arXiv:2303.08603v1 [math.GT] 15 Mar 2023

通过广义方形桥图构造相对接触对上的相容相对开书

İ. ÖZGE TAŞPINAR 和 M. FIRAT ARIKAN

Abstract. 利用方形桥位置，Akbulut-Ozbagci 及后来的 Arikan 给出了两种算法，它们都能在标准接触三维球面中的一个勒让德链环上进行接触（±1）手术后，构造出所得闭接触三维流形上的显式相容开书分解。本文为标准接触五维球面中的勒让德链环引入“广义方形桥位”，并通过一种在相对接触对上构造相对开书分解的算法，将这一结果部分推广到五维。

1. 引言

设 Y 为一个定向的（$2n+1$）维流形。Y 上的（余定向正）接触结构是一个极大非可积超平面场 $\xi = \mathrm{Ker}(\alpha)$，其中 α 是 Y 上的光滑一形式，满足 $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$。有序对（$Y$，$\xi$），或简写为 Y_ξ，称为接触流形，而 α 称为 ξ 上的接触形式。Y 上的开书（分解）是一个有序对（B，π），其中 B（称为绑定）是一个具有平凡法丛 $B \times D^2$ 的余维二子流形，而 $\pi\colon\ Y \setminus B \to \mathbb{S}^1$ 是一个光滑纤维化映射，在 D^2–因子靠近 B 处与角坐标一致。纤维 $F = \pi^{-1}(\theta)$ 的闭包称为 $\theta \in \mathbb{S}^1$ 上的页。有序对（B，π）的单值化是由向量场 $\partial/\partial\theta$ 的流的回归映射所定义的自微分同胚 $h\colon\ F \to F$。在接触同胚（保持接触结构的微分同胚）的意义下，开书也可抽象地表示为有序对（F，h）。若存在 ξ 上的接触形式 α，使得 α 是 B 上的接触形式，$d\alpha$ 在每一页上定义辛结构，并且由 α 诱导的 B 上的定向与将 B 视为辛页的接触边界时由 $d\alpha$ 诱导的定向一致，则 Y 上的开书（B，π）与 ξ 相容。更多细节见 [13] 和 [8]。

一个 k 维（$k \le n$）子流形 Σ 属于 Y_ξ，若对所有 $p \in \Sigma$ 均有 $T_p\Sigma \subset \xi_p$，则称其为各向同性的。n 维的各向同性子流形称为勒让德子流形。任意勒让德 $\Sigma \subset Y_\xi$ 都带有一个接触（或瑟斯顿-本奎因）框架，它由沿着 Σ 且横截于 ξ 的一个向量场给出。对于（$\mathbb{R}^3$，$\xi_0^3 = \mathrm{Ker}(\alpha_0^3 = dz + x_1 dy_1)$）中的勒让德结 K，其接触框架可计算为整数

$$tb(K) = writhe(K) - \frac{1}{2}\#(\text{cusps of } K),$$

称为 K 的瑟斯顿-贝内昆数，其中 $writhe(K)$ 是 K 在 $y_1 z$–平面上的前投影中各交叉点符号的总和。在高维标准接触空间中，勒让德子流形的瑟斯顿-贝内昆数与一个拓扑不变量相一致，并且可以很容易地计算出来（见 [7]）。

Date：2023年3月16日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 57R65、58A05、58D27。
Key words and phrases. 接触结构、开书、勒让德、单值化、方桥、手术。

沿勒让德 n-结 $K \subset Y_\xi$ （即某个 n-球面经勒让德嵌入后的像）进行接触手术，是一种生成新手术后 接触流形的操作。手术后的接触流形通过先从 Y_ξ中移除 K 的管状邻域 N，再利用选定的微分同胚将 $S^n \times D^{n+1}$ 粘合回来而形成；该微分同胚将 $S^n \times S^n$ 映到 ∂N，使各部分的接触分布能够平滑地粘合在一起。接触手术系数 （它决定了粘合所用的微分同胚）是相对于 K的接触框架来度量的。（详见第 4.2 节。）在三维中，Ding 和 Geiges 证明了以下结果：

定理 1.1 ([6])。 每个闭接触三维流形都可以通过对标准接触3球面 $\mathbb{S}^3_{st} = (\mathbb{S}^3, \xi^3_{st})$中的一个勒让德链环进行接触$(\pm 1)$手术得到。

这一结果表明，任何闭接触 3-流形都可以用接触手术图描述，其中接触手术系数为 ± 1's。此外，已有研究（见下文）展示了当手术结位于页上时，接触（± 1）手术如何影响相容开书：

定理 1.2 ([8])。 设 (F, h) 是与接触流形 (M^3, η)相容的开书。若勒让德结 K 位于页 F上，则沿 K进行接触(± 1)手术所得的手术后流形 $(M^{\pm 1}, \eta^{\pm 1})$ 具有相容开书 $(F, h \circ \tau_K{}^{\mp})$，其中 $\tau_K^{\mp 1}$ 分别表示沿 K的负向/正向（或左手/右手）德恩扭转。

Akbulut 和 Ozbagci 给出了一种算法，可在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 上构造开书，使得给定的勒让德链环位于某一页上，而该页是适当的（p， q）环面链环的 Seifert 曲面 [1]。Arikan 通过使用接触胞腔分解 [2]改进了这一算法。结合这些结果与定理 1.2，可以轻松构造任意闭接触三维流形上的开书；这类流形由 $\mathbb{S}^3_{st}$中的勒让德链环上的接触（± 1）手术得到。

在高维情形下，沿着相同思路的一些类似结果如下：Koert 在标准接触五维球面 $\mathbb{S}^5_{st} =$（$\mathbb{S}^5$， ξ^5_{st}）上构造了一个开书，其页为 Brieskorn 簇 V_ϵ（p， q，2），其绑定则是 Brieskorn 流形 Σ（p， q，2）的 Seifert 填充[14]。Seidel [20]研究了沿 n球面余切丛零截面的右手（广义）德恩扭转 τ： $T^*S^n \to T^*S^n$ 及其若干应用。Avdek [3]基于广义 Seidel–Dehn 扭转给出了勒让德球面上的接触（± 1）手术定义。Lazarev 证明，若（Y^{2n+1}， ξ） $n \geqslant 2$ 具有几乎 Weinstein 填充，则可通过一系列各向同性手术（指标至多为 n，且指标可为任意值）以及一次余各向同性手术（指标为 n）从 $\mathbb{S}^{2n+1}_{st}$得到 [16]。Conway 和 Etnyre 将定理 1.1 推广到了任意奇数维：

定理 1.3 ([5])。 任意定向接触流形(Y^{2n+1}, ξ) 都可以通过一系列任意指标的各向同性和余各向同性手术从 $\mathbb{S}^{2n+1}_{st}$得到。

本文聚焦于一类特殊的闭接触 5-流形，它们由 $\mathbb{S}^5_{st}$ 内部一类特殊的勒让德 2-链环（即 2-球面的链环）沿其进行接触（± 1）手术得到，具体如下所述。我们为这类 2-链环引入一种新图示，可视为 Lyon [17]在 $\mathbb{R}^3$ 中定义的勒让德 1-链环方形桥图的推广。第 3 节介绍广义方形桥图后，我们将在第 4 节证明关于一类闭接触 5-流形上开书存在性的主要结果。第 5 节将给出示例，以展示我们的算法如何运作。陈述主要定理前，需要先引入一些相对概念。更多详情请参见第 2 节。

考虑 $\mathbb{R}^5$ 上具有坐标 (x_1, y_1, z, x_2, y_2) 的标准接触结构 $\xi^5_0 = \mathrm{Ker}(\alpha^5_0 = dz + x_1 dy_1 + x_2 dy_2)$，以及 $\mathbb{R}^3$ 上具有坐标 (x_1, y_1, z) 的标准接触结构 $\xi^3_0 = \mathrm{Ker}(\alpha^3_0 = dz + x_1 dy_1)$

如上所述。注意，$(\mathbb{R}^3,\ \xi_0^3)$（分别地，$\mathbb{S}^3_{st}$）是 $(\mathbb{R}^5,\ \xi_0^5)$（分别地，$\mathbb{S}^5_{st}$）的接触子流形。另请回顾

$$(\mathbb{R}^3,\xi_0^3)\cong\mathbb{S}^3_{st}\setminus\{pt\},\quad (\mathbb{R}^5,\xi_0^5)\cong\mathbb{S}^5_{st}\setminus\{pt\}.$$

因此，$\mathbb{S}^3_{st}$（分别地，$\mathbb{S}^5_{st}$）中的任意各向同性子流形也是（$\mathbb{R}^3,\ \xi_0^3$）（分别地，（$\mathbb{R}^5,\ \xi_0^5$））中的各向同性子流形，反之亦然。这使我们能够在（$\mathbb{R}^3,\ \xi_0^3$）和（$\mathbb{R}^5,\ \xi_0^5$）中进行研究。

定义 1.4. 设 $\mathbb{L}=\bigsqcup_{i=1}^r L_i\subset(\mathbb{R}^5,\ \xi_0^5)\subset\mathbb{S}^5_{st}$ 是一个勒让德 2-链环。若其赤道链环 $\mathbb{K}=\mathbb{L}\cap\mathbb{S}^3_{st}=\bigsqcup_{i=1}^r K_i$ 是（$\mathbb{R}^3,\ \xi_0^2$）中的一个勒让德 1-链，则称 $\mathbb{L}$ 为一个相对链环 $\subset\mathbb{S}^3_{st}$。若一个相对勒让德 2-链环 $\mathbb{L}$ 满足以下两个条件，则称其为可容许的：

(i) 每个链环分支 L_i 都是 $\mathbb{S}^5_{st}$中的勒让德无纽结 2-球面。(ii) 每个链环分支 $K_i=L_i\cap\mathbb{S}^3$ 在 y_1z平面上的勒让德前沿没有自交。

一个（可容许的）相对2-结是一个仅有一个分支的（可容许的）相对 2-链环。

定义 1.5（另见第 4.2 节）。设 $\mathbb{L}\subset\mathbb{S}^5_{st}$ 是一个（可容许的）相对勒让德 2-链环，其赤道链环为 $\mathbb{K}\subset\mathbb{S}^3_{st}$。假设（闭）接触 5-流形 Y^5_ξ仅通过沿 $\mathbb{L}$进行接触（±1）手术得到，而在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中沿 $\mathbb{K}$进行相应的接触（±1）手术会产生（闭）接触子流形 $M^3_\eta\subset Y^5_\xi$。这样的手术称为沿一对 $(\mathbb{L},\ \mathbb{K})$ 进行的（可容许的）相对接触（ ±1 ）- 手术。称这对 $(Y^5_\xi,\ M^3_\eta)$ 为（可容许的）相对接触对。

我们注意到，若从上述定义中去掉所有接触几何术语，类似地也可以引入一个相对（光滑）拓扑对$(Y^5,\ M^3)$，它由沿一对（$\mathbb{L},\ \mathbb{K}$）$\subset(\mathbb{S}^5,\ \mathbb{S}^3)$进行相对拓扑手术而得到，其中 $\mathbb{K}=\mathbb{L}\cap\mathbb{S}^3$ 是赤道链环。

相对（光滑）拓扑对$(Y^5,\ M^3)$上的相对开书（分解）是其上的一个开书 $\mathcal{OB}_Y=(B,\ \pi)$，满足 $\mathcal{OB}_M=(B\cap M,\ \pi|_{M\setminus(B\cap M)})$定义了$M$的一个开书。对于相对接触对$(Y^5_\xi,\ M^3_\eta)$，如果接触结构与相应的开书相容，我们就称$(\xi,\ \eta)$与$(Y^5,\ M^3)$上的相对开书$(\mathcal{OB}_Y,\ \mathcal{OB}_M)$相容。现在我们可以陈述推广 [2]中结果的主要定理：

定理 1.6。对于带有赤道链环 $\mathbb{K}\subset\mathbb{S}^3_{st}$ 的 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中任意可容许的勒让德2-链环 $\mathbb{L}\ \subset\mathbb{S}^5_{st}$，存在相对接触对$(\mathbb{S}^5_{st},\mathbb{S}^3_{st})$上的一个相容相对开书$(\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^5},\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^3})$（平凡的），使得对于 $\mathbb{L}$ 的任意分支 L 及其赤道结 $K\subset\mathbb{K}$，都有

(i) K 位于 $\mathbb{S}^3_{st}$ 的（相容）开书 $\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^3}$ 的 *Weinstein* 页 $F_{\mathbb{S}^3}$ 上，(ii) K 的页框架等于其在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的接触框架，(iii) L 位于 $\mathbb{S}^5_{st}$ 的（相容）开书 $\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^5}$ 的 *Weinstein* 页 $F_{\mathbb{S}^5}$ 上，(iv) L 的页框架等于其在 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的接触框架，并且(v) $F_{\mathbb{S}^3}$ 在 $F_{\mathbb{S}^5}$ 中是辛的真嵌入，而 $\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^5}$、$\mathcal{OB}_{\mathbb{S}^3}$ 的单值化分别是由右手德恩扭转构成的乘积

$$h_{\mathbb{S}^5}=\tau_{\mathcal{D}_1}\circ\tau_{\mathcal{D}_2}\circ\cdots\circ\tau_{\mathcal{D}_m},\quad h_{\mathbb{S}^3}=\tau_{\gamma_1}\circ\tau_{\gamma_2}\circ\cdots\circ\tau_{\gamma_m}$$

（对于某些 m）其中每个 γ_k 都是勒让德球面 $\mathcal{D}$的各向同性赤道圆 $_k$.

定理 1.7. 设(Y^5_ξ,M^3_η)是沿 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的容许链环 $\mathbb{L}$ 进行容许相对接触(±1)-手术所得到的任意容许相对接触对。则存在一个定义在(Y^5_ξ,M^3_η)上的相容相对开书$(\mathcal{OB}_Y,\mathcal{OB}_M)$，其页为 *Weinstein* 页。此外，开书 $\mathcal{OB}_Y,\ \mathcal{OB}_M$ 的页及其单值化由沿 $\mathbb{L}$ 进行的接触手术精确且系统地确定。

2. Stabilizations of Relative Open Books

众所周知，任意奇维流形都具有开书分解。稳定化是将给定流形的一个开书变为同一流形的另一个开书的过程。它会改变页和单值化。我们可以自然地将这一过程推广到相对接触对上的相对开书，正如我们将在下文讨论的那样。为此，我们先以最一般的形式介绍相对开书。与前文一样，我们首先为（光滑）拓扑对定义相对开书，然后建立它们与接触几何之间的联系。虽然可以考虑任意奇数维数，但我们只关注三维和五维的拓扑对。

定义 2.1. 设 M^3 和 Y^5 为闭（光滑）拓扑流形，且 M 是 Y的子流形。对偶对 (Y, M)上的相对开书（分解）是一个四元组 (B_Y, B_M, π_Y, π_M)，满足

(i) (B_M, π_M) 和 (B_Y, π_Y) 分别是 M和 Y的开书分解，并且 (ii) $\pi_M = \pi_Y \circ i_M$，
其中 $i_M\colon M \hookrightarrow Y$是嵌入映射。

注意，这些条件意味着，对于所有 $\overline{t \in S^1}$，$\overline{\pi_M^{-1}(t) \subset \pi_Y^{-1}(t)}$ 且 $\partial\overline{\pi_M^{-1}(t)} \subset \partial\pi_Y^{-1}(t)$。这意味着 (B_M, π_M) 的二维页真嵌入在 (B_Y, π_Y) 中相应的四维页内。此外，(B_Y, π_Y) 的单值化限制为 (B_M, π_M) 的单值化。这些说明，相对开书也可以通过纯粹抽象的方式定义如下：

定义 2.2. 设 M^3 和 Y^5 是闭（光滑）拓扑流形，且 M 是 Y 的子流形。对偶 (Y, M) 上的抽象相对开书（分解）是一个四元组 (F_Y, F_M, h_Y, h_M)，满足

(i) (F_M, h_M) 和 (F_Y, h_Y) 分别是 M 和 Y 的抽象开书分解；(ii) 页 F_M 真嵌入于页 F_Y 中（因此，$\partial F_M \subset \partial F_Y$）；(iii) $h_Y|_{F_M} = h_M$。

当几何结构和拓扑结构同时存在时，值得尝试以某种方式将它们联系起来。正如我们先前提到的，Giroux 指出接触结构与开书分解之间存在一种这样的关系，称为相容性，并证明接触结构（模同伦）与其相容开书（模正稳定化）之间存在一一对应关系 [11]。相对接触对与相对开书分解的相容性概念可轻易作如下修改：

定义 2.3。 设 (Y^5_ξ, M^3_η) 为一个相对接触对。若在 (Y, M) 上的相对开书分解 (B_Y, B_M, π_Y, π_M) 与接触对 (ξ, η) 相容，则

(i) 开书 (B_Y, π_Y) 与 Y 上的接触结构 ξ 相容，且 (ii) 开书 (B_M, π_M) 与 M 上的接触结构 η 相容。

例 2.4. 考虑如前所述的标准接触球面上的（平凡）相对接触对 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$。令 $\mathbb{S}^2$ 为 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的标准 Legendrian 2-平凡结，令 $\mathbb{S}^1$ 为其各向同性赤道圆，它是 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的标准 Legendrian 1-纽结（其前投影见图 1）。众所周知，$(D^*\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2})$ 和 $(D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$ 分别是 $\mathbb{S}^5_{st}$ 和 $\mathbb{S}^3_{st}$上的相容开书，其中 $D^*\mathbb{S}^n$ 表示n-球面的单位圆盘余切丛。众所周知，$D^*\mathbb{S}^1$ 真嵌入于 $D^*\mathbb{S}^2$ 中，且右手德恩扭转 $\tau_{\mathbb{S}^2}\colon D^*\mathbb{S}^2 \to D^*\mathbb{S}^2$ 限制为右手德恩扭转 $\tau_{\mathbb{S}^1}\colon D^*\mathbb{S}^1 \to D^*\mathbb{S}^1$。因此，$(D^*\mathbb{S}^2, D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^2}, \tau_{\mathbb{S}^1})$ 是相对接触对 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上的相容相对开书分解。

根据 Giroux 对应，正稳定化不仅保持底层光滑流形的微分同胚类型，也保持接触结构。更准确地说，接触流形上的相容开书经过正稳定化后，与同一光滑流形上的一个接触结构相容，且该接触结构与原接触结构同伦。此对应可以自然地推广到接触相对对上的相容相对开书。为此，需要定义相对稳定化的概念。为完整起见，我们先回顾稳定化；它是一个更一般过程（称为拼接）的特例：

设（Y_i^{2n+1}，ξ_i）是两个闭接触（$2n+1$）流形，且每个 $\xi_i = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ 都与 Y_i 上的一个开书（F_i，h_i）相容。假设 A_i 是辛页面（F_i，$d\alpha_i$）中的一个真嵌入拉格朗日n-圆盘，其勒让德边界为 $\partial A_i \subset$（∂F_i，$\mathrm{Ker}(\alpha_i|_{\partial F_i})$）。由温斯坦（即拉格朗日）邻域定理，每个 A_i 在 F_i 中都有一个标准邻域N_i，它与（T^*D^n，$d\lambda_{\mathrm{can}}$）辛同胚，其中 $\lambda_{\mathrm{can}} = \mathrm{pdq}$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的典范 1-形式，坐标为（q，p）。于是，沿着 A_1 和 A_2 拼接开书（F_1，h_1）与（F_2，h_2），得到连通和 $Y_1 \# Y_2$ 上的开书（$\mathcal{P}$（F_1，F_2；A_1，A_2） h）；其页面由将 F_i 沿着 N_i 粘合而成，粘合时交换 N_1 中的 q 坐标与 N_2 中的$\tilde{\mathrm{p}}$ 坐标，反之亦然。为了描述 h，将每个 h_i 延拓为新$\tilde{}$页面上的 h_i ，并要求其在 h_i的定义域之外为恒等映射。然后，monodrodmy $\tilde{h}$ $\tilde{}$定义为 $h_1 \circ h_2$。为简便起见，将省略“波浪号”，直接记作$h = h_1 \circ h_2$。

定义 2.5 ([11])。假设 (F, h) 是一个与闭合 $(2n+1)$-流形 Y 上的接触结构$\xi = \mathrm{Ker}(\alpha)$ 相容的开书。设 A 是辛页面 $(F, d\alpha)$ 中真嵌入的拉格朗日 n-圆盘，且其边界 ∂A 是接触绑定 $(\partial F, \mathrm{Ker}(\alpha|_{\partial F}))$ 中的勒让德 $(n-1)$-球面。那么，沿 A 对 (F, h) 作正稳定化 $\mathcal{S}^+[(F, h); A]$，所得开书定义为

$$\mathcal{S}^+[(F, h); A] \doteq (\mathcal{P}(F, D^*\mathbb{S}^n; A, \mathbf{D}), h \circ \tau_{\mathbb{S}^n})$$

其中，$\cong D^n$ D 是单位圆盘余切丛 $D^*\mathbb{S}^n$ 中的任意一个纤维，而 $\tau_{\mathbb{S}^n}$：$D^*\mathbb{S}^n \to D^*\mathbb{S}^n$是沿零截面 $\mathbb{S}^n$的右手德恩扭转。类似地，沿 A 对 (F, h) 作负稳定化$\mathcal{S}^-[(F, h); A]$，所得开书定义为

$$\mathcal{S}^-[(F, h); A] \doteq (\mathcal{P}(F, D^*\mathbb{S}^n; A, \mathbf{D}), h \circ \tau_{\mathbb{S}^n}^{-1})$$

注 2.6。对相容开书 $(F,\ h)$ 进行稳定化，抽象而言，意味着每个辛页面 $(F^{2n},\ d\alpha)$ 都会获得一个指标为 n 的温斯坦柄 $H = D^n \times D^n$。这些柄的附着球面，是在每个纤维边界∂F 内考虑的勒让德 $(n-1)$-球面的副本 ∂A。此外，上述定义中使用的记号相当容易引起误解，也不适用于我们的目的。进行正/负稳定化时，抽象而言，意味着加入单值化的右手/左手德恩扭转，是沿着拉格朗日 (n)-球面 L 进行的；该球面由拉格朗日 $(A,\ \partial A)$-圆盘 $\subset (F,\ \partial F)$ 与拉格朗日 (n)- 圆盘 $D^2 \times \{0\}$ （即 H 的核圆盘）沿共同边界 $\partial A \subset \partial F$ 粘合而成，也就是说，$L = A \cup_{\partial A} (D^2 \times \{0\})$。总之，我们将采用以下关于 $(F,\ h)$沿 A 进行正/负稳定化的（抽象）替代定义（记号），它与原定义等价：

$$\mathcal{S}^{\pm}[(F, h); A] \doteq (F \cup H, h \circ \tau_L^{\pm 1}).$$

定理 2.7 ([11])。在定义 *2.5* 的设定下，$\mathcal{S}^{\pm}[(F, h); A]$ 都是连通和 $Y \# \mathbb{S}^{2n+1} (\cong Y)$上的开书。事实上，$\mathcal{S}^+[(F, h); A]$ 是接触连通和 $Y_\xi \# \mathbb{S}^{2n+1}_{st} (\cong Y_\xi)$上的开书，换言之，它是 (Y, ξ)上的相容开书。

返回 b　　回到三维和五维的情形，我们现在定义相对稳定化过程　　s:

定义 2.8. 假设 (F_Y, F_M, h_Y, h_M) 是与相对接触对 (Y^5_ξ, M^3_η) 上的接触结构对 ($\xi = \text{Ker}(\alpha)$ $\eta = \text{Ker}(\alpha|_M)$) 相容的相对开书。设 A 是辛页面 $(F_Y, d\alpha|_{F_Y})$ 中一个真嵌入的拉格朗日 2-圆盘，其勒让德边界 ∂A（一个平凡结）位于接触绑定 $(\partial F_Y, \text{Ker}(\alpha|_{\partial F_Y}))$ 中；并且 $A \cap F_M$ 是辛页面 $(F_M, d\alpha|_{F_M})$ 中一个真嵌入的拉格朗日 1-圆盘，其勒让德边界 $\partial(A \cap F_M)$（一个点对）位于接触绑定 $(\partial F_M, \text{Ker}(\alpha|_{\partial F_M}))$ 中。再考虑相对温斯坦柄 $H = (H^4, H^2) = (D^2 \times D^2, D^1 \times D^1)$，使得 H^2 的核和余核分别真嵌入 H^4 的核和余核中，即 $D^1 \times \{0\} \subset D^2 \times \{0\}$, $\{0\} \times D^1 \subset \{0\} \times D^2$ 和 $\partial D^1 \times \{0\} \subset \partial D^2 \times \{0\}$ 以及 $\{0\} \times \partial D^1 \subset \{0\} \times \partial D^2$。那么，沿 $(A, A \cap F_M)$ 对 (F_Y, F_M, h_Y, h_M) 进行的正向相对稳定化 $\mathcal{S}^+[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$，是由以下内容定义的开书

$$\mathcal{S}^+[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M] \doteq (F_Y \cup H^4, F_M \cup H^2, h_Y \circ \tau_L, h_M \circ \tau_K)$$

其中，H^4 的框架比（∂F_Y，$\text{Ker}(\alpha|_{\partial F_Y})$）中 ∂A 的接触框架小一，且 $K = A \cap F_M \cup_{\partial(A \cap F_M)} (D^1 \times \{0\})$ 是新辛页面 $F_M \cup H^2$ 中的拉格朗日 1-球面，而 $L = A \cup_{\partial A} (D^2 \times \{0\})$ 是新辛页面 $F_Y \cup H^4$ 中的拉格朗日 2-球面。类似地，负相对稳定化 $\mathcal{S}^-[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$ 将 (F_Y, F_M, h_Y, h_M) 沿 $(A, A \cap F_M)$ 变换后得到的开书定义为

$$\mathcal{S}^-[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M] \doteq (F_Y \cup H^4, F_M \cup H^2, h_Y \circ \tau_L^{-1}, h_M \circ \tau_K^{-1})$$

其中这次 t　　he 框架比（∂F_Y，$\text{Ker}(\alpha|_{\partial F_Y})$中 ∂A 的接触框架大一　　).

注记 2.9. 根据定义可知，相对稳定化包含两次稳定化：一次在三维中进行，另一次在五维中进行，但实际上只有一次稳定化：我们只沿着 A 对开书 (F_Y, h_Y) 进行稳定化，即，

$$\mathcal{S}^\pm[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M] = \mathcal{S}^\pm[(F_Y, h_Y); A],$$

因此，(F_M, h_M) 也同时沿着 $A \cap F_M$ 进行了稳定化。

Giroux 的结果在相对情形下也成立。具体来说，

定理 2.10. 在定义 2.8 的情形下， $\mathcal{S}^\pm[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$ *是连通和* $(Y \# \mathbb{S}^5, M \# \mathbb{S}^3) \cong (Y, M)$ *上的开书。事实上，* $\mathcal{S}^+[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$ *是接触连通和* $(Y_\xi \# \mathbb{S}^5_{st}, M_\eta \# \mathbb{S}^3_{st}) \cong (Y_\xi, M_\eta)$ *上的开书，换言之，它是相对接触对* (Y_ξ, M_η) *上的相容相对开书。*

证明。注意，两个稳定化 $\mathcal{S}^\pm[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$ 分别对应于在 $Y \# \mathbb{S}^5 \cong Y$ 上的稳定化开书 $\mathcal{S}^\pm[(F_Y, h_Y); A]$，以及在 $M \# \mathbb{S}^3 \cong M$ 上的稳定化开书 $\mathcal{S}^\pm[(F_M, h_M); A \cap F_M]$。因此，根据定理 2.7，它们都是相对连通和 $(Y \# \mathbb{S}^5, M \# \mathbb{S}^3) \cong (Y, M)$ 上的相对开书；此外，$\mathcal{S}^+[(F_Y, F_M, h_Y, h_M); A, A \cap F_M]$ 是接触连通和 $(Y_\xi \# \mathbb{S}^5_{st}, M_\eta \# \mathbb{S}^3_{st}) \cong (Y_\xi, M_\eta)$ 上的开书。因此，定义 2.3 适用。□

例 2.11. 考虑标准接触球面 $\mathbb{S}^5_{st}$ 和 $\mathbb{S}^3_{st}$上最简单的相容开书(D^4, id_{D^4})和(D^2, id_{D^2})。这里我们考虑带有各自标准辛结构的两个圆盘，并且 D^2 是真辛嵌入于 D^4中的。容易验证定义 2.2 和定义 2.3 中的条件，因此$(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2})$是接触对$(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$上的相容相对开书。此外，一个众所周知的构造是：$D^*\mathbb{S}^2$ 和 $D^*\mathbb{S}^1$ 可以同时由 D^4 和 D^2 沿着 $\mathbb{S}^3_{st} (= \partial D^4)$中的一个勒让德 1-纽结 ∂A（即 D^4中适当嵌入的拉格朗日圆盘 A 的边界）以及 $\mathbb{S}^1_{st} (= \partial D^2)$中的一个勒让德 0-纽结 $\partial(L \cap D^2)$附加温斯坦把手 H^4 和 H^2 而得到。

假设 H^4 的框架选择正确（比$\mathbb{S}^3_{st} = \partial D^4$中 ∂A的接触框架少一），根据定义 2.8，我们得出$(D^*\mathbb{S}^2, D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^2}, \tau_{\mathbb{S}^1})$是沿着$(A, A \cap D^2)$对$(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2})$作正相对稳定化所得。也就是说，

$$(D^*\mathbb{S}^2, D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^2}, \tau_{\mathbb{S}^1}) = \mathcal{S}^+[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A, A \cap D^2].$$

另一方面，若选择 H^4 的框架比 ∂A 的接触框架多一，则可得

$$(D^*\mathbb{S}^2, D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^2}^{-1}, \tau_{\mathbb{S}^1}^{-1}) = \mathcal{S}^-[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A, A \cap D^2].$$

3. 广义方形桥图

任意勒让德链环 $\mathbb{K}$ 都可以用方形桥图 [17] 表示。本节将构造一种广义方形桥图，用以表示 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5) \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 中任意可容许的勒让德 2-链环 $\mathbb{L}$，且该图自然包含 $\mathbb{L}$ 的赤道链环 $\mathbb{K} = \mathbb{L} \cap \mathbb{S}^5_{st}$ 的一个方形桥图。

令 $\Pi_5 \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 \colon (x_1, y_1, z, x_2, y_2) \mapsto (y_1, z, y_2)$ 和 $\Pi_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \colon (x_1, y_1, z) \mapsto (y_1, z)$ 为前投影映射。为了描绘 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$ 中的勒让德 2-结（以及 $(\mathbb{R}^3, \xi_0^3)$ 中的勒让德 1-结），我们考虑它们的前投影，即它们在映射 Π_5（以及 Π_3）下的像。图 1 展示了勒让德平凡结的前投影示例。

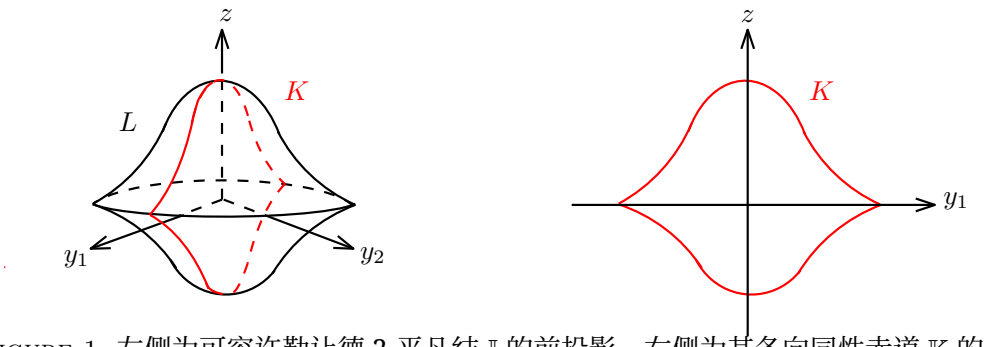


FIGURE 1. 左侧为可容许勒让德 2-平凡结 $\mathbb{L}$的前投影，右侧为其各向同性赤道 $\mathbb{K}$ 的前投影（在（$\mathbb{R}^3$, ξ_0^3）中的勒让德 1-纽结）。

我们首先考虑给定的可容许勒让德 2-链环 $\mathbb{L} = \bigsqcup_{i=1}^r L_i$ 的赤道 1-链环$\mathbb{K} = \bigsqcup_{i=1}^r K_i$ 的前投影在 $y_1 z$ 平面中的方形桥图，该图由以下两类线段组成:

$$\begin{aligned} h_{a_i} &= \{(x_1, y_1, z, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = x_2 = y_2 = 0, \quad z = -y_1 + a_i\} \\ v_{b_j} &= \{(x_1, y_1, z, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = x_2 = y_2 = 0, \quad z = y_1 + b_j\} \end{aligned}$$

对于某些实数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ 和 $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_q$，它在 $y_1 z-$ 平面上围成一个多边形区域，如图 2（左）所示。其次，将每个多边形区域划分为有限个正方形区域 R_k，其中 $k = 1, 2, \ldots\ldots, m$，如图 2（右）所示。通过对 $\mathbb{L}$ 施加适当的 Legendrian 同伦，可以实现这样的划分，使得相邻 a_i 之间以及相邻 b_j 之间的间隔都等于同一个固定实数。

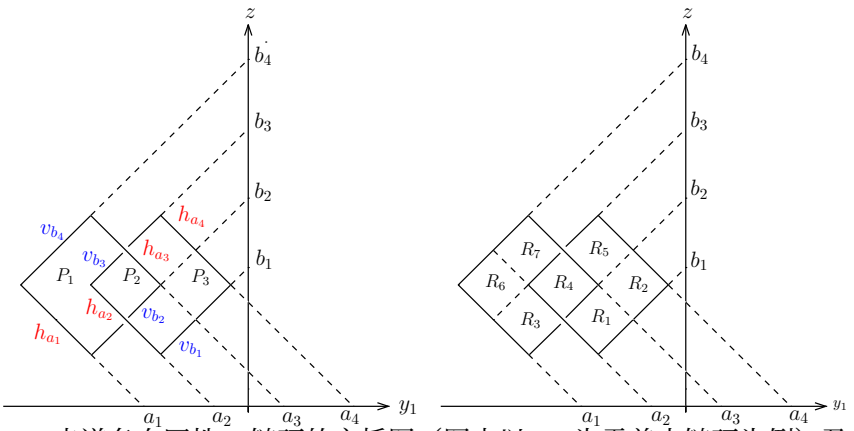


FIGURE 2. 赤道各向同性 1-链环的方桥图（图中以 $\mathbb{K}$ 为霍普夫链环为例）及其划分成的方格（右侧）。

其次，对于每个正方形区域 R_k，我们构造一个八面体，使得 ∂R_k 是该八面体的赤道正方形。具体做法是将以下四种类型的八个三角形平面片组合（粘合）起来：

$$\begin{aligned}
t_{a_i}^{1,1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2)\in\mathbb{R}^5 : \quad x_1=x_2=0, \quad z=-y_1-y_2+a_i\}\\
t_{a_i}^{1,-1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2)\in\mathbb{R}^5 : \quad x_1=x_2=0, \quad z=-y_1+y_2+a_i\}\\
t_{b_j}^{-1,1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2)\in\mathbb{R}^5 : \quad x_1=x_2=0, \quad z=y_1-y_2+b_j\}\\
t_{b_j}^{-1,-1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2)\in\mathbb{R}^5 : \quad x_1=x_2=0, \quad z=y_1+y_2+b_j\}.
\end{aligned}$$

典型方形区域 R_k 对应的典型八面体如图 3 所示；这正是我们所说的标准勒让德 2-平凡结的广义方形桥位，其前投影已出现在上文的图 1 中。

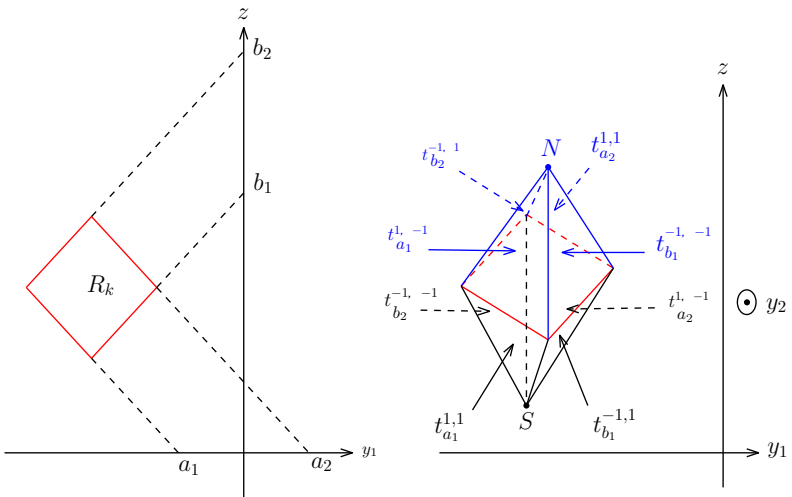


FIGURE 3.与 R_k 对应的八面体（标准 Legendrian 2-平凡结的一种广义方形桥位）。

在图 3 中，八面体上部包含三角形 t^1、$_{a_1}{}^{-1}$、t^1、$_{a_2}{}^{1}$、t^{-1}、$_{b_1}{}^{-1}$、t^{-1}、$_{b_2}{}^{1}$，下部包含三角形 t^1、$_{a_1}{}^{1}$、t^1、$_{a_2}{}^{-1}$、t^{-1}、$_{b_1}{}^{1}$、t^{-1}、$_{b_2}{}^{-1}$。此外，八面体的北极和南极分别为 $N = (0, \frac{a_1 - b_1}{2}, \frac{a_1 + b_2}{2}, 0, \frac{b_2 - b_1}{2})$ 和 $S = (0, \frac{a_1 - b_1}{2}, \frac{a_1 + b_2}{2}, 0, \frac{b_1 - b_2}{2})$。

最后，我们定义

定义 3.1. $\mathbb{L}$ 的广义方形桥图记为 $\Delta(\mathbb{L})$，它是通过考察所有 R_k（在 $\mathbb{K}$ 的方形桥图中），并取相应 m 八面体的并集（见图 4），得到的 $(y_1 z\, y_2)$-空间中的胞腔 2-复形。

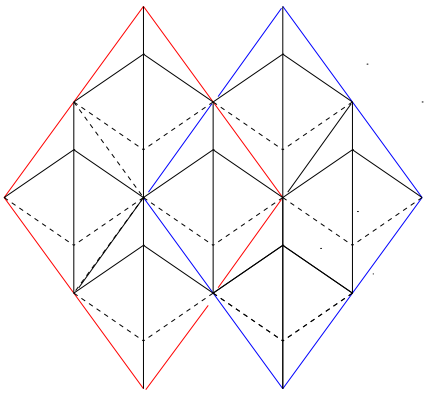


FIGURE 4. 可容许的勒让德 2-链环 $\mathbb{L}$ 的广义方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$，其赤道链环 $\mathbb{K}$ 是霍普夫链环。

注意，$\mathbb{K}$ 的方形桥图 $\Gamma(\mathbb{K})$ 是 $\Delta(\mathbb{L})$ 的胞腔 1-子复形。接下来，我们将证明，从其广义方形桥图 $\Delta(L) \subset \Delta(\mathbb{L})$ 出发，可以重构 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5) \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 中 $\mathbb{L}$ 的每个分支 L。更确切地说，

命题 3.2. 对于 $\mathbb{L} = \bigsqcup_{i=1}^r L_i$ 的任意分支 L_i，从 $\Delta(L_i)$ 出发，可以通过粘合适当的勒让德三角形、平面三角形和矩形，构造出一个分段光滑的勒让德2-球面 L_i'，使其位于$(\mathbb{R}^5, \xi_0^5) \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 中。将 L_i' 的角点圆化后得到的光滑勒让德2-球面与 L_i *Legendrian* 同痕。此外，分段光滑的赤道1-链环 $\mathbb{K}' = \bigsqcup_{i=1}^r K_i'$ $(K_i' = L_i' \cap \mathbb{S}^3_{st})$ 与 $\mathbb{K}$ 具有相同的链接矩阵。

证明. 首先，沿轴抬升 $\Gamma(\mathbb{K})$ 中的每条线段 h_{a_i} 和 $^{v_{b_j}}$（划分为正方形区域），使抬升后的线段互不相交，且为 $(\mathbb{R}^3, \xi_0^3) \subset \mathbb{S}^3_{st}$ 中的勒让德线段，具体如下

$$\begin{aligned} H_{a_i} &= \{(x_1, y_1, z, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = 1, x_2 = y_2 = 0, \quad z = -y_1 + a_i\} \\ V_{b_j} &= \{(x_1, y_1, z, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = -1, x_2 = y_2 = 0, \quad z = y_1 + b_j\}. \end{aligned}$$

然后，我们通过与 x_1 轴平行的勒让德线性弧 I_k^l，将每个线段 H_{a_i} 连接到某些线段 V_{b_j}，从而在 $(\mathbb{R}^3, \xi_0^3)$ 中得到 [2] 所示的所有（分段光滑）勒让德平凡结 γ_k（位于 $\Gamma(\mathbb{K})$ 中）。γ_k 的构造（针对一个典型的方形区域 R_k）见图5。请注意，根据构造，勒让德平凡结 γ_k 要么从侧面连接到 $\widetilde{\gamma_{k+1}}$，要么通过打开后门连接到它。由此，我们将 $\Gamma(\mathbb{K})$ 的提升 $\Gamma(\mathbb{K})$ 构造成 $(\mathbb{R}^3, \xi_0^3)$ 中的勒让德胞腔 1-复形 $\subset \mathbb{S}^3_{st}$（它也是 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$ 中的各向同性胞腔 1-复形 $\subset \mathbb{S}^5_{st}$）。注意，根据构造，存在一个分段光滑的

~Legendrian 1-链 $\mathbb{K}' = \bigsqcup_{i=1}^{r} K_i' \subset \Gamma(\mathbb{K})$，我们可以在其 ϵ-邻域内将其角点磨圆，使所得的光滑 Legendrian 链环与 $\mathbb{K}$ Legendrian 同痕。特别地， $\mathbb{K}'$ 和 $\mathbb{K}$ 的链接矩阵相同。因此，只要我们证明陈述中的第一个断言（即，以使 $K_i' = L_i' \cap \mathbb{S}^3_{st}$ 成立的方式构造 L_i'），第二个断言便得证。

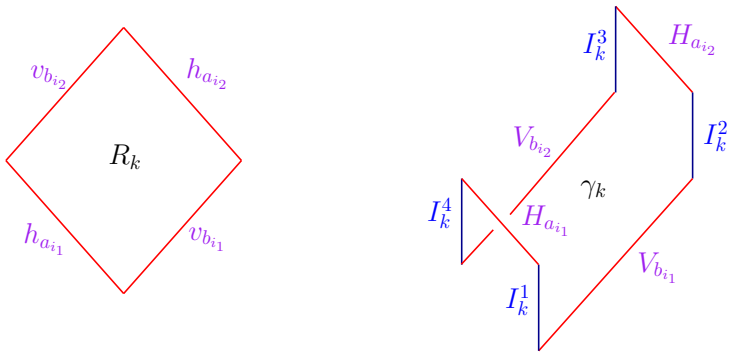


FIGURE 5. 一个典型的方形区域 R_k 和 Legendrian 平凡结 γ_k。

~ ~接下来，我们将构造一个勒让德加厚 $\mathcal{L}(\Gamma(\mathbb{K}))$，它包含 $\Gamma(\mathbb{K})$（所有 γ_k 的并集）中每个（赤道结） K_i' 在我们最终将构造的勒让德 L_i' 内的邻域。虽然勒让德加厚的方式并不唯一（需要选择加厚方向），但我们将按以下系统方法进行：对于每个 $k = 1, ..., m$，我们首先按照下文所述的方式构造其勒让德加厚 M_k（我们称之为一个中间部分） γ_k。然后，我们构造 $\mathcal{L}(\Gamma(\mathbb{K})) \doteq \bigsqcup_{k=1}^{m} M_k$，其中并集取遍$M_k$ 的公共部分。（按照下文的构造，如果两个 γ_k 有一条公共边，那么相应的 M_k 就有一个公共矩形部分，它是该公共边的勒让德加厚。）

我们构造每个中间部分 M_k，使其由 4 块勒让德矩形片和 16 块 Legendrian 三角形板组成，如图6所示。整个 M_k 位于超空间$\{y_2 = 0\} \subset (\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$中，而 γ_k 作为 M_k 的核，其中 $x_2 = y_2 = 0$。

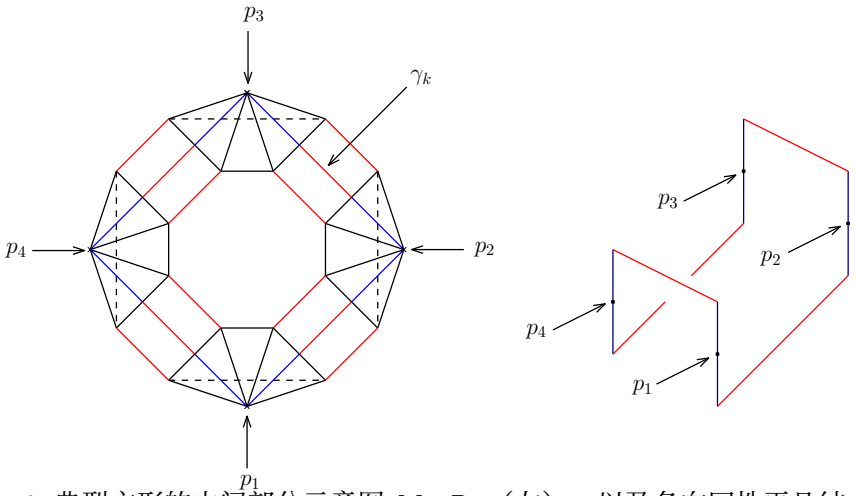


FIGURE 6. 典型方形的中间部分示意图 M_k R_k （左），以及各向同性平凡结 γ_k （右）。

对于 H_i 和 V_j 部分 γ_k，我们将其勒让德加厚取为 4 个勒让德矩形 S_{H_i} 和 S_{V_j}，在这些矩形上，$x_1 = \pm 1$ 和 $-1 \le x_2 \le 1$。另一方面，对于 I_k 部分γ_k，其勒让德加厚完全由 16 个勒让德三角形 S_{I_k} 组成，在这些三角形上，x_1和 x_2 都在 -1 与 1 之间变化，变化方式使得每组 4 个三角形将一个S_{H_i} 连接到其两个相邻 S_{V_j}'之一。特别地，$x_1 = x_2 = 0$ 位于 M_k 的点 p_1、p_2、p_3，p_4 处，这些点是 γ_k中弧 I_k 的中点。（图7给出了这一构造在四维空间 $\{y_2 = 0\} \subset (\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$中的示意图。）

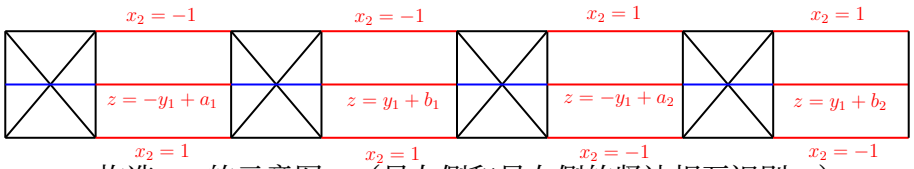


FIGURE 7. 构造 M_k的示意图。（最左侧和最右侧的竖边相互识别。）

根据构造，所有 M_k都沿着它们的公共部分彼此接触，并共同构成勒让德加厚 $\mathcal{L}(\Gamma(\mathbb{K})) \doteq \bigsqcup_{k=1}^{m} M_k$。注意，$\mathbb{K}' \subset \Gamma(\mathbb{K}) \subset \mathcal{L}(\Gamma(\mathbb{K}))$。

现在我们考虑广义方形桥图$\Delta(\mathbb{L})$中八面体的三角形。我们将每个三角形平面片 $t^{1}_{,a_i}{}^{1}$, $t^{1}_{,a_i}{}^{-1}$, $t^{-1}_{,b_j}{}^{1}$, $t^{-1}_{,b_j}{}^{-1}$（提升到适当的x_1 和 x_2 层面），使得所得的提升彼此不相交，成为位于以下 4 类平面上的勒让德三角形板：

$$\begin{aligned}
T_{a_i}^{1,1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad z = -y_1 - y_2 + a_i\} \\
T_{a_i}^{1,-1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad z = -y_1 + y_2 + a_i\} \\
T_{b_j}^{-1,1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad z = y_1 - y_2 + b_j\} \\
T_{b_j}^{-1,-1} &= \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad z = y_1 + y_2 + b_j\}.
\end{aligned}$$

下一个引理表明，上述列出的三角形平面都是勒让德的。

引理3.3。 对于任意 $c \in \mathbb{R}$，这些平面

$$T_c^{k,\ell} = \{(x_1,y_1,z,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^5 : \quad x_1 = m, \quad x_2 = n, \quad z = ky_1 + \ell y_2 + c\}$$

在 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5) \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 中是勒让德的，当且仅当 $k = -m$ 且 $\ell = -n$。

证明。需要证明，任何与 $T^{k}_{,c}{}^{\ell}$相切的向量都属于 Ker(α_0^5)，其中 $\alpha_0^5 = dz + x_1 dy_1 + x_2 dy_2$。在任意点 $p \in T^{k}_{,c}{}^{\ell}$处，$T^{k}_{,c}{}^{\ell}$的切空间由向量 $\partial/\partial y_1 + k\,\partial/\partial z$和$\partial/\partial y_2 + \ell\,\partial/\partial z$张成。也就是说，

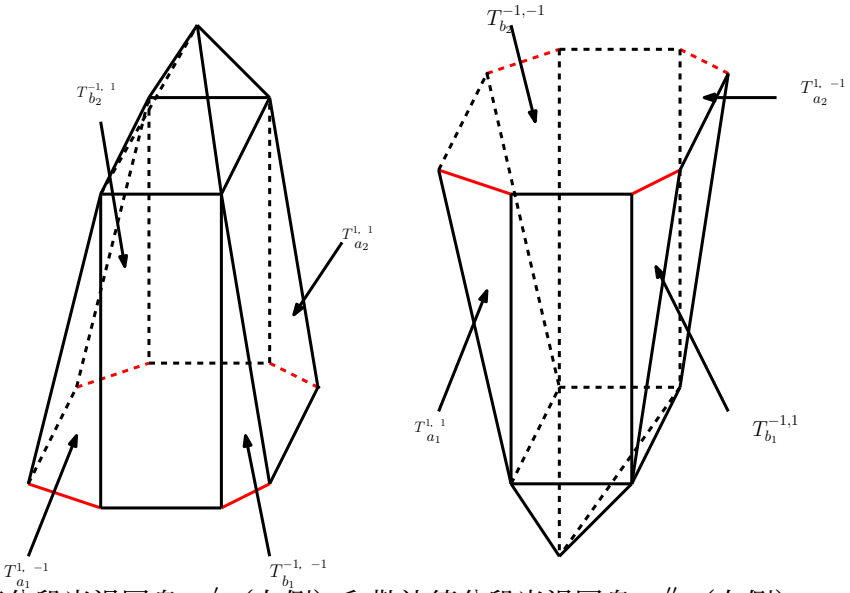
$$T_p T_c^{k,\ell} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1} + k\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial y_2} + \ell\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle.$$

然后可以很容易验证，

$$\alpha_0^5\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) = k + m = 0 \Leftrightarrow k = -m, \quad \alpha_0^5\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \ell\frac{\partial}{\partial z}\right) = \ell + n = 0 \Leftrightarrow \ell = -n.$$

因此，该结论由线性性得出。 □

接下来，利用上述三角形，对于每个方形区域 R_k，我们将得到两个互不相交的分段光滑圆盘 $\mathcal{D}_k'$ 和 $\mathcal{D}_k''$，它们分别构成一个分段光滑的勒让德 2-平凡结的上半部分和下半部分，该结称为 $(\mathbb{R}^5,\ \xi_0^5)$ 中的勒让德菱形，如图8和图9所示。



勒让德分段光滑圆盘 $\mathcal{D}_k'$（左侧）和勒让德分段光滑圆盘 $\mathcal{D}_k''$（右侧）。

圆盘 $\mathcal{D}_k'$ 由 4 个互不相交的勒让德三角形板 $T^{1,\ a_1\ -1}$, $T^{1,\ a_2\ 1}$, $T^{-1,\ b_1\ -1}$, $T^{-1,\ b_2\ 1}$、4 个勒让德矩形板（用于连接它们）以及顶部另外 4 个勒让德三角形板组成；同样，圆盘 $\mathcal{D}_k''$ 由 4 个互不相交的勒让德三角形板 $T^{1,\ a_1\ 1}$, $T^{1,\ a_2\ -1}$, $T^{-1,\ b_1\ 1}$, $T^{-1,\ b_2\ -1}$、4 个勒让德矩形板（用于连接它们）以及底部另外 4 个勒让德三角形板组成（图8）。对于每个圆盘，矩形板连接若干对互不相交的三角形板，而连接这 4 个勒让德矩形板的 4 个三角形板如下：

$$P_{\pm 1} = \{z = \pm y_2 + \frac{a_i + b_i}{2},\quad y_1 = \frac{a_i - b_i}{2},\quad x_2 = \mp 1,\quad -1 \le x_1 \le 1\}$$
$$P'_{\pm 1} = \{y_2 = \pm y_1 \pm \frac{b_2 - a_1}{2},\quad z = \frac{a_1 + b_2}{2}\quad -1 \le x_1 = \mp x_2 \le 1\}.$$

此外，对于每个圆盘，都有两片由顶部和底部的 4 个三角形板组成的板片：

$$P_t = \{y_1 = \frac{a_1 - b_1}{2},\quad z = \frac{a_1 + b_2}{2},\quad y_2 = \frac{b_2 - b_1}{2},\quad -1 \le x_1, x_2 \le 1\}$$
$$P_b = \{y_1 = \frac{a_1 - b_1}{2},\quad z = \frac{a_1 + b_2}{2},\quad y_2 = \frac{b_1 - b_2}{2},\quad -1 \le x_1, x_2 \le 1\}.$$

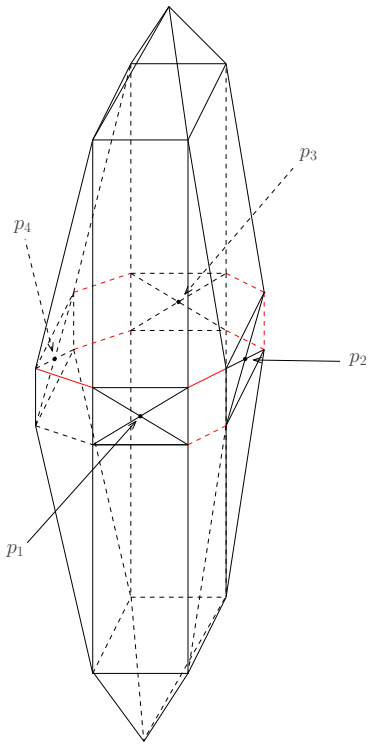


FIGURE 9. 勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$ （一个分段光滑的勒让德 2-平凡结 ）.

根据其构造，可以直接验证， $\mathcal{D}_k'$、 $\mathcal{D}_k''$ 和 M_k 中的所有三角形板和矩形片都恰当地沿着其边界的公共部分彼此相接，并共同构成了（$\mathbb{R}^5$， ξ_0^5） $\subset \mathbb{S}_{st}^5$中的勒让德菱形 $\mathcal{D}_k \doteq \mathcal{D}_k' \cup M_k \cup \mathcal{D}_k''$。我们注意到，赤道链环 $\mathbb{K} = \bigsqcup_{i=1}^r K_i$ 被重构为包含在并集 $\mathcal{L}(\Gamma(\mathbb{K}))(= \bigsqcup_{k=1}^m M_k)$中的分段光滑一维链环$\backsim\mathbb{K}' = \bigsqcup_{i=1}^r K_i'$；它可以实现为所有勒让德菱形并集 $\bigsqcup_{k=1}^m \mathcal{D}_k$ 内各向同性赤道平凡结的邻域之并。

为验证第一个断言，令 L_i 为 $\mathbb{L}$ 的任意一个分支。考虑所有包含于方形桥图 $\Gamma(K_i) \subset \Gamma(\mathbb{K})$ 中的正方形区域 $\{R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}\} \subset \{R_1, R_2, ..., R_m\}$ 所构成的子集。于是，前投影 $\Pi_3(K_i)$ 包含于并集 $\bigsqcup_{j=1}^n R_{i_j}$ 中，因此相应的分段光滑各向同性平凡结 K_i' 包含于勒让德加厚 $\sim\mathcal{L}(\Gamma(K_i)) = \bigsqcup_{j=1}^n M_{i_j} \subset \bigsqcup_{j=1}^n \mathcal{D}_{i_j}$ 中。令 $\mathcal{L}(K_i') \subset \mathcal{L}(\Gamma(K_i))$ 表示 K_i' 的勒让德加厚（即 $\bigsqcup_{j=1}^n M_{i_j}$ 中收缩到 K_i' 的板片之并）。边界 $\partial(\mathcal{L}(K_i'))$ 由 K_i' 的两个（各向同性）推移副本组成；在勒让德菱形 $\mathcal{D}_{i_1}$、 $\mathcal{D}_{i_2}$..... $\mathcal{D}_{i_n}$ 的上、下圆盘 $\mathcal{D}_{i_j}'$、 $\mathcal{D}_{i_j}''$ 中， $\mathcal{L}(K_i')$ 与相应的矩形板和三角形板相交。最后，我们将 L_i' 定义为其并集

$$L_i' \doteq \mathcal{L}(K_i') \cup_{\partial(\mathcal{L}(K_i'))} \bigsqcup_{j=1}^n (\overline{\mathcal{D}_{i_j} \setminus M_{i_j}}).$$

显然， L_i' 是 $\mathbb{S}_{st}^5$ 中的一个分段光滑勒让德 2-平凡结，其赤道 1-纽结 K_i'位于 $\mathbb{S}_{st}^3$ 中，符合要求。在 L_i' （因此也在 K_i'）中

取 L_i'的一个小邻域，并在其中圆化角点（及尖锐边缘）后，我们得到一个光滑的勒让德可容许 2-平凡结，记作 L_i''，其赤道 1-纽结K_i''与 L_i的赤道 1-纽结 K_i Legendrian 同痕。将这一同痕延拓到 L_i'' 的上、下勒让德圆盘之并上（即延拓到$L_i'' \setminus K_i''$上），可得L_i''与 L_i 在 $\mathbb{S}^5_{st}$中 Legendrian 同痕。命题 3.2 得证。□

注记 3.4。正如命题 3.2 的证明中所观察到的，链环$\mathbb{K}$、 $\mathbb{K}'$以及 $\mathbb{K}'' \doteq \bigsqcup_{i=1}^{r} K_i''$ 的链接矩阵都相同。此外，若两条线段 h_{a_i}、 v_{b_j} 在方形桥图 Γ（$\mathbb{K}$）中相交，则 h_{a_i} 的提升 H_{a_i} 会在提升图 Γ（$\mathbb{K}$）中跨越提升V_{b_j}，因为它位于更高的 x_1层。两个提升 H_{a_i}、 V_{b_j} 都位于$\widetilde{}$并集 $\mathcal{L}$（Γ（$\mathbb{K}$））$= \bigsqcup_{k=1}^{m} M_k$的核上。根据每个中间部分 M_k的构造， H_{a_i} 的勒让德加厚仍沿 x_1方向跨越V_{b_j} 的勒让德加厚，因为（在此类上下交叉点附近进行的）勒让德加厚仅沿 x_2方向进行，因此是在 H_{a_i}、 V_{b_j} 所在的 x_1层进行的。此外，可以在较小邻域内对 $\mathbb{L}'$ 的各分支进行圆滑化，使所得的 L_i''彼此不相交，从而得到一个光滑的勒让德 2-链环 $\mathbb{L}'' = \bigsqcup_{i=1}^{r} L_i''$（其赤道链环为 $\mathbb{K}''$），并且它与原链环 $\mathbb{L}$Legendrian 同痕。特别地， $\mathbb{L}$、 $\mathbb{L}''$ 的链接矩阵相同，而且确实与 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{K}''$ 的链接矩阵一致。这正是作者定义相对 2-链环及其广义方形桥图的动机之一。

4. The Algorithm

4.1. 定理 1.6 的证明。 从给定的可容许勒让德 2-链环 $\mathbb{L}$ 在 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$ 中的广义方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$ 开始。该图由各向同性赤道链环 $\mathbb{K}$ 的方形桥图 $\Gamma(\mathbb{K})$ 构成，而该链环在 $(\mathbb{R}^3, \xi_0^3)$ 中是勒让德的。与上一节一样，可以为 $\Gamma(\mathbb{K})$ 中的每个方形区域 R_k 构造一个勒让德菱形 $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k' \cup M_k \cup \mathcal{D}_k''$。接下来，我们将为每个这样的菱形构造一个四维带状面 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$。然后，通过将带状体 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 逐步并入前一步构造的带状体之并，我们最终得到所有带状体的并；在每一步中，该并都将实现为 $\mathbb{S}^5_{st}$ 上的一个相容开书的页，并包含同步演变的 $\mathbb{S}^3_{st}$上的相容开书所对应的页。我们将通过对相容相对开书分解进行相对正稳定化来实现这一点。为构造每个 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$，我们将为 $\mathcal{D}_k$ 的每个勒让德板片构造一个合适的带状面，使它们的并成为所需的带状面 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$。

对于菱形 $\mathcal{D}_k$ 的中间部分 M_k，首先考虑其由 16 个勒让德三角形组成的 S_{I_k} 部分。沿着这 16 个三角形板，顺着四维接触平面构造 16 个带状体 $\mathcal{R}_{S_{I_k}}$（位于 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$ 中、带角点的四维紧致超曲面）。更确切地说，

$$\mathcal{R}_{S_{I_k}} \doteq \{(p, v) : p \in S_{I_k},\ v \in \xi_0^5|_p,\ \|v\| \leq \epsilon\} \subset \xi_0^5|_{S_{I_k}}.$$

对于 M_k 的每个矩形部分 S_{H_i}, S_{V_j}（总共有 4 个），我们考虑 $(\mathbb{R}^5, \xi_0^5)$ 中由下式给出的两类带状体:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{S_{H_i}} &\doteq \{z = -y_1 + a_i, \quad 1 - \epsilon \leq x_1 \leq 1 + \epsilon, \quad -1 \leq x_2 \leq 1\} \\ \mathcal{R}_{S_{V_j}} &\doteq \{z = y_1 + b_j, \quad -1 - \epsilon \leq x_1 \leq -1 + \epsilon, \quad -1 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

它们在拓扑上是 S_{H_i}、 S_{V_j} 的二维加厚。可以验证，这20个带状体 $\mathcal{R}_{S_{I_k}}$， $\mathcal{R}_{S_{H_i}}$， $\mathcal{R}_{S_{V_j}}$ 的边界沿着它们的三维公共部分相交，而这些公共部分是它们边界的公共区间部分的二维加厚

S_{I_k}， S_{H_i}， S_{V_j}。（回想图6和图7中 M_k 的图示。）因此，我们通过沿着这些带状体边界的公共部分粘合20个带状体 $\mathcal{R}_{S_{I_k}}$， $\mathcal{R}_{S_{H_i}}$， $\mathcal{R}_{S_{V_j}}$，构造 M_k 的带状面 $\mathcal{R}_{M_k}$，即

$$\mathcal{R}_{M_k} = \mathcal{R}_{S_{H_i}} \cup \mathcal{R}_{S_{I_K}} \cup \mathcal{R}_{S_{V_j}}.$$

根据构造， $\mathcal{R}_{M_k}$ 变形收缩到 M_k，且接触平面仅沿着其勒让德核心 M_k与 $\mathcal{R}_{M_k}$相切。因此， $\mathcal{R}_{M_k}$ 是 M_k 的带状面，这符合 Giroux 在 [11]中所采用的接触几何意义。此外，注意到带状体 $\mathcal{R}_{M_k}$ 适当地包含勒让德平凡结 γ_k 的二维带状面 $\mathcal{R}_{\gamma_k}$ （即 M_k的各向同性核心）；该带状面定义为如下集合 $\mathcal{R}_{I_k} \subset \mathcal{R}_{S_{I_k}}$ ：由沿着（$\mathbb{R}^3, \xi_0^3$）中的 4 条弧 I_k 以及以下勒让德平面所定义的 2 维接触平面构成的 4 条窄带的并集:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{H_{a_i}} &\doteq \{z = -y_1 + a_i, \quad 1-\epsilon \le x_1 \le 1+\epsilon, \quad x_2 = y_2 = 0\} \subset \mathcal{R}_{S_{H_i}} \\
\mathcal{R}_{V_{b_j}} &\doteq \{z = y_1 + b_j, \quad -1-\epsilon \le x_1 \le -1+\epsilon, \quad x_2 = y_2 = 0\} \subset \mathcal{R}_{S_{V_j}}.
\end{aligned}$$

接下来，我们构造勒让德圆盘 $\mathcal{D}_k'$、 $\mathcal{D}_k''$ 中各板片的带状面。对于三角形板 $T^{1,1}_{a_i}, T^{1,-1}_{a_i}, T^{-1,1}_{b_j}, T^{-1,-1}_{b_j}$，我们将相应的带状面定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{T^{1,1}_{a_i}} &\doteq \{z = -y_1 - y_2 + a_i, \quad 1-\epsilon \le x_1 \le 1+\epsilon, \quad 1-\delta \le x_2 \le 1+\delta\} \\
\mathcal{R}_{T^{1,-1}_{a_i}} &\doteq \{z = -y_1 + y_2 + a_i, \quad 1-\epsilon \le x_1 \le 1+\epsilon, \quad -1-\delta \le x_2 \le -1+\delta\} \\
\mathcal{R}_{T^{-1,1}_{b_j}} &\doteq \{z = y_1 - y_2 + b_j, \quad -1-\epsilon \le x_1 \le -1+\epsilon, \quad 1-\delta \le x_2 \le 1+\delta\} \\
\mathcal{R}_{T^{-1,-1}_{b_j}} &\doteq \{z = y_1 + y_2 + b_j, \quad -1-\epsilon \le x_1 \le -1+\epsilon, \quad -1-\delta \le x_2 \le -1+\delta\}.
\end{aligned}$$

当 $\epsilon, \delta > 0$ 足够小时。带状体 $\mathcal{R}_{T^{1,1}_{a_i}}, \mathcal{R}_{T^{1,-1}_{a_i}}, \mathcal{R}_{T^{-1,1}_{b_j}}, \mathcal{R}_{T^{-1,-1}_{b_j}}$ 两两不相交，并分别形变收缩到 $T^{1,1}_{a_i}, T^{1,-1}_{a_i}, T^{-1,1}_{b_j}, T^{-1,-1}_{b_j}$。

现在我们考虑另外 4 种带状体 $\mathcal{R}_{P_{\pm 1}}, \mathcal{R}_{P'_{\pm 1}}$ ，它们的核分别是 $\mathcal{D}_k'$ 和 $\mathcal{D}_k''$ 中的 Legendrian 矩形板 $P_{\pm 1}, P'_{\pm 1}$。它们在点 q 处的切空间为

$$\begin{aligned}
T_q\mathcal{R}_{P_{\pm 1}} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_2} \pm \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1} \right\rangle \\
T_q\mathcal{R}_{P'_{\pm 1}} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1} \pm \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} - x_2\frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

最后，我们考虑 $\mathcal{R}_{P_t}$ 和 $\mathcal{R}_{P_b}$ 这两种带状体，它们的核分别是 $\mathcal{D}_k'$ 和 $\mathcal{D}_k''$ 中的 Legendrian 顶板和底板。它们在点 q 处的切空间为

$$T_q\mathcal{R}_{P_t} = T_q\mathcal{R}_{P_b} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} - x_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} - x_2\frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle.$$

通过选取适当的 ϵ和 δ，带状体 $\mathcal{R}_{T^{1,1}_{a_i}}, \mathcal{R}_{T^{1,-1}_{a_i}}, \mathcal{R}_{T^{-1,1}_{b_j}}, \mathcal{R}_{T^{-1,-1}_{b_j}}, \mathcal{R}_{P_{\pm 1}}, \mathcal{R}_{P'_{\pm 1}}, \mathcal{R}_{P_t}, \mathcal{R}_{P_b}$沿着其三维公共边界部分相交；这些部分是其核 $T^{1,1}_{a_i}, T^{1,-1}_{a_i}, T^{-1,1}_{b_j}, T^{-1,-1}_{b_j}, P_{\pm 1}, P'_{\pm 1}, P_t, P_b$的边界的公共区间部分的二维加厚。因此，与之前一样，沿着它们的公共边界区域将其粘合，可得到两个不相交的带状体（在拓扑意义上二者都是 D^4） $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k'}$ 和 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k''}$，其核分别为 $\mathcal{D}_k'$， $\mathcal{D}_k''$。

最后，将 $\mathcal{R}_{M_k}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k'}$ 和 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k''}$ 取并（沿着区域的加厚部分，在这些区域中M_k， $\mathcal{D}_k'$， $\mathcal{D}_k''$ 相交），构造带状体

$$\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_k'} \cup \mathcal{R}_{M_k} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_k''}$$

其核为勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$。根据构造，4 维缎带 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$严格包含二维带状体 R_{γ_k}，后者与 $D^*\mathbb{S}^1$微分同胚。事实上，

Le引理 4.1. 将角点圆化后，带状面 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 与 $D^*\mathbb{S}^2$微分同胚 .

证明。 首先，我们注意到，中间部分 M_k 中的矩形片 S_{H_i} 和 S_{V_j} 的切丛由 $\frac{\partial}{\partial y_1} \pm \frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}$生成。带状体 $\mathcal{R}_{S_{H_i}}$ 和 $\mathcal{R}_{S_{V_j}}$ 分别是将 S_{H_i}和 S_{V_j}沿向量 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 和$\frac{\partial}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial}{\partial z}$加厚而得。此外，我们注意到， M_k 中的三角形板 S_{I_k} 的切丛由 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_2}$生成，而带状面 $\mathcal{R}_{S_{I_k}}$是将 I_k 沿向量 $\frac{\partial}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial}{\partial z}$加厚而得。

现在，考虑中间部分 M_k 中的各向同性平凡结 γ_k。 H_i 和V_j 在 γ_k 中的切丛由 $\frac{\partial}{\partial y_1} \pm \frac{\partial}{\partial z}$ 生成。二维带状体 $\mathcal{R}_{H_i}$ 和$\mathcal{R}_{V_j}$是将 H_i 和 V_j 沿 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 方向加厚得到的。此外， I_k 的切丛由 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ 生成。二维带状体 $\mathcal{R}_{I_k}$ 是将 I_k 沿 $\frac{\partial}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial}{\partial z}$ 加厚得到的。可以看出，$\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 在拓扑上是一个正霍普夫带。因此，4 维缎带 $\mathcal{R}_{M_k}$ 包含二维带状体 $\mathcal{R}_{\gamma_k}$，后者在拓扑上是 $D^*\mathbb{S}^1$; 而 $\mathcal{R}_{\gamma_k}$的加厚方向分别是$\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 的余纤维方向和 $\mathcal{R}_{M_k}$的流形方向。由于带状面 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 是将两个在拓扑上为 D^*D^2 的带状体 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k'}$ 和 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k''}$ 附着到 $\mathcal{R}_{M_k}$ 上得到的，因此 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 在拓扑上是 $D^*\mathbb{S}^2$。□

注 4.2。 事实上，这里还可以进一步说明：通过直接计算可以验证，对于所有 $q \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$, $d\alpha_0^5|_{\mathcal{D}_k}$ 在切空间 $T_q\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 上都是非退化的，因此对 $(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}, d\alpha_0^5|_{\mathcal{D}_k})$ 而言，它是一个辛流形。事实上，可以将其视为 $\mathcal{D}_k \cong \mathbb{S}^2$ 的单位圆盘余切丛。更确切地说，根据构造可知， $\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 是一个配备了辛结构 $d\alpha_0^3|_{\gamma_k} = d\alpha_0^5|_{\gamma_k}$ 的正霍普夫带，因此 $(\mathcal{R}_{\gamma_k}, d\alpha_0^3|_{\mathcal{D}_k})$ 是 $\gamma_k \cong \mathbb{S}^1$ 的单位圆盘余切丛，并且它以辛方式真嵌入在 $(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}, d\alpha_0^5|_{\mathcal{D}_k})$ 中。同样根据构造，零截面 γ_k 真嵌入于 $\mathcal{D}_k$ 中，而将 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 收缩至其核 $\mathcal{D}_k$ 的变形，同时也将 $\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 变形至核 γ_k。因此，$(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}, d\alpha_0^5|_{\mathcal{D}_k})$ 必定是 2-球面 $\mathcal{D}_k$ 的单位圆盘余切丛。

由引理 4.1 和注 4.2 可知，对于每个勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$，都可以在 $\mathbb{S}^5_{st}$ 上得到一个相容开书 $(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}, \tau_{\mathcal{D}_k}) \cong (D^*\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2})$，其中我们将（圆整角点后） $\mathcal{D}_k$ 识别为 $D^*\mathbb{S}^2$ 中的零截面 $\mathbb{S}^2$，而 $\tau_{\mathcal{D}_k}$ 表示沿 $\mathcal{D}_k$ 的右手德恩扭转。实际上，与此同时，我们也可以在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 上得到一个相容开书 $(\mathcal{R}_{\gamma_k}, \tau_{\gamma_k}) \cong (D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$，其中我们将（圆整角点后） γ_k 识别为 $D^*\mathbb{S}^1$ 中的零截面 $\mathbb{S}^1$，而 τ_{γ_k} 表示沿 γ_k 的右手德恩扭转（ γ_k 是 $\mathcal{D}_k$ 的赤道圆）。因此，对于每个勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$，我们确实在（可容许的）相对接触对 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上得到一个相容相对开书，其定义为

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}, \mathcal{R}_{\gamma_k}, \tau_{\mathcal{D}_k}, \tau_{\gamma_k}) \cong (D^*\mathbb{S}^2, D^*\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^2}, \tau_{\mathbb{S}^1}).$$

接下来，从方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$出发，我们将在$(\mathbb{S}^5_{st}$、 $\mathbb{S}^3_{st})$上构造一个相容相对开书：

命题 4.3。对于给定的可容许勒让德2-链环 $\mathbb{L}$ 及其赤道1-链环 $\mathbb{K}$，假设方形桥图 $\Delta(\mathbb{K})$中有 m 个正方形区域 R_1、R_2、.....、R_m，并且对每个 $k \in \{1,2,...,m\}$，令 $\mathcal{D}_k$ 为如上构造的一个光滑（圆角化）勒让德2-平凡结，其光滑（圆角化）的各向同性赤道1-平凡结为γ_k 。那么，在（可容许的）相对接触对$(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上存在一个相容相对开书$(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^3})$，使得页 $F_{\mathbb{S}^5}$、$F_{\mathbb{S}^3}$ 是温斯坦的，并满足以下条件：

(i) $F_{\mathbb{S}^3}$ 在 $F_{\mathbb{S}^5}$中是辛的且真嵌入的。(ii) $(F_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^5})$、$(F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^3})$ 的单值化分别由下式给出

$$h_{\mathbb{S}^5} = \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \tau_{\mathcal{D}_2} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_m}, \quad h_{\mathbb{S}^3} = \tau_{\gamma_1} \circ \tau_{\gamma_2} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_m}.$$

证明。我们将依次（按指标顺序）把 R_k引入方形桥图 $\Delta(\mathbb{K})$中（从而将相应的八面体引入广义方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$中），并且每一步都会得到一个定义在$(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$上的新相容相对开书，它是对前一步构造的相容相对开书进行正相对稳定化的结果。作为初始步骤，若尚未引入任何方形，则考虑例 2.4 中给出的、定义在$(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$上的平凡相容相对开书$\mathcal{OB}_0 \doteq (D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2})$。引入第一个方形 R_1 时，由例 2.11 可得

$$\mathcal{OB}_1 \doteq (\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1}, \mathcal{R}_{\gamma_1}, \tau_{\mathcal{D}_1}, \tau_{\gamma_1}) = \mathcal{S}^+[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A_1, A_1 \cap D^2]$$

其中， A_1 是 D^4 中的一个真嵌入拉格朗日二圆盘，其在 ∂D^4中的边界为勒让德边界，如例中所述。注意，$\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1} = D^4 \cup \Sigma_1$ 和$\mathcal{R}_{\gamma_1} = D^2 \cup \sigma_1$ 是与注 2.6 中提及的稳定化相对应的温斯坦把手，其中 Σ_1 和 σ_1。现在引入 R_2，得到

$$\mathcal{OB}_2 \doteq (\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_2}, \mathcal{R}_{\gamma_1} \cup \mathcal{R}_{\gamma_2}, \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \tau_{\mathcal{D}_2}, \tau_{\gamma_1} \circ \tau_{\gamma_2}) \cong \mathcal{S}^+[(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1}, \mathcal{R}_{\gamma_1}, \tau_{\mathcal{D}_1}, \tau_{\gamma_1}); A_2, A_2 \cap \mathcal{R}_{\gamma_1}].$$

这里，$\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_2} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_1} \cup \Sigma_2$ 和$\mathcal{R}_{\gamma_1} \cup \mathcal{R}_{\gamma_2} = \mathcal{R}_{\gamma_1} \cup \sigma_2$ 其中

$$\Sigma_2 = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_2} \setminus \mathcal{R}_{M_1 \cap M_2}, \quad \sigma_2 = \mathcal{R}_{\gamma_2} \setminus \mathcal{R}_{\gamma_1 \cap \gamma_2}$$

是与这些稳定化相对应的温斯坦把手，因此，带状面 $\mathcal{R}_{M_1 \cap M_2}$ 中的真嵌入拉格朗日二圆盘 A_2，是通过将标准拉格朗日圆柱$S^1 \times [0,1] = \mathcal{R}_{M_1 \cap M_2} \cap \mathcal{D}_2$（平滑地）粘合到拉格朗日圆盘 $M_1 \cap M_2$ 上而得到的，其中 $S^1 \times \{0\} = \partial$（$M_1 \cap M_2$），且 $S^1 \times \{1\} = \partial A_2$ 是 Σ_2 的附着圆（因此 σ_2 沿着点对∂（$A_2 \cap \mathcal{R}_{M_1 \cap M_2}$）$= \partial A_2 \cap \partial \mathcal{R}_{M_1 \cap M_2}$附着）。这样便会将新的菱形 $\mathcal{D}_2$ 附着到已有的核 $\mathcal{D}_1$上，两者共同构成新页的核 $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$（见图 10）。

我们注意到，将 Σ_2 的拉格朗日核心圆盘（记作 C_2）与 $A_2 =$（$M_1 \cap M_2$）的 $\cup_{S^1 \times \{0\}} S^1 \times [0,1]$ 并在一起，便得到拉格朗日 2-球面

$$\mathcal{D}_2 = (M_1 \cap M_2) \cup_{S^1 \times \{0\}} S^1 \times [0,1] \cup_{S^1 \times \{1\}} C_2$$

在新的辛（确切地说，温斯坦）页 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_1} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_2} \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 上，沿其附加一个新的右手德恩扭转到先前的单值化中。特别是，

$$\mathcal{D}_2 \cap \mathbb{S}^3_{st} = [(M_1 \cap M_2) \cup_{S^1 \times \{0\}} S^1 \times [0,1] \cup_{S^1 \times \{1\}} C_2] \cap \mathbb{S}^3_{st} = \gamma_2$$

是新辛（温斯坦）页 $\mathcal{R}_{\gamma_1} \cup \mathcal{R}_{\gamma_2} \subset \mathbb{S}^3_{st}$ 中的拉格朗日 1-球面，新添的右手德恩扭转沿此球面附加到先前的单值化中。

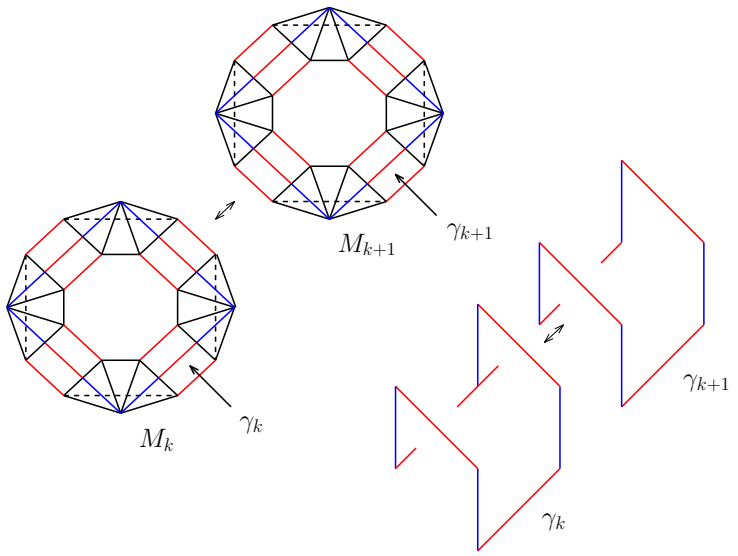


FIGURE 10. 将一个新的菱形 $\mathcal{D}_{k+1}$ 附着到一个已有的 $\mathcal{D}_k$上。

我们按以下方式迭代进行：假设已引入 R_k，并已构造出相应的开书 $\mathcal{OB}_k \doteq (\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}, \bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}, \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_k}, \tau_{\gamma_1} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_k})$，引入 R_{k+1} 便得到相容相对开书

$$\begin{aligned}\mathcal{OB}_{k+1} &\doteq ((\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}) \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_{k+1}}, (\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}) \cup \mathcal{R}_{\gamma_{k+1}}, (\tau_{\mathcal{D}_1} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_k}) \circ \tau_{\mathcal{D}_{k+1}}, (\tau_{\gamma_1} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_k}) \circ \tau_{\gamma_{k+1}}) \\ &= \mathcal{S}^+[(\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}, \bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}, \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_k}, \tau_{\gamma_1} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_k}); A_{k+1}, A_{k+1} \cap \bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}]\end{aligned}$$

和之前一样，我们有

$$(\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}) \cup \mathcal{R}_{\mathcal{D}_{k+1}} = (\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}) \cup \Sigma_{k+1}, \quad (\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}) \cup \mathcal{R}_{\gamma_{k+1}} = (\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{R}_{\gamma_i}) \cup \sigma_{k+1}$$

其中

$$\Sigma_{k+1} = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_{k+1}} \setminus \mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}}, \quad \sigma_{k+1} = \mathcal{R}_{\gamma_{k+1}} \setminus \mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^k \gamma_i) \cap \gamma_{k+1}}$$

是相应稳定化的温斯坦柄，使得真嵌入的拉格朗日 2-圆盘 A_{k+1} 位于带状面$\mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}}$ 中，它是通过将标准拉格朗日圆柱 $S^1 \times [0,1] = \mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}} \cap \mathcal{D}_{k+1}$ （光滑地）粘合到拉格朗日圆盘 $(\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}$上得到的，因此 $S^1 \times \{0\} = \partial((\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1})$，且 $S^1 \times \{1\} = \partial A_{k+1}$ 是 Σ_{k+1}的附着圆周，因此 σ_{k+1} 沿着点对附着

$$\partial(A_{k+1} \cap (\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}) = \partial A_2 \cap \partial \mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^k M_i) \cap M_{k+1}}.$$

这会将（新的）菱形 $\mathcal{D}_{k+1}$ 连接到现有的核 $\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i$，二者共同构成新页的核 $(\bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i) \cup \mathcal{D}_{k+1}$ （见图11，其中我们取 $m = 4$）。

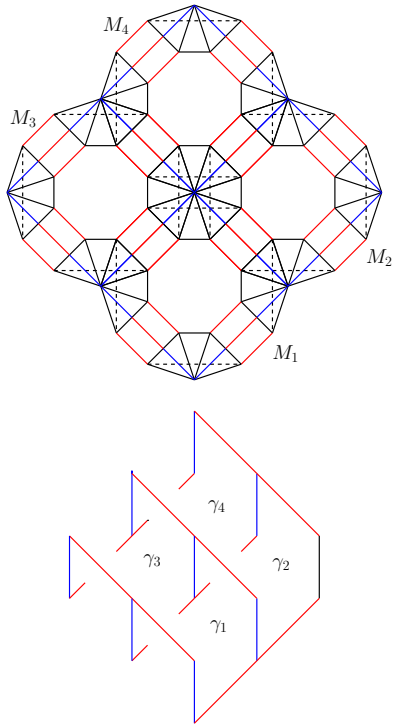


FIGURE 11. 沿着 $\mathcal{D}_i$ 的中间部分 M_i's 的附着过程。

与 $k = 2$ 情形类似，取 Σ_{k+1} 和$A_{k+1} =$的拉格朗日核心圆盘 C_{k+1} （$(\bigsqcup_{i=1}^{k} M_i) \cap M_{k+1}$）$\cup_{S^1\times\{0\}}$ （$S^1 \times [0,1]$）的并，得到拉格朗日 2-球面

$$\mathcal{D}_{k+1} = ((\bigsqcup_{i=1}^{k} M_i) \cap M_{k+1}) \cup_{S^1\times\{0\}} (S^1 \times [0,1]) \cup_{S^1\times\{1\}} C_{k+1}$$

在新的辛（温斯坦）页（$\bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$） $\cup\, \mathcal{R}_{\mathcal{D}_{k+1}} \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 上，沿此附加一个新的右手德恩扭转，并将其并入先前的单值化。特别是，

$$\mathcal{D}_{k+1} \cap \mathbb{S}^3_{st} = [((\bigsqcup_{i=1}^{k} M_i) \cap M_{k+1}) \cup_{S^1\times\{0\}} (S^1 \times [0,1]) \cup_{S^1\times\{1\}} C_{k+1}] \cap \mathbb{S}^3_{st} = \gamma_{k+1}$$

这是新辛（温斯坦）页（$\bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{\gamma_i}$） $\cup\, \mathcal{R}_{\gamma_{k+1}} \subset \mathbb{S}^3_{st}$中的拉格朗日 1-球面，沿此附加一个新的右手德恩扭转，并将其并入先前的单值化。

因此，取 $k = m$，也就是说，在引入所有 R_k's 之后，我们得到一个相对开书

$$\begin{aligned}(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^3}) &\doteq \mathcal{OB}_m \\ &= \mathcal{S}^+[\cdots[\mathcal{S}^+[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A_1, A_1 \cap D^2]; \cdots]; A_m, A_m \cap \bigsqcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{\gamma_i}]\end{aligned}$$

根据定理 2.10，它与容许相对接触对 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 相容。此外，由构造可知，页 $F_{\mathbb{S}^3}, F_{\mathbb{S}^5}$ 是 Weinstein 页（因为它们由 Weinstein 把手构造而成），并且满足所需条件 (i)、(ii)。□

回到定理 1.6 的证明，从给定链环的广义方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$ 出发，该图由 m 个八面体组成。根据命题 4.3，我们知道，在 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上存在一个相容相对开书 $(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^3})$，其页为 Weinstein 页，且满足陈述中的 (v)。此外，对于 $\mathbb{L}$ 的任意分支 L 及其赤道结 $K \subset \mathbb{K}$，根据命题 3.2，我们知道可以将 L 重构为分段光滑 Legendrian 2-球面 $L' \subset \mathbb{S}^5_{st}$；将 L' 的角点圆化后，可以得到一个光滑 Legendrian 2-球面，它与 L Legendrian 同痕。事实上，由构造可知，L'（及其光滑化）包含在页 $F_{\mathbb{S}^5} = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{R}_{\mathcal{D}_i}$ 的核 $\bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ 中。特别地，分段光滑 Legendrian 赤道 1-球面 $K' \subset \mathbb{S}^3_{st}$（及其光滑化）包含在页 $F_{\mathbb{S}^3} = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{R}_{\gamma_i}$ 的核 $\bigsqcup_{i=1}^m \gamma_i$ 中。图 12 展示了标准 Legendrian 2- 平凡结的这一重构过程。

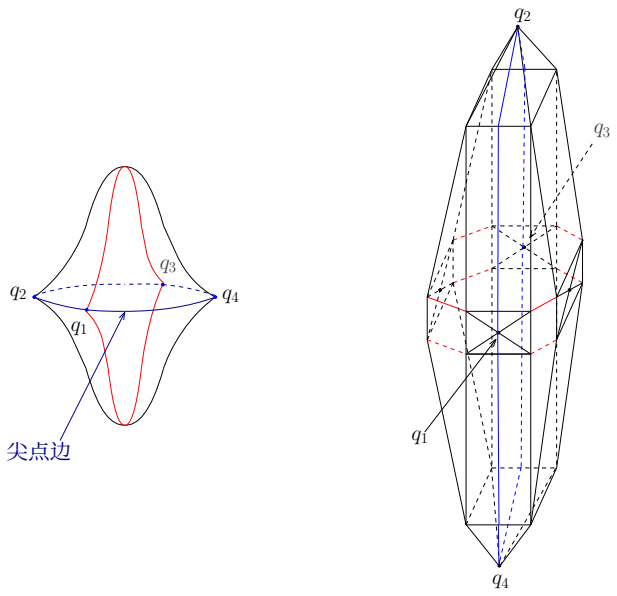


FIGURE 12. 左侧为（可容许的）标准 Leg- endrian 2维平凡结的前投影 L，右侧为对应的分段光滑 Leg- endrian2维平凡结 L'（ L的重建）。

至此，我们已经证明了 (i) 和 (iii)（将 L 视为圆角化的 L'）。由于页 $F_{\mathbb{S}^3}$ 中的 K（圆角化的 K'）的重构基于方形桥图$\Delta(K)$，因此 (ii) 可直接由 [2]中的相同步骤得出。为证明 (iv)，我们注意到，证明 (ii) 时所用的论证可以自然地推广到高维。更准确地说，由于 L 包含在核$\bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$中，其带状面 $\mathcal{R}_L$ 包含在页 $F_{\mathbb{S}^5}$（$\bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$的带状面）中。注意，重构过程不会改变 L的 Legendrian 同伦类型，因此 L 的接触（瑟斯顿–贝宁奎因）框架仍与初始时相同。此外，考虑页 $F_{\mathbb{S}^5}$中 L 的管状邻域 $N(L)$。作为带状面 $F_{\mathbb{S}^5}$的零余维子流形，$N(L)$ 是 L的带状面。根据定义，L 的接触框架是由带状面 $N(L)$ 给出的框架。因此，L的接触框架与 $N(L)$ 框架（页框架）相同。由于 $N(L) \subset F_{\mathbb{S}^5}$，$L$从页 $F_{\mathbb{S}^5}$ 获得的框架与 L的接触框架相同。定理 1.6 得证。

□

4.2. 可容许相对接触手术与定理 1.7 的证明。本节将描述在（$\mathbb{S}^5_{st}$，$\mathbb{S}^3_{st}$）中的一个（可容许）相对勒让德 2-结 L 上进行的一个（可容许）相对接触 r–手术，该手术将产生一个新的相对接触对；随后，我们将考虑其中一种特殊情形，它由在 $\mathbb{S}^5_{st}$中的 L 上进行的接触（勒让德）（±1）手术，以及同时在 $\mathbb{S}^3_{st}$中的 L 的赤道 1-结K 上进行的接触（勒让德）（±1）手术组成，并证明定理 1.7。

沿接触 3-流形中的勒让德 1-结进行接触手术，是一种拓扑手术，其手术系数是相对于接触框架测量的：设 K 是接触流形 (M^3,η) 中的勒让德 1-结，其具有一个带凸边界的平凡邻域 $N(K)\cong\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$。边界 $\partial N(K)$ 有两个同调生成元，分别由子午线 μ 和经线 λ 表示，其中 λ 是 K 的一个平行副本，通过沿其接触框架推动 K 得到。选择一个平凡化 $\phi\colon\ \mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1\to N(K)$，使得 $\phi_*(\partial\mathbb{D}^2\times\{pt\})=\mu$ 且 $\phi_*(\{pt\}\times\mathbb{S}^1)=\lambda$，其中 $\partial\mathbb{D}^2\times\{pt\}$ 和 $\{pt\}\times\mathbb{S}^1$ 是 $H_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$的生成元。沿 K进行接触 $r=\binom{p}{q}$–手术后，会得到一个新的（不一定唯一的）接触流形 $(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)\cup_{\phi_r}(M^3\setminus N(K))$，其中 $\phi_r\colon\ \partial(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)\to\partial(M^3\setminus N(K))$ 是一个粘合映射，满足 $(\phi_r)_*(\partial\mathbb{D}^2\times\{pt\})=p\mu+q\lambda$。在 $r=\pm1$的情形下，接触手术会在手术后的（所得）3-流形上产生唯一的（在同伦意义下）接触结构。详情见 [12]和 [19]。

在高维中，也可以考虑沿各向同性球面和余各向同性球面进行接触手术（见 [5]）。然而，沿勒让德 n-结进行的接触手术定义方式类似：这是一种拓扑手术，其手术系数是相对于接触框架确定的。设 $\mathcal{S}$ 是接触流形 (Y^{2n+1},ξ) 中的一个勒让德 n-结，它有一个带凸边界的平凡邻域 $N(\mathcal{S})\cong\mathbb{D}^{n+1}\times\mathbb{S}^n$。边界 $\partial N(\mathcal{S})$ 有两个同调生成元，分别由子午线 m 和经线 ℓ 表示；后者是将 $\mathcal{S}$ 沿其接触框架推移后得到的平行拷贝。选取一个平凡化 $\Phi\colon\mathbb{D}^{n+1}\times\mathbb{S}^n\to N(\mathcal{S})$，使得$\Phi_*(\partial\mathbb{D}^{n+1}\times\{pt\})=m$，且 $\Phi_*(\{pt\}\times\mathbb{S}^n)=\ell$，其中 $\partial\mathbb{D}^{n+1}\times\{pt\}$ 和 $\{pt\}\times\mathbb{S}^n$ 是 $H_n(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n)$ 的生成元。沿 $\mathcal{S}$ 进行一次接触 $r=\binom{p}{q}$– 手术后，得到一个新的（不一定唯一的）接触流形 $(\mathbb{D}^{n+1}\times\mathbb{S}^n)\cup_{\Phi_r}(Y^{2n+1}\setminus N(\mathcal{S}))$，其中 $\Phi_r\colon\partial(\mathbb{D}^{n+1}\times\mathbb{S}^n)\to\partial(Y^5\setminus N(\mathcal{S}))$ 是一个粘合映射，满足 $(\Phi_r)_*(\partial\mathbb{D}^{n+1}\times\{pt\})=p\mu+q\lambda$。与前面一样，在 $r=\pm1$ 的情形下，接触手术会在经手术得到的（结果）$2n+1$-流形上产生唯一的（相差同伦）接触结构。

回到三维和五维的情形，我们现在介绍沿相对 2-纽结进行的相对 r–手术。尽管它可以用纯拓扑的方式定义，我们仍在接触几何的框架下给出其定义：

定义 4.4. 设 L 是 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的一个相对勒让德 2-结。根据勒让德邻域定理，L 有一个邻域 $(N(L)\ \xi^5_{st}|_{N(L)})$，它与 1-喷射空间 $(T^*L\times\mathbb{R},\mathrm{Ker}(dz-\sum_{i=1}^2p_idq_i))$ 中零截面的一个邻域接触同胚。沿 L 进行接触手术 r–，得到一个新的（不唯一的）接触 5-流形 (Y^5,ξ)：从 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中移除 $N(L)$，再通过一个在边界上诱导映射 Φ_r 的微分同胚（如上所述）将 $\mathbb{D}^3\times\mathbb{S}^2$ 粘合回去。由于 L 是一个相对结，它有一个赤道圆 K，该圆在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中是勒让德的；其平凡邻域 $(N(K)\ \xi^3_{st}|_{N(K)})$ 与 $(T^*K\times\mathbb{R},\mathrm{Ker}(dz-p_1dq_1))$ 中零截面的管状邻域接触同胚，而后者接触嵌入在 $(T^*L\times\mathbb{R},\mathrm{Ker}(dz-\sum_{i=1}^2p_idq_i))$ 中。由于 K 是 L 的各向同性赤道，我们有 $T^*K\times\mathbb{R}\subset T^*L\times\mathbb{R}$；事实上，对于任意点 $a\in K$，邻域 $N(K)\cong K\times D^2$ 是 $N(L)\cong L\times D^3$ 的接触子流形，其中 $\{a\}\times D^2\subset\{a\}\times D^3$。因此，当我们从 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中移除 $N(L)$ 时，也同时从

$\mathbb{S}^3_{st}$。因此，通过将 $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$，从而将 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 (\subset \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2)$，通过微分同胚 Φ_r：$\partial(\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2) \to \partial(\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L))$ 及其限制 $\Phi_r|_{\partial(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)}$：$\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \to \partial(\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K))$ 粘合回去，我们得到手术流形

$$(Y^5, \xi) := (\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L)) \cup (\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2), \quad M^3 := (\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K)) \cup (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

注意，我们得到一个相对（光滑）拓扑对（Y，M）。事实上，可以验证（见引理 4.5），二维平面分布 $\eta := \xi \cap TM$ 在 M 上定义了一个接触结构（因此（M，η）是（Y，ξ）的接触子流形），而（M，η）则是沿着 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的 K 同时进行接触手术的结果。特别地，我们得到了一个相对接触对（Y_ξ，M_η），它称为由沿着 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的相对勒让德 2-结 L 进行相对接触 r-手术而得到。

引理 4.5。在定义 *4.4* 的设定下，$\eta = \xi \cap TM$ 上的二维平面分布是 M 上的接触结构。此外，(M, η) 是沿 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的勒让德1-结 K （ L 的赤道）进行接触手术的结果。

证明。首先注意，$N(K) \cong K \times D^2$ 到 $N(L) \cong L \times D^3$ 的接触嵌入也是一个真嵌入，即

$$\partial N(K) \cong K \times S^1 \subset L \times S^2 \cong \partial N(L), \quad \text{with} \quad \{a\} \times S^1 \subset \{a\} \times S^2, \quad \forall a \in K,$$

凸边界 $\partial N(K) \subset \mathbb{S}^3_{st}$ 上的特征叶状结构是 $\partial N(L) \subset \mathbb{S}^5_{st}$ 上的特征叶状结构的限制。另一方面，$\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$ 上的接触结构（即用于沿 L 进行接触 r 手术、从而得到 (Y, ξ) 的接触结构）在凸边界 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上产生特征叶状结构。该叶状结构限制为真嵌入且接触嵌入的子流形 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$（位于 $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$ 中）的凸边界 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 上的叶状结构。此外，当通过 Φ_r：$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \partial(\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L))$ 将 $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$ 与 $\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L)$ 粘合时，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 和 $\partial(\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L))$ 上的特征叶状结构彼此对应，从而在手术后的流形 Y 上得到接触结构 ξ。特别地，限制微分同胚 $\Phi_r|_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}$：$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \partial(\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K))$ 将接触子流形 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$ 与 $\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K) \subset \mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L)$ 粘合在一起，使得 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 和 $\partial(\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K))$ 上的特征子叶状结构彼此对应。这意味着，沿 L 进行接触手术时，同时也会在手术后的流形 M 上构造出接触结构 $\eta = \xi \cap TM$，如所声称的那样。

现在，同调群 $H_2(\partial N(L))$ 有两个生成元，分别由子午线 m 和经线 ℓ 表示。后者是在 $\partial N(L)$ 上通过沿其接触框架推移 L 而得到的 L 的平行副本。选择一个平凡化

$$\Phi : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2 \to N(L)$$

使得 $\Phi_*(\partial\mathbb{D}^3 \times \{pt\}) = m$ 且 $\Phi_*(\{pt\} \times \mathbb{S}^2) = \ell$，其中 $\partial\mathbb{D}^3 \times \{pt\}$ 和 $\{pt\} \times \mathbb{S}^2$ 是 $H_2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ 的生成元。若 p 和 q 是满足 $r = \frac{p}{q}$ 的互素整数，则对 $\mathbb{S}^5_{st}$ 进行接触 $r-$ 手术所得的结果是流形

$$(Y, \xi) := (\mathbb{S}^5_{st} \setminus N(L)) \cup_{\Phi_r} (\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2)$$

其中 $(\Phi_r)_*(\partial\mathbb{D}^3 \times \{pt\}) = pm + q\ell$。如上所述，同时沿着 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的赤道勒让德圆 K 进行手术：将 $N(L)$ 替换为 $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^2$，对应于将 $N(K)$ 替换为 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$。对于同调群 $H_1(\partial N(K)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，考虑以下两个生成元：令 $\mu \subset m$ 为子午线 $\mu = m \cap \partial N(K)$，令 $\lambda \subset \ell$ 为经线 $\lambda = \ell \cap \partial N(K)$。注意，$\mu$ 是 m 的赤道圆，因为 $N(K)$ 真嵌入于 $N(L)$；此外，λ 是 ℓ 的赤道圆，因为 $N(K)$ 接触嵌入于 $N(L)$，因此

特别地，它是由 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中 K 的接触框架所生成的 K 的一个平行副本。现在，平凡化 Φ 限制为一个平凡化

$$\phi \doteq \Phi|_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \to N(K)$$

使得 $\phi_*(\partial\mathbb{D}^2 \times \{pt\}) = \mu$ 和 $\phi_*(\{pt\} \times \mathbb{S}^1) = \lambda$，其中 $\partial\mathbb{D}^3 \times \{pt\}$ 和 $\{pt\} \times \mathbb{S}^2$ 是 $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$的生成元。最后，注意，通过限制映射 $\Phi_r|_{\partial(\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1)}$进行粘合（从而得到接触子流形 (M, η)）等价于通过映射进行粘合

$$\phi_r : \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \to \partial(\mathbb{S}^3_{st} \setminus N(K)) \quad \text{with} \quad \phi_*(\partial\mathbb{D}^2 \times \{pt\}) = p\mu + q\lambda.$$

（由于 2-球面 $\Phi_r(\partial\mathbb{D}^3 \times \{pt\})$ 绕子午线 m 旋转 p圈，并绕经线 ℓ旋转 q圈，其赤道 $\Phi_r(\partial\mathbb{D}^2 \times \{pt\})$ 也如此，即绕子午线μ 旋转 p圈，并绕经线 λ旋转 q圈。）因此，沿 K 进行同时手术以构造接触子流形 $(M, \eta = \xi \cap TM)$，也是一种接触 r–手术。□

定理 *1.7* 的证明。假设给定了一个容许相对接触对 $(Y^5_\xi,\ M^3_\eta)$，它是沿着 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的一个容许勒让德相对 2-链环 $\mathbb{L} = \bigsqcup_{i=1}^r L_i$ 进行容许的相对接触 (±1) 手术得到的，其赤道各向同性 1-链环为 $\mathbb{K} = \mathbb{L} \cap \mathbb{S}^3_{st} = \bigsqcup_{i=1}^r K_i$。根据定理 1.6，我们知道，在相对接触对 $(\mathbb{S}^5,\ \mathbb{S}^3)$ 上存在一个相容相对开书 $(F_{\mathbb{S}^5},\ F_{\mathbb{S}^3},\ h_{\mathbb{S}^5},\ h_{\mathbb{S}^3})$，其 Weinstein 页为 $F_{\mathbb{S}^5},\ F_{\mathbb{S}^3}$，单值化为

$$h_{\mathbb{S}^5} = \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \tau_{\mathcal{D}_2} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_m}, \quad h_{\mathbb{S}^3} = \tau_{\gamma_1} \circ \tau_{\gamma_2} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_m}$$

（如定理证明中所构造），使得每个重构并平滑化后的 K_i 都位于 $F_{\mathbb{S}^3}$ 上，且 K_i 的页框架等于其在 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中的接触框架；同样，每个重构并平滑化后的 L_i 都位于 $F_{\mathbb{S}^5}$ 上，且 L_i 的页框架等于其在 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中的接触框架。从现在起，所有重构链环及其重构分支也都假定已平滑化；为方便起见，我们仍用相同的字母表示它们。

根据构造，重建的 2-链环 $\mathbb{L}$ 的所有分支都位于同一页上，记作 $F^0_{\mathbb{S}^5}$，并以 $\mathbb{S}^5_{st}$ 中嵌入的勒让德 2-平凡结的形式存在；重建的赤道 1-链环 $\mathbb{K}$ 的所有分支则位于一页上，记作 $F^0_{\mathbb{S}^3}$（$F^0_{\mathbb{S}^5}$ 的一个 Weinstein 子流形），并以 $\mathbb{S}^3_{st}$ 中嵌入的勒让德 1- 平凡结的形式存在。由于它们是相容开书的辛页面上的勒让德子流形，所有 L_i（分别为 K_i）都是 $F^0_{\mathbb{S}^5}$（分别为 $F^0_{\mathbb{S}^3}$）中的拉格朗日子流形。回想一下，根据构造，重建的 $\mathbb{K}$ 的各分支在 $F^0_{\mathbb{S}^3}$ 中仍然彼此不相交，并且重建的 $\mathbb{K}$ 的链接矩阵与原始 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{L}$ 的链接矩阵相同。然而，重建的 $\mathbb{L}$ 的各分支之间存在一些重叠区域。为了消除这些区域，我们将把每个重建分支 L_i 放在开书（$F_{\mathbb{S}^5},\ h_{\mathbb{S}^5}$）的不同页面上，记作 $F^i_{\mathbb{S}^5}$；这样，每个对应的赤道分支 K_i 都将包含在开书（$F_{\mathbb{S}^3},\ h_{\mathbb{S}^3}$）的一个（不同的）页面 $F^i_{\mathbb{S}^3}$ 上，而该开书是 $F^i_{\mathbb{S}^5}$ 的一个 Weinstein子域。

首先请注意，由于 $\mathbb{L}$的所有重构分支都包含在页 $F^0_{\mathbb{S}^5}$的拉格朗日核中，它们不会与绑定相交，因此不会与 $(F_{\mathbb{S}^5},\ h_{\mathbb{S}^5})$ 的某一页相交。据此，我们可以假设它们包含在 $\mathbb{S}^5$ 中 $F^0_{\mathbb{S}^5}$ 的闭邻域 $N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5})$ 内。该邻域可通过接触同胚识别为 $(F \times [-1,1],\ \mathbf{Ker}(\alpha^5_0 + dt))$，其中 t 是 $[-1,1]$ 上的坐标，$F = F^0_{\mathbb{S}^5}$ 配备了辛形式 $d\alpha^5_0$，并且我们将 $F^0_{\mathbb{S}^5}$与页 $F \times \{0\}$相识别。因此，我们有一个接触同胚（接触识别）

$$\Theta : (N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5}), \mathrm{Ker}(\alpha^5_0|_{N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5})}) \longrightarrow (F \times [-1,1], \mathrm{Ker}(\alpha^5_0 + dt)).$$

接触同胚 Θ 将 $N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5})$ 中的页（纤维）与 $F\times[-1,1]$ 中的页（纤维）相对应，而 $N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5})$ 的 Reeb向量场对应于 $F\times[-1,1]$的 Reeb向量场 $\partial/\partial t$。

类似地， $\mathbb{K}$ 的所有重构分支都包含在页$F^0_{\mathbb{S}^3}$的拉格朗日核中，且它们不与（$F_{\mathbb{S}^3}$， $h_{\mathbb{S}^3}$）的一页相交，因此它们包含在 $\mathbb{S}^3$ 中的 $F^0_{\mathbb{S}^3}$ 的闭邻域$N_{\mathbb{S}^3}$（$F^0_{\mathbb{S}^3}$）内，并且该邻域可通过接触方式识别为（$G\times[-1,1]$， Ker(α_0^3+dt)），其中$G=F^0_{\mathbb{S}^3}$配备了辛形式 $d\alpha_0^3$，且我们将 $F^0_{\mathbb{S}^3}$ 与页 $G\times\{0\}$ 识别。事实上， G 是 F的一个真嵌入 Weinstein 子域，而 Θ 的限制给出一个接触同胚

$$\Theta|_{N_{\mathbb{S}^3}(F^0_{\mathbb{S}^3})}:(N_{\mathbb{S}^3}(F^0_{\mathbb{S}^3}),\mathrm{Ker}(\alpha_0^3|_{N_{\mathbb{S}^3}(F^0_{\mathbb{S}^3})})\longrightarrow(G\times[-1,1],\mathrm{Ker}(\alpha_0^3+dt)).$$

同样，受限的 Θ 将 $N_{\mathbb{S}^3}$（$F^0_{\mathbb{S}^3}$）中的页（纤维）与 $G\times[-1,1]$中的页（纤维）识别起来，而 $N_{\mathbb{S}^3}$（$F^0_{\mathbb{S}^3}$）的 Reeb向量场对应于 $G\times[-1,1]$的 Reeb向量场 $\partial/\partial t$。（注意，（$G\times[-1,1]$， Ker(α_0^3+dt)）在接触意义下真嵌入于（$F\times[-1,1]$， Ker(α_0^5+dt)），且它们的 Reeb向量场重合，即 $\partial/\partial t$。）

在 F 上固定一个度量 d （在 G 上也如此），并令 $[-1,1]$ 上的标准度量为 d_0。考虑 $N_{\mathbb{S}^5}$（$F^0_{\mathbb{S}^5}$）上的拉回度量（距离函数）dist $\doteq\Theta^*(d\times d_0)$，其中 是识别映射。取一个充分小的数 $\epsilon>0$，使得对所有 $i\neq j$， $\epsilon<$ dist(K_i,K_j)，并选取区间 $[-\epsilon,\epsilon]$ 的一个划分 $\{-\epsilon=\epsilon_1\lneqq\epsilon_2\lneqq\cdots\lneqq\epsilon_r=\epsilon\}$。

接下来，对每个 $i=1,2,...r$，考虑像 $\Theta(L_i)$，它在 ($F\times\{0\},d\alpha_0^5$) 中是拉格朗日的，在 ($F\times[-1,1]$, Ker(α_0^5+dt)) 中是勒让德的。利用 Reeb向量场 $\partial/\partial t$ （它与各页横截）所生成的流，将 2维平凡结 $\Theta(L_i)$ 推动，直到得到一个完全包含在页 $F\times\{\epsilon_i\}$ 中的新光滑 2维平凡结U_i。注意，由于 $\partial/\partial t$ 是一个接触向量场， $\Theta(L_i)$ 和 U_i 在 ($F\times[-1,1]$,Ker(α_0^5+dt)) 中 Legendrian 同痕。将这一同伦限制在赤道 $\Theta(K_i)$ 上，便在 ($G\times[-1,1]$,Ker(α_0^3+dt)) 中定义了一个 Legendrian 同伦，它从 $\Theta(K_i)$ 到一个新的光滑 Legendrian 1-纽结 $V_i\subset G\times\{\epsilon_i\}\subset F\times\{\epsilon_i\}$；事实上，它是 U_i 的各向同性赤道。注意， U_i（以及 V_i）彼此不相交，因为它们位于不同的页上。此外，根据 ϵ 的选取，新的光滑 2-链环 $\mathbb{U}=\bigsqcup_{i=1}^r U_i$ 与其光滑赤道 1-链环 $\mathbb{V}=\bigsqcup_{i=1}^r V_i$ 具有相同的链接矩阵；事实上，该矩阵等于原给定链环 $\mathbb{L}$ 与其赤道链环 $\mathbb{K}$ 的共同链接矩阵。

现在考虑拉回链 $\mathbb{L}'\doteq\Theta^{-1}(\mathbb{U})\subset N_{\mathbb{S}^5}(F^0_{\mathbb{S}^5})\subset\mathbb{S}^5_{st}$ 及其赤道链环$\mathbb{K}'\doteq\Theta^{-1}(\mathbb{V})\subset N_{\mathbb{S}^3}(F^0_{\mathbb{S}^3})\subset\mathbb{S}^3_{st}$。由于 Θ 是接触同胚，以下结论显而易见：

(1) $\mathbb{L}'$ 的每个分支 $L_i'\doteq\Theta^{-1}(U_i)$ 在 $F^i_{\mathbb{S}^5}\doteq\Theta^{-1}(F\times\{1\})$上都是拉格朗日的，在 $\mathbb{S}^5_{st}$中是勒让德的，并且与原始的 L_iLegendrian 同痕。(2) $\mathbb{K}''$的每个分支 $K_i'\doteq\Theta^{-1}(V_i)$ 在 $F^i_{\mathbb{S}^3}\doteq\Theta^{-1}(G\times\{i\})$上都是拉格朗日的，在 $\mathbb{S}^3_{st}$中是勒让德的，并且与原始的 K_iLegendrian 同痕。(3) 2-链环$\mathbb{L}'=\bigsqcup_{i=1}^r L_i'$ 及其赤道 1-链环$\mathbb{K}'=\bigsqcup_{i=1}^r K_i'$ 具有相同的链接矩阵，该矩阵与 $\mathbb{L}=\bigsqcup_{i=1}^r L_i$ 和 $\mathbb{K}=\bigsqcup_{i=1}^r K_i$的共同链接矩阵一致。

由此，我们得出结论：相对 2-链环 $\mathbb{L},\mathbb{L}'$ 及其赤道 1-链环 $\mathbb{K},\mathbb{K}'$ 分别在 $\mathbb{S}^5_{st}$ 和 $\mathbb{S}^3_{st}$中 Legendrian 同痕。因此，沿$\mathbb{L}'$进行相对接触 ±1手术，也会得到相同（在同伦意义下）的相对接触对 (Y^5_ξ， M^3_η)。另一方面， $\mathbb{L}'$ （分别为 $\mathbb{K}'$）的每个分支都作为拉格朗日 2-平凡结（分别为拉格朗日 1-平凡结）位于 $\mathbb{S}^5_{st}$ 上的相容开书 ($F_{\mathbb{S}^5}$， $h_{\mathbb{S}^5}$)（分别为 $\mathbb{S}^3_{st}$上的 ($F_{\mathbb{S}^3}$， $h_{\mathbb{S}^3}$)）的页上。因此，根据

“页面手术”定理（关于三维的定理 1.2，以及关于五维的定理 4.6，见 [15]），我们立即得到相对接触对 $(Y^5_\xi,\ M^3_\eta)$ 上的一个相容相对开书，其形式为

$$(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}\circ\tau_{\mathbb{L}'}, h_{\mathbb{S}^3}\circ\tau_{\mathbb{K}'})$$

其中，$\tau_{\mathbb{L}'}$（分别为 $\tau_{\mathbb{K}'}$）表示沿分支 $\mathbb{L}'$（分别为 $\mathbb{K}'$）进行接触（±1）手术所产生的德恩扭转 $\tau^{\mp1}_{L'_i}$（分别为 $\tau^{\mp1}_{K'_i}$）的乘积（复合），手术结果为 Y^5_ξ（分别为 M^3_η）。□

5. Examples

例 5.1. 考虑可容许勒让德 2-链环 $\mathbb{L}=\bigsqcup_{i=1}^{2}L_i$，其赤道链环$\mathbb{K}$ 为霍普夫链环，且其方形桥图 Γ（$\mathbb{K}$）如图 2 所示。$\mathbb{L}$ 的广义方形桥图 Δ（$\mathbb{L}$）见图 4。利用这些图，对于每个k，我们构造勒让德平凡结 γ_k，使其位于（$\mathbb{R}$，ξ^3_0）$\subset\mathbb{S}^3_{st}$ 中；同时，如图 13 所示，构造 γ_k 的中间部分（勒让德加厚）M_k。

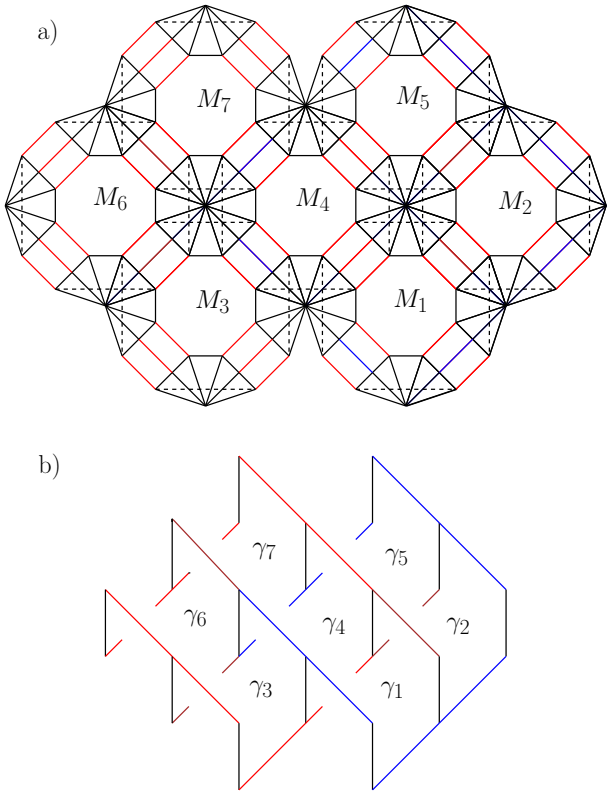


Figure 13. (a) 可容许勒让德 2-链环 $\mathbb{L}$ 的中间部分；(b) 赤道链环 $\mathbb{K}$，即 $\mathbb{L}$（霍普夫链环），包含在二维带状体的核中。

然后，按照命题 3.2 中的说明（见图 14），先为Γ（$\mathbb{K}$）中的每个方形区域 R_k 构造一个勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$，再将它们相应的部分拼接起来，即可得到 $\mathbb{L}$ 的分段光滑（勒让德）重构 $\mathbb{L}'$（其中有一些重叠区域）。根据构造，$\mathbb{L}'$ 包含于 $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$（四维带状体）的并集中，其赤道 $\mathbb{K}'$ 包含于 $\mathcal{R}_{\gamma_k}$（二维带状体）的并集中。

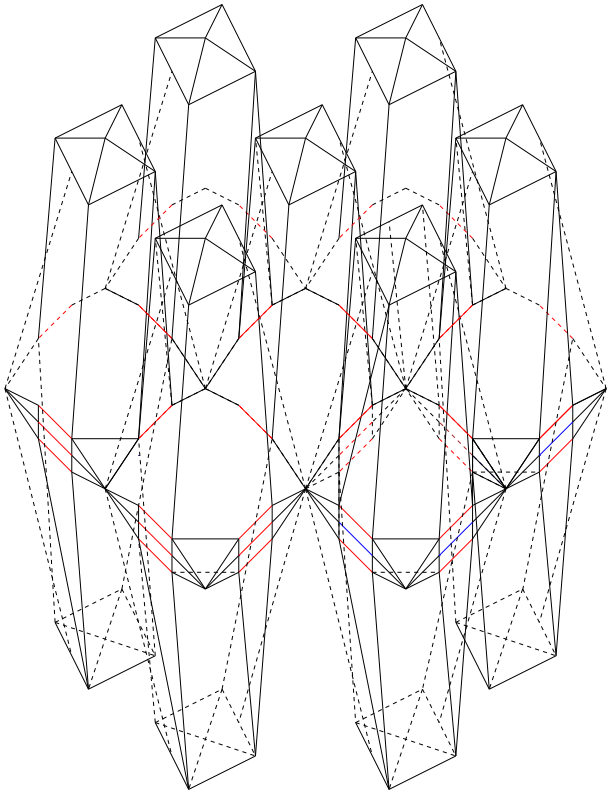


FIGURE 14. 分段光滑勒让德二链环 $\mathbb{L}'$（含有重叠区域）及其赤道链环 $\mathbb{K}'$（一个分段光滑霍普夫链环）。

对于 $\Gamma(\mathbb{K})$ 中的每个方形区域 R_k，逐步将每个八面体引入 $\mathbb{L}$ 的广义方形桥图 $\Delta(\mathbb{L})$ 中，便可得到定义在 $(\mathbb{S}^5_{st},\ \mathbb{S}^3_{st})$ 上的一个新的相容相对开书；它是对前一步所得相容相对开书进行正相对稳定化的结果。

更确切地说，$(\mathbb{S}^5_{st},\ \mathbb{S}^3_{st})$ 上的平凡相容相对开书 $\mathcal{OB}_0 \doteq (D^4,\ D^2,\ id_{D^4},\ id_{D^2})$ 被视为初始步骤。当我们到达最后一步 $k=7$ 时，便得到 $(\mathbb{S}^5_{st},\ \mathbb{S}^3_{st})$ 上如下的相容相对开书：

$$\begin{aligned}(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^3}) &\doteq \mathcal{OB}_7 \\ &= \mathcal{S}^+[\cdots[\mathcal{S}^+[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A_1, A_1\cap D^2];\cdots]; A_7, A_7\cap \bigsqcup_{i=1}^{6}\mathcal{R}_{\gamma_i}]\end{aligned}$$

其中，$F_{\mathbb{S}^5}=\bigsqcup_{k=1}^{7}\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 和 $F_{\mathbb{S}^3}=\bigsqcup_{k=1}^{7}\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 是相应的 Weinstein 页，单值化映射 $h_{\mathbb{S}^5}=\tau_{\mathcal{D}_1}\circ\cdots\circ\tau_{\mathcal{D}_7}$ 和 $h_{\mathbb{S}^3}=\tau_{\gamma_1}\circ\cdots\circ\tau_{\gamma_7}$ 分别是沿 $\mathcal{D}_k$ 和 γ_k 的右手德恩扭转之积，而 A_k 是带状面 $\mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^{k-1}M_i)\cap M_k}$ 中的真嵌入拉格朗日 2-圆盘，如命题 4.3 中针对 $k=1,\cdots,7$ 所述。注意，圆整（光滑化）后的 $\mathbb{L}'$ 和 $\mathbb{K}'$ 分别光滑嵌入在 $F_{\mathbb{S}^5}=\bigsqcup_{k=1}^{7}\mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 和 $F_{\mathbb{S}^3}=\bigsqcup_{k=1}^{7}\mathcal{R}_{\gamma_k}$ 的核 $\bigsqcup_{k=1}^{7}\mathcal{D}_k$ 和 $\bigsqcup_{k=1}^{7}\gamma_k$ 中。

设(Y^5_ξ, M^3_η)是沿给定的容许链环 $\mathbb{L}$ 在 $\mathbb{S}^5_{st}$中进行容许的相对接触(±1)手术后得到的任意容许相对接触对。根据定理 1.7，存在一个相容相对开书

$$(\mathcal{OB}_Y, \mathcal{OB}_M) \doteq (F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5} \circ \tau_{\mathbb{L}'}, h_{\mathbb{S}^3} \circ \tau_{\mathbb{K}'})$$

在 $(Y^5_\xi,\ M^3_\eta)$ 上具有 Weinstein 页，其中 $\tau_{\mathbb{L}'}$ 和 $\tau_{\mathbb{K}'}$ 表示德恩扭转 $\tau^{\mp1}_{\mathbb{L}'_i}$ 和 $\tau^{\mp1}_{\mathbb{K}'_i}$ 的乘积，如上一节所述，在施加接触 (±1) 手术时得到。

例 5.2。设 L 是 $(\mathbb{R}^5,\ \xi^5_0) \subset \mathbb{S}^5_{\xi_{st}}$ 中的容许标准松弛勒让德 2-平凡结，它由对 $(\mathbb{R}^3,\ \xi^3_0) \subset \mathbb{S}^3_{\xi_{st}}$ 中的勒让德 1- 纽结 K 取 $\mathbb{S}^1$- 对称得到，其中 $tb(K) = -3$ 如图 15 所示。

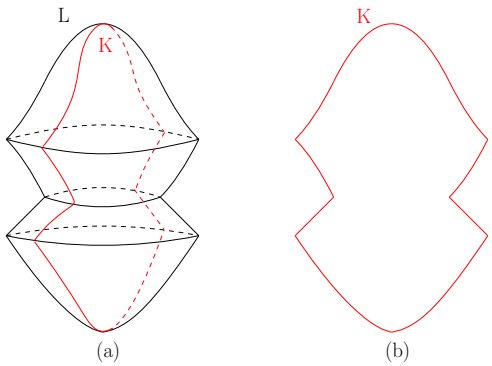


FIGURE 15. (a) 容许标准松弛勒让德 2-平凡结 L 的前投影；(b) 其各向同性赤道 K 的前投影。

广义方形桥图 $\Delta(L)$ 如图 16 所示。利用该图，可以先为 $\Gamma(K)$ 中的每个方形区域 R_k 构造一个勒让德菱形 $\mathcal{D}_k$，再按照命题 3.2 中的说明将其适当部分拼接起来，从而得到分段光滑代表 L'（如图 17 所示）。

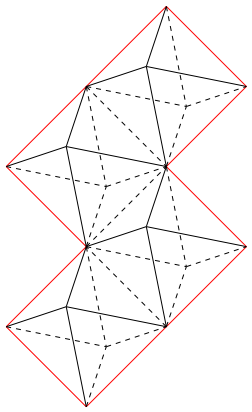


FIGURE 16. 可容许的标准松弛勒让德 2-平凡结 L 的广义方形桥图。

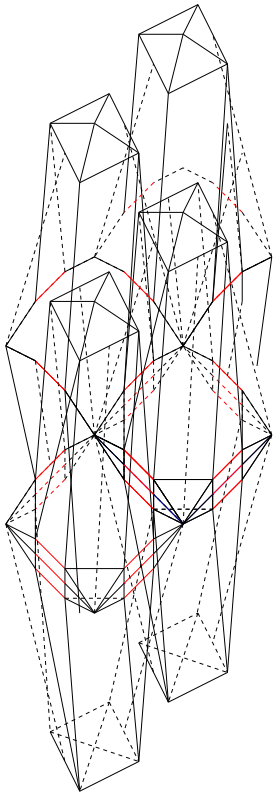


FIGURE 17. 分段光滑标准松弛勒让德 2-平凡结 L'。

与之前一样，在没有引入任何方形时，我们考虑 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上的平凡相容相对开书 $\mathcal{OB}_0 \doteq (D^4,\ D^2,\ id_{D^4},\ id_{D^2})$。随后，对于每个新八面体，通过对上一步中的相容开书进行正稳定化，可得到 $(\mathbb{S}^5_{st}, \mathbb{S}^3_{st})$ 上的一个新的相容相对开书。在最后一步 $k=4$，得到以下相容开书

$$\begin{aligned}(F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5}, h_{\mathbb{S}^3}) &\doteq \mathcal{OB}_4 \\ &= \mathcal{S}^+[\cdots[\mathcal{S}^+[(D^4, D^2, id_{D^4}, id_{D^2}); A_1, A_1 \cap D^2]; \cdots]; A_4, A_4 \cap \bigsqcup_{i=1}^{3} \mathcal{R}_{\gamma_i}]\end{aligned}$$

在 $(\mathbb{S}^5_{st},\ \mathbb{S}^3_{st})$ 上得到，其中 $F_{\mathbb{S}^5} = \bigsqcup_{k=1}^4 \mathcal{R}_{\mathcal{D}_k}$ 和 $F_{\mathbb{S}^3} = \bigsqcup_{k=1}^4 \mathcal{R}_{\gamma_k}$ 是相应的温斯坦页，$h_{\mathbb{S}^5} = \tau_{\mathcal{D}_1} \circ \cdots \circ \tau_{\mathcal{D}_4}$ 和 $h_{\mathbb{S}^3} = \tau_{\gamma_1} \circ \cdots \circ \tau_{\gamma_4}$ 分别是沿 $\mathcal{D}_k$ 和 γ_k 的右手德恩扭转之积，而 A_k 是带状面 $\mathcal{R}_{(\bigsqcup_{i=1}^{k-1} M_i) \cap M_k}$ 中如命题 4.3 所述的正常嵌入拉格朗日 2-圆盘，适用于 $k=1$, 2，3，4。L'（分别为 K'）的光滑化包含在 $F_{\mathbb{S}^5}$（分别为 $F_{\mathbb{S}^3}$）的核中。

现在，作为一个例子，考虑通过沿给定的容许链环 L 对 $\mathbb{S}^5_{st}$ 施行容许的相对接触（+1）手术而得到的容许相对接触对（Y^5_ξ, M^3_η）。根据定理 1.7，存在一个相容的相对开书

$$(\mathcal{OB}_Y, \mathcal{OB}_M) \doteq (F_{\mathbb{S}^5}, F_{\mathbb{S}^3}, h_{\mathbb{S}^5} \circ \tau_{L'}^{-1}, h_{\mathbb{S}^3} \circ \tau_{K'}^{-1})$$

定义在（Y^5_ξ, M^3_η）上。注意， Y^5_ξ 根据 Casal、Murphy 和 Presas [4] 是过扭的，因为它是通过沿松弛勒让德 2-结 L' 施行接触（$+1$）手术而得到的。特别地，它包含过扭接触子流形 $M_\eta =$（L（2,1） $= \mathbb{RP}^3, \eta$），该子流形是通过沿赤道 1-结 K' 施行接触（$+1$）手术而得到的。

References

[1] S. Akbulut、B. Ozbagci， *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*，Geom. Topol. 5（2001年），319-334。[2] M. F. Arikan， *On the support genus of a contact structure*，Journal of Gokova Geometry Topology，第1卷（2007年），92-115。[3] R. Avdek， *Liouville hypersurfaces and connect sum cobordisms*，Journal of Symplectic Geometry，第19卷（第4期），2021年。[4] R. Casals、E. Murphy、F. Presas， *Geometric criteria for overtwistedness*，Journal of American Mathematical Society，32（2），（2015年）。[5] J. Conway、J. Etnyre， *Contact surgery and symplectic caps*，Bull. Lond. Math. Soc.，52（2），379-394。[6] F. Ding、H. Geiges， *A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds*，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 136（2004年），第3期，583-598。[7] T. Ekholm、J. Etnyre、M. Sullivan， *Non-isotopic Legendrian submanifolds in* $\mathbb{R}^{2n+1}$，J. Differential Geom. 71（2005年），第1期，85–128。[8] J. B. Etnyre， *Lectures on open book decompositions and contact structures*， *Floer homology*， *gauge theory*， *and low-dimensional topology* 103 141， 5， 2006 ，- Clay Math. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI，（）。[9] J. B. Etnyre、B. Ozbagcı， *Invariants of Contact Structures from Open Books*，Trans. Amer. Math. Soc. 第360卷（2008年），3133-3151。[10] H. Geiges， *An Introduction to Contact Topology*，剑桥大学出版社，（2008年）。[11] E. Giroux， *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*，国际数学家大会论文集，第II卷（北京），Higher Ed. Press，（2002年），第405–414页。MR 2004c:53144[12] R. E. Gompf， *Handlebody construction of Stein Surfaces*，Ann. of Math. 148（1998年），619-693。[13] N.Goodman， *Contact Structures and Open Books*，博士论文，德克萨斯大学奥斯汀分校（2003年）。[14] O. V. Koert， *Open books on contact five manifolds*，Tome 58（2008年），第139-157页。[15] O. V. Koert， *Lecture notes on stabilization of contact open books*，M¨unster J. of Math. 10（2017年），425–455。[16] O. Lazarev， *Maximal contact and symplectic structures*，Journal of Topology 13，2020年，1058-1083。[17] H.Lyon， *Torus knots in the complements of links and surfaces*，Michigan Math. J. 27（1980年），39-46。[18] D. McDuff、D. Salamon， *Introduction to Symplectic Topology*，牛津大学出版社，（1995年）。[19] B. Ozbagci、A. I. Stipsicz， *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*，Bolyai Society Mathematical Studies，13（2004年），施普林格出版社，柏林。[20] P. Seidel， *Floer homology and the symplectic isotopy problem*，博士论文，University ofOxford（1997年）。

Dept. of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, TURKEY*Email address*: isarac@metu.edu.tr

Dept. of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, TURKEY*Email address*: farikan@metu.edu.tr