arXiv:2303.08497v1 [math.AC] 15 Mar 2023

若干不可约复反射群的不变量环的算术性质

David Mundelius慕尼黑工业大学，数学中心 -
M11 玻尔兹曼街 3号，85748 加兴，德国

david.mundelius@tum.de

2023年3月15日

摘要

本文确定了对称群和次数为 2 的本原复反射群的哪些整反射表示具有同构于多项式环的不变环。

关键词：反射群，整表示，不变环

引言

根据 Shephard 和 Todd 的一个著名结果 [10] ，每个有限复反射群的不变量环都同构于一个多项式环。该结果最初是通过对所有不可约有限复反射群进行分类，并明确确定其中每个群的不变量环而得到证明的。每个这样的群都定义在某个代数数域 K 上，事实上也可以定义在 K的整数环 R 上；然而，有时这些群在 R上存在若干两两不等价的表示，而它们都与 K上的反射表示等价，见 [2, 4, 5]。

本文旨在确定某些不可约复反射群的整数环 R 上的不变环是否同构于 R 上的多项式环；若不同构，则需要使 R 的哪些元素可逆，才能得到一个同构于多项式环的不变量环。我们从第 1 节的一些一般结果开始，这些结果将在后续各节的计算中用到；关于

[9]，有关有限群在戴德金整环上的不变量环何时为多项式环的更一般结果,

在第2节中，我们研究 Shephard 和 Todd 分类中出现的一个不可约复反射群无限族，即对称群。这些群定义为整数上的反射群，并且在 $\mathbb{Z}$ 上有若干两两不等价的反射表示，这些表示已由 Craig 分类 [2]。对于这些整表示中的每一个，我们确定在满足 $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ 的哪些环 R 上，其不变量环是多项式环。

在第3节中，我们讨论另一类不可约复反射群，即次数为 2 的本原反射群，也就是那些不能用单项矩阵表示的 $Gl_2(\mathbb{C})$ 中的反射群。这类群共有 19 个，在 Shephard 和 Todd 的分类中编号为 4 至 22。它们的整反射表示已由 Feit 分类 [5]。对于其中每一个群，我们确定其在$\mathbb{C}$ 上的不变量环，进而判断相应整数环上的不变量环是否为多项式环。

所有显式计算均使用计算机代数系统 Singular [3]及其库 finvar [6]完成。本文的许多结果也曾发表于作者未公开的硕士论文 [8]中。

如果 L 是某个交换环 R上的有限生成自由 R模，秩为 n，那么我们可以将 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 中的多项式视为定义在 L上的函数，并用 $R[L]$ 代替 $R[x_1, \ldots, x_n]$。如果 S是一个交换 R代数，那么我们通常用 $S[L]$ 代替 $S[L \otimes_R S]$。

致谢

我要感谢我的导师 Gregor Kemper 提出这一课题并一直给予我支持。此外，我还要感谢巴伐利亚精英网络的 TopMath 研究生项目，以及慕尼黑工业大学 TUM 研究生院的 TopMath 研究生中心所提供的支持。

1 一般结果

命题 1.1。设 R 是一个整环，其商域为 K，且 f_1，……，$f_n \in R[x_1, \ldots, x_n]$ 是齐次的。假设在 $K[x_1, \ldots, x_n]$ 上存在一种单项式序，使得 f_1，……，f_n 的首项系数都是 R 中的单位，并且 f_1，……，f_n 的首项单项式是代数独立的

。那么我们有 $R[f_1,\ldots,f_n]=K[f_1,\ldots,f_n]\cap R[x_1,\ldots,x_n]$。

证明。我们用 $\leq$ 表示单项式序，并用 LM(f)表示多项式 f 关于 $\leq$ 的首项单项式。不失一般性，我们可以假设所有 f_i 的首项系数均为 1。假设存在一个不属于 $R[f_1,\ldots,f_n]$ 的 $p\in K[f_1,\ldots,f_n]\cap R[x_1,\ldots,x_n]$，并选取首项单项式最小的这样一个 p。于是可以写成 $p=\sum_{i=1}^{m}c_i f_1^{e_{i,1}}\cdots f_n^{e_{i,n}}$，其中 $c_i\in K$ 且 $e_{i,j}\in\mathbb{N}$。记 $g_i=f_1^{e_{i,1}}\cdots f_n^{e_{i,n}}$，并且可以假设这些 g_i 两两不同。由于 $f_1,\ldots,f_n$ 的首项单项式代数独立，$\mathrm{LM}(g_i)=\mathrm{LM}(f_1)^{e_{i,1}}\cdots\mathrm{LM}(f_n)^{e_{i,n}}$ 两两不同，因此可以假设 $\mathrm{LM}(g_1)>\mathrm{LM}(g_2)>\ldots>\mathrm{LM}(g_n)$。于是$LM(p)=\mathrm{LM}(g_1)$，且 p 的首项系数为 c_1。由于 $p\in R[x_1,\ldots,x_n]$，这意味着 $c_1\in R$，因此 $c_1g_1\in R[f_1,\ldots,f_n]$，并且对于 $p':=p-c_1g_1$，有 $\mathrm{LM}(p')<\mathrm{LM}(p)$ 且 $p'\in K[f_1,\ldots,f_n]\cap R[x_1,\ldots,x_n]$。根据 p的选取，这意味着 $p'\in R[f_1,\ldots,f_n]$，因而 $p\in R[f_1,\ldots,f_n]$也成立。 □

命题 1.2。设 R 是一个戴德金整环，且 $K=\mathrm{Quot}(R)$。设 $L:=R^n$，并设 $G\subseteq Gl(L)$ 是一个有限子群，使得 $K[L]^G$ 是由齐次元素 $f_1,\ldots,f_n$ 生成的多项式环。那么以下陈述等价：

(i) $R[f_1,\ldots,f_n]=R[L]^G$。*(ii)* 对每个极大理想 $\mathfrak{m}\subset R$，都有 $R_{\mathfrak{m}}[f_1,\ldots,f_n]=R_{\mathfrak{m}}[L]^G$。*(iii)* 对每个极大理想 $\mathfrak{m}\subset R$，$f_1,\ldots,f_n$ 的类在域 $R/\mathfrak{m}$ 上代数独立。

证明。显然，(i) 蕴含 (ii)。为证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i)，首先注意到我们有 $R[L]=\bigcap_{\mathfrak{m}}R_{\mathfrak{m}}[L]$，其中交集遍历所有极大理想 $\mathfrak{m}\subset R$。这意味着 $R[L]^G=\bigcap_{\mathfrak{m}}R_{\mathfrak{m}}[L]^G$，并且我们还有 $R[f_1,\ldots,f_n]=\bigcap_{\mathfrak{m}}R_{\mathfrak{m}}[f_1,\ldots,f_n]$，因此结论得证。

(ii) 和 (iii) 的等价性在 [9, 引理 3.3] 中得到证明。 □

本文将多次用到 Kemper [7, 命题 16] 中的以下结果：

定理 1.3。设 G 是一个有限群，V 是 G在域 K上的一个表示。若该表示是忠实的，则对于元素 f_1，.....，$f_n\in K[V]^G$，以下两个性质等价：

(i) 多项式 f_1、.....、f_n 代数独立，并且我们有次数 $f_1\cdots$次数 $f_n=|G|$。*(ii)* $K[V]^G=K[f_1,\ldots,f_n]$。

2 对称群

固定一个整数 $n \geq 3$。对称群 S_n 在 $\mathbb{Z}$ 上有一个秩为 $n-1$ 的不可约反射表示，可定义如下：考虑 S_n 通过置换矩阵对 $M := \mathbb{Z}^n$ 的作用，然后将其限制到 S_n-不变量子空间 $L_0 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$。据此，$L_0$ 成为 S_n 的忠实 $\mathbb{Z}$-表示。

定理 2.1. 不变量环$\mathbb{Z}[L_0]^{S_n}$ 是一个多项式环。

证明。设 $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}[M]$ 为初等对称多项式，且 $\deg(f_i) = i$。众所周知，$\mathbb{Z}[M]^{S_n} = \mathbb{Z}[f_1, \ldots, f_n]$。我们断言，$\mathbb{Z}[L_0]$ 由 $f_2, \ldots, f_n$ 在 L_0上的限制生成，我们将它们记作$g_2, \ldots, g_n$。

根据命题 1.2，只需证明对于每个素数 p，$g_2, \ldots, g_n$ 在 $\mathbb{F}_p[L_0]$ 中的类 $\overline{g_2}, \ldots, \overline{g_n}$是代数独立的。

我们有 $\mathbb{F}_p[L_0] \cong \mathbb{F}_p[M]/(\overline{f_1})$，因此只需证明 $f_2, \ldots, f_n$ 在 $\mathbb{F}_p[M]/(f_1)$ 中的类是代数独立的。但这些类生成了 $\mathbb{F}_p$-子代数 $\mathbb{F}_p[f_1, \ldots, f_n]/(f_1)$，其克鲁尔维数为 $n-1$，因此它们必定代数独立。 □

然而，存在若干种彼此不等价的 S_n 在 $\mathbb{Z}$ 上的表示，它们与 L_0 在 $\mathbb{Q}$上的表示等价；Craig 已在附录2]中对这些表示进行了分类 [2, 。为了给出这些表示，我们需要引入一些记号：设 $E^{i,j}$ 为一个 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵，其中第 (i,j) 个元素为 1，其余元素均为 0。$E^{0,j}$ 或 $E^{n,j}$ 总表示零矩阵。现在，对所有 $1 \leq k \leq n-1$，我们定义 $F_k := I_{n-1} + E^{n-k-1,n-k} - 2E^{n-k,n-k} + E^{n-k+1,n-k}$，其中 I_{n-1}表示单位矩阵。此外，对于每个整除 n的 $d \in \mathbb{N}$，我们令 $V_d := dE^{1,1} + \sum_{i=2}^{n-1} (E^{i,i} + (n-i)E^{1,i}) \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q})$。现在我们可以表述 Craig 定理：

定理 2.2。(Craig [2]) 对于 $n+1$ 的每个因子 d，都可以通过将 $1 \leq k \leq n-1$ 的对换$(k, k+1)$ 映射到 $V_d^{-1} F_k V_d$，定义一个在有理数域 $\mathbb{Z}$ 上、秩为 $n-1$ 的 S_{n+1} 的矩阵表示。这些表示在 $\mathbb{Z}$ 上两两不等价，但在 $\mathbb{Q}$ 上，它们都等价于上文定义的表示L_0 。此外，任何在 $\mathbb{Q}$ 上等价于 L_0 的 $\mathbb{Z}$- S_n 表示，在 $\mathbb{Z}$ 上都等价于这些表示之一。

我们将由矩阵 $V_d^{-1} F_k V_d$ 表示的 $\mathbb{Z}$-表示记为 L_d。通过显式计算，我们得到定理中所用矩阵的以下性质：

引理 2.3。

a) 对于 $1 \le k \le n-3$，有 $V_d^{-1} F_k V_d = F_k$。*b)* $V_d^{-1} F_{n-2} V_d$ 的第一行为 $(1, \frac{n}{d}, 0, \ldots, 0)$。*c)* $V_d^{-1} F_{n-1} V_d$ 的第一行为 $(1-n, -\frac{n}{d}(n-2) -\frac{n}{d}(n-3) \ldots, -\frac{n}{d})$。

Craig 定理告诉我们，表示 L_0 必与 $\mathbb{Z}$上的某个 L_d 等价；后面会清楚地看到，事实上它就是 L_n。

引理 2.4. 假设 $n \ge 5$，并令 $d > 0$ 为 n的一个因子。若对某个满足 $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$的环 R，不变量环 $R[L_d]^{S_n}$ 是多项式环，则 $\frac{d}{n} \in R$。

证明。 假设 $\frac{d}{n} \notin R$，因此存在一个整除 $\frac{n}{d}$ 且不是 R中单位的素数 p。令 $\overline{L_d}$ 表示 S_n 的 $\mathbb{F}_p$-表示，它由将定义 L_d 的所有矩阵模 p约化得到。由引理 2.3 可知，恒等元以及对换 (1, 2) 和 (2, 3) 对应的约化矩阵两两不同，因此 S_n 在 $Gl_{n-1}(\mathbb{F}_p)$中的像至少包含三个元素。对于 $n \ge 5$，这意味着映射 $S_n \to Gl_{n-1}(\mathbb{F}_p)$必为单射，否则 A_n 将包含在核中。

由于 $R[L_d]^{S_n}$ 是多项式环，它由次数为 $2, \ldots, n$ 的齐次元素生成；这些元素也生成 $\mathbb{Q}$ =Quot(R) 上的不变环。因此，由命题 1.2 可知，这些元素在 $\mathbb{F}_p$ 上的类代数独立；又由于我们在上文已经看到表示 $\overline{L_d}$ 是忠实的，故根据定理 1.3，它们生成不变环 $\mathbb{F}_p[\overline{L_d}]^{S_n}$。

特别地，这表明$\mathbb{F}_p[\overline{L_d}]^{S_n}$ 不含次数为 1 的元素。引理 2.3 表明，所有满足 $1 \le k < n$ 的对换 $(k, k+1)$ 在$\overline{L_d}$上的作用矩阵，其第一行为 (1, 0, . . . , 0)。因此，这些元素都固定 $x_1 \in \mathbb{F}_p[\overline{L_d}]$ ；又由于这些对换生成 S_n，所以得到 $x_1 \in \mathbb{F}_p[\overline{L_d}]^{S_n}$，这与假设矛盾。 □

引理 2.4 表明，对于 $d \ne n$，$\mathbb{Z}[L_d]^{S_n}$ 不是多项式环。结合定理 2.1，这意味着 L_0 不可能与其中任何一个等价，因此它必定与 L_n 等价。特别地，$\mathbb{Z}[L_n]^{S_n}$ 是多项式环。经显式计算可得 $V_d^{-1} V_n =$ diag($\frac{n}{d}$, 1, . . . , 1)，因此如果 R 是一个含有 $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ 和 $\frac{d}{n} \in R$ 的环，那么 L_d 和 L_n 在 R 上等价，所以 $R[L_d]^{S_n}$ 是多项式环。结合引理 2.4，可得以下结果。

定理 2.5. 设 R 是一个环，含有 $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$，且设 $n \ge 5$ 是一个整数，$d > 0$ 是 n的一个因子。那么 $R[L_d]^{S_n}$ 是多项式环，当且仅当$\frac{d}{n} \in R$。

还需考虑 $n \in \{3,4\}$的情形。我们首先考虑由 S_3 的表示 L_1 和模 3 约化给出的同态 $S_3 \to Gl_2(\mathbb{F}_3)$。显式计算表明，恒等元以及对换 (1, 2) 和 (2, 3) 在 $Gl_2(\mathbb{F}_3)$中的像两两不同。由于S_3 不含阶为 2 的正规子群，这意味着该同态是单射，因此，按照引理 2.4 证明中的相同论证可得， $R[L_1]^{S_3}$ 只有在$\frac{1}{3} \in R$时才可能是多项式环。由于根据定理 2.1，$R[L_0]^{S_3}$ 是多项式环，L_0 必定再次与 L_3是 $\mathbb{Z}$-等价的，因此 $\mathbb{Z}[L_3]^{S_3}$ 是多项式环，并且 $R[L_1]^{S_3}$ 是多项式环，当且仅当 $\frac{1}{3} \in R$。

对于 S_4 ，我们首先考虑由表示 L_1 和模 2 约化给出的同态 $S_4 \to Gl_3(\mathbb{F}_2)$。这里的显式计算表明，(1,2)(3,4) 不属于该映射的核，因此该同态必为单射，因为 (1,2)(3,4) 包含于 S_4 的每个非平凡正规子群中。再次使用引理 2.4 证明中的相同论证，我们发现 $R[L_1]^{S_4}$ 只有在 $\frac{1}{2} \in R$ 时才可能是多项式环。对于表示 L_2 和 L_4，相应的同态 $S_4 \to Gl_3(\mathbb{F}_2)$ 不是单射，因此我们转而使用 Singular 计算 $\mathbb{Q}$ 上不变环的显式生成元。若将 $\mathbb{Q}[L_4]$ 与 $\mathbb{Q}[x,y,z]$ 等同，我们得到$\mathbb{Q}[L_4]^{S_4} = \mathbb{Q}[f,g,h]$ ，其中

$$
\begin{aligned}
f &:= 6x^2 + 8xy + 3y^2 + 4xz + 3yz + z^2,\\
g &:= 8x^3 + 16x^2y + 10xy^2 + 2y^3 + 8x^2z + 10xyz + 3y^2z + 2xz^2 + yz^2,\\
h &:= 3x^4 + 8x^3y + 7x^2y^2 + 2xy^3 + 4x^3z + 7x^2yz + 3xy^2z + x^2z^2 + xyz^2.
\end{aligned}
$$

通过使用字典序 $z > y > x$应用命题 1.1，我们得到 $\mathbb{Z}[L_4]^{S_4} = \mathbb{Z}[f,g,h]$ 是一个多项式环。

对于 L_2 ，我们也先使用 Singular 求得 $\mathbb{Q}[L_2]^{S_4}$ 的生成元，并得到 $\mathbb{Q}[L_2]^{S_4} = \mathbb{Q}[f',g',h']$ ，其中

$$
\begin{aligned}
f' &:= 3x^2 + 8xy + 6y^2 + 4xz + 6yz + 2z^2,\quad g' :\\
&= x^3 + 4x^2y + 5xy^2 + 2y^3 + 2x^2z + 5xyz + 3y^2z + xz^2 + yz^2,\quad h' :\\
&= 3x^4 + 16x^3y + 28x^2y^2 + 16xy^3 + 8x^3z + 28x^2yz + 24xy^2z + 4x^2z^2 + 8xyz^2.
\end{aligned}
$$

再次应用命题 1.1，并采用关于 $z > y > x$ 的字典序，可得 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][L_2]^{S_4} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][f',g',h']$; 但 f'、g'、h' 并不生成 $\mathbb{Z}$ 上的不变环，因为 $k' = \frac{1}{4}(f'^2 + h')$ 的系数属于 $\mathbb{Z}$。但显然有 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][f',g',h'] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][f',g',k']$，并且使用 Singular 可得 f'、g'、k' 模 2 代数独立，因此由命题 1.2 可得 $\mathbb{Z}[L_2]^{S_4} = \mathbb{Z}[f',g',k']$。

因此，我们可以将本节的结果总结如下:

定理 2.6。 设 R 是一个具有 $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ 的环，设 $n \geq 3$ 是一个整数，且 $d > 0$ 是 n 的一个因子。那么，当且仅当 $\frac{d}{n} \in R$ 时，$R[L_d]^{S_n}$ 是一个多项式环；但在 $n = 4$ 且 $d = 2$ 的情况下，$\mathbb{Z}[L_2]^{S_4}$ 也是一个多项式环。

3 次数为 2 的本原群

本节讨论次数为 2 的本原伪反射群的算术不变环，即 Shephard 和 Todd [10] 分类中的第 4 至第 22 号群。对于其中每个群，其定义所需的最小数域，以及该数域的整数环上的反射表示，均可在[5]中找到。为简化论证，我们常常会在一个比必要范围更大的数域上进行研究。要证明这不会改变结果，关键在于以下命题。

命题 3.1。 设 R 是一个主理想整环，且 $K = \mathrm{Quot}(R)$；设 L/K 是一个有限域扩张， S 是 R 在L中的整闭包。此外，设 $G \subseteq Gl_n(R)$ 是一个有限群。若不变量环$S[x_1, \ldots, x_n]^G$ 同构于一个多项式环，则 $R[x_1, \ldots, x_n]^G$ 也同构于一个多项式环。

证明。令 $A := R[x_1, \ldots, x_n]$ 且 $B := S[x_1, \ldots, x_n]$。由于 R 是主理想整环，且 S 作为一个 R-模是有限生成的，因此 S 实际上是一个自由R-模；设 $\{s_1, \ldots, s_k\}$ 为其一组基。于是 $s_1, \ldots, s_k$ 也构成 B 作为一个 A- 模的一组基。对于满足 f_1 的 $f = f_1 s_1 + \ldots + f_k s_k \in B$，有 $\sigma(f) = \sigma(f_1)s_1 + \ldots + \sigma(f_k)s_k$，其中 $f_k \in A$，且$\sigma \in G$，因为 G 在 S 上的作用是平凡的。因此，若 $f \in B^G$，则必有 $f_1, \ldots, f_k \in A^G$，从而 $s_1, \ldots, s_k$ 生成 B^G 作为一个 A^G-模；特别地， B^G 是一个自由 A^G-模。

现在令 $P \subset A^G$ 为一个素理想，并选取一个满足 $P = A^G \cap Q$ 的素理想 $Q \subset B^G$。由假设， B^G 是正则环，因此 $(B^G)_Q$ 也如此。此外，由于 B^G 是 A^G 上的自由模，$(B^G)_Q$ 是一个平坦的 $(A^G)_P$-模。因此，$(A^G)_P$ 也是正则的，见 $[1, \text{定理 } 2.2.12]$。由于这对每个 P 都成立，我们得到 A^G 本身是正则的。由 $[9, \text{推论 } 2.2]$ 可知， A^G 同构于 R 上的一个多项式环。□

为了将该命题应用于下文讨论的群，我们需要注意另外两点。首先，需要确认每个群所定义于其上的域的类数为 1。正如 [5] 中所提到的，确实如此。其次，需要确认在我们想要考虑的更大域上不存在其他整反射表示；这可直接由 [5] 中给出的论证得出。

除非另有明确说明，本节每次应用命题 1.1 时，我们都采用以 $x > y$ 为准的字典序。

3.1 编号 8 至 15 的群

这些群的定义基于以下两个矩阵：

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^7 \end{pmatrix}.$$

这里，$\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}$ 表示本原八次单位根。现在，每个不同群的一种矩阵反射表示可定义如下，其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$；参见 [10, 第 4] 节：

$$\begin{aligned} G_8 &= \langle \varepsilon S, T \rangle \\ G_9 &= \langle S, \varepsilon T \rangle \\ G_{10} &= \langle \varepsilon^5 \omega^2 S, -\omega T \rangle \\ G_{11} &= \langle S, \varepsilon \omega T \rangle \\ G_{12} &= \langle S, T \rangle \\ G_{13} &= \langle \varepsilon S, iT \rangle \\ G_{14} &= \langle \varepsilon S, -\omega T \rangle \\ G_{15} &= \langle \varepsilon S, i\omega T \rangle \end{aligned}$$

由 [5] 可知，这些群中的每一个都只有一种整反射表示，记作 L。显式计算表明，可通过用以下矩阵共轭上述给出的生成元得到该表示：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

根据命题 3.1，我们可以计算关于 $R = \mathbb{Z}[\varepsilon, \omega]$ 和 $K = \mathrm{Quot}(R)$ 的所有不变环，尽管其中许多群可能定义在更小的域上。我们从最小的群开始，即 G_{12}；使用 Singular，我们得到以下两个不变量：

$$\begin{aligned} f &= (i+1)x^5y - 5x^4y^2 + 5(1-i)x^3y^3 + 5ix^2y^4 - (i+1)xy^5 \\ g &= x^8 + 4(i-1)x^7y - 14ix^6y^2 + 14(i+1)x^5y^3 - 21x^4y^4 + 14(1-i)x^3y^5 \\ &\quad + 14ix^2y^6 - 4(i+1)xy^7 + y^8 \end{aligned}$$

利用定理 1.3，我们得到 $K[L]^{G_{12}} = K[f, g]$。容易验证，f 和 g 模 $i+1$ 代数独立，因此根据命题 1.1

和 1.2，我们得到 $R[L]^{G_{12}} = R[f, g]$。对于大多数其他群，我们现在可以轻松求出不变环：上述群的描述表明， f 和 g 的某些幂是不变量；根据定理 1.3，它们生成了 K 上的不变环，进而按照与上文相同的论证，也生成了 R 上的不变环。

$$\begin{aligned} R[L]^{G_9} &= R[f^4, g] \\ R[L]^{G_{11}} &= R[f^4, g^3] \\ R[L]^{G_{13}} &= R[f^2, g] \\ R[L]^{G_{14}} &= R[f, g^3] \\ R[L]^{G_{15}} &= R[f^2, g^3] \end{aligned}$$

对于 G_8 和 G_{10}，情况稍微复杂一些：对于 G_8，我们发现 f^4和 g是不变量，但 $\deg(f^4) \cdot \deg(g) = 192 \neq 96 = |G_8|$，因此还必须存在另一个不变量。事实上，我们发现

$$\begin{aligned} h = {} & 2x^{12} + 12(i-1)x^{11}y - 66ix^{10}y^2 + 110(i+1)x^9y^3 - 231x^8y^4 + 132(1-i)x^7y^5 \\ & + 132(i+1)x^5y^7 - 231x^4y^8 + 110(1-i)x^3y^9 + 66ix^2y^{10} - 12(i+1)xy^{11} + 2y^{12} \in R[L]^{G_8}. \end{aligned}$$

我们有 $K[L]^{G_8} = K[g, h]$，并且由于 g 和 h 是各自次数下唯一相差常数因子的不变量，如果它是一个多项式环，那么 $R[L]^{G_8}$ 必定是 $R[g, h]$。然而，我们有 $f^4 = \frac{1}{27}(h^2 - 4g^3) \notin R[g, h]$，因此 $R[L]^{G_8}$不是多项式环。不过，由于我们知道 f和 g模任意素数都代数独立，按照上文同样的论证可知，对于所有不整除 2 和 3 的素数， g 和 h 也具有相同性质；通过显式计算，我们看到它们模整除 2 的素数时也代数独立，因此由命题 1.2 可知，$(R[\frac{1}{3}])^{G_8}$是 $R[\frac{1}{3}]$上的多项式环。

对于 G_{10}，我们得到 $K[L]^{G_{10}} = K[f^4, h] = K[g^3, h]$。然而，使用 $f^4 = \frac{1}{27}(h^2 - 4g^3)$，我们发现 $t := g^3 + 7f^4 = \frac{1}{27}(-g^3 + 7h^2) = \frac{1}{4}(h^2 - f^4)$ 属于 $R[L]^{G_{10}}$，但既不属于 $R[f^4, h]$，也不属于 $R[g^3, h]$。此外，可以用与上述类似的论证检验得出， t 和 h 模 R 中的每个素数都是代数独立的，因此 $R[L]^{G_{10}} = R[h, t]$。

3.2 编号 16 至 22 的群

这些群的处理方法与上一节类似。令 $\zeta := e^{\frac{i\pi}{30}}$ 为本原 60 次单位根。则所有群都可以定义在域 $K = \mathbb{Q}(\zeta)$上，其整数环为 $R = \mathbb{Z}[\zeta]$。记 $\eta = \zeta^{12}$和 $\omega = \zeta^{20}$。定义这些群时，我们使用以下两个矩阵：

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \eta^4 - \eta & \eta^2 - \eta^3 \\ \eta^2 - \eta^3 & \eta - \eta^4 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \eta^2 - \eta^4 & \eta^4 - 1 \\ 1 - \eta & \eta^3 - \eta \end{pmatrix}.$$

利用这些矩阵，我们可以如下定义这些群，参见 [10, 第 4] 节：

$$
\begin{aligned}
G_{16} &= \langle -\eta^3 S, T\rangle \\
G_{17} &= \langle iS, i\eta^3 T\rangle \\
G_{18} &= \langle -\omega\eta^3 S, \omega^2 T\rangle \\
G_{19} &= \langle i\omega S, i\eta^3 T\rangle \\
G_{20} &= \langle S, \omega^2 T\rangle \\
G_{21} &= \langle iS, \omega^2 T\rangle \\
G_{22} &= \langle iS, T\rangle
\end{aligned}
$$

再次可以证明，在 [5] 中，这些群各自只有一个定义在 R 上的整反射表示，我们将其记为 L。它可以通过对上文给出的矩阵进行共轭得到，所用的共轭矩阵为

$$
U = \begin{pmatrix} \eta^3+\eta^2+2\eta+1 & 0 \\ \eta^3+\eta^2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

我们首先考察不变量环 $R[L]^{G_{22}}$。借助 Singular，我们在这个环中找到两个可能的生成元：一个次数为 12 的不变量 f，其首项为$px^{11}y$，其中 $p = 3\eta^3 - \eta^2 + 2\eta + 1 \in R$；另一个次数为 20 的不变量 g，其首项为 x^{20}。元素 p 满足 $p^4 = 5\alpha$，其中 $\alpha = 55\eta^3+55\eta^2+89$ 是 R 中的一个单位。由定理 1.3 可得 $K[L]^{G_{22}} = K[f, g]$。显式计算表明，f 和 g 在模 p 意义下代数独立，因此由命题 1.1 和 1.2 可得 $R[L]^{G_{22}} = R[f, g]$。同理，我们还得到 $R[L]^{G_{17}} = R[f^5, g]$、$R[L]^{G_{19}} = R[f^5, g^3]$、$R[L]^{G_{21}} = R[f, g^3]$。

接下来我们考察 G_{20}。在此处，我们使用 Singular 找到 f 以及一个次数为 30 的新不变量h，它们是 K上的不变环的生成元。h的首项是 $5px^{30}$，与之前一样，我们得到 $R(\frac{1}{p})[L]^{G_{20}} = (R[\frac{1}{p}])[f, h]$。然而，$f^5 - h^2$ 可被 p整除，因此它们不能作为 R上的生成元。由于不存在与 f 和 h次数相同的其他不变量，$R[L]^{G_{20}}$ 不可能是多项式环。

对于 G_{16}，我们有 $K[L]^{G_{16}} = K[g, h]$，而这些是唯一可能的生成元。显式计算表明，$k := \frac{1}{1728}(h^2 - 25p^2g^3)$ 的系数属于 R，因此，K 中任何使不变量环成为多项式环的子环都必须包含 $R[\frac{1}{1728}] = R[\frac{1}{6}]$。$k$ 的首项是 $5p\beta x^{55}y^5$，其中 $\beta = 5\eta^3 + 5\eta^2 + 8 \in R^\times$ 1 1 $R[\frac{1}{5}][g, k] =$。因此，$R[\frac{1}{5}][x, y] \cap K[g, k]$ $F \in R[\frac{1}{5}][L]^{G_{16}} = K[g, h] \cap R[\frac{1}{5}][x, y]$ 由命题 . 可得 . 现在令 . 那么我们有 $F = F_1 + hF_2$ F_1 $F_2 \in K[g, h^2] \cap R[\frac{1}{5}][x, y] = K[g, k] \cap R[\frac{1}{5}][x, y] =$，其中，$R[\frac{1}{5}][g, k] \subseteq R[\frac{1}{30}][g, h^2]$ $R[\frac{1}{30}][L]^{G_{16}} = R[\frac{1}{30}][g, h]$。这表明 。最后，显式计算表明，$g$ 和 h 模 p 代数独立，因此 $R[\frac{1}{6}][L]^{G_{16}} = R[\frac{1}{6}][g, h]$，而这就是我们能得到的最佳结果。

最后，对于 G_{18}，我们有 $K[L]^{G_{18}} = K[h, g^3] = K[h, k]$，其中 k 的定义与上文讨论 G_{16} 时相同。利用命题 1.1，我们得到 $R[\frac{1}{p}]$ 上的不变量环为 $R[\frac{1}{p}][L]^{G_{18}} = R[\frac{1}{p}][h, k]$。多项式 k 和 h 模 p 并不代数独立，但取 $l := {(3p^6-2)}_{p^{10}}{}^{h^2+k}$ 后，我们有 $R[\frac{1}{p}][h, k] = R[\frac{1}{p}][h, l]$；显式计算表明，$h$ 和 l 模 p 代数独立，因此 $R[L]^{G_{18}} = R[h, l]$ 是一个多项式环。

3.3 编号为 4 至 7 的群

对于这些群，我们有若干种整反射表示，它们在复数域上都等价。首先，我们将其中一种表示下的群定义为如下矩阵群，见 [5, 第 3] 节。它们都可以定义在域 $K = \mathbb{Q}(\omega, i)$ 上，其整数环为 $R = \mathbb{Z}[\omega, i]$；这里 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 表示一个本原三次单位根。我们考虑以下矩阵

$$S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$

这四个群定义如下

$$\begin{aligned} G_4 &= \langle -S, -\omega T \rangle, \\ G_5 &= \langle -\omega S, -\omega T \rangle, \\ G_6 &= \langle iS, -\omega T \rangle, \\ G_7 &= \langle i\omega S, -\omega T \rangle \end{aligned}$$

我们将这些群的这一表示记作 L_1。为了确定它们的不变环，我们需要以下两个多项式，其中记 $p := 2\omega + 1$:

$$\begin{aligned} f &:= px^4 + 4x^3y - 2px^2y^2 - 4xy^3 + py^4, \\ g &:= x^6 - 2px^5y - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + 2pxy^5 + y^6. \end{aligned}$$

使用 Singular，我们得到 $K[L_1]^{G_4} = K[f, g]$，因此根据群的定义和定理 1.3，可得 $K[L_1]^{G_5} = K[f^3, g]$, $K[L_1]^{G_6} = K[f, g^2]$, $K[L_1]^{G_7} = K[f^3, g^2]$。多项式 $g := \frac{1}{64}(f^3 - p^3g^2)$ 的系数属于 R，且首项为 x^9y^3。我们得到 $K[L_1]^{G_5} = K[g, h]$ 和 $K[L_1]^{G_7} = K[g^2, h]$，因此由命题 1.1 可得 $R[L_1]^{G_5} = R[g, h]$ 和 $R[L_1]^{G_7} = R[g^2, h]$，所以二者都是多项式环。此外，$K[L_1]^{G_6} = K[f, h]$，显式计算表明 f 和 h 在模 p 意义下代数无关，因此由命题 1.2 可得 $R[L_1]^{G_6} = R[f, h]$。

如果 $R[L_1]^{G_4}$ 是多项式环，那么它必定是 $R[f,g]$，但 $h \in R[L_1]^{G_4}$和 $h \notin R[f,g]$，因此情况并非如此。现在我们证明 $R[\frac{1}{2}][L_1]^{G_4} = R[\frac{1}{2}][f,g]$。与上一节中的 G_{16} 类似，我们看到每个

$F \in R[\frac{1}{2}][L_1]^{G_4}$ $F = F_1 + gF_2$ $F_1\ F_2 \in$ 都可以写成 $K[f,g^2] \cap R[\frac{1}{2}][L_1] = R[\frac{1}{2}][L_1]^{G_6} = R[\frac{1}{2}][f,h]$ $h \in R[\frac{1}{2}][f,g]$ with , 。由于 ，因此我们得到 $F \in R[\frac{1}{2}][f,g]$，所以确实有 $R[\frac{1}{2}][L_1]^{G_4} = R[\frac{1}{2}][f,g]$。

这些群的第二个整反射表示 L_2 ，是通过用该矩阵对上面给出的矩阵作共轭得到的

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是，将上面 L_1 的不变环中的 f 和 g 分别替换为以下两个多项式，即可得到 K 上的不变环：

$$f' \coloneqq \frac{1}{16}(U \cdot f) = px^4 + 4\omega x^3 y + 2(\omega - 1)x^2 y^2 - xy^3,$$

$$g' \coloneqq \frac{1}{8}(U \cdot g) = 8x^6 + 16(\omega + 2)x^5 y + 40(\omega + 1)x^4 y^2 - 20px^3 y^3 + 20\omega x^2 y^4 + 4(\omega - 1)x^5 y - y^6.$$

使用命题 1.1，并采用关于 $y > x$ 的字典序，我们可直接得到，所有不变环 $R[L_2]^{G_i}$ 都是多项式环；更确切地说，有 $R[L_2]^{G_4} = R[f', g']$、$R[L_2]^{G_5} = R[f'^3, g']$、$R[L_2]^{G_6} = R[f, g'^2]$ 和 $R[L_2]^{G_7} = R[f'^3, g'^2]$。

最后，对于 G_6 和 G_7，还需考虑第三个整表示 L_3。该表示是通过用以下矩阵对定义 L_1 的矩阵作共轭得到的

$$U' \coloneqq \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\det(U') \in R[\frac{1}{2}]^\times$，表示 L_1 和 L_3 在 $R[\frac{1}{2}]$ 上等价。由于 $R[L_1]^{G_6}$ 和 $R[L_1]^{G_7}$ 是多项式环，因此 $R[\frac{1}{2}][L_3]^{G_6}$ 和 $R[\frac{1}{2}][L_3]^{G_7}$ 也同样如此。此外，$1+i$ 是 R 中唯一整除 2 的素元；显式计算表明，$f'' = \frac{1}{4}(U' \cdot f)$ 和 $g'' = \frac{1}{8}(U' \cdot g)$ 模 $1+i$ 代数独立，因此由命题 1.2 可得 $R[L_3]^{G_6} = R[f'', g''^2]$ 和 $R[L_3]^{G_7} = R[f''^3, g''^2]$。

3.4 总结

本节的结果可以总结为以下定理：

定理 3.2。设 $n \in \{4, \ldots, 22\}$，令 $K \subseteq \mathbb{C}$ 为能够定义 G_n 的最小数域，令 R 为 K的整数环，并令 L为 G_n的一个整反射表示。则 $R[L]^{G_n}$ 同构于一个多项式环，但 $n \in \{8, 16, 20\}$ 或 $n = 4$ 且 L 是 G_4的两个整反射表示中的第一个时除外。

参考文献

[1] Winfried Bruns 和 Jürgen Herzog。《科恩-麦考利环》。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[2] Maurice Craig。某些极端形式的刻画。《伊利诺伊数学杂志》，20:706–717，1976年。[3]Wolfram Decker、Gert-Martin Greuel、Gerhard Pfister 和 Hans Schönemann。Singular 4-0-2——用于多项式计算的计算机代数系统。http://www.singular.uni-kl.de，2015年。[4] Walter Feit。与反射表示在有理数域上等价的魏尔群整表示。《群论杂志》，1:213–218，1998年。[5] Walter Feit。复反射群的一些整表示。《代数杂志》，260:138–153，2003年。[6] Agnes E. Heydtmann 和 Simon A. King。finvar.lib。一个用于计算有限矩阵群的多项式不变量及相关簇生成元的 Singular 4-0-2 程序库，2014年。[7] Gregor Kemper。在任意域上计算有限群的不变环。《符号计算杂志》，21:351–366，1996年。[8] David Mundelius。代数整数环上不可约反射群的不变环。硕士论文，慕尼黑工业大学，德国，2017年。[9] David Mundelius。伪反射群的算术不变量与正则分次代数。《代数杂志》，595:244–259，2022年。[10] Geoffrey Colin Shephard 和 John Arthur Todd。有限酉反射群。《加拿大数学杂志》，6:274–304，1954年。