M. Clemens、S. Schöps、C. Cimala、N. Gödel、S. Runke、D. Schmidthäusler 和 T. Timm，《计算电磁学建模中耦合问题的若干方面》，ICS Newsletter（International Compumag Society），第 19 卷第 2 期，第 3–12 页，2012年11月。特邀文章。

技术文章

计算电磁学建模中耦合问题的若干方面

摘要 – 本文探讨计算电磁学中“耦合”模型描述的不同方面，包括区域分解、多尺度问题、多种或混合的离散场公式，以及多物理场问题。文中讨论了由此得到的公式在精度、稳定性和数值效率方面的理论问题，以及各种方法各自的优缺点。多方法、多区域、多公式和多物理场耦合公式的示例，来自复杂情景下电磁兼容性的数值测试、生物体在电磁暴露情形下的数值剂量学，以及电磁功率传输大型系统的仿真。

I. 引言

在电磁场计算中，许多应用问题都涉及不同模型描述之间的耦合。这可能包括不同计算域之间的耦合，例如区域分解；也可能包括结合不同的离散化方案来描述一个问题。若问题结合了源自极为不同尺度的相关效应，也需要采用耦合仿真方法；这类问题还包括涉及麦克斯韦范围之外物理模型的问题（多物理场）。这些“多重”方法面临的挑战，在于所得耦合场公式的精度、稳定性和数值效率。过去，这些方面的研究大多围绕具体仿真问题展开；近期的研究则尝试以更一般的方式对其进行数学分析。下一节将提出计算电磁学中耦合公式的分类，并讨论常见接口。第 3 节概述一种基于动态迭代的耦合公式通用框架，并简要讨论其收敛性。

本文还在第 4 节介绍了一些源自电气工程的实际应用。耦合公式的示例包括：在涉及场-电缆耦合公式的复杂情形下进行电磁兼容性（EMC）数值测试，以及对电磁暴露情形下的生物体进行数值剂量学分析，以确保职业安全与健康。此外，电磁功率传输中复杂系统的仿真也值得关注，例如高压绝缘子、电缆终端或能源电缆的仿真，这些仿真通常需要耦合电磁场和热仿真。这些公式可能采用不同的方法（例如离散化方法），并将其应用于不同的子域。通常，利用这种自由度可以更高效地仿真各类问题，例如在电准静态场仿真中耦合有限元法与边界元法（FEM-BEM），或将矩量法（MoM）与有限差分时域法（FDTD）[35] 或有限积分时域法（FITD）[33] 耦合，用于射频问题；又如，将磁准静态磁场与电力网络耦合[11]。

II. 分类

许多经典电气工程问题仍可通过基于未经扩展的麦克斯韦方程组的电磁模型，以足够的精度进行仿真。另一方面，如前所述，有些应用需要多物理场模型。近年来，小型化和频率升高等趋势加剧了多尺度和多速率现象。因此，许多过去只需单一模型即可描述的应用，如今必须采用更复杂的描述方式。这使得考虑耦合问题的需求日益增加。重要的情况属于以下一个或多个类别：

- 混合公式，通过不同场量描述各子域，例如基于电流和磁矢势的公式
- 混合离散，例如对复杂几何结构采用有限元法，对均匀子域采用边界元，例如[29]
- 粗化与细化建模，例如在某个子域中通过考虑量子效应的模型对麦克斯韦方程组进行细化，或通过将子域描述为电路来粗化问题，即忽略空间分布，[11,26]
- 多物理场，例如将电磁场问题与运动效应、热力学和流体动力学耦合

有时，耦合带来的额外工作量微不足道，只需进行少量修改即可。精细化建模往往就是如此，例如，如今薄片已被纳入标准有限元代码中。简单的多物理场示例也是如此：由于某些效应的影响微不足道，可以在后处理步骤中将其提取出来，也就是说，耦合仅为单向耦合，见图 1a）。在实际应用中，更具挑战性的多物理场问题需要额外求解一个相互耦合的瞬态过程，该过程由其自身的一组（偏）微分方程描述。接口通常由以下因素决定：

- 指定边界条件，即部分自由度由另一个问题固定（例如，将电压降作为狄利克雷条件施加）
- 施加源，即相对于另一个问题引入外部贡献，但不移除自由度（例如，施加来自电路的源电流）

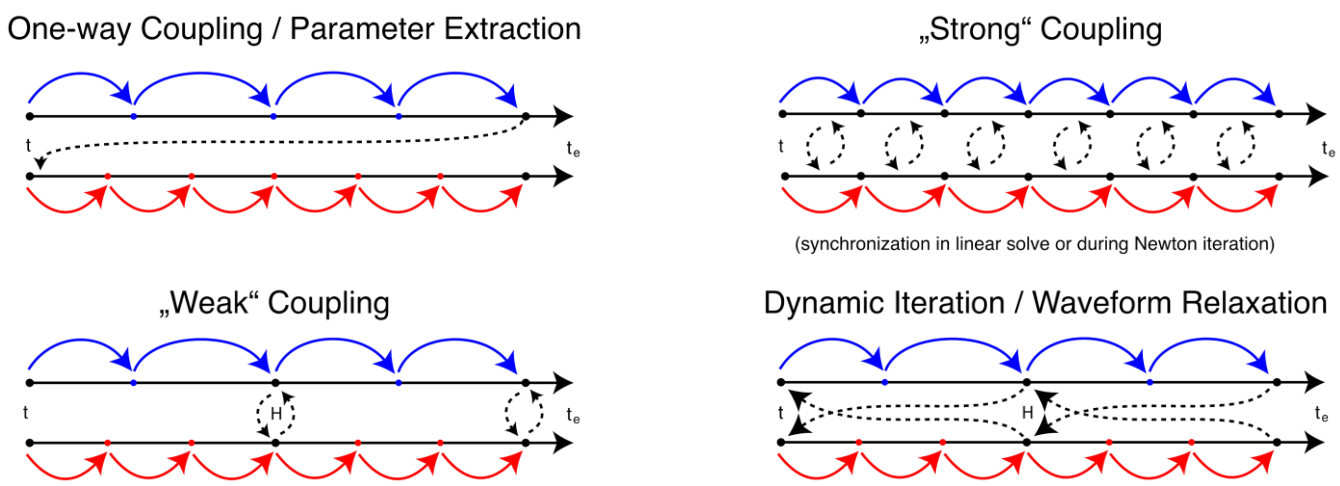


图 1：耦合方案：(a) 单向耦合，(b) 强耦合，(c) 弱耦合，(d) 动态迭代

- 修改材料参数，即根据另一个问题的自由度改变数值（例如，电导率取决于热传导方程所描述的温度）• 变形计算域，即将计算域分解为多个子域，并使这些子域相对于另一个问题发生移动（例如，电机的转子位置由运动方程描述）

在这两种情况下，量的尺度缩放都会变得越来越困难，问题往往会变得条件更差，而且原本可以加以利用的方程性质（如稀疏模式、对称性和定性）可能会丧失。此外，使用黑箱求解器通常难以实现强耦合公式。因此，通常更适合分别求解各个子问题，而不是采用整体式（即强耦合）求解，见图 1。

III. 耦合仿真的收敛性

当各子问题相互依赖却又独立求解时，通常会因信息不足而产生“分裂误差”。因此，确保充分的数据交换十分重要。通常，这些问题在时间上仅弱耦合，此时允许存在较小的时间滞后，并且只在离散时间点同步求解，见图 1c)。当子系统之间的相互作用增强时，这种方法便不再稳定。即使提高数据交换频率，也未必能够收敛。可以通过迭代过程解决这一问题。下文将讨论动态迭代方案，该方案已被证明在许多应用中具有收敛性。

我们考虑采用线法处理的时域耦合问题，即先对空间进行离散，例如使用有限元法。离散后得到的方程是半离散的，仅与时间有关。为简化记号，我们仅考虑如下形式的半显式系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad \text{and} \quad \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

在时间窗内，给定初始值 $\mathbf{y}_0$、$\mathbf{z}_0$，且其中 $\mathbf{g}$ 对 $\mathbf{z}$ 的雅可比矩阵是非奇异的。该表述是一阶微分-

$\det(\partial / \partial \mathbf{z}) \neq 0$

指数1代数方程。很容易证明，许多隐式表述，例如磁准静态和电准静态场方程、热现象以及许多其他多物理场问题（见第4节），都可以等价地表示为这种形式。将系统左乘质量矩阵的逆（或伪逆），即，

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \text{multiplied by} \quad \mathbf{M}^{+}$$

由此得到上述半显式系统。这里，代数约束的数量取决于矩阵 M 的核的维数。例如，磁准静态场的旋度-旋度方程中的质量矩阵具有较大的核，这是由非导电区域造成的；而经典热传导方程没有代数约束。

右端函数 f 对时间的依赖，以及含有高阶时间导数的方程，也可以通过引入额外的未知量转换为上述形式，例如，

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{t},\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{w} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{t},\mathbf{x})$$

请注意，这些变换便于讨论动态迭代中的收敛性质，因为它将自由度划分为由微分方程和代数方程确定的变量。这些变量表现出不同的数值行为。在实际应用中，通常不需要执行所需的运算，而且由于计算复杂度过高，这些运算可能也无法实现。

采用上文的简洁记号，对若干问题进行迭代相互耦合可得以下方程组（高斯-赛德尔型格式）

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}_1^{(k+1)} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{y}_1^{(k+1)},\mathbf{z}_1^{(k+1)},\mathbf{y}_2^{(k)},\mathbf{z}_2^{(k)},\ldots,\mathbf{y}_n^{(k)},\mathbf{z}_n^{(k)}) \\
\mathbf{0} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{y}_1^{(k+1)},\mathbf{z}_1^{(k+1)},\mathbf{y}_2^{(k)},\mathbf{z}_2^{(k)},\ldots,\mathbf{y}_n^{(k)},\mathbf{z}_n^{(k)}) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}_n^{(k+1)} &= \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_1^{(k+1)},\mathbf{z}_1^{(k+1)},\mathbf{y}_2^{(k+1)},\mathbf{z}_2^{(k+1)},\ldots,\mathbf{y}_n^{(k+1)},\mathbf{z}_n^{(k+1)}) \\
\mathbf{0} &= \mathbf{g}_n(\mathbf{y}_1^{(k+1)},\mathbf{z}_1^{(k+1)},\mathbf{y}_2^{(k+1)},\mathbf{z}_2^{(k+1)},\ldots,\mathbf{y}_n^{(k+1)},\mathbf{z}_n^{(k+1)})
\end{aligned}$$

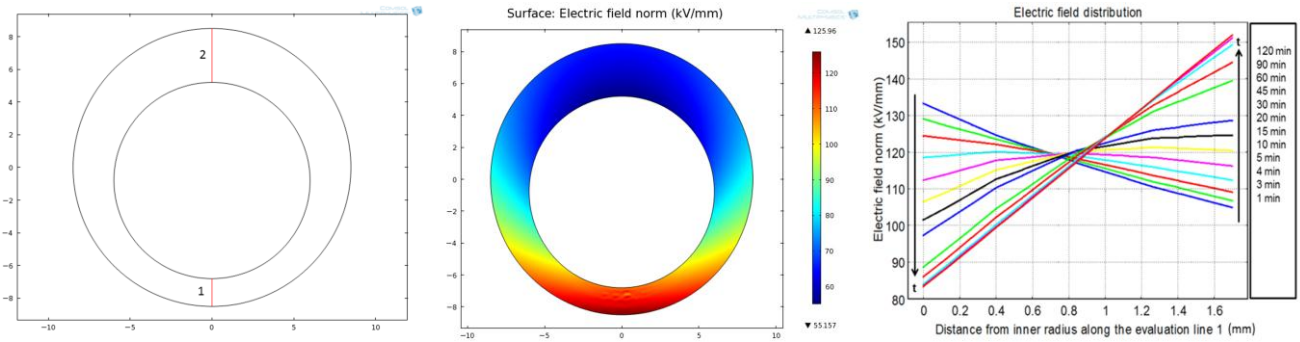


图 2：（a）旋转非对称模型及以红色标出的 2 条评估线；（b）加热过程中的电场分布；（c）加热过程中（a）中评估线 1 上的电场分布 [34]

其中 和 表示 j-个子系统 经过 k 次迭代（ ）在时间窗 上的解。实际上，这些解是通过具有足够高精度的时间步进格式按顺序求得的。求解完一个时间窗后，也就是将分裂误差降至某一容差以下后，便继续求解下一个时间窗。在 [2,5] 中已证明，上述格式对应于函数空间中的不动点迭代

$$\begin{pmatrix}\delta_y^{(k+1)}\\ \delta_z^{(k+1)}\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}O(H) & O(H)\\ \beta+O(H) & \alpha+O(H)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_y^{(k)}\\ \delta_z^{(k)}\end{pmatrix}$$

存在分裂误差 和 对于微分和 经过 k 次动态迭代后的代数分量。只要压缩因子 α足够小，上述方案就会在时间窗 H 足够小时收敛。这对应于新旧代数变量之间的弱耦合：

$$\left\|\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}^{(k+1)}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}^{(k)}}\right\|<1.$$

这样，不动点迭代算子的谱半径就可以任意小，从而保证收敛性。在[2,5,26] 中，还分析了多个时间窗上分裂误差传播的整体稳定性。

在许多相关应用中，可以对系统 1,...,n 重新排序，使新旧代数变量之间不存在耦合，从而压缩因子 α完全为零。特别是，常微分方程不会出现迭代发散，因为不会发生上述代数耦合。

压缩因子 α 为零可保证收敛速率至少为 O(H)，因此只需少量迭代，就能使分裂误差达到与时间步进方案的离散误差同一量级。近期分析表明，谨慎选择耦合界面后，收敛速率最高可达到 $O(H^2)$。

上述结果尤其适用于低频场-电路、半导体-电路和场-热力学耦合应用。例如，以下各节将讨论弱电磁-热耦合和 FDTD-MoM耦合。

IV. 计算电磁学中的耦合公式

本章将介绍一些典型的耦合问题示例
介绍计算电磁学中的相关内容，以展示其中涉及的不同耦合可能性和技术。

A. 多物理模型

在电磁场仿真中，大量多物理场耦合公式里，尤其是与热效应的耦合已得到广泛应用。对于许多电磁场问题，焦耳热损耗通常是主要的寄生损耗机制，并会影响电磁材料参数。这通常需要额外仿真恒温问题，甚至涉及求解热传输方程的热力学问题。由于热过程的特征时间通常长于耦合电磁过程的特征时间，因此通常可以采用弱耦合方法，参见图 1c)。在此，热过程是主导过程，需要先在电磁场问题求解的后处理步骤中，计算作为热场激励源的焦耳损耗。反过来，电磁材料参数可能取决于温度，因此可能需要采用第 3 节所述的迭代耦合，见图 1d)。

这类电动力学—热力学耦合问题的一个示例是对高压直流（HVDC）电缆进行仿真，其中聚乙烯（PE）介质电缆绝缘材料具有较低的非线性电导率

$$k(T,|\vec{E}|)=k_0\cdot\exp(\alpha\cdot T)\cdot\exp(\beta\cdot|\vec{E}|),$$

其中 k_0 是 0°C 和 0 kV/mm 下的特定直流电导率， T 是以 °C 为单位的温度， 是以 kV/mm 为单位的电场值， α 是特定直流电导率的温度系数，β 是特定直流电导率的场强系数。聚乙烯的典型值为 $\alpha \sim 0.1\mathrm{K}^{-1}$ 和 $\beta \sim 0.1\mathrm{mm/kV}$。

将 [3]，中的一维耦合场公式扩展为这些电场能量传输系统的耦合二维仿真 [34]，其中包含稳态电流问题的弱耦合求解

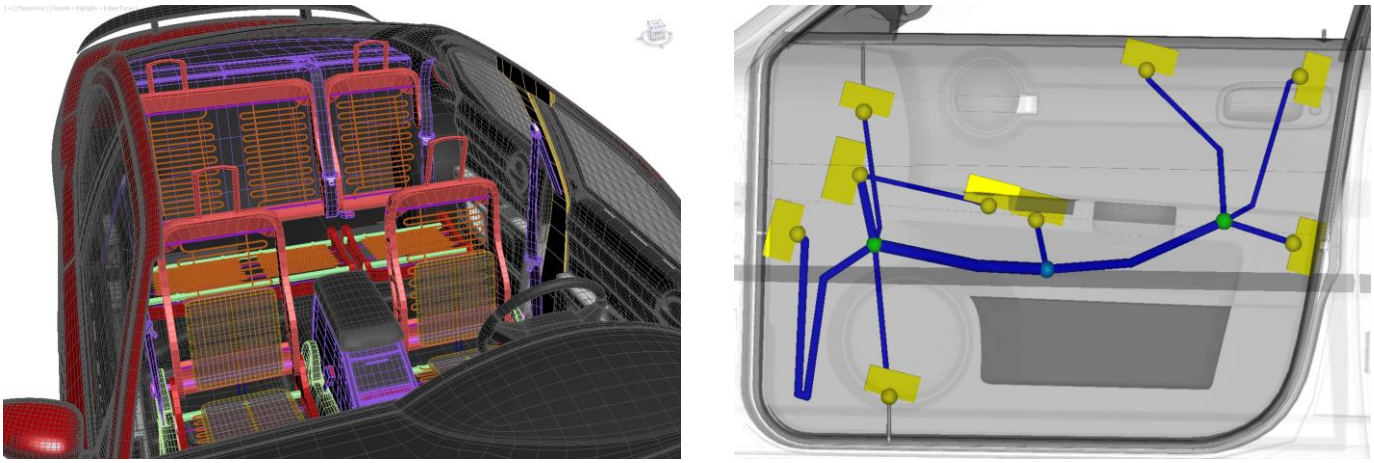


图 3：包含车门线束模型的汽车模型，蓝色为电缆束，黄色为连接器 [23]

$$\mathrm{div}(k(T,\varphi)\cdot \mathrm{grad}\,\varphi)=0$$

其中，T 表示温度，单位为*K*，φ 表示电标势，*k(T，φ)*表示非线性电导率，瞬态热传输方程

$$C_p\cdot\rho\cdot\partial_t T-\mathrm{div}(\lambda\cdot \mathrm{grad}T)=Q_E\,,$$

其中，C_p 为定压热容，ρ 为密度，λ 为热导率，Q_E 表示电热源，其数值根据电缆产生的焦耳热以及聚乙烯绝缘材料中的热功率损耗计算得出。

这些仿真得出了一个（有违直觉的）结果：与靠近内导体处相比，此类电缆外半径处的电场应力可能更大。图 2 展示了径向非对称结构的模型：由于温度较高，绝缘热塑性材料（例如低密度聚乙烯（LDPE））可能会软化，导致内导体在重力作用下下垂 [21]。

除了热场与电磁场的耦合仿真外，其他多物理模型还包括例如电机噪声辐射的声学仿真或机电仿真 [17]。此外，对带电粒子的仿真也广泛采用所谓的粒子网格代码，将麦克斯韦方程组的求解（例如通过时域有限差分法或间断伽辽金有限元法方案）与弗拉索夫带电粒子动力学相结合；这已成为加速器设计领域公认的标准，参见例如 [25]。

B. 精细化建模

如果仅用一种方法无法呈现电磁问题所需的全部特征，和/或通过额外建模能力获得的益处大于耦合过程中产生的任何额外困难，通常会在同一电磁场现象中采用不同的离散化方法。

对于射频电磁波传播问题，通常认为体积型时空离散方法的实现已成为成熟的标准仿真工具，例如 FDTD/FITD方法，或近年来出现的间断伽辽金有限元法（DGFEM）。这些方法能够在电磁辐射源近场区域对几何特征进行高分辨率刻画。然而，许多电磁兼容（EMC）问题具有特定的几何长宽比，为覆盖所有相关几何细节，需要使用数量极其庞大的体网格单元

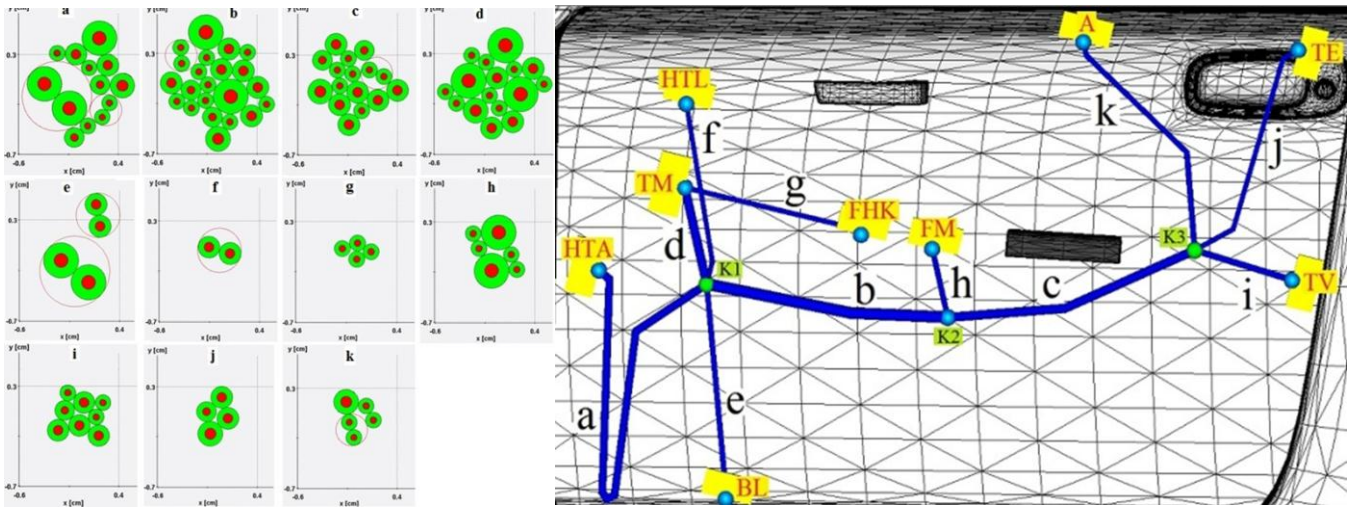


图 4：带有黄色连接器、蓝色电缆束及横截面示意图的车门线束 [23]

。这也会根据 Courant-Friedrich-Levy（CFL）条件影响显式方法的时间步长。尽管借助图形处理器（GPU）加速器，即使对于包含数亿个网格单元的大规模问题，计算时间也已显著缩短至可接受水平，但许多同时具有复杂介电材料分布和较大纵横比的电磁兼容（EMC）问题，仍无法采用这种单一方法加以解决。

这类问题的一个典型例子是，在复杂电磁环境中测试线束系统，即在金属外壳（可能带有孔径）中进行测试，例如汽车车身、飞机机身或电子系统外壳，参见图 3。由于无法将线束（其中电缆的直径为亚毫米级）与典型尺寸为数十米或数米的谐振结构一同离散化，因此应采用多方法方案。该方案将用于线束的多导体传输线（MTL）方法，与用于周围场环境的标准体积离散方案相结合。

作为该方法的一个示例，考虑车门内的复杂线束系统（图 4），采用协同仿真方法，将两个专用实现结合起来，例如，用于 MTL 模型的 CST Cable Studio 与 CST MicroWaveStudio 的 FITD 实现相连接 [10]。以工业合作伙伴提供的真实车门线束为基础，在高分辨率三维车辆模型中研究电缆路径及其连接器位置 [23]。

门线束由32条电缆路径组成，包含单芯线和双绞线电缆。在多导体传输线模型中，根据电缆特性（例如二维横截面、电缆长度、欧姆损耗、介电损耗和仿真频率）计算等效集总元件电路。通过对线束二维横截面进行静态仿真，计算多导体传输线电感、电容和电导矩阵。此外，等效电路中以引脚表示的每个电缆端都可以配备其他集总元件，例如电压源。

多导体传输线线束模型通过电压和电流与 FITD 模型耦合。耦合可采用单向方法（单向耦合）实现：要模拟场辐射到线束中的情况，需将电场分量沿电缆段进行积分，积分对象为 FITD 网格边，然后将所得电压施加到每个电缆段上（场到电缆耦合）。或者，也可以将多导体传输线模型计算出的电流用作 FITD 模型中参考导体的场照射源。此外，还可以采用双向耦合（例如动态迭代），同时结合辐射和照射模拟；例如，对于谐振结构，可通过在三维求解器与多导体传输线线束模型之间交换电压和电流信息来计算场。

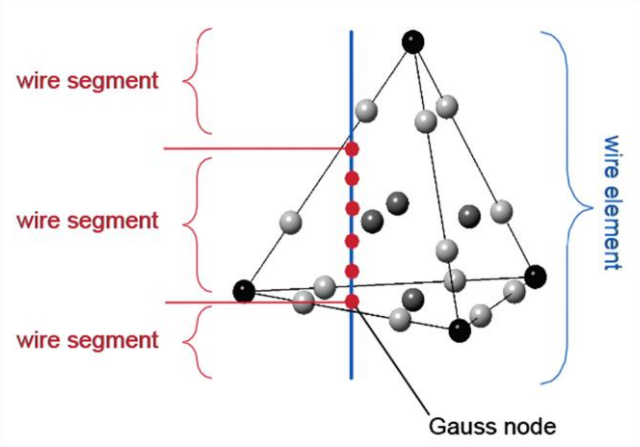


图 5：沿穿过四面体的线段使用高斯点进行线-四面体耦合 [16]

对于单向和双向场耦合方法，电缆束中的电流会合并为一个共模电流，并在三维场模型中用外加场源表示；在FITD计算过程中，电缆并未实际存在于模型中 [10]。这种方法通常能够充分近似线束中的共模电流，而这类电流在许多技术系统中都会造成严重的电磁兼容性问题。

此外，也可以采用强耦合来构建场-电缆耦合公式，例如用于完整的瞬态仿真。Holland [20] 提出了一种将FDTD格式与电缆传输线模式耦合的方法，该方法最近



图 6：场-电缆　　直升机天线的耦合 DGFEM仿真（左）及辐射电场强度 [16]

被扩展到了 [15]中的高阶间断伽辽金有限元法公式。采用高阶间断伽辽金有限元法节点公式 [19] 离散的麦克斯韦方程，与同样采用间断伽辽金有限元法[16]离散的电缆传输线模型相耦合。对于每个有限元，麦克斯韦旋度方程被重新表述为一个常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\varepsilon\mathbf{E}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{H}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\vec{f}_E - \vec{f}_E^{*}) - \mathbf{J}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mu\mathbf{H}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{E}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\vec{f}_H - \vec{f}_H^{*}),$$

其中，E、H 是节点电场强度和磁场强度值的向量，ε，μ 分别为电介电常数和磁导率，S 表示局部微分矩阵，M 是局部间断伽辽金有限元法质量矩阵，F(.) 表示耦合相邻有限元的通量表达式，J 是单元内的电流密度。遵循 Holland [20] 的细导线公式离散后得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{I}(t) = -v^2\mathbf{D}_s\,\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\vec{f}_I^{*} - \vec{f}_I) + \frac{\mathbf{E}_s}{L'},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{D}_s\,\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(\vec{f}_q^{*} - \vec{f}_q),$$

其中，q 表示单位导线长度上的单位电荷，v 表示电荷间相互作用的速度，L′ 表示单位长度的电感，D_s 表示沿导线的局部微分矩阵。

耦合过程涉及对每个体积单元内离散电场 E_s 的积分（见图 5）。所得电压作为激励源加入线模型，并利用电缆电流计算三维场间断伽辽金有限元法公式的右端激励电流。随后，采用显式时间积分格式（例如 4th 阶低存储龙格-库塔法 [15]）同时求解所得的高维常微分方程组，即间断伽辽金有限元法离散的三维场方程和一维细导线方程。

图6展示了采用这种强耦合瞬态间断伽辽金有限元法场-电缆公式，对尾梁上装有细导线天线的直升机模型进行波传播仿真的结果。

由于电流多导体传输线与三维离散电磁场公式的耦合，在某些高频电磁兼容问题中，仍受到多导体传输线建模假设有效性的严格限制，因此这种耦合仍是当前研究的课题。

C. 混合离散

在射频下使用高分辨率人体模型进行电磁剂量学仿真时，如果还必须考虑周围环境的大部分区域，甚至可能包括额外的复杂几何细节，那么在FITD/FDTD仿真中就可能遇到问题。图7展示了这种暴露情形的一个简单配置示例：人体模型与电磁场源相距一定距离。

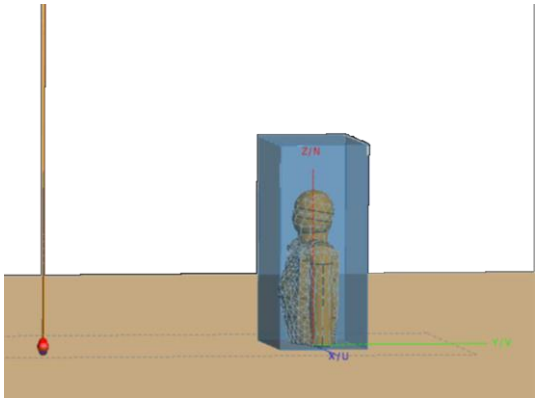


图7：暴露情形：位于理想导电金属平面上的人体体模，与天线相距一定距离 [31]

尤其对于此类大规模暴露情形，可以采用弱耦合的矩量法（MoM）/时域有限差分法（FDTD）多方法方法。首先，对该暴露情形进行矩量法仿真，其中将人体模型替换为均匀介电材料人体模型或理想电导体（PEC）表面。随后，在人体模型周围的封闭惠更斯面上，对人体模型与天线之间场分布的这一近似结果进行采样。接下来，在表面近场源激励下，对置于“惠更斯盒”内的高分辨率体素人体模型进行完整的三维 FITD 剂量学 SAR 仿真（见图 8）。虽然弱耦合的 MoM-FDTD 方法是一种迭代方法，但通常在第一步后就停止迭代，因为 FDTD 计算得到的人体电流太小，无法用于第二次 MoM 仿真，因此可以忽略不计。

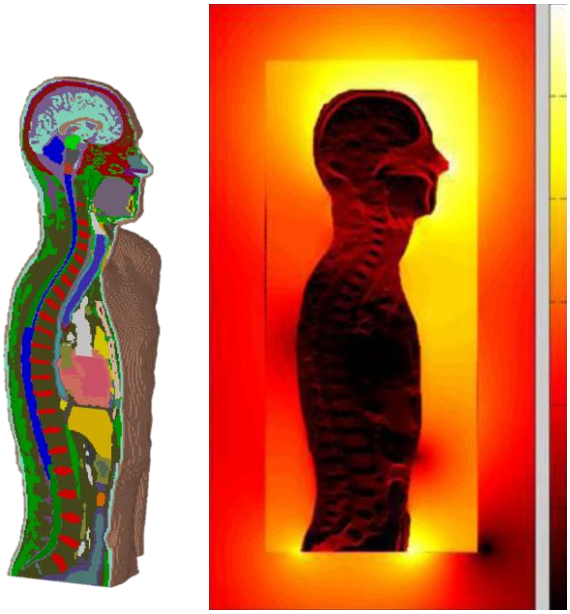


图8：人体体模受近表面源场激励的FDTD剂量学仿真，场值由矩量法计算，并在惠更斯盒表面进行评估 [31]

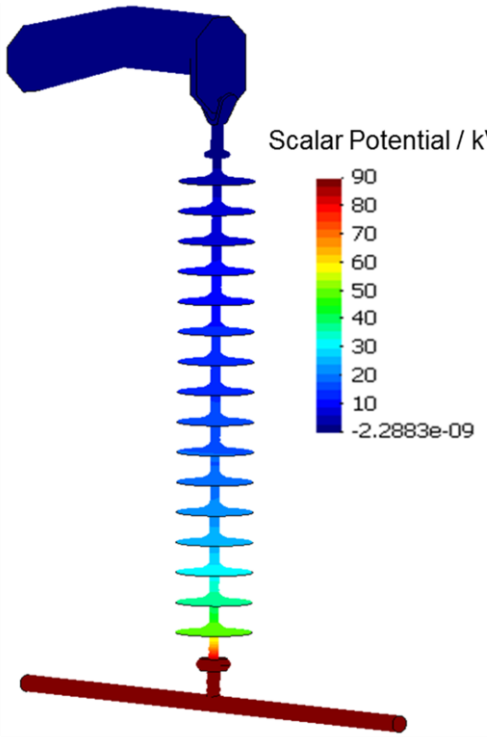


图 9：Lapp Insulators Rodurflex™ 长棒绝缘子的静电势分布 [28]

对避雷器、微型压敏电阻涂层长棒绝缘子或微型压敏电阻填充电缆终端等电力高压系统组件中的非线性场应力分级进行优化，需要进行非线性瞬态电准静态场仿真 [14,28]。针对这类仿真，文献 [29] 提出了一种有限元/边界元法（FEM-BEM）的强耦合混合方案。采用这种公式，可以模拟电标势的衰减特性，即边界元法部分对问题的“开放”边界进行建模。

此处给出了用于静电问题的强耦合有限元-边界元法混合公式 [29], , 其离散形式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{ff}} & \mathbf{A}_{\mathrm{fc}} & 0 \\ \mathbf{A}_{\mathrm{cf}} & \mathbf{A}_{\mathrm{cc}}+\mathbf{D} & (-\frac{1}{2}\mathbf{M}^{T}+\mathbf{K}^{T}) \\ \mathbf{0} & (-\frac{1}{2}\mathbf{M}+\mathbf{K}) & -\mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{f}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{fc}}\mathbf{g}_{D} \\ -\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{g}_{D}-\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{cc}}\mathbf{g}_{D} \\ \left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{M}}-\tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{g}_{D} \end{pmatrix}$$

其中，矩阵块 $\mathbf{A}_{\mathrm{ij}}$ 对应公式中的有限元法部分，边界元法矩阵块 M 对应恒等算子的离散化，V 对应单层势积分算子，K 对应双层势积分算子，D 对应超奇异积分算子。边界元法矩阵块可采用矩阵稀疏化技术（例如自适应交叉近似 [7]）以节省内存。解向量由 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{f}}$ 内部节点电势值、$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}}$ 空气-界面电势值以及电势的法向导数值 t 组成。右端向量包含预先定义的问题电势值，即狄利克雷值 $\mathbf{g}_{D}$。图 9 展示了一种长棒绝缘子，其中问题空气部分的解完全由边界元法公式表示，因此无需对外部空气域进行离散化。

尽管混合有限元-边界元耦合电（准）静态公式优雅地解决了“开放”边界问题，但代价是增加了复杂性这体现在求解由此产生的代数方程组时；其中的挑战在于如何对有限元-边界元耦合系统进行高效的预条件处理。

D. 多域耦合公式

区域分解技术是数值求解边值问题中广泛应用的方法，例如见 [27],[32]。域划分为多个区域时，往往会不加区分地遵循计算负载均衡或算法简洁性的要求。

根据待求解问题的不同，采用更精细的准则将计算域划分为多个子域也可能有所助益。为此，本文考虑一种非线性瞬态电准静态场公式。有限元离散化 [14,28] 得到一个刚性非线性常微分方程组

$$\mathbf{M}_{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi+\mathbf{K}_{\kappa}(\Phi)\Phi=\mathbf{b},$$

其中 Φ 是电势值向量，且表示关于介电常数和场相关非线性电导率的离散散度-梯度算子。狄利克雷边界条件被纳入右端项。用于求解这些刚性常微分方程组的隐式时间积分格式需要较长的仿真时间，因为必须反复求解大量高维非线性代数方程组。

采用多域方法，将计算域划分为内部子域和外部子域，前者对应于介电材料（包括非线性导电部件），后者对应于包含节点向量 Φ_1 和 Φ_2 的空气区域。因此，离散电准静态系统可划分为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

现在，借鉴耦合有限元-边界元方法 [29] 或文献 [9]，中提出的基于区域分解的线性子空间信息回收方法，我们采用正交分解（POD）模型降阶（MOR）技术处理问题中的线性外部部分，以降低求解过程的维度。

在时域求解完整离散系统，可以保存解的快照。随后，对包含系统信息的快照矩阵进行奇异值分解（见 [12]），得到一个能够表征系统动力学并为投影算子提供信息的低秩基。仅针对外部节点构造投影算子，可得到一个 n × p 算子 P，其中 n 为外部域自由度的数量，p 为用于投影的奇异向量数量，且 $\Phi_2=\mathrm{P}z_2$。使用投影算子 P 可得到一个常规方程组

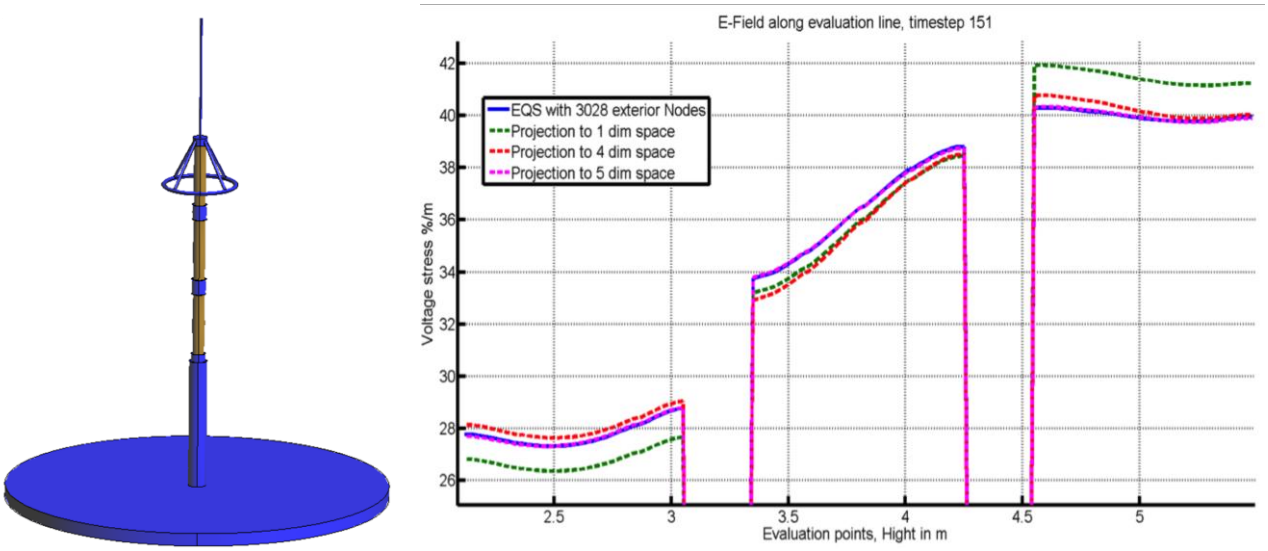


图10：沿IEC避雷器垂直轴的电场分布：完整非线性电准静态仿真的结果，以及采用 p=1,4,5 的三种 MOR 投影仿真的结果

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}^{\top}\mathbf{M}_{21} & \mathbf{P}^{\top}\mathbf{M}_{22}\mathbf{P} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}^{\top}\mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{P}^{\top}\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

此时，外部空气域中的自由度数量从 n 减少到维度 p。

通过对符合国际电工委员会标准的避雷器设计进行非线性电准静态二维场仿真，验证了这种多域耦合方法的有效性 [28,30]。图 10 展示了沿避雷器垂直轴线的电场分布仿真结果，其中将 p=1,4,5 的 MOR投影仿真结果与自由度为 3,900、外部域问题维度 n=3,028（约占整个问题规模的 78%）的完整仿真结果进行了比较。p=5 的 MOR 解与完整解吻合，对应的降维因子约为 600。问题维度的降低使非线性材料特性的优化能够更快完成。

V. 结论与展望

许多高频和低频电磁场仿真方法已发展得相当成熟。如今面临的挑战往往源于多尺度或多物理场现象。本文对耦合问题进行了分类，并给出了相应的耦合公式示例，例如尺度衔接（电缆模型、混合离散、模型降阶技术）和多物理场仿真（尤其是与热传导方程的重要耦合）。

讨论了耦合时域仿真的收敛性问题，并提出了一种提高稳定性的迭代算法。一个同样适用于不进行迭代的协同仿真的重要结论是，重新安排子系统的计算顺序可以提高稳定性。通过分析雅可比矩阵可以从数学上验证这一点。

展望耦合仿真的未来，数据交换将成为日益重要的因素。目前，大多数耦合仿真实现仍采用单线程，或在同步步骤中交换完整的体数据，例如，一个核心计算电磁场，另一个核心计算温度分布。随着未来每秒浮点运算次数的成本进一步降低，这种做法在时间和能耗方面的代价可能会越来越高。根据科学发现计算加速器的报告，到 2020 年，[8], 中型集群将拥有约 400,000 个核心，因此，高效数据移动并行化是大规模计算中的一个重要问题。

或许必须摒弃传统的按物理过程划分问题的方式，转而按空间划分。例如，将计算域分解为多个子域，每个核心在本地计算其子域中的电磁效应和热效应，这样只需交换边界信息。

致谢

作者谨此感谢德国联邦教育与研究部 03MS648E 项目资助（“SOFA：虚拟车辆设计中的耦合仿真与稳健优化”），并感谢与 Delphi Deutschland GmbH（伍珀塔尔）、Lapp Insulators GmbH（温西德尔）以及 Computersimulationstechnik AG（达姆施塔特）的合作。

参考文献

[1] G. Alì、A. Bartel、M. Brunk、S. Schöps。《半导体/电路耦合问题的收敛迭代方案》。载于 Bastiaan Michielsen 和 Jean-René Poirier（编），《电气工程中的科学计算 SCEE 2010》，《工业数学》第 16 卷，第 233–242 页，柏林，2012 年 1 月，施普林格。

[2] M. Arnold、M. Günther，《耦合微分代数系统的预条件动态迭代》，《BIT 数值数学》，第 41 卷，第 1 期，第 1–25 页，2001 年。[3] R. Bärsch、J. Kindersberger：《介电材料的非线性介电特性》，ETG 报告工作坊《具有非线性介电特性的材料》，第 10 卷，VDE 出版社，柏林、奥芬巴赫，2008 年 3 月 13 日。[4] A. Bartel、R. Pulch，《纳米电子学中偏微分代数方程的分类概念》。载于 L. L. Bonilla、M. Moscoso、G. Platero、J. M. Vega（编），《ECMI 2006 工业数学进展》，《工业数学》，柏林，第 12 卷，2007 年，施普林格。[5] A. Bartel、M. Brunk、M. Günther、S. Schöps，《电路与分布式器件耦合问题的动态迭代》，《SIAM 科学计算杂志》，2012 年。已提交。[6] O. Bíró、K. Preis，《三维涡流的有限元分析》，《IEEE磁学汇刊》，第 26 卷，第 2 期，第 418–423 页，1990 年 3 月。[7] M. Bebendorf 和 S. Rjasanow，《配点矩阵的自适应低秩近似》，《计算》，第 70 卷，第 1–24 页，2003 年。[8] J. Carter，《计算科学概述》，NERSC 报告，2011 年。[9] M. Clemens、S. Schöps、A. Bartels，《非线性各向异性旋度-旋度 DAE 的正则化与分解》，COMPEL，第 30 卷，第 6 期，第 1701–1714 页，2011 年。[10] CST Studio Suite 2012[tm]，Computer Simulation Technology AG，达姆施塔特，德国，2012 年。[11] H. De Gersem、R. Mertens、U. Pahner、R. Belmans、K. Hameyer，《用于场-电路耦合的拓扑方法》，《IEEE磁学汇刊》，第 34 卷，第 5 期，第 3190–3193 页，1998 年 9 月。[12] D. Schmidthäusler、M. Clemens，《基于正交分解的低阶电准静态场仿真》，《IEEE磁学汇刊》，第 48 卷，第 2 期，第 567–570 页，2012 年 2 月。[13] D. Schmidthäusler、S. Schöps、M. Clemens，《用于非线性电准静态场仿真的线性子域降阶》，CEFC 会议，日本大分，2012 年。[14] L. Egiziano、V. Tucci、C. Petrarca、M. Vitelli，《用于研究采用非线性应力控制材料的电气元件场分布的 Galerkin 模型》，IEEE 电介质与电气绝缘汇刊，第 6 卷，第 6 期，第 765–773 页，2002 年。[15] N. Gödel、N. Nunn、T. Warburton 和 M. Clemens，《加速用于电磁射频问题的多 GPU 间断 Galerkin 有限元计算》，《ACES 期刊》，第 25 卷，第 4 期，2010 年。[16] N. Gödel, T. Warburton, M. Clemens，《基于 GPU 加速的细导线计算与间断伽辽金有限元法电磁场公式耦合》。第27届应用计算电磁学进展国际评论论文集，美国弗吉尼亚州威廉斯堡，2011年3月27日至31日。[17] K. Hameyer 等，《电机建模的艺术》，技术文章，ICS Newsletter，第19卷第2期，2012年7月。[18] A. Hansen, J. Bitz, A. Streckert, A. El Ouardi，《一种高效计算基站天线前方人体暴露的数值方法》。第23届国际无线电科学联盟大会论文集，新德里，2005年10月。[19] J. S. Hesthaven 和 T. Warburton，《节点间断伽辽金方法》。施普林格，2008 年。[20] R. Holland 和 L. Simpson，《电磁脉冲耦合至细支杆和导线的有限差分分析》，IEEE电磁兼容汇刊，第 EMC-23卷，第2期，第88–97页，1981年5月。[21] H. J. Mair 等：《电缆技术中的塑料：发展、测试、经验与趋势》，第3版，雷宁根-马尔斯海姆：expert出版社，1999年。[22] H. H. Pennes，《静息状态下人体前臂组织和动脉血温度分析》，《应用生理学杂志》，第1卷，第93–122页，1948年。[23] S. Runke，《用于数值电磁场仿真的 CAD 模型开发及高分辨率汽车模型中的场/电缆耦合研究》，硕士论文，伍珀塔尔，2012年3月28日。[24] U. Richert，《挤出聚乙烯绝缘材料用于直流电缆的适用性研究》，博士论文，德累斯顿工业大学，德国，2001年。[25] S. Schnepp, E. Gjonaj, T. Weiland，《基于时间自适应网格的粒子网格代码分析》，IEEE粒子加速器会议（PAC）论文集，第3271–3273页，2007年6月。[26] S. Schöps, H. De Gersem, A. Bartel，《用于场/电路耦合问题多速率时间积分的协同仿真框架》，IEEE磁学汇刊，第46卷，第8期，第3233–3236页，2001年7月。[27] B. Smith, P. Bjorstad, W. Gropp，《区域分解：椭圆偏微分方程的并行多层方法》，剑桥大学出版社，2008年。[28] T. Steinmetz, M. Helias, G. Wimmer, L. O. Fichte, M. Clemens，《基于离散电磁学公式的电准静态场仿真》，IEEE磁学汇刊，第42卷，第4期，第755–758页，2006年4月。[29] T. Steinmetz, N. Gödel, G. Wimmer, M. Clemens, S. Kurz 和 M. Bebendorf，《高效对称

电准静态场的有限元法-边界元法耦合仿真》，IEEE磁学汇刊，第44卷，第6期，第1346–1349页，2008年6月。[30] 《避雷器——第4部分：用于交流系统的无间隙金属氧化物避雷器》，载于国际电工委员会 60 099c-4-am2, 2001年。[31] T. Timm，《天线场暴露的数值电磁场剂量学仿真：矩量法与有限差分时域法的耦合》，理学学士论文，伍珀塔尔大学，2012年1月。[32] A. Toselli，《区域分解法——算法与理论》，施普林格，2004年。[33] T. Weiland，《采用有限差分法的时域电磁场计算》，《数值建模国际期刊：ENDF》，第9卷，第295–319页（1996年）。[34] H. Ye, E. Boudoudou, M. Clemens：《高压直流电缆中的电热场耦合仿真》，COMSOL 2011年会议论文集，斯图加特，2011年10月26日至28日。[35] K.S. Yee，《涉及麦克斯韦方程组的初边值问题的各向同性介质数值解》，载于IEEE天线与传播汇刊，第17卷，第585–589页（1966年）。

作者姓名及所属机构

Markus Clemens[1], Sebastian Schöps[2], Carsten Cimala[1], Nico Gödel[1], Simon Runke[1], Daniel Schmidthäusler[1], Thomas Timm[1]

[1]伍珀塔尔大学，电磁理论教席，
Rainer-Gruenter-Str. 21, 42119
伍珀塔尔，德国
clemens@uni-wuppertal.de
www.tet.uni-wuppertal.de

[2]达姆施塔特工业大学，CE/TEMF研究生院，
Dolivostraße 15, 64293 达姆施塔特，德国
schoeps@gsc.tu-darmstadt.de
www.graduate-school-ce.de