K}_s\left(-\lambda,\mu\right)\,\mathrm{d}s + i\mu^\intercal\theta^{-1}m\right),$$

其中，λ 是一个实部为正的复数，μ 是一个 n维实向量，而 $\mathcal{K}:\ t\mapsto\mathcal{K}_t(-\lambda,\mu)$是一个满足黎卡提方程(25)的复值时间函数。更多细节请参见定理 3.1。第四节运用所谓的Foster-Lyapunov 判据，证明$(Y_t,X_t)_{t\in[0,\infty)}$ 的指数遍历性，参见 [36, 第535页第 6], 节；具体而言，我们证明存在$\delta\in(0,\infty)$和 $B\in(0,\infty)$，使得

$$\sup_{|g|\le V+1}\left|\mathbb{E}\left(g(Y_t,X_t)|(Y_0,X_0)=(y_0,x_0)\right)-\mathbb{E}(g(Y_\infty,X_\infty))\right|\le B(V(y_0,x_0)+1))e^{-\delta t},$$

对所有 $t\in[0,\infty)$ 以及所有博雷尔可测函数 $g:\ \mathcal{D}\to(-\infty,\infty)$，其中 $(y_0,x_0)\in\mathcal{D}$和V 是 $\mathcal{D}$ 上选定的类范数函数，详情请参见定理 4.1。请注意，我们的结果似乎是新的，且未被 [18, 定理 1.3] 涵盖。最后一节致力于研究与 $AD(1,n)$ 模型相关的漂移参数最大似然估计量的统计推断，该估计量依据 Lipster 和 Shiryaev[33, 第 297] 页的方法构造。我们研究其在亚临界情形和一种特殊超临界情形下的相合性及渐近行为（见定理 5.1 和定理 5.2）。本文最后附有一个附录，其中回顾了强大数定律和鞅中心极限定理。

2 预备知识

首先，我们先固定本文所用的记号。令 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_{--}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示非负整数、实数、非负实数、正实数、非正实数、负实数和复数集合，并令 $\mathcal{D}=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$，其中 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$。对于 $x,y\in\mathbb{R}$，我们使用如下记号：$x\wedge y:=\min(x,y)$ 和 $x\vee y:=\max(x,y)$。对于所有 $z\in\mathbb{C}$，$\mathtt{Re}(z)$ 表示 z的实部，而 $\mathtt{Im}(z)$ 表示 z的虚部。对于 $p,q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，记$\mathcal{M}_{p,q}$为 $p\times q$实矩阵的集合，$\mathcal{M}_p$为 $p\times p$实矩阵的集合，$\mathbf{I}_p$为 $\mathcal{M}_p$中的单位矩阵，$\mathbf{0}_{p,q}$为$\mathcal{M}_p$中的零矩阵，$_q$, $\mathbf{0}_p:=\mathbf{0}_{p,}\mathbf{1}$，且 $\mathbf{1}_p\in\mathcal{M}_{p,}\mathbf{1}$ 是大小为 p 的 1-向量。对于所有可对角化矩阵 $A\in\mathcal{M}_p$，我们用 $eig(A)$ 表示包含 A 所有特征值的列向量，并用 $\lambda_i(A)$、$\lambda_{\min}(A)$ 和 $\lambda_{\max}(A)$ 分别表示 A 的 i^{th}、最小和最大特征值。对于 $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们写作 $I=\{1,\ldots,m\}$ 和 $J=\{m+1,m+n\}$；对于所有 $x\in\mathbb{R}^{m+n}$，我们写作 $\mathbf{x}_I=(x_i)_{i\in I}$以及 $\mathbf{x}_J=(x_j)_{j\in J}$。在全文中，我们采用如下记号

$$A=\begin{bmatrix}A_{II} & A_{IJ}\\ A_{JI} & A_{JJ}\end{bmatrix}$$

对于 $A\in\mathcal{M}_{m+n}$，其中 $A_{II}=(a_{i,j})_{i,j\in I}$, $A_{IJ}=(a_{i,j})_{i\in I,j\in J}$, $A_{JI}=(a_{i,j})_{i\in J,j\in I}$和 $A_{JJ}=(a_{i,j})_{i,j\in J}$。对于所有矩阵 $A_1,\ldots,A_k$，$\mathbf{diag}(A_1,\ldots,A_k)^\intercal$ 表示包含矩阵 $A_1,\ldots,A_k$并将其置于对角线上的分块矩阵；对于所有矩阵 $\mathbf{M}$，记 $\mathbf{kMk}:=\sqrt{\max\mathbf{eig}(\mathbf{MM}^\intercal)}$，其中 $\mathbf{M}^\intercal$ 表示 $\mathbf{M}$ 的$_p$转置矩阵。对于所有向量 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$，记 $\mathbf{kxk}:=\sum|x_i|$，并且$_{i=1}^p\mathbf{kxk}_2^2:=\sum x_i^2$。我们将 $\otimes$记为克罗内克积，其定义如下：对于所有矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{1\le i\le p,\,1\le j\le q}{}_{i=1}$和 $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1q}\mathbf{B}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{p1}\mathbf{B} & \cdots & a_{pq}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

以及由 $\oplus$克罗内克和定义为 $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}=A\otimes\mathbf{I}+\mathbf{I}\otimes B$。我们将作用于矩阵 $\mathbf{A}$ 的 vec 算子记作 $\mathbf{vec(A)}$，它将矩阵的各列堆叠成一个列向量。本文使用的一些矩阵性质如下所示，适用于所有维数相容的矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$:

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})(\mathbf{B}\otimes\mathbf{D})=\mathbf{AB}\otimes\mathbf{CD},\quad \mathrm{vec}(\mathbf{ABC})=(\mathbf{C}^\intercal\otimes\mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{B}),\quad e^{\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}}=e^{\mathbf{A}}\otimes e^{\mathbf{B}},\tag{2}$$

（更多细节参见例如 [38] 和 [21]）。我们用记号 $H_{\mathbf{x}}(f)$ 和 $\nabla_{\mathbf{x}} f$ 分别表示函数 $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D},\mathbb{R})$ 关于参数向量 $\mathbf{x}$ 的海森矩阵和梯度列向量，其中该函数记号表示定义在 $\mathcal{D}$ 上的二阶连续可微实值函数集合。用 $\mathcal{C}_c^2(\mathcal{D},\mathbb{R})$ 表示 $\mathcal{C}^2(\mathcal{D},\mathbb{R})$ 中具有紧支集的函数集合。最后，我们分别用 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$、$\xrightarrow{\mathcal{D}}$和 $\xrightarrow{a.s.}$ 表示依概率收敛、依分布收敛和几乎必然收敛。设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间，其上赋有增广滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$，该滤过对应于 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$，并且给定初值 $Z_0=(Y_0,X_0)^\intercal$，它与 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 独立，且满足 $\mathbb{P}(Y_0\in\mathbb{R}_{++})=1$。注意，$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 满足通常条件，即滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 右连续，且 $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$中的所有 $\mathbb{P}$-零测集。对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，我们使用记号 $\mathcal{F}_t^Y:=\sigma(Y_s;\ 0\le s\le t)$，表示由 $(Y_s)_{s\in[0,t]}$生成的 σ-代数。

Seco其次，在统计部分，我们将模型 (1) 写成如下矩阵表示

$$\mathrm{d}Z_t=\Lambda(Z_t)\tau\mathrm{d}t+\sqrt{Z_t^1}\rho\,\mathrm{d}B_{n(n+1)}t\in\mathbb{R}_+, \tag{3}$$

其中，对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$, $\Lambda(Z_t)=\begin{bmatrix}\Lambda_1(Z_t)\ \mathbf{01},\mathbf{0}_{n\ 2} & _n\otimes K\ Z_t,\mathrm{I}\ (\ )\end{bmatrix}$，有 $Z_t=(Z_t^1,\ldots,Z_t^d)^\intercal=(Y_t,X_t^1,\ldots,X_t^n)^\intercal$，且 $\Lambda_1(Z_t)=(1,-Z_t^1)$，$K(Z_t)=(1,-Z_t^1,\ldots,-Z_t^d)$；$d^2+1$ 维向量 τ依次将 $Y,X^1,\ldots,X^n$ 的未知漂移参数堆叠成一个列向量，即，

$$\tau=(a,b,m_1,\kappa_1,\theta_{11},\ldots,\theta_{1n},\ldots,m_n,\kappa_n,\theta_{n1},\ldots,\theta_{nn})^\intercal.$$

本节的第三部分将回到关系式 (1) 给出的模型的第一种表示，并给出与过程 $Z=(Y,\ X)^\intercal$ 的一阶矩相关的分类结果。

命题 2.1. 设 $a\in\mathbb{R}_{++}$, $b\in\mathbb{R}$, $m,\kappa\in\mathbb{R}^n$，并设 θ 是 $\mathcal{M}_n$ 中的实可对角化矩阵。假设 θ 是正定矩阵、负定矩阵或零矩阵，且其特征值不等于 b，或者全部等于 b。设 $Z=(Y,X)^\intercal$ 是随机微分方程 (1) 的唯一强解，并假设 Z_0 可积。那么，对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，有

1. 对于 $b\in\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{E}(Y_t)=\frac{a}{b}+\mathbf{O}(e^{-bt})$，且

$$\mathbb{E}(X_t)=\begin{cases}\theta^{-1}m-\dfrac{a}{b}\theta^{-1}\kappa+\mathbf{O}(e^{-(\lambda_{\min}(\theta)\wedge b)t})\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)\in\mathbb{R}_{++},\\ t\left(m-\dfrac{a}{b}\kappa\right)+\mathbf{O}(1)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)=\lambda_{\max}(\theta)=0,\\ e^{-t\theta}\left(\mathbb{E}(X_0)(\theta-b\mathbf{I}_n)^{-1}\kappa+\Xi_0\right)+\mathbf{O}(1)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\max}(\theta)\in\mathbb{R}_{--},\end{cases}$$

2. 对于 $b=0$, $\mathbb{E}(Y_t)=at+\mathbf{O}(1)$，且

$$\mathbb{E}(X_t)=\begin{cases}-ta\theta^{-1}\kappa+\mathbf{O}(1)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)\in\mathbb{R}_{++},\\ -\dfrac{t^2}{2}a\kappa+\mathbf{O}(t)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)=\lambda_{\max}(\theta)=0,\\ e^{-t\theta}\left(\mathbb{E}(Y_0)\theta^{-1}\kappa+\mathbb{E}(X_0)-\theta^{-1}m-a\theta^{-2}\kappa\right)+\mathbf{O}(t)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\max}(\theta)\in\mathbb{R}_{--},\end{cases}$$

3. 对于 $b\in\mathbb{R}_{--}$, $\mathbb{E}(Y_t)=\left(\mathbb{E}(Y_0)-\dfrac{a}{b}\right)e^{-bt}+\mathbf{O}(1)$，且

$$\mathbb{E}(X_t)=\begin{cases}e^{-bt}\left(\left(\frac{a}{b}-\mathbb{E}\left(Y_0\right)\right)\left(\theta-b\mathbf{I}_n\right)^{-1}\kappa\right)+\mathbf{O}(1)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)\in\mathbb{R}_{++},\\ e^{-bt}\left(\dfrac{1}{b}\mathbb{E}(Y_0)\kappa+\mathbb{E}(X_0)-\dfrac{a}{b^2}\kappa\right)+\mathbf{O}(t)\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)=\lambda_{\max}(\theta)=0,\\ e^{-bt}\left(-\mathbb{E}(Y_0)(\theta-b\mathbf{I}_n)^{-1}\kappa+\dfrac{a}{b}(\theta-b\mathbf{I}_n)^{-1}\kappa\right)+\mathbf{O}(e^{-\lambda_{\min}(\theta)t})\mathbf{1}_n, & b<\lambda_{\min}(\theta)\le\lambda_{\max}<0,\\ te^{-bt}\left(-\mathbb{E}(Y_0)\kappa+\dfrac{a}{b}\kappa\right)+\mathbf{O}(e^{-bt})\mathbf{1}_n, & \lambda_{\min}(\theta)=\lambda_{\max}(\theta)=b,\\ e^{-t\theta}\left(\mathbb{E}(Y_0)(\theta-b\mathbf{I}_n)^{-1}\kappa+\Xi_0\right)+\mathbf{O}(e^{-bt})\mathbf{1}_n, & \lambda_{\max}(\theta)<b,\end{cases}$$

其中 $\Xi_0=\mathbb{E}(X_0)\ -\theta^{-1}m+\dfrac{a}{b}\theta^{-1}\kappa-\dfrac{a}{b}(\theta-b\mathbf{I}_n)^{-1}\kappa.$

证明。 首先，对过程 $(e^{bt}Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 和 $(e^{t\theta}X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$应用伊藤公式，我们得到，对于 $t\in\mathbb{R}_+$,

$$Y_t = e^{-bt}Y_0 + a\int_0^t e^{-b(t-s)}\,\mathrm{d}s + \rho_{11}\int_0^t e^{-b(t-s)}\sqrt{Y_s}\,\mathrm{d}B_s^1. \tag{4}$$

and

$$X_t = e^{-t\theta}X_0 + \int_0^t e^{-(t-s)\theta}m\,\mathrm{d}s - \int_0^t e^{-(t-s)\theta}Y_s\kappa\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{Y_s}e^{-(t-s)\theta}\tilde{\rho}\,\mathrm{d}B_s. \tag{5}$$

对方程 (4) 和 (5) 两边取期望值，并利用 Fubini–Tonelli定理，很容易验证

$$\mathbb{E}\left(Y_t\right) = e^{-bt}\mathbb{E}\left(Y_0\right) + a\int_0^t e^{-bu}\,\mathrm{d}u = \begin{cases}\frac{a}{b} + \left(\mathbb{E}\left(Y_0\right) - \frac{a}{b}\right)e^{-bt}, & b\neq 0,\\ \mathbb{E}\left(Y_0\right) + at, & b = 0,\end{cases} \tag{6}$$

and

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = e^{-t\theta}\mathbb{E}\left(X_0\right) + \int_0^t e^{-s\theta}m\,\mathrm{d}s - \int_0^t e^{-(t-s)\theta}\left(e^{-bs}\mathbb{E}\left(Y_0\right) + a\int_0^s e^{-bu}\,\mathrm{d}u\right)\kappa\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

利用 (6)，很容易得到在三种情形（$b\in\mathbb{R}_{++}$、 $b=0$ 和 $b\in\mathbb{R}_{--}$）下 $\mathbb{E}(Y_t)$ 的行为。对于 $\mathbb{E}(X_t)$，我们区分两种情形。对于 $b=0$，若 $\lambda_{\min}(\theta) = \lambda_{\max}(\theta) = 0$，则关系式 (7) 变为$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(X_0\right) + t\left(m - \mathbb{E}(Y_0)\kappa\right) - \frac{1}{2}t^2a\kappa$，由此得到第 2 项的第二个断言。否则，我们有 $\mathbb{E}(X_t) = e^{-t\theta}\mathbb{E}\left(X_0\right) + \theta^{-1}\left(I_n - e^{-t\theta}\right)m - \left(\mathbb{E}\left(Y_0\right)\left(1-e^{-t\theta}\right) + at\right)\theta^{-1}\kappa + a\theta^{-2}\left(I_n - e^{-t\theta}\right)\kappa$。其行为取决于 θ 的特征值符号，很容易得到第 2 项的第一个和第三个断言。现在，对于 $b\neq 0$，若 $\lambda_{\min} = \lambda_{\max} = 0$，则关系式 (7) 变为 $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + t\left(m - \frac{a}{b}\kappa\right) + \left(\frac{1}{b}\mathbb{E}(Y_0) - \frac{a}{b^2}\right)(e^{-bt}-1)\kappa$，其行为取决于 b 的符号：当 $b\in\mathbb{R}_{++}$ 时，得到第 3 项的第二个断言；当 $b\in\mathbb{R}_{--}$ 时，也得到第 3 项的第二个断言；若 $\lambda_{\min} = \lambda_{\max} = b$，则关系式 (7) 变为 $\mathbb{E}(X_t) = e^{-bt}\mathbb{E}\left(X_0\right) + \frac{1}{b}\left(1-e^{-bt}\right)m - \frac{a}{b^2}\left(1-e^{-bt}\right)\kappa + \left(\frac{a}{b} - \mathbb{E}\left(Y_0\right)\right)te^{-bt}\kappa$，由此得到第 1 项的第一个断言的一部分以及第 3 项的第四个断言；否则，$\mathbb{E}(X_t) = e^{-t\theta}\mathbb{E}\left(X_0\right) + \left(\frac{a}{b} - \mathbb{E}\left(Y_0\right)\right)\left(\theta - b\mathrm{I}_n\right)^{-1}\left(e^{-bt\mathbf{I}_n} - e^{-t\theta}\right)\kappa + \theta^{-1}\left(\mathrm{I}_n - e^{-t\theta}\right)\left(m - \frac{a}{b}\kappa\right)$，这涵盖了第 1 项和第 3 项中的其余情形。命题 2.1 的证明至此完成。

□

注记 2.1. 如果 θ 是 $\mathcal{M}_n$ 中具有共同正、负或零特征值的任意矩阵，那么

$$\mathbb{E}(X_t) = (QP)^{-1}\mathbb{E}(\Upsilon_t), \tag{8}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}_+$，其中 $\Upsilon_t = QPX_t$ 满足 $P\in\mathcal{M}_n$，是将 θ 变换为对角矩阵 D 的换基矩阵，$Q = (Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5)^{\mathsf{T}}\in\mathcal{M}_n$ 是置换矩阵（一种非奇异方形二元矩阵，也称双随机矩阵，可用于重新排列矩阵 D 对角线上的 θ 的特征值），使得对所有 $i,\ j\in\in\{1,\ldots,5\}$，当 $i\neq j$ 时，Q_i 的行与 Q_j 的行正交。注意，对所有 $k\in\in\{1,\ldots,5\}$，$Q_k\in\mathcal{M}_{n_k,\ n}$，其中 $n_k\in\mathbb{N}$ 满足 $\sum_{k=1}^5 n_k = n$，且 $\Upsilon_t = (\Upsilon_t^1、\Upsilon_t^2、\Upsilon_t^3、\Upsilon_t^4、\Upsilon_t^5)^{\mathsf{T}}$，其中 $\Upsilon_t^k\in\mathbb{R}^{n_i}$ 是以下随机微分方程的解

$$\mathrm{d}\Upsilon_t^k = \left(Q_kPm - Q_kP\kappa Y_t - \tilde{D}_k\Upsilon_t^k\right)\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}Q_kP\tilde{\rho}\,\mathrm{d}B_t,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

其中 $D_k\in\mathcal{M}_{n_k}$ 满足 $\lambda_{min}(D_1)\in\mathbb{R}_{++}$, $\lambda_{min}(D_2) = \lambda_{max}(D_2) = 0$, $\lambda_{max}(D_3)\in\mathbb{R}_{--}$ 其中 $\lambda_{\min}(D_3) > b$ 当 $b\in\mathbb{R}_{--}$时, $\lambda_{max}(D_4)\in\mathbb{R}_{--}$ 其中 $\lambda_{min}(D_4) = \lambda_{max}(D_4) = b$ 当 $b\in\mathbb{R}_{--}$ 时，且$\lambda_{max}(\tilde{D}_5)\in\mathbb{R}_{--}$其中 $\lambda_{\max}(\tilde{D}_5) < b$当 $b\in\mathbb{R}_{--}$时。因此， $\mathbb{E}(\Upsilon_t) = (\mathbb{E}(\Upsilon_t^1)\ldots,\mathbb{E}(\Upsilon_t^5))^{\mathsf{T}}$，并且对于每个 $k\in\{1,\ldots,5\}$，通过分别将 m、κ和 θ替换为 Q_kPm、$Q_kP\kappa$和 D_k，$\mathbb{E}(\Upsilon_t^k)$满足条目 *1*、*2* 或 *3* 中的一项。事实上，在这种情况下，我们可以选择一个置换矩阵 $Q\in\mathcal{M}_n$ 和一个基变换矩阵 P，将 θ 对角化如下

$$\theta = (QP)^{-1}\tilde{D}(QP) = P^{-1}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{D}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{D}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{D}_4 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{D}_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\end{bmatrix}P.$$

根据命题 2.1 中给出的期望值 $\mathbb{E}(Z_t)$ 在 t 趋于 ∞ 时的渐近行为，我们对由随机微分方程 (3) 定义的 $AD(1,n)$ 过程进行分类。

定义 *2.1.* 设 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为满足 $\mathbb{P}(Z_0^1 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$ 的方程 *(3)* 的唯一强解。假设 θ 是正定矩阵、负定矩阵或零矩阵，其特征值不同于 b 或全部等于 b。若 $b \wedge \lambda_{\min}(\theta) \in \mathbb{R}_{++}$，则称 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为亚临界，即当 $t \to \infty$ 时， $\mathbb{E}(Z_t)$ 收敛；若 $b \in \mathbb{R}_+$ 且 $\lambda_{\min}(\theta) = \lambda_{\max}(\theta) = 0$ ，或 $b = 0$ 且 $\lambda_{\min}(\theta) \in \mathbb{R}_{++}$，则称其为临界，即 $\mathbb{E}(Z_t)$ 具有多项式展开；若 $b \wedge \lambda_{\max}(\theta) \in \mathbb{R}_{--}$，则称为超临界，即 $\mathbb{E}(Z_t)$ 具有指数展开。

在下一节中，我们陈述由上一节定义的 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 模型 (3) 的平稳性定理及其证明。

3 平稳性

在 $n = 1$ 这一特殊情形下，Barczy M. 等人在 [4] 中研究了 $AD(1,1)$ 过程的平稳分布存在性，其中 $\kappa = 0$ ，该过程称为仿射双因子模型。类似地，Bolyog B. 和 Pap G. 在 [10] 中证明了仿射双因子扩散过程的相关结论，其中 $\kappa \in \mathbb{R}$。根据以下定理，我们将这些研究推广到由模型 (1) 定义的 $AD(1,n)$ 过程 $Z = (Y, X)^\mathsf{T}$ 。

定理 3.1。 考虑满足 $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_{++}$, $m \in \mathbb{R}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}^n$，且 $\theta \in \mathcal{M}_n$ 为可对角化正定矩阵的 $AD(1,n)$ 模型 (1)，并且 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\mathsf{T}$ 是一个与$(B_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 独立且满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$ 的随机初始值。

1) 那么，当 $t \to \infty$ 时， $Z_t \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_\infty$ ，其中 $Z_\infty = (Y_\infty, X_\infty)^\mathsf{T}$ ，且 Z_∞ 的分布由下式给出 *by*

$$\mathbb{E}\left(e^{\nu^\mathsf{T} Z_\infty}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_\infty + i\mu^\mathsf{T} X_\infty}\right) = \exp\left(a\int_0^\infty \mathcal{K}_s\left(-\lambda,\mu\right)\,\mathrm{d}s + i\mu^\mathsf{T}\theta^{-1}m\right), \tag{9}$$

对于 $\nu = (-\lambda, i\mu) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$，其中 $\mathcal{U}_1 := \{u \in \mathbb{C} : \ \mathit{Re}(u) \in \mathbb{R}_-\}$ 且 $\mathcal{U}_2 := \{u \in \mathbb{C}^n : \ \mathit{Re}(u) = 0\}$，对所有 $(u_1, u_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^n$，函数 $t \mapsto \mathcal{K}_t(u_1, u_2)$ 都是下列（确定性）非线性 *Riccati* 偏微分方程（偏微分方程）的唯一解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{K}_t}{\partial t}(u_1,u_2) &= \dfrac{\rho_{11}^2}{2}\mathcal{K}_t^2(u_1,u_2) - \left(b - i\rho_{11}\rho_{J1}^\mathsf{T} e^{-t\theta^\mathsf{T}} u_2\right)\mathcal{K}_t(u_1,u_2) - i\kappa^\mathsf{T} e^{-t\theta^\mathsf{T}} u_2 \\ & \quad -\frac{1}{2}\left(vec(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\mathsf{T})\right)^\mathsf{T} e^{-t(\theta^\mathsf{T}\oplus\theta^\mathsf{T})}(u_2\otimes u_2) - \dfrac{1}{2}\left(\rho_{J1}^\mathsf{T} e^{-t\theta^\mathsf{T}} u_2\right)^2 \\ \mathcal{K}_0(u_1,u_2) &= u_1. \end{cases} \tag{10}$$

2) 此外，在此外，若 Z_0 与由(9)给出的 Z_∞ 具有相同的分布，则$(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 严格平稳 *ad* *y.*

为了证明这个定理，我们考虑以下技术引理:

引理 3.1. 不失一般性，我们可以假设 $\rho_{J1} = \mathbf{0}_n$ 满足定理 *3.1* 中的条件。

此引理的证明将在定理证明之后给出。

证明。 （对某个 $T \in \mathbb{R}_{++}$$(Z_t)^{t\in[0,T]}$ 的 $(Z_t)^{t\in[0,T]}$ 的证明，即定理 3.1 的证明）根据引理 3.1，我们可以假设 $\rho_{J1} = \mathbf{0}_n$ ，因此考虑该模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \rho_{11}\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t^1, \\ \mathrm{d}X_t = (m - \kappa Y_t - \theta X_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\rho_{JJ}\,\mathrm{d}W_t, \quad \text{where } W_t = (B_t^2, \ldots, B_t^d). \end{cases} \tag{11}$$

.

1）第一个断言的证明分为四个主要步骤：

˜**步骤 1**：第一步旨在将对三元组过程 $Z=(Y,\ U,\ V)$ 的渐近研究，转化为对 $Z=(Y,\ X)$ 的研究，其中，对所有 $t\in\mathbb{R}_+$，

$$U_t:=\int_0^t Y_s e^{-(t-s)\theta}\kappa\ \mathrm{d}s \quad \text{and} \quad V_t:=\mathrm{vec}\left(\int_0^t Y_s e^{-(t-s)\theta}\rho_{JJ}\rho_{JJ}^{\mathsf{T}} e^{-(t-s)\theta^{\mathsf{T}}}\ \mathrm{d}s\right),$$

并写出其傅里叶-拉普拉斯变换。对于 $(\lambda,\ \mu)$，$(y_0,\ x_0)\in\mathcal{D}$ 和 $t\in\mathbb{R}_+$，根据由 (5) 给出的 X_t 的显式表达式及塔式性质，$(Y_t,\ X_t)$ 的条件傅里叶-拉普拉斯变换，即 $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t+i\mu^{\mathsf{T}}X_t}|(Y_0,\ X_0)=(y_0,\ x_0)\right)$，等于

$$\mathbb{A}_t(\mu,\theta,m,x_0)\mathbb{E}\left(\exp\left(-\lambda Y_t-i\mu^{\mathsf{T}}U_t\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(i\mu^{\mathsf{T}}\int_0^t\sqrt{Y_s}e^{-(t-s)\theta}\rho_{JJ}\ \mathrm{d}W_s\right)\mid\mathcal{F}_t^Y\right)|Y_0=y_0\right),\quad(12)$$

其中 $\mathbb{A}_t(\mu,\ \theta,\ m,\ x_0)=\exp\left(i\mu^{\mathsf{T}}e^{-t\theta}x_0+i\mu^{\mathsf{T}}\theta^{-1}m-i\mu^{\mathsf{T}}\theta^{-1}e^{-t\theta}m\right)$。此外，利用 Y 和 W 的独立性、(2) 中矩阵克罗内克算子的第二个性质以及 V_t 的定义，我们可推得条件期望 $\mathbb{E}\left(\exp\left(i\mu^{\mathsf{T}}\int_0^t\sqrt{Y_s}e^{-(t-s)\theta}\rho_{JJ}\mathrm{d}W_s\right)\mid\mathcal{F}_t^Y\right)$ 等于

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\mu^{\mathsf{T}}\int_0^t Y_s e^{-(t-s)\theta}\rho_{JJ}\rho_{JJ}^{\mathsf{T}}e^{-(t-s)\theta^{\mathsf{T}}}\ \mathrm{d}s\,\mu\right)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\mu^{\mathsf{T}}\otimes\mu^{\mathsf{T}})V_t\right)\right).\quad(13)$$

将 (12) 和 (13) 合并可得

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t+i\mu^{\mathsf{T}}X_t}|(Y_0,X_0)=(y_0,x_0)\right)=\mathbb{A}_t(\mu,\theta,m,x_0)\,\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t-i\mu^{\mathsf{T}}U_t-\frac{1}{2}(\mu^{\mathsf{T}}\otimes\mu^{\mathsf{T}})V_t}|Y_0=y_0\right).\quad(14)$$

˜注意，上文引入的过程 $Z=(Y,\ U,\ V)$ 是以下方程的解

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y_t &= (a-bY_t)\ \mathrm{d}t+\rho_{11}\sqrt{Y_t}\ \mathrm{d}B_t^1,\\ \mathrm{d}U_t &= (Y_t\kappa-\theta U_t)\ \mathrm{d}t, \qquad\qquad t\in\mathbb{R}_+,\\ \mathrm{d}V_t &= \left(Y_t\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^{\mathsf{T}})-(\theta\oplus\theta)V_t\right)\ \mathrm{d}t,\end{cases}$$

其初值为 Y_0、$\mathbf{0}_n$ 和 $\mathbf{0}_{n^2}$，该过程也是一个仿射过程，参见 Filipovic 的 [17, 定理 3.2]。因此，根据 [17], 中的定义 2.1，对于所有 $T\in\mathbb{R}_+$、$0\le t\le T$ 和 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)\in\mathcal{U}:=\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\times\mathcal{U}_3$，其中 $\mathcal{U}_3:=\{u\in\mathbb{R}^{n^2}\mid\exists\tilde{u}\in\mathcal{U}_2;\ u=\tilde{u}\otimes\tilde{u}\}$，可得以下仿射变换公式

$$\mathbb{E}\left(e^{u^{\mathsf{T}}\tilde{Z}_T}\mid\mathcal{F}_t\right)=\mathbb{E}\left(e^{u_1Y_T+u_2^{\mathsf{T}}U_T+u_3^{\mathsf{T}}V_T}\mid\mathcal{F}_t\right)=\exp\left(\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^{\mathsf{T}}\tilde{Z}_t\right),\quad(15)$$

其中 $\psi=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3)^{\mathsf{T}}$ 是以下黎卡提方程组的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,u) &= \frac{\rho_{11}^2}{2}\psi_1^2(t,u)-b\psi_1(t,u)+\kappa^{\mathsf{T}}\psi_2(t,u)+(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^{\mathsf{T}}))^{\mathsf{T}}\psi_3(t,u),\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t}(t,u) &= -\theta^{\mathsf{T}}\psi_2(t,u),\\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial t}(t,u) &= -(\theta^{\mathsf{T}}\oplus\theta^{\mathsf{T}})\psi_3(t,u),\\ \psi_1(0,u) &= u_1,\ \psi_2(0,u)=u_2,\ \psi_3(0,u)=u_3,\end{cases}\quad(16)$$

并且对所有 $u\in\mathcal{U}$ 和 $t\in\mathbb{R}_+$，ϕ 由 $\phi(t,u)=a\int_0^t\psi_1(s,u)\ \mathrm{d}s$. 定义。利用显式解 $\psi_2(t,u)=e^{-t\theta^{\mathsf{T}}}u_2$ 和 $\psi_3(t,u)=e^{-t(\theta^{\mathsf{T}}\oplus\theta^{\mathsf{T}})}u_3$，我们推得 ψ_1 满足以下偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}(t,u) &= \frac{\rho_{11}^2}{2}\psi_1^2(t,u)-b\psi_1(t,u)+\kappa^{\mathsf{T}}e^{-t\theta^{\mathsf{T}}}u_2+(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^{\mathsf{T}}))^{\mathsf{T}}e^{-t(\theta^{\mathsf{T}}\oplus\theta^{\mathsf{T}})}u_3,\\ \psi_1(0,u) &= u_1.\end{cases}\quad(17)$$

对于 $u \in \mathcal{U}_\circ$。因此，在 (15) 中取 $t = 0$，可得

$$\mathbb{E}\left(e^{u_1 Y_t + u_2^\intercal U_t + u_3^\intercal V_t} | Y_0 = y_0\right) = \exp\left(a \int_0^t \psi_1(s,u)\, \mathrm{d}s + y_0 \psi_1(t,u)\right). \tag{18}$$

步骤 2：我们证明，若 $u_1 \in \mathcal{U}_1$，则对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $(u_2,\ u_3) \in \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$，有 $\psi_1(t,\ u) \in \mathcal{U}_{1\circ}$ 事实上，利用 $u_3^\intercal V_t \in \mathbb{R}_-$ 这一事实，因为

$$u_3^\intercal V_t = -\frac{1}{2}(\mu^\intercal \otimes \mu^\intercal) V_t = -\frac{1}{2}\mu^\intercal \int_0^t Y_s e^{-(t-s)\theta} \rho_{JJ} \rho_{JJ}^\intercal e^{-(t-s)\theta^\intercal}\, \mathrm{d}s\, \mu$$

且 $\int_0^t Y_s e^{-(t-s)\theta} \rho_{JJ} \rho_{JJ}^\intercal e^{-(t-s)\theta^\intercal} \mathrm{d}s$ 是一个半正定矩阵，我们可推得

$$\left|\mathbb{E}\left(e^{u_1 Y_t + u_2^\intercal U_t + u_3^\intercal V_t} | Y_0 = y_0\right)\right| \le \mathbb{E}\left(e^{\mathtt{Re}(u_1) Y_t + u_3^\intercal V_t} | Y_0 = y_0\right) \le 1, \tag{19}$$

对于 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u \in \mathcal{U}_\circ$。因此，结合方程 (18) 和 (19)，我们得到

$$\left|\exp\left(a \int_0^t \psi_1(s,u)\, \mathrm{d}s + y_0 \psi_1(t,u)\right)\right| = \exp\left(a\, \mathtt{Re}\left(\int_0^t \psi_1(s,u)\, \mathrm{d}s\right) + y_0\, \mathtt{Re}\left(\psi_1(t,u)\right)\right) \le 1,$$

对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u \in \mathcal{U}_\circ$ 现在，考察常微分方程 (17)，显然其解 ψ_1 不依赖于参数 a 和 $y_{0\circ}$ 因此，我们可以取 $a = 0$ 并选择 $y_0 \in \mathbb{R}_{++}$，这意味着当 $u_1 \in \mathcal{U}_1$ 时，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $(u_2,\ u_3) \in \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$，有 $\psi_1(t,\ u) \in \mathcal{U}_1$。

步骤 3：设 $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_{3\circ}$ 现在，我们着重构造由 ψ_1 定义的函数 K 的模的上界，如下所示

$$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}' \ni (t, u_1, u_2, u_3) \mapsto \tilde{K}_t(u_1, u_2, u_3) := \psi_1(t, (u_1, -iu_2, u_3)),$$

它对所有 $u = (u_1,\ u_2,\ u_3) \in \mathcal{U}'$ 均满足，

$$\frac{\partial \tilde{K}_t}{\partial t}(u_1,u_2,u_3) = \frac{\rho_{11}^2}{2}\tilde{K}_t^2(u_1,u_2,u_3) - b\tilde{K}_t(u_1,u_2,u_3) - i\kappa^\intercal e^{-t\theta^\intercal} u_2 + \left(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\intercal)\right)^\intercal e^{-t(\theta^\intercal \oplus \theta^\intercal)} u_3, \tag{20}$$

and

$$\mathbb{E}\left(e^{u_1 Y_t - i u_2^\intercal U_t + u_3^\intercal V_t} | Y_0 = y_0\right) = \exp\left(\tilde{g}_t(u) + y_0 \tilde{K}_t(u)\right), \tag{21}$$

其中 $\tilde{g}_t(u) := a \int_0^t \tilde{K}_s(u)\, \mathrm{d}s_\circ$ 设实函数 $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}' \ni (t,\ u) \mapsto v_t(u) := -\mathtt{Re}(\tilde{K}_t(u))$ 和 $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}' \ni (t,\ u) \mapsto w_t(u) := \mathtt{Im}(K_t(u))$ 满足以下黎卡提方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_t}{\partial t}(u) &= -\frac{\rho_{11}^2}{2} v_t^2(u) - b v_t(u) + \frac{\rho_{11}^2}{2} w_t^2(u) - \left(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\intercal)\right)^\intercal e^{-t(\theta^\intercal \oplus \theta^\intercal)} u_3, \\ \dfrac{\partial w_t}{\partial t}(u) &= -(b + \rho_{11}^2 v_t(u)) w_t(u) - \kappa^\intercal e^{-t\theta^\intercal} u_2, \\ v_0(u) &= -\mathtt{Re}(u_1),\ w_0(u) = \mathtt{Im}(u_1), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{22}$$

w_t 的一个通解具有如下形式

$$w_t(u) = C e^{-\int_0^t f_z(u)\, \mathrm{d}z} - e^{-\int_0^t f_z(u)\, \mathrm{d}z} \int_0^t e^{\int_0^s f_z(u)\, \mathrm{d}z} \kappa^\intercal e^{-s\theta^\intercal} u_2\, \mathrm{d}s,$$

其中 $f_t(u) := b + \rho_{11}^2 v_t(u)$，对于 $t \in \mathbb{R}_+$，且 C 是一个实常数。考虑初值 $w_0(u) = \mathtt{Im}(u_1)$，我们得到 $C = \mathtt{Im}(u_1)_\circ$ 因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，

$$|w_t(u)| \le \|u_1\| e^{-\int_0^t f_z(u)\, \mathrm{d}z} + \|\kappa\|\, \|u_2\| \int_0^t e^{-\lambda_{\min}(\theta)s - \int_s^t f_z(u)\, \mathrm{d}z}\, \mathrm{d}s.$$

由于 $f_t(u) \geq b \in \mathbb{R}_+$，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u \in \mathcal{U}'$，

$$\int_0^t e^{-\lambda_{\min}(\theta)s - \int_s^t f_z(u)\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t e^{-\lambda_{\min}(\theta)s-(t-s)b}\,\mathrm{d}s$$
$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda_{\min}(\theta)t} - e^{-bt}}{b - \lambda_{\min}(\theta)} \leq \dfrac{e^{-(\lambda_{\min}(\theta)\wedge b)t}}{|b - \lambda_{\min}(\theta)|}, & b \neq \lambda_{\min}(\theta), \\ te^{-bt} \leq e^{-\frac{b}{2}t} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} te^{-\frac{b}{2}t} = \dfrac{2}{e\,b} e^{-\frac{b}{2}t}, & b = \lambda_{\min}(\theta). \end{cases}$$

因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u \in \mathcal{U}'$，我们得到

$$|w_t(u)| \leq C_3(u)e^{-C_2 t}, \tag{23}$$

其中 $C_3(u) := \|u_1\| + \|\kappa\|\,\|u_2\| \left(\dfrac{1}{|b - \lambda_{\min}(\theta)|} \mathbb{1}_{\{b\neq\lambda_{\min}(\theta)\}} + \dfrac{2}{eb}\mathbb{1}_{\{b=\lambda_{\min}(\theta)\}} \right)$ 以及 $C_2 = \lambda_{\min}(\theta) \wedge \frac{b}{2}$。将（22）的第一个偏微分方程与关系式（23）结合，可得 $\dfrac{\partial v_t}{\partial t}(u) \leq -bv_t(u) + C_4(u)e^{-C_2 t}$，其中 $C_4(u) = \frac{\rho_{J1}^2}{2} C_3(u)^2 + \left\|\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\intercal)\right\| \|u_3\|$，且 $v_0(u) = -\mathrm{Re}(u_1)$。根据比较定理，我们推导出不等式 $v_t(u) \leq \tilde{v}_t(u)$，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $u \in \mathcal{U}'$均成立，其中 $\tilde{v}_t$ 是非齐次线性微分方程 $\dfrac{\partial \tilde{v}_t}{\partial t}(u) = -b\tilde{v}_t(u) + C_4(u)e^{-C_2 t}$的解，且 $\tilde{v}_0(u) = -\mathrm{Re}(u_1)$。与前面的计算类似，我们得到 $\tilde{v}_t(u) = -\mathrm{Re}(u_1)e^{-bt} + C_4(u)e^{-bt}\int_0^t e^{-(b-C_2)s}\,\mathrm{d}s$. 利用事实 $b - C_2 \geq \dfrac{b}{2} \in \mathbb{R}_{++}$，可得

$$0 \leq v_t(u) \leq \tilde{v}_t(u) = -\mathbf{Re}(u_1)e^{-bt} + C_4(u)\frac{e^{-C_2 t} - e^{-bt}}{b - C_2} \leq C_5(u)e^{-C_2 t},$$

当 $C_5(u) = -\mathrm{Re}(u_1) + \dfrac{2}{b}C_4(u)$ 时。最后，我们得到

$$|\tilde{K}_t(u)| = \sqrt{v_t(u)^2 + w_t(u)^2} \leq C_1(u)e^{-C_2 t}, \tag{24}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}_+$和 $u \in \mathcal{U}'$，当 $C_1(u) := \sqrt{C_5^2(u) + C_3^2(u)}$ 时。

步骤 4：为了完成由关系式 (9) 和 (10) 给出的第一个结果的证明，我们证明以下断言：

i) for all $u \in \mathcal{U}'$ and $y_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t\to\infty}\left[y_0\tilde{K}_t(u) + \tilde{g}_t(u)\right] = a\int_0^\infty \tilde{K}_s(u)\,\mathrm{d}s =: \tilde{g}_\infty(u)$.

ii) 函数 $\mathcal{U}' \ni u \mapsto \tilde{g}_\infty(u)$ 连续。

首先，利用方程 (24)，我们推得 $\lim\limits_{t\to\infty} y_0 K_t(u) = 0$；随后，根据勒贝格控制收敛定理，我们得到 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t \tilde{K}_s(u)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \tilde{K}_s(u)\,\mathrm{d}s$.。其次，为了证明 ii)，设 $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{U}'$ 中满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)} = u \in \mathcal{U}'$ 的一个序列。同样，利用方程 (24)、$t \in \mathbb{R}_+$ 条件下 $\mathcal{U}' \ni u \mapsto K_t(u)$ 的连续性以及勒贝格控制收敛定理，我们推得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \tilde{K}_s(u^{(n)})\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \tilde{K}_s(u)\,\mathrm{d}s$，这表明 $\mathcal{U}' \ni u \mapsto \tilde{g}_\infty(u)$ 连续。值得注意的是，由于函数 K_t 作为微分方程 (20) 的唯一解并不依赖于参数 a 和 y_0，因此可在关系式 (21) 中取$a = 0$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}_{++}$ 来证明其连续性。

最后，我们考虑 $(u_1, u_2, u_3) = (-\lambda, \mu, -\frac{1}{2}\mu \otimes \mu)$。因此，得益于 (Y_0, X_0) 与 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 的独立性，我们先使用全期望定律，再使用控制收敛

定理，最后利用断言 i) 得出，当 t 趋于无穷大时，傅里叶-拉普拉斯变换 $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t+i\mu^\top X_t}\right)$ 的极限等于

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{A}_t(\mu,\theta,m,x_0)\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t-i\mu^\top U_t-\frac{1}{2}(\mu^\top\otimes\mu^\top)V_t}|Y_0=y_0\right)\mathbb{P}_{(Y_0,X_0)}(\mathrm{d}y_0,\mathrm{d}x_0)$$
$$=\exp\left(\tilde{g}_\infty\left(-\lambda,\mu,-\frac{1}{2}\mu\otimes\mu\right)+i\mu^\top\theta^{-1}m\right).$$

第二个断言确保可以应用列维连续性定理来证明收敛$Z_t\xrightarrow{\mathcal{D}}Z_\infty$，并将 $Z_\infty=(Y_\infty,\ X_\infty)$ 的分布刻画为上述极限函数所对应的傅里叶-拉普拉斯变换。在 $\rho_{J1}=\mathbf{0}_n$ 的情况下，我们通过考察函数 $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}_1\times\mathbb{R}^n\ni(t,\ u_1,\ u_2)\mapsto K_t(u_1,\ u_2):=\tilde{K}_t(u_1,\ u_2,\ -\frac{1}{2}u_2\otimes u_2)$，并根据关系式 (20) 写出相应的黎卡提方程，从而完成第一个结果的证明:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K_t}{\partial t}(u_1,u_2)=\dfrac{\rho_{11}^2}{2}K_t^2(u_1,u_2)-bK_t(u_1,u_2)-i\kappa^\top e^{-t\theta^\top}u_2-\dfrac{1}{2}(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\top))^\top e^{-t(\theta^\top\oplus\theta^\top)}(u_2\otimes u_2),\\ K_0(u_1,u_2)=u_1.\end{cases}\tag{25}$$

这不过是 $\rho_{J1}=\mathbf{0}_n$ 对应的关系式 (10)。

2）为了证明严格平稳性（有限维分布的平移不变性），我们证明对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，$(Y_t,\ X_t)$ 的分布具有平移不变性，且与 $(Y_\infty,\ X_\infty)$ 具有相同的分布。首先，根据 (14) 和 (21)，我们有

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_t+i\mu^\top X_t}|(Y_0,X_0)=(y_0,x_0)\right)=\exp\left(y_0K_t(-\lambda,\mu)+i\mu^\top e^{-t\theta}x_0+g_t(-\lambda,\mu)\right),$$

其中 $g_t(-\lambda,\mu)=a\int_0^t K_s(-\lambda,\mu)\,\mathrm{d}s+i\mu^\top\theta^{-1}(1-e^{-t\theta})m$，且 K 是黎卡提方程 (25) 的解。根据定理的第一部分，只需验证对所有 $t\in\mathbb{R}_+$、$\lambda\in\mathbb{R}_+$ 和$\mu\in\mathbb{R}^n$，有

$$\mathbb{E}\left(\exp(K_t(-\lambda,\mu)Y_\infty+i\mu^\top e^{-t\theta}X_\infty+g_t(-\lambda,\mu)\right)=\exp\left(a\int_0^\infty K_s(-\lambda,\mu)\ \mathrm{d}s+i\mu^T\theta^{-1}m\right).$$

由于对所有 $t\in\mathbb{R}_+$ 和 $(-\lambda,\mu)\in\mathcal{U}_1\times\mathbb{R}^n$，$K_t(-\lambda,\mu)\in\mathcal{U}_1$，根据定理的第一部分，上述期望值等于

$$\exp\left(a\int_0^\infty K_s(K_t(-\lambda,\mu),e^{-t\theta^\top}\mu)\ \mathrm{d}s+i\mu^\top e^{-t\theta}\theta^{-1}m+g_t(-\lambda,\mu)\right)$$
$$=\exp\left(a\left(\int_0^\infty K_s(K_t(-\lambda,\mu),e^{-t\theta^\top}\mu)\ \mathrm{d}s+\int_0^t K_s(-\lambda,\mu)\ \mathrm{d}s\right)+i\mu^\top\theta^{-1}m\right).\tag{26}$$

简单比较这两项可知，只需验证对所有 $(-\lambda,\mu)\in\mathcal{U}_1\times\mathbb{R}^n\int_t^\infty K_s(-\lambda,\mu)\,\mathrm{d}s=\int_0^\infty K_s(K_t(-\lambda,\mu)\ e^{-t\theta^\top}\mu)\,\mathrm{d}s,$，该式在以下条件下成立

$$K_s(K_t(-\lambda,\mu),e^{-t\theta^\top}\mu)=K_{t+s}(-\lambda,\mu),\tag{27}$$

对所有 $s,t\in\mathbb{R}_+$ 和 $(-\lambda,\mu)\in\mathcal{U}_1\times\mathbb{R}^n$。由于利用关系式 (2) 中给出的矩阵性质，函数 $\mathbb{R}_+\ni s\mapsto K_s(K_t(-\lambda,\mu)\ e^{-t\theta^\top}\mu)$ 和 $\mathbb{R}_+\ni s\mapsto K_{t+s}(-\lambda,\mu)$，$s\in\mathbb{R}_+$ 和 $(-\lambda,\mu)\in\mathcal{U}_1\times\mathbb{R}^n$ 满足相同的微分方程 (25)，且初值 $K_t(-\lambda,\mu)$ 相同，因此根据解的唯一性可得结论。最后，利用 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是一个时间齐次马尔可夫过程这一事实以及塔式性质，可推得过程 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 严格平稳，从而完成证明的第二部分。

□

证明。 (引理 3.1 的证明) 考虑过程

$$(Y_t, \tilde{X}_t)^\mathsf{T} = A(Y_t, X_t)^\mathsf{T}, \quad \text{with } A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_n^\mathsf{T} \\ -\frac{1}{\rho_{11}}\rho_{J1} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \tag{28}$$

容易验证，$(Y_t, \tilde{X}_t)^\mathsf{T}$ 是一个具有仿射漂移的$AD(1, n)$过程

$$A\begin{bmatrix} a \\ m \end{bmatrix} - A\begin{bmatrix} b & \mathbf{0}_n^\mathsf{T} \\ \kappa & \theta \end{bmatrix} A^{-1}\begin{bmatrix} Y_t \\ \tilde{X}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bY_t \\ m - \frac{a}{\rho_{11}}\rho_{J1} - (\kappa - \frac{1}{\rho_{11}}(b\mathbf{I}_n - \theta)\rho_{J1})Y_t - \theta\tilde{X}_t \end{bmatrix}$$

且扩散矩阵为 $\begin{bmatrix} \rho_{11}^2 Y_t & \mathbf{0}_n^\mathsf{T} \\ \mathbf{0}_n & Y_t\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$。接着，我们可以将定理 3.1 的结果应用于过程 $(Y_t, \tilde{X}_t)^\mathsf{T}$，其对应的漂移参数为 $(a, b, \tilde{m}, \tilde{k}, \theta)$ 和 $\tilde{\rho}$，其中 $\tilde{m} = m - \frac{a}{\rho_{11}}\rho_{J1} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\kappa} = \kappa - \frac{1}{\rho_{11}}(b\mathbf{I}_n - \theta)\rho_{J1} \in \mathbb{R}^n$，且 $\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \mathbf{0}_n^\mathsf{T} \\ \mathbf{0}_n & Y_t\rho_{JJ} \end{bmatrix}$。因此，关系式 (10) 可以推广为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{-\lambda Y_\infty + i\mu^\mathsf{T} X_\infty}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{(-\lambda, i\mu)A^{-1}(Y_\infty, \tilde{X}_\infty)^\mathsf{T}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\left(-\lambda + i\frac{1}{\rho_{11}}\mu^\mathsf{T}\rho_{J1}\right)Y_\infty + i\mu^\mathsf{T}\tilde{X}_\infty}\right) \\ &= \exp\left(a\int_0^\infty K_s\left(-\lambda + i\frac{1}{\rho_{11}}\mu^\mathsf{T}\rho_{J1}, \mu\right)\,\mathrm{d}s + i\mu^\mathsf{T}\theta^{-1}\left(m - \frac{a}{\rho_{11}}\rho_{J1}\right)\right) \\ &= \exp\left(a\int_0^\infty \mathcal{K}_s(-\lambda, \mu)\,\mathrm{d}s + i\mu^\mathsf{T}\theta^{-1}m\right), \end{aligned}$$

其中，对于所有 $(u_1, u_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathbb{R}^n$，有 $\mathcal{K}_t(u_1, u_2) = K_t\left(u_1 + i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}\rho_{J1}, \mu\right) - i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}e^{-t\theta}\rho_{J1}$；这里，$K_t$是~与过程 (Y_t, X_t) 相关的函数，它是黎卡提方程 (10) 在参数 $(a, b, \tilde{m}, \tilde{\kappa}, \theta)$ 和 $\tilde{\rho}$ 下的解。该函数满足 $\frac{\partial \mathcal{K}_t}{\partial t}(u_1, u_2) = \frac{\partial K_t}{\partial t}\left(u_1 + i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}\rho_{J1}, u_2\right) + i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}\theta e^{-t\theta}\rho_{J1}$。因此，利用 K_t 的动态及其与 $\mathcal{K}_t$ 的关系，可以很容易地得到 $\frac{\partial \mathcal{K}_t}{\partial t}(u_1, u_2)$ 等于

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_{11}^2}{2}\left(\mathcal{K}_t(u_1, u_2) + i\frac{1}{\rho_{11}}\rho_{J1}^\mathsf{T}e^{-t\theta^\mathsf{T}}u_2\right)^2 - b\left(\mathcal{K}_t(u_1, u_2) + i\frac{1}{\rho_{11}}\rho_{J1}^\mathsf{T}e^{-t\theta^\mathsf{T}}u_2\right) + i\frac{1}{\rho_{11}}\rho_{J1}^\mathsf{T}e^{-t\theta^\mathsf{T}}\theta^\mathsf{T}u_2 \\ &\qquad - i\left(\kappa^\mathsf{T} - \frac{1}{\rho_{11}}\rho_{J1}^\mathsf{T}(b\mathbf{I}_n - \theta^\mathsf{T})\right)e^{-t\theta^\mathsf{T}}u_2 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{vec}(\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\mathsf{T})\right)^\mathsf{T}e^{-t(\theta^\mathsf{T}\oplus\theta^\mathsf{T})}(u_2 \otimes u_2). \end{aligned}$$

经过简单计算，最后一个方程恰好给出偏微分方程 (10)。此外，我们还得到初值 $\mathcal{K}_0(u_1, u_2) = K_0\left(u_1 + i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}\rho_{J1}, u_2\right) - i\frac{1}{\rho_{11}}u_2^\mathsf{T}\rho_{J1} = u_1$，这完成了定理第一部分的推广。对于第二部分，过程 $(Y_t, X_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 的严格平稳性~可由过程 $(Y_t, X_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$的严格平稳性推出。

□

4 指数遍历性

在亚临界情形下，以下定理给出了由随机微分方程 (1) 定义的过程 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$的指数遍历性，并推广了 Barczy 等人在 [4] 以及 Bolyog 和 Pap 在 [10]针对特殊情形 $n = 1$所得的结果。因此，根据 Bhattacharya 在 [8]中的命题 2.5，可得到由关系式 (30) 给出的强大数定律。

定理 4.1。 考虑具有 $a \in \mathbb{R}_{++}$, $b \in \mathbb{R}_{++}$, $m \in \mathbb{R}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 且$\theta \in \mathcal{M}_n$ 为可对角化正定矩阵的 $AD(1, n)$ 模型 (1)，其初始随机值 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\mathsf{T}$ 独立于

$(B_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$。那么过程 Z 是指数遍历的，即存在$\delta \in \mathbb{R}_{++}$，$B \in \mathbb{R}_{++}$ 和 $r \in \mathbb{R}_{++}$ 使得

$$\sup_{|g|\le V+1} |\mathbb{E}\,(g(Z_t)|Z_0 = z_0) - \mathbb{E}(g(Z_\infty))| \le B(V(z_0)+1))e^{-\delta t}, \tag{29}$$

对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $z_0 = (y_0, x_0)^\mathsf{T} \in \mathcal{D}$，其中上确界取遍满足以下条件的博雷尔可测函数$g\colon\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $V(y,x) := y^2 + r\,kxk_2^2$, 对于所有 $(y,x) \in \mathcal{D}$，且 $Z_\infty = (Y_\infty, X_\infty)^\mathsf{T}$ 由 (9) 定义。此外，对于所有满足 $\mathbb{E}(|f(Z_\infty)|) < \infty$ 的博雷尔可测函数 $f\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(Z_s)\,\mathrm{d}s = \mathbb{E}\,(f(Z_\infty))\right) = 1. \tag{30}$$

证明。 首先，我们假设 $\rho_{J1} = \mathbf{0}_n$。为了证明 (29) 给出的指数遍历性，我们使用 Foster-Lyapunov 判据，参见 [36, 定理 6.1]。因此，只需验证以下三个断言：

(i) $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是一个博雷尔右过程（定义见 Getoor [20, 第 55] 页和 Sharpe [39, 第 38] 页）。

(ii) 对于骨架链 $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$，所有紧集都是 petite 集（骨架链和 petite 集的定义见 Meyn 和 Tweedie [35, 第 491 页以及 500] 和 [34, 第 550], 页）。

(iii) 存在 $c \in \mathbb{R}_{++}$ 和 $d \in \mathbb{R}$，使得不等式

$$(\mathcal{A}_k\,V)(z) \le -c\,V(z) + d, \quad z \in \mathcal{O}_k,$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$都成立，其中 $\mathcal{O}_k := \{z \in \mathcal{D}\colon \mathbf{k}z\mathbf{k}_2 < k\}$，对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $\mathcal{A}_k$ 表示过程 $(Z_t^{(k)})^{t\in\mathbb{R}_+}$ 的扩展生成元，其定义为

$$Z_t^{(k)} := \begin{cases} Z_t, & t < T_k, \\ (0,k,\ldots,k)^\mathsf{T}, & t \ge T_k, \end{cases}$$

对于 $t \in \mathbb{R}_+$，其中停时 T_k 定义为 $T_k := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ :\ Z_t \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{O}_k\}$。注意，we 可以c 改为选择 $\mathcal{D}\backslash\mathcal{O}_k$ 中的任意其他点，而不是 $(0,\ k,\ \ldots\ldots,\ k)^\mathsf{T}$。

为了证明第一个断言，根据 Meyn 和 Tweedie [35, 第 498], 页的结果，只需验证 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是一个具有连续样本路径并满足强马尔可夫性质的弱 Feller 过程（Feller 性质和弱 Feller 性质见 Meyn 和 Tweedie [35, 第 3.1] 节）。根据 Duffie 等人 [14,命题 8.2 或定理 2.7], , $AD(1,\ n)$ 模型 (1) 作为仿射过程，是一个 Feller 马尔可夫过程。此外，由于 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 几乎必然具有连续样本路径，它自动是一个强马尔可夫过程（例如，参见 Chung [11, 定理 1，第 56] 页）。对于第二个断言，由于 $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Feller 过程，根据 Meyn 和 Tweedie [37], 中的命题 6.2.8，只需验证它是不可约的。注意，若给定 $Z_0 = (Y_0,\ X_0)^\mathsf{T}$ 时，$Z_1 = (Y_1,\ X_1)^\mathsf{T}$ 的条件分布相对于 $\mathcal{D}$ 上的勒贝格测度绝对连续，且条件密度函数 $f_{Z_1|Z_0}$ 在 $\mathcal{D}$ 上为正，则 $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是不可约的。事实上， $\mathcal{D}$ 上的勒贝格测度是 σ-有限的；若 $\mathcal{D}$ 中的 Borel 集 B 具有正的勒贝格测度，则

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_B(Z_k)|Z_0 = z_0\right) \ge \mathbb{P}(Z_1 \in B|Z_0 = z_0) = \int_B f_{Z_1|Z_0}(z|z_0)\,\mathrm{d}z,$$

对所有 $z_0 \in \mathcal{D}$。此条件密度具有所需性质的存在性可按以下方式检验。在表达式 (5) 中取 $t = 1$，我们考虑向量 $(Y_1,\ \check{}X_1)^\mathsf{T}$，其中 $\check{}X_1 = (\check{}X_1^1,\ \ldots,\ \check{}X_1^n)^\mathsf{T}$ 是给定的 X_1 的随机部分，记为 $\check{}X_1 := -\int_0^1 Y_s e^{s\theta}\kappa\,\mathrm{d}s + \int_0^1\sqrt{Y_s}e^{s\theta}\rho_{JJ}\,\mathrm{d}W_s$。由于 $Y_1 \ge 0$，只需检验对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，$(Y_1,\ \check{}X_1)^\mathsf{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 上具有正密度函数。注意，

给定 $(Y_t)^{t\in[0,1]}$ 时，$\check{}\, X_1$ 的条件分布是均值为 $m_Y = -\int_0^1 Y_s e^{s\theta}\kappa \,\mathrm{d}s$、协方差矩阵为 $C_Y = \int_0^1 Y_s e^{s\theta}\rho_{JJ}\rho_{JJ}^\mathsf{T} e^{s\theta^\mathsf{T}}\mathrm{d}s$ 的正态分布。为了计算 $(Y_1, \check{}X_1)^\mathsf{T}$ 的分布函数，若将此条件密度函数记为 $p(u)$，则对所有 $(y,\ x) \in \mathcal{D}$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_1 \le y,\, \check{X}_1^1 \le x_1,\, \ldots,\, \check{X}_1^n \le x_n\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Y_1\le y\}}\,\mathbb{P}\left(\check{X}_1^1 \le x_1,\, \ldots,\, \check{X}_1^n \le x_n \mid (Y_t)_{t\in[0,1]}\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Y_1\le y\}}\int_{\prod_{i=1}^n(-\infty,x_i)} p(u)\,\mathrm{d}u\right),\end{aligned}$$

其中 $p(u) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sqrt{\det(C_Y)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(u-m_Y)^\mathsf{T}C_Y^{-1}(u-m_Y)\right)$，对所有 $u\in\mathbb{R}^n$ 均成立。对 Y_1 取条件并利用 Fubini-Tonelli 性质，可得

$$\mathbb{P}\left(Y_1 \le y,\, \check{X}_1^1 \le x_1,\, \ldots,\, \check{X}_1^n \le x_n\right) = \int_0^y \int_{\prod_{i=1}^n(-\infty,x_i)} \mathbb{E}\left(p(u)|Y_1 = z\right) f_{Y_1}(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u, \tag{31}$$

其中 f_{Y_1} 表示在 $Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}_{++}$ 已定义的条件下 Y_1 的密度函数，对所有 $y\in\mathbb{R}$，定义为

$$f_{Y_1}(y) = \frac{2be^{b(2a+1)}}{e^b-1}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{a-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-2b(y_0+e^b y)}{e^b-1}\right) I_{2a-1}\left(\frac{2b\sqrt{y_0 y}}{\sinh(\frac{b}{2})}\right)\mathbb{1}_{y\in\mathbb{R}_{++}},$$

其中 $I_{2a-1}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+2a)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2a-1}$，对所有 $x\in\mathbb{R}_{++}$ 均成立。由于 f_{Y_1} 是正密度（例如参见 [24]），且 $p(u)$ 有限且为正，因此随机向量 $(Y_1, \check{}X_1)^\mathsf{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 上具有正密度。关于最后一个断言，注意到根据 [18, 定理 1.1], ，扩展生成元为

$$(\mathcal{A}_k V)(y,x) = y + nry + 2(ay - by^2) + 2rx^\mathsf{T}(m - \kappa y - \theta x),$$

对所有 $(y,\ x)^\mathsf{T}\in\mathcal{O}_k,\ k\in\mathbb{N}$. 因此，经过简单计算，我们得到

$$(\mathcal{A}_k V)(y,x) + cV(y,x) \le -c_2\left(y + \frac{r}{c_2}\kappa^\mathsf{T}x\right)^2 - x^\mathsf{T}c_3\,x + c_1\left(y + \frac{r}{c_2}\kappa^\mathsf{T}x\right) + c_4 x,$$

其中 $c_1 = 1 + nr + 2a,\quad c_2 = 2b - c,\quad c_3 = r(2\lambda_{\min}(\theta) - c)\mathbf{I}_n - \frac{r^2}{c_2}\kappa\kappa^\mathsf{T}$ 且 $c_4 = 2rm^\mathsf{T} - r\frac{c_1}{c_2}\kappa^\mathsf{T}$。接下来，为了得到 $c_2\in\mathbb{R}_{++}$ 和 c_3 正定矩阵，我们取 $0 < c < 2(\lambda_{\min}(\theta)\wedge b)$ 和 $0 < r < (2\lambda_{\min}(\theta) - c)(2b-c)\,\lambda_{\max}(\kappa\kappa^\mathsf{T})$。此外，由于 c_3 是对称的，因此 $c_3 = \tilde{c}_3\tilde{c}_3^\mathsf{T}$，其中 $\tilde{c}_3$ 是正定矩阵。因此，我们可以通过以下方式对 $(\mathcal{A}_k V)(y,\ x) + cV(y,\ x)$ 进行界定

$$-c_2\left(y + \frac{r}{c_2}\kappa^\mathsf{T}x - \frac{c_1}{2c_2}\right)^2 - \left(x^\mathsf{T}\tilde{c}_3 - \frac{1}{2}c_4(\tilde{c}_3^{-1})^\mathsf{T}\right)\left(x^\mathsf{T}\tilde{c}_3 - \frac{1}{2}c_4(\tilde{c}_3^{-1})^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} + d,$$

其中 $d = \frac{c_1^2}{4c_2} + \frac{1}{4}c_4 c_3^{-1}c_4^\mathsf{T}$。这就完成了特殊情形 $\rho_{J1} = \mathbf{0}_n$ 下指数遍历性定理的证明。在一般情形下，我们使用引理 3.1 的证明中引入的变换 (28)。设 g 是满足 $|g(y,\ x)| \le V(y,\ x) + 1$ 的博雷尔可测函数，对所有 $(y,\ x)^\mathsf{T}\in\mathcal{D}$ 均成立，则令 $h := g\circ A^{-1}$，容易验证，对所有 $(y,\ \tilde{x})^\mathsf{T}\in\mathcal{D}$，都有

$$|h(y,\tilde{x})| \le V(A^{-1}(y,x)) = y^2 + r\left\|\frac{y}{\rho_{11}}\rho_{J1} + \tilde{x}\right\|_2^2 + 1 \le C(V(y,\tilde{x}) + 1),$$

其中 $C = \left(1 + 2r\mathrm{k}\rho_{J1}\mathrm{k}_2^2 / \rho_{11}^2\right) \vee 2^\circ$ 因此，对过程 $(Y_t,\ \tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 使用不等式 (29)，并取博雷尔可测函数 $\frac{1}{C}h$，可得

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}\left(g(Y_t, X_t)|(Y_0, X_0) = (y_0, x_0)\right) - \mathbb{E}(g(Y_\infty, X_\infty))| &\le BC\left(y_0^2 + r\left\|x_0 - \frac{y_0}{\rho_{11}}\rho_{J1}\right\|_2^2 + 1\right)e^{-\delta t} \\
&\le BC^2(V(y_0, x_0) + 1)e^{-\delta t}.
\end{aligned}
$$

将 BC^2 替换为 B，证明即告完成。 □

下一节的主要目标是利用前几节得到的结果，研究亚临界情形和一种特殊超临界情形下漂移参数的最大似然估计量。

5 最大似然估计

本节中，我们回顾一下，对于基于连续观测的统计估计，我们总是假设扩散参数 ρ 已知，参见例如 [32, 第 50] 页。事实上，通过对过程 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$进行任意短时间的连续观测，对于某个 $T \in \mathbb{R}_{++}$，扩散系数是 $\sigma(Z_t,\ t \in [0,T])$-可测的。事实上，我们有 $\rho\rho^\intercal = \left(\int_0^T Y_s\mathrm{d}s\right)^{-1}\mathrm{h}Z\mathrm{i}_T$，并且对所有 $i,\ j \in \{1,\ \ldots\ldots,\ d\}$，括号过程 $(\mathrm{h}Z\mathrm{i}_T)_{i,\ j} = \mathrm{h}Z^i,\ Z^j\mathrm{i}_T$都可以很容易地用 $\sum_{\ell=1}^{p_m}(Z^i_{t^m_\ell} - Z^i_{t^m_{\ell-1}})(Z^j_{t^m_\ell} - Z^j_{t^m_{\ell-1}})$逼近，其中$t_0^m = 0 \le t_1^m \le \cdots \le t_{p_m}^m = T$是 $[0,T]$ 的一个细分序列，满足 $\sup_{1\le\ell\le p_m}\left|t^m_\ell - t^m_{\ell-1}\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$。

请注意，该收敛依概率成立；由于 $\rho\rho^\intercal$ 是对称正定的，因此可以利用乔列斯基分解得到 ρ 的精确表达式。

5.1 最大似然估计的存在性与唯一性

设 $T \in \mathbb{R}_{++}$。在本小节中，我们利用 Lipster 和 Shiryaev [33]，基于连续观测 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$，提出一个关于 τ 的最大似然估计$\tau_T^\star$的存在性与唯一性的命题。

命题 5.1。设 $a \in \mathbb{R}_{++}$、$b \in \mathbb{R}$、m、$\kappa \in \mathbb{R}^n$ 和 $\theta \in \mathcal{M}_n$。令 $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为随机微分方程 (3) 的唯一强解，其初始随机值为 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\intercal$，且与满足$\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$ 的 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 相互独立。则对每个 $T \in \mathbb{R}_{++}$，几乎必然存在唯一的 τ 的最大似然估计，其形式为

$$
\tau_T^\star = \left(\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\Lambda(Z_s)\ \mathrm{d}s\right)^{-1}\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\ \mathrm{d}Z_s, \tag{32}
$$

其中，对所有 $s \in [0,T]$, $S(Z_s) \overline{=} Z_s^1\rho\rho^\intercal$。

证明。 设 $(\tilde{Z}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是 $\mathrm{d}\tilde{Z}_t = \sqrt{\tilde{Z}_t^1}\,\rho\,\mathrm{d}B_t$ 的解，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 均成立，且初始随机值 $\tilde{Z}_0$ 满足$\mathbb{P}(Z_0 = Z_0) = 1$。因此，利用 Lipster 和 Shiryaev [33, 第 297] 页中的关系式 (7.138)，并将其应用于过程 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$和 $(\tilde{Z}_t)_{t\in[0,T]}$，我们可得相应的似然比 $L\left(\tau,(Z_t)_{t\in[0,T]}\right) = \mathrm{d}\mathbb{P}_Z\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\tilde{Z}}((Z_t)_{t\in[0,T]})$。取其对数，得到如下对数似然比

$$
\ln L\left(\tau,(Z_t)_{t\in[0,T]}\right) = \int_0^T \tau^\intercal\Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\ \mathrm{d}Z_s - \frac{1}{2}\int_0^T \tau^\intercal\Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\Lambda(Z_s)\tau\ \mathrm{d}s. \tag{33}
$$

由于最大似然估计是使似然函数 L 达到最大值的向量 $\tau_T^\star$，我们计算 $\ln\ L$ 的梯度，

$$
\nabla_\tau \ln L(\tau,(Z_t)_{t\in[0,T]}) = \int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\ \mathrm{d}Z_s - \int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\Lambda(Z_s)\ \mathrm{d}s\,\tau
$$

及其海森矩阵

$$H_\tau \ln L(\tau,(Z_t)_{t\in[0,T]}) = -\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\Lambda(Z_s)\,\mathrm{d}s.$$

由于后一个矩阵是负定的，一方面，τ 的最大似然估计是$\nabla_\tau \ln L(\tau,(Z_t)_{t\in[0,T]})$的唯一零点；另一方面，我们推得矩阵 $\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S(Z_s)^{-1}\Lambda(Z_s)\,\mathrm{d}s$ 可逆，从而完成证明。

□

5.2 最大似然估计的相合性：亚临界情形

命题 5.2。 设 $a > \frac{\sigma_1^2}{2}$、 $b \in \mathbb{R}_{++}$、 m、 $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 和 $\theta \in \mathcal{M}_n$ 为可对角化正定矩阵。设$(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为随机微分方程(3) 的唯一强解，其初始随机值 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\intercal$与$(B_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 相互独立，并满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$。那么，由关系式(32)给出的 τ 的最大似然估计 $\tau_T^\star$ 是强一致的，即 $\mathbb{P}\left(\lim_{T\to\infty}\tau_T^\star = \tau\right) = 1.$

证明。 借助与过程 $(Z_t)^{t\in[0,T]}$ 相关的随机微分方程 (3)，我们推得漂移参数向量可写为

$$\tau = \left(\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S^{-1}(Z_s)\Lambda(Z_s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1}\left(\int_0^T \Lambda(Z_s)^\intercal S^{-1}(Z_s)\,\mathrm{d}Z_s - \int_0^T \sqrt{Z_s^1}\Lambda(Z_s)^\intercal S^{-1}(Z_s)\rho\,\mathrm{d}B_s\right).$$

因此，误差项 $\tau_T^\star - \tau$的形式为 $\mathrm{h}M\mathrm{i}_T^{-1}M_T$，其中 $(M_t)^{t\in[0,T]}$是一个布朗鞅，对所有 $t \in [0,T]$，定义为 $M_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{Z_s^1}}\left(\rho^{-1}\Lambda(Z_s)\right)^\intercal \mathrm{d}B_s$，其二次变差为 $\mathrm{h}M\mathrm{i}_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s^1}\left(\rho^{-1}\Lambda(Z_s)\right)^\intercal \rho^{-1}\Lambda(Z_s)\,\mathrm{d}s$。通过简单的矩阵计算，我们可以明确写出 $M_T = (M_T^1, \ldots\ldots, M_T^{d^2+1})^\intercal$各分量的表达式，从而得到

$$M_T^1 = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{Z_s^1}}\sum_{i=1}^d (\rho^{-1})_{i,1}\,\mathrm{d}B_s^i, \quad M_T^2 = -\int_0^T \sqrt{Z_s^1}\sum_{i=1}^d (\rho^{-1})_{i,1}\,\mathrm{d}B_s^i$$

并且对于所有 $k \in \{0,\ldots d-2\}$ 和 $j \in \{0,\ldots d\}$，我们得到 $M^{3+j+k}{}_{T}{}^{d+1} = -\int_0^T \frac{1}{\sqrt{Z_s^1}} Z_s^j \sum_{i=k+2}^{d}$ $(\rho^{-1})_{i,k+2}\,\mathrm{d}B_s^i$,其中取 $Z_s^0 = -1$。我们可以将误差写为

$$\tau_T^\star - \tau = \left(D_T\langle M\rangle_T\right)^{-1}\left(D_T M_T\right),$$

其中 D_T是一个对角矩阵，其元素（相差一个常数因子）为 M_T^i, $i \in \{1,\ldots,d^2+1\}$ 的括号过程的倒数，即 $D_T = \mathrm{diag}(V_T)$，其中 $V_T = (V_T^1,\ldots,V_T^{d^2+1})^\intercal$ 是按如下方式定义的随机向量

$$V_T^1 = \left(\int_0^T \frac{1}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s\right)^{-1}, \quad V_T^2 = \left(\int_0^T Z_s^1\,\mathrm{d}s\right)^{-1}$$

且对所有 $k \in \{0,\ldots d-2\}$ 和 $i \in \{0,\ldots d\}$，$V_T^{3+i+k\ d+1} = \left(\int_0^T {}()\underline{(Z_s^{i\ 2})\,\mathrm{d}s}{}_{Z_s^1}\right)^{-1}$。首先，当 $a > \frac{\sigma_1^2}{2}$ 时，我们有 $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1}\right) = \frac{2b}{2a-\sigma_1^2} < \infty$, $\mathbb{E}\left(Z_\infty^1\right) = \frac{a}{b} < \infty$ 以及 $\mathbb{E}\left(\underline{(Z_\infty^{i\ 2}}_{Z_\infty^1}\right) \le \mathbb{E}\left(\right)(Z_\infty^i)^{2\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\,\mathbb{E}\left(\underline{\ \frac{1}{Z_\infty^1}()^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$，对于所有满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$ 的 $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ 和 $\beta \in]0,\ 2a[$，该式均为有限值，这得益于 [6, 命题 1]，关于

Z_∞^1 的负矩以及将 Burkholder–Davis–Gundy 不等式应用于 X_t 的表达式 (5) 中鞅部分所得的不等式。其次，利用定理 4.1，我们推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s \xrightarrow{a.s.} \frac{2b}{2a-\sigma_1^2}, \quad \text{as } T\to\infty,\\
&\frac{1}{T}\int_0^T Z_s^1\,\mathrm{d}s \xrightarrow{a.s.} \frac{a}{b}, \quad \text{as } T\to\infty,\\
&\frac{1}{T}\int_0^T \frac{(Z_s^i)^2}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left(\frac{(Z_\infty^i)^2}{Z_\infty^1}\right), \quad \text{as } T\to\infty, \text{ for all } i\in\{2,\dots,d\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

因此，由附录中的定理 1 可得，当 T 趋于无穷大时， $D_T M_T \xrightarrow{a.s.} \mathbf{0}_{d^2+1}$ 。所以，只需证明当 T 趋于无穷大时， $D_T \mathrm{h}M\mathrm{i}_T = (TD_T)\left(\frac{1}{T}\mathrm{h}M\mathrm{i}_T\right)$ 几乎必然收敛到一个可逆极限矩阵。一方面，由关系式 (34) 可知 TD_T 收敛，且其极限可逆；另一方面，除一个常数因子外，$\mathrm{h}M\mathrm{i}_T$ 的各分量具有以下形式之一：T、$\int_0^T \frac{1}{Z_s^1}\mathrm{d}s$、$\int_0^T Z_s^1\mathrm{d}s$、$\int_0^T \frac{(Z_s^i)^2}{Z_s^1}\mathrm{d}s$、$i\in\{2,\dots,d\}$、$\int_0^T \frac{Z_s^i}{Z_s^1}\mathrm{d}s$、$i\in\{2,\dots,d\}$ 以及 $\int_0^T \frac{Z_s^i Z_s^j}{Z_s^1}\mathrm{d}s$、$i$、$j\in\{2,\dots,d\}$，其中 $i\neq j$。因此，与上文类似，由于 $\mathbb{E}\left(\frac{Z_\infty^i}{Z_\infty^1}\right) \le \mathbb{E}\left((Z_\infty^i)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1}(\,)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ 以及 $\mathbb{E}\left(\frac{Z_\infty^i Z_\infty^j}{Z_\infty^1}\right) \le \mathbb{E}\left((Z_\infty^i)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}\left((Z_\infty^j)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1}(\,)^\beta\right)$ 对所有 α、$\gamma\in\mathbb{R}_{++}$ 和满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}=1$ 的 $\beta\in]0,2a[$ 均为有限值，我们由定理 4.1 推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Z_s^i}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left(\frac{Z_\infty^i}{Z_\infty^1}\right), \quad \text{as } T\to\infty, \text{ for all } i\in\{2,\dots,d\},\\
&\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Z_s^i Z_s^j}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left(\frac{Z_\infty^i Z_\infty^j}{Z_\infty^1}\right), \quad \text{as } T\to\infty, \text{ for all } i\neq j\in\{2,\dots,d\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

根据关系式 (34) 和 (35)，我们得出

$$\frac{1}{T}\langle M\rangle_T \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1}\Lambda(Z_\infty)^\top \left(\rho^{-1}\right)^\top \rho^{-1}\Lambda(Z_\infty)\right), \quad \text{as } T\to\infty.$$

接下来，我们需要证明这个极限矩阵可逆。为此，只需证明它是正定的，因此令 $y\in\mathbb{R}^{d^2+1}$ 为一个非零向量，并考虑 $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1} y^\top \Lambda(Z_\infty)^\top \left(\rho^{-1}\right)^\top \rho^{-1}\Lambda(Z_\infty) y\right)$。一方面，向量 $\Lambda(Z_\infty)y$ 是 $(1,\ Z_\infty^1,\ \dots\dots,\ Z_\infty^d)$ 的线性组合；另一方面，$(Z_\infty^1,\ \dots\dots,\ Z_\infty^d)^\top$ 具有密度，这归因于 $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 的严格平稳性以及关系式 (31)，因此它几乎必然不为零。利用矩阵 $\left(\rho^{-1}\right)^\top \rho^{-1}$ 的正定性，我们完成定理 5.2 的证明。

□

5.3 最大似然估计的渐近行为：亚临界情形

接下来，为了研究 τ 的最大似然估计 $\tau_T^\star$ 的渐近行为，我们将使用鞅的中心极限定理（CLT），见附录中的定理（2）。

定理 5.1. 设 $a>\frac{\sigma_1^2}{2}$，$b\in\mathbb{R}_{++}$，$m,\kappa\in\mathbb{R}^n$ 和 $\theta\in\mathcal{M}_n$ 为可对角化正定矩阵。令 $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为随机微分方程 (3) 的唯一强解，其初始随机值为 $Z_0=(Y_0,X_0)^\top$，且与 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 独立，并满足 $\mathbb{P}(Y_0\in\mathbb{R}_{++})=1$。则由 (32) 给出的 τ 的最大似然估计 $\tau_T^\star$ 渐近正态，即

$$\sqrt{T}(\tau_T^\star-\tau) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\mathcal{V}), \quad as\ T\to\infty,$$

其中 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_\infty^1}\Lambda(Z_\infty)^\top \left(\rho^{-1}\right)^\top \rho^{-1}\Lambda(Z_\infty)\right)$ 的逆矩阵。

证明。 根据上文命题 5.2 的证明中引入的误差项的鞅表示，我们有

$$\sqrt{T}(\tau_T^\star - \tau) = \left(\frac{1}{T}\langle M\rangle_T\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} M_T.$$

此外，我们还证明了

$$\left(\frac{1}{T}\langle M\rangle_T\right)^{-1} \xrightarrow{a.s.} \mathcal{V}, \quad \text{as } T \to \infty. \tag{36}$$

因此，根据鞅中心极限定理（见附录中的定理 2），我们推得

$$\frac{1}{\sqrt{T}} M_T \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \mathcal{V}^{-1}), \quad \text{as } T \to \infty.$$

证明至此完成。 □

在接下来的小节中，我们将讨论超临界情形的一个子类。对于该子类，与$AD(1, n)$ 模型 3 相关的过程是非遍历的，我们将其称为“特殊超临界情形”。

5.4 特殊超临界情形

在本部分中，我们将 $d^2 - n$ 维向量 $\tilde{\tau} = (b, \kappa_1, \theta_{11}, \ldots, \theta_{1n}, \ldots, \kappa_n, \theta_{n1}, \ldots, \theta_{nn})^\mathsf{T}$ 视为未知漂移参数向量。接下来，我们针对特殊超临界情形，基于连续观测 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$（其中 $T \in \mathbb{R}_{++}$），提出一个关于 τ 的最大似然估计 $\tilde{\tau}$ 唯一存在的命题。

注记 5.1. 在超临界情形下，由于误差项中包含在命题 *5.2* 的证明中定义的积分 V_T^1 （见 *[7,* 命题*4]*），a 和 m 的最大似然估计甚至不是弱相合的。因此，下文假设参数 $c = (a, m)^\mathsf{T}$ 已知。然而，b 的最大似然估计是强一致的，并且对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，$\kappa_i$ 和 θ_{ij} 的最大似然估计是弱相合的，见定理 *5.2*。在其余情形下，通过类似地假设所有不一致的漂移参数均已知，我们能够研究与 $AD(1, n)$ 模型相关的统计估计。

Next，我们给出命题 5.1 的第二种表述，其中假设 $c = (a, m)^\mathsf{T}$ 已知 .

命题 5.3. 设 $c = (a, m)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n$ 为已知参数向量，$b \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 和 $\theta \in \mathcal{M}_n$。设 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为随机微分方程 (3) 的唯一强解，其初始随机值 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\mathsf{T}$与满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$的 $(B_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 相互独立。那么，对每个 $T \in \mathbb{R}_{++}$，τ 几乎必然存在唯一的最大似然估计，其形式为

$$\tilde{\tau}_T^\star = \left(\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \tilde{\Lambda}(Z_s)\, \mathrm{d}s\right)^{-1} \left(-\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \mathrm{d}Z_s + \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} c\, \mathrm{d}s\right),$$

其中，对所有 $s \in [0, T]$, $S(Z_s) = Z_s^1 \rho\rho^\mathsf{T}$ 以及 $\tilde{\Lambda}(Z_s) = \begin{pmatrix} Z_s^1 & \mathbf{0}_{n(n+1)}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0}_n & I_n \otimes Z_s^\mathsf{T} \end{pmatrix}$。

证明。 设 $(\tilde{Z}_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为 $\mathrm{d}\tilde{Z}_t = \sqrt{\tilde{Z}_t^1}\, \rho\, \mathrm{d}B_t$ 的解，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$均成立，其初始随机值为 $\tilde{Z}_0$，满足$\mathbb{P}(Z_0 = \tilde{Z}_0) = 1$。因此，利用 Lipster 和 Shiryaev [33, 第 297] 页中的关系式 (7.138)，并将其应用于$\tilde{}$过程 $(Z_t)^{t\in[0,T]}$ 和 $(\tilde{Z}_t)^{t\in[0,T]}$，我们得到相应的对数似然比为

$$\ln L\left(\tilde{\tau}, (Z_t)_{t\in[0,T]}\right) = \int_0^T (c - \tilde{\Lambda}(Z_s)\tilde{\tau})^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1}\, \mathrm{d}Z_s - \frac{1}{2}\int_0^T (c - \tilde{\Lambda}(Z_s)\tilde{\tau})^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} (c - \tilde{\Lambda}(Z_s)\tilde{\tau})\, \mathrm{d}s.$$

具有梯度向量

$$\nabla_{\tilde{\tau}} \ln L(\tilde{\tau}, (Z_t)_{t\in[0,T]}) = -\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1}\, \mathrm{d}Z_s + \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} (c - \tilde{\Lambda}(Z_s)\tilde{\tau})\, \mathrm{d}s.$$

由于相应的海森矩阵 $H_\tau L(\tilde{\tau}) = -\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \tilde{\Lambda}(Z_s)\, \mathrm{d}s$ 是负定的，因此我们推断最大似然估计 $\tilde{\tau}_T^\star$ 是 $\nabla_{\tilde{\tau}} L(\tilde{\tau}) = \mathbf{0}_d$ 的唯一解。这就完成了证明。 □

注 5.2. 与命题 (5.2) 和定理 (5.1)的思路类似，在亚临界情形下，可以证明与漂移参数向量 $\tilde{\tau}$ 相关的最大似然估计 $\tilde{\tau}_T^\star$ 的渐近性质。

为了研究最大似然估计 $\tilde{\tau}_T^\star$ 的渐近行为，我们需要以下克罗内克引理的积分形式，见 [31, 引理 B.3.2]:

引理 5.1. 设 $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个可测函数，且对所有 $T \in \mathbb{R}_+$, $G(T) = \int_0^T g(t)\, \mathrm{d}t$。若 $\lim_{T\to\infty} G(T) = \infty$，则对每个有界可测函数 $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，若极限 $f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{G(T)} \int_0^T g(t) f(t)\, \mathrm{d}t = f(\infty).$$

下一个定理给出了特殊超临界情形下最大似然估计 $\tilde{\tau}_T^\star$ 的渐近行为 e.

定理 *5.2.* 设 $c = (a, m)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n$ 为已知参数向量， $\kappa \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathcal{M}_n$ 为可对角化负定矩阵，且 $b \in (\lambda_{\max}(\theta), 0)$。令 $(Z_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 为随机微分方程 *(3)* 的唯一强解，其初始随机值为 $Z_0 = (Y_0, X_0)^\mathsf{T}$，且与 $(B_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 独立，并满足 $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_{++}) = 1$。令 P 为将 θ 变换为对角矩阵 D 的模态矩阵。假设 $\mathrm{diag}(P^{-1}m)P^{-1}\kappa \in \mathbb{R}^n_-$。则

$$Q_T(\tilde{\tau}_T^\star - \tilde{\tau}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\eta\eta^\mathsf{T})^{-1}\eta\xi, \quad as\ T \to \infty, \tag{37}$$

其中 $Q_T = \begin{bmatrix} e^{-\frac{b}{2}T} & \mathbf{0}_{n(n+1)}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0}_{n(n+1)} & I_n \otimes \tilde{Q}_T \end{bmatrix}$ 满足 $\tilde{Q}_T = \mathrm{diag}\left(e^{-\frac{b}{2}T}, e^{(b-2\lambda_{\min}(\theta))T}, \ldots, e^{(b-2\lambda_{\min}(\theta))T}\right)$，$\eta$ 由几乎必然极限 $Q_T^{-1}\mathbb{h}\,\tilde{M}\mathbb{i}_T Q_T^{-1} \xrightarrow{a.s.} \eta\eta^\mathsf{T}$ 定义，其中 $T \to \infty$，且 $\mathbb{h}\,\tilde{M}\mathbb{i}_T = \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \tilde{\Lambda}(Z_s)\, \mathrm{d}s$，而 ξ 是与 η 独立的 $d^2 - n$ 维标准正态分布随机向量。

证明。 将与过程 Z 相关的随机微分方程写成如下形式

$$\mathrm{d}Z_t = (c - \tilde{\Lambda}(Z_t)\tilde{\tau})\, \mathrm{d}t + \sqrt{Z_t^1}\rho\, \mathrm{d}B_t,$$

很容易验证，对于 $T \in \mathbb{R}_{++}$，我们有

$$\tilde{\tau} = \left(\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \tilde{\Lambda}(Z_s)\, \mathrm{d}s\right)^{-1} \left(-\int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1}\, \mathrm{d}Z_s + \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} c\, \mathrm{d}s + \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \sqrt{Z_s^1}\rho\, \mathrm{d}B_s\right)$$

因此，误差项可写为 $\tilde{\tau}_T^\star - \tilde{\tau} = \mathbb{h}\,\tilde{M}\mathbb{i}_T^{-1}\tilde{M}_T$，其中 $\tilde{M}_T = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{Z_s^1}} \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T}(\rho^{-1})^\mathsf{T}\, \mathrm{d}B_s$，且 $\mathbb{h}\,\tilde{M}\mathbb{i}_T = \int_0^T \tilde{\Lambda}(Z_s)^\mathsf{T} S(Z_s)^{-1} \tilde{\Lambda}(Z_s)\, \mathrm{d}s$。此外，对于所有 $k \in \{1, \ldots, d\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$， $\tilde{M}_T$ 的各分量均可显式写为

$$\tilde{M}_T^1 = \int_0^T \sqrt{Z_s^1} \sum_{i=1}^d (\rho^{-1})_{i,1}\, \mathrm{d}B_s^j \quad \text{and} \quad \tilde{M}_T^{1+k+(j-1)d} = \int_0^T \frac{Z_s^k}{\sqrt{Z_s^1}} \sum_{i=1}^d (\rho^{-1})_{i,j}\, \mathrm{d}B_s^j.$$

因此，h $\tilde{M}$i$_T$ 的各分量都可写成积分形式（相差一个常数） $\int_0^T \frac{Z_s^i Z_s^j}{Z_s^1}ds$，其中 i，$j \in$ {1，……，d}。

接下来，由于 $b \in (\lambda_{\max}(\theta), 0)$ 且 diag$(P^{-1}m)P^{-1}\kappa \in \mathbb{R}_-^n$，根据 [9], 的引理 4.4 和引理 7.2，分别得到以下两个结果：**第一个结果**：存在一个随机变量 G_1，使得 $e^{bt}Z_t^1 \xrightarrow{a.s.} G_1$，当 $t \to \infty$ 时；**第二个结果**：对于所有 $i \in$ {1，……，n}，存在一个随机变量 $\tilde{G}_i$，使得 $e^{\lambda_{i(\theta)}t}\tilde{X}_t^i \xrightarrow{a.s.} \tilde{G}_i$，当 $t \to \infty$ 时，其中 $(\tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是以下随机微分方程的唯一强解

$$\mathrm{d}\tilde{X}_t = (\tilde{m} - \tilde{\kappa}Y_t - D\tilde{X}_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\check{\rho}\,\mathrm{d}B_t,$$

初值为 $\tilde{X}_0 = P^{-1}X_0$，其中 $\tilde{m} = P^{-1}m$ $\tilde{\kappa} = P^{-1}\kappa$ 且 $\check{\rho} = P^{-1}\tilde{\rho}$。

现在，利用以下事实：对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，我们对所有 $i \in$ {1、……、n}，有 $X_t^i = \sum_{k=1}^n P_{i,k}(\theta)\tilde{X}_t^k$。由于 $e^{\lambda_k(\theta)}\tilde{X}_t^i \xrightarrow{a.s.} \tilde{G}_i$，当 $t \to \infty$ 时，对于所有 $i \in$ {1、……、n}，我们得到

$$e^{\lambda_{\min}(\theta)t}X_t^i = \sum_{k=1}^n P_{i,k}(\theta)e^{\lambda_{\min}(\theta)t}\tilde{X}_t^k \xrightarrow{a.s.} P_{i,i_0}(\theta)\tilde{G}_{i_0} =: G_i(\theta),$$

其中，$i_0 \in$ {1、……、n} 是与最小特征值 $\lambda_{\min}(\theta)$ 对应的指标。因此，根据引理 5.1，对于所有 i，$j \in$ {1、……、n}，我们得到

$$e^{bT}\int_0^T Z_s^1\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{b}(1-e^{bT})\frac{\int_0^T e^{-bs}e^{bs}Z_s^1\,\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{-bs}\,\mathrm{d}s} \xrightarrow{a.s.} -\frac{G_1}{b}, \quad \text{as } T\to\infty,$$

$$e^{\lambda_{\min}(\theta)T}\int_0^T Z_s^i\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{\lambda_{\min}(\theta)}(1-e^{\lambda_{\min}(\theta)T})\frac{\int_0^T e^{-\lambda_{\min}(\theta)s}e^{\lambda_{\min}(\theta)s}Z_s^i\,\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{-\lambda_{\min}(\theta)s}\,\mathrm{d}s} \xrightarrow{a.s.} \frac{-G_i(\theta)}{\lambda_{\min}(\theta)}, \quad \text{as } T\to\infty,$$

and

$$e^{-(b-2\lambda_{\min}(\theta))T}\int_0^T \frac{Z_s^iZ_s^j}{Z_s^1}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{b-2\lambda_{\min}(\theta)}\left(1-e^{-(b-2\lambda_{\min}(\theta))T}\right)\frac{\int_0^T e^{(b-2\lambda_{\min}(\theta))s}\frac{e^{\lambda_{\min}(\theta)s}Z_s^i\,e^{\lambda_{\min}(\theta)s}Z_s^j}{e^{bs}Z_s^1}\,\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{(b-2\lambda_{\min}(\theta))s}\,\mathrm{d}s}$$

$$\xrightarrow{a.s.} \frac{G_i(\theta)G_j(\theta)}{(b-2\lambda_{\min}(\theta))G_1}, \quad \text{as } T\to\infty,$$

因此，保证 Q_T^{-1}h $\tilde{M}$i$_T Q_T^{-1}$ 几乎必然收敛的 Q_T 表达式由此得出，并且 Q_T^{-1}h $\tilde{M}$i$_T Q_T^{-1}$ 的几乎必然极限矩阵 $\eta\eta^\intercal$ 确实存在。此外，根据定理 2，我们得到$Q_T^{-1}\tilde{M}_T \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta\xi$，当 $T\to\infty$，其中 ξ 是一个与 η 独立的 d^2-n 维标准正态分布随机向量。然后，根据斯卢茨基引理，我们有

$$(Q_T^{-1}\tilde{M}_T, Q_T^{-1}\langle\tilde{M}\rangle_T Q_T^{-1}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\eta\xi, \eta\eta^\intercal), \quad \text{as } T\to\infty.$$

最后，我们得到 $Q_T(\tilde{\tau}_T^\star - \tilde{\tau}) = (Q_T^{-1}$h $\tilde{M}$i$_T Q_T^{-1})^{-1}(Q_T^{-1}\tilde{M}_T) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\eta\eta^\intercal)^{-1}\eta\xi$，as $T\to\infty$. □

附录

下面我们回顾一些用于研究 τ 的最大似然估计渐近行为的连续局部鞅极限定理。首先回顾连续局部鞅的一个强大数定律，参见 Liptser 和 Shiryaev [33]。

定理 1. *(Liptser 和 Shiryaev (2001))* 设 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F})^{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ 是满足通常条件的滤过概率空间。设 $(M_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 的平方可积连续局部鞅，且满足 $\mathbb{P}(M_0 = 0)\ = 1.$ 。设 $(\xi_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是渐进可测过程，使得

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \xi_u^2\ \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_u < \infty\right) = 1, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

and

$$\int_0^t \xi_u^2\ \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_u \xrightarrow{a.s.} \infty, \quad as\ \ t \longrightarrow \infty,$$

其中$(\langle M\rangle_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 表示 $M.$ 的二次变差过程。于是

$$\frac{\int_0^t \xi_u\ \mathrm{d}M_u}{\int_0^t \xi_u^2\ \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_u} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad as\ \ t \longrightarrow \infty.$$

若 $(M_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ 是标准维纳过程，则可以放宽$(\xi_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 的渐进可测性要求 *to* 可测性 以及相对于滤过$(\mathcal{F})^{t\in\mathbb{R}_+}$·的适应性

第二个定理讨论连续多元局部鞅的渐近行为，参见 [42, 定理 4.1]。

定理 2. 对于 $p \in \mathbb{N}\backslash\ \{0\}$，设 $M = (M_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 是一个相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)^{t\in\mathbb{R}_+}$ 的 p 维平方可积连续局部鞅，满足 $\mathbb{P}(M_0 = 0) = 1$。假设存在函数 $Q:\ [t_0, \infty)\ \to \mathcal{M}_p$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}_+$ 满足条件 $Q(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 都是可逆的（非随机）矩阵，且 $\lim_{t\to\infty}\|Q(t)\|\ = 0$，并且

$$Q(t)\langle M\rangle_t Q(t)^{\mathsf{T}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta\eta^{\mathsf{T}}, \quad as\ t \longrightarrow \infty,$$

其中 η 是 $\mathcal{M}_p$ 中的一个随机矩阵。那么，对于定义在$(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F})^{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$上的每个随机矩阵 $A \in \mathcal{M}_{k,l}$, k, $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们有

$$(Q(t)M_t, A) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\eta Z, A), \quad as\ t \longrightarrow \infty,$$

wh其中 Z 是一个与$(\eta$, 独立的 p 维标准正态分布随机向量， $A)$.

参考文献

[1] Alfonsi, A. (2015). 仿射扩散及相关过程：模拟、理论与应用（第6卷，第20页）。沙姆：施普林格。[2] Barczy, M., Ben Alaya, M. B., Kebaier, A., & Pap, G. (2019). 跳跃型 Heston 模型最大似然估计量的渐近行为。《统计规划与推断杂志》，198，139-164。[3] Barczy, M., Döring, L., Li, Z., & Pap, G. (2014). 次临界仿射双因子模型的参数估计。《统计规划与推断杂志》，151，37-59。[4] Barczy, M., Döring, L., Li, Z., & Pap, G. (2014). 仿射双因子模型的平稳性与遍历性。《应用概率进展》，46(3)，878-898。[5] Basak, G. K., & Lee, P. (2008). 多维 Ornstein-Uhlenbeck 过程（不一定稳定）的漂移系数估计量的渐近性质。《电子统计学杂志》，2，1309-1344。

[6] Ben Alaya, M., & Kebaier, A. (2013). 遍历与非遍历平方根扩散的最大似然估计量的渐近行为。《随机分析与应用》，Taylor and Francis：STM，行为科学与公共卫生系列。[7] Ben Alaya, M., & Kebaier, A. (2012). 平方根扩散的参数估计：遍历与非遍历情形。《随机模型》，28(4)，609-634。[8] Bhattacharya, R. N. (1982). 关于马尔可夫过程的函数型中心极限定理与重对数律。《概率论及相关领域杂志》，60(2)，185-201。[9] Bolyog, B., & Pap, G. (2019). 基于连续时间观测的仿射扩散条件最小二乘估计。《随机过程统计推断》，22。10.1007/s11203-018-9174-z。[10] Bolyog, B. & Pap, G. (2016). 双因子仿射扩散的平稳性与遍历性条件。《随机分析通讯》。10.31390/cosa.10.4.12。[11] Chung, K. L. (1982). 从马尔可夫过程到布朗运动讲义。施普林格，纽约。[12] Cox, J.C., Ingersoll, J. E., & Ross, S.A. (1985). 利率期限结构理论。《计量经济学》53(2)：385–407。[13] Dai, Q., & Singleton, K. J. (2000). 仿射期限结构模型的设定分析。《金融学杂志》，55(5)，1943-1978。[14] Duffie, D., Filipovic, D. & Schachermayer, W. (2003). 仿射过程及其在金融中的应用。《应用概率年刊》13，984–1053。[15] Fathallah, H. (2013). 通过平均方法得到的高斯自回归过程最小二乘估计量的渐近性质。《通讯：统计理论与方法》42，第17期，3148–3173。[16] Fathallah, H. & Kebaier, A. (2012). 具有爆炸增长与混合增长的连续时间向量鞅的加权极限定理。《随机分析与应用》30，第2期，238–257。[17] Filipovic, D. & Mayerhofer, E. (2009). 仿射扩散过程：理论与应用。SSRN电子期刊。8。[18] Friesen, M., Jin, P., Kremer, J., & Rüdiger, B. (2020). 仿射跳扩散过程转移密度的正则性与遍历性。arXiv预印本 arXiv:2006.10009。[19] Friesen, M., Jin, P., & Rüdiger, B. (2020). 具有移入的多类型连续状态分枝过程的密度存在性。《随机过程及其应用》，130(9)，5426-5452。[20] Getoor, R. K. (1975). 马尔可夫过程：Ray过程与右过程。数学讲义。施普林格出版社柏林海德堡。[21] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1994). 矩阵分析专题。剑桥大学出版社。[22] Ikeda, N. & Watanabe, S. (1981). 随机微分方程与扩散过程，北荷兰出版公司。[23] Jacod, J., & Shiryaev, A. (2013). 随机过程极限定理（第288卷）。施普林格科学与商业媒体。[24] Jeanblanc, M., Yor, M., & Chesney, M. (2009). 金融市场数学方法，施普林格出版社伦敦有限公司。[25] Jin, P., Kremer, J., & Rüdiger, B. (2017). 基于 α-根过程的仿射双因子模型的指数遍历性。《应用概率进展》，49(4)，1144-1169。

[26] Jin, P., Kremer, J., & Rüdiger, B. (2020年). 仿射过程极限分布的存在性. 《数学分析与应用杂志》, 486(2), 123912.[27] Jin, P., Rüdiger, B., & Trabelsi, C. (2016年). 跳扩散 CIR 过程的指数遍历性. 载于《环境与金融经济学随机过程：高级研究中心，奥斯陆，挪威，2014—2015》（第 285–300 页）。施普林格国际出版公司.[28] Karatzas, I., & Shreve, S. (2012年). 布朗运动与随机微积分（第 113 卷）。施普林格科学与商业媒体.[29] Keller-Ressel, M., Schachermayer, W. & Teichmann, J. (2011). 仿射过程是正则的. 《概率论及相关领域》151, 591–611.[30] Keller-Ressel, M., Schachermayer, W., & Teichmann, J. (2013年). 一般状态空间上仿射过程的正则性. 《电子概率杂志》, 18, 1–17.[31] Küchler, U. & Sørensen, M. (1997). 随机过程指数族，施普林格出版社，纽约.[32] Kutoyants, Y. A. (2004). 遍历扩散过程的统计推断. 施普林格科学与商业媒体.[33] Liptser, R. S., & Shiryaev, A. N. (2001). 随机过程统计学 II：应用（第 2 卷）。施普林格科学与商业媒体.[34] Meyn, S. P. & Tweedie, R. L. (1992). 马尔可夫过程的稳定性 I：离散时间链的判据. 《应用概率学进展》24, 542–574.[35] Meyn, S. P. & Tweedie, R. L. (1993). 马尔可夫过程的稳定性 II：连续时间过程与抽样链. 《应用概率学进展》25, 487–517.[36] Meyn, S. P. & Tweedie, R. L. (1993). 马尔可夫过程的稳定性 III：连续时间过程的 Foster–Lyapunov 判据. 《应用概率学进展》25, 518–548.[37] Meyn, S. P. & Tweedie, R. L. (2009). 《马尔可夫链与随机稳定性》，第 2 版。剑桥大学出版社，剑桥.[38] Petersen, K. B., & Pedersen, M. S. (2012). 《矩阵速查手册》（版本：2012年11月15日）.[39] Sharpe, M. (1988). 《马尔可夫过程一般理论》。学术出版社，波士顿，MA.[40] Touati, A. (1992). 半鞅序列依分布泛函收敛至布朗运动混合. 《概率论及其应用》36(4), 752–771.[41] Van der Vaart, A. W. (1998). 《渐近统计学》，剑桥大学出版社.[42] Van Zanten, H. (2000). 连续局部鞅的多元中心极限定理. 统计与概率快报，50(3), 229–235.[43] Zhang, X., & Glynn, P. W. (2018). 仿射跳扩散：随机稳定性与极限定理. arXiv 预印本 arXiv:1811.00122.