arXiv:2303.08612v1 [cs.CG] 15 Mar 2023

组合设计遇上超团：Klee测度问题及维度 $d \geq 4$ 中相关问题的更高下界

Egor Gorbachev ✉萨尔布吕肯计算机科学研究生院，萨尔州信息学园区，萨尔布吕肯，德国

MarvinKünnemann ✉凯撒斯
劳滕-兰道理工大学，德国

摘要

众所周知，Klee测度问题（计算 $\mathbb{R}^d$ 中 n 个轴平行盒的并集体积）存在 $n^{\frac{d}{2}\pm o(1)}$ 时间算法（Overmars、Yap，SICOMP'91；Chan，FOCS'13）。直到最近，才有人为 $d=3$ 给出了条件下界（且不局限于"组合"算法）（Künnemann，FOCS'22）。这一结果能否扩展为维度 $d \geq 4$ 下的紧下界?

本文通过一种称为前缀覆盖设计的组合对象，将用于证明 $d=3$ 紧下界的技术形式化。我们表明，这些在思想上与组合设计相关的设计，可直接转化为针对 Klee测度问题及多种相关问题的条件下界。通过构造优良的前缀覆盖设计，我们为以下问题给出了下界： $\mathbb{R}^d$ 中的 Klee测度问题、 $\mathbb{R}^d$ 中轴平行盒的深度问题、 $\mathbb{R}^{2d}$ 中最大体积/最大周长空（锚定）盒问题，以及相关问题：

- 对于 $d=4$，下界为 $\Omega(n^{1.90476})$；对于
- $d=5$，下界为 $\Omega(n^{2.22222})$；对于一般
- 的 d，下界为 $\Omega(n^{d/3+2\sqrt{d}/9-o(\sqrt{d})})$，

假设 3-一致超团假设成立。对于 Klee测度问题和深度问题，这些下界分别改进了此前的下界 $\Omega(n^{1.777\ldots})$，$\Omega(n^{2.0833\ldots})$ 和 $\Omega(n^{d/3+1/3+\Theta(1/d)})$。

我们通过以下方式获得了改进的前缀覆盖设计：(1) 利用针对问题的见解和 SAT 求解器开展计算机辅助搜索；(2) 展示如何将文献中已知的组合覆盖设计 转化为强前缀覆盖设计。与此相反，我们证明，使用这种证明技术得到的下界已接近最佳可能结果。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 算法设计与分析

关键词与短语 细粒度复杂性理论、非组合下界、计算几何、团检测

致谢 第二位作者感谢 Karl Bringmann、Nick Fischer 和 Karol Węgrzycki 提供的有益讨论。

1 引言

对于计算几何中的各种问题，目前已知的最佳算法具有如下形式的运行时间： $n^{\Theta(d)}$ 其中 d 表示维度数：Klee测度问题以及轴平行盒的深度问题在 $\mathbb{R}^d$ 中可在 $n^{d/2\pm o(1)}$ [40, 18, 19] 时间内求解；一种近期算法 [21] 可在 $\tilde{\mathcal{O}}(n^{(5d+2)/6})$ 时间内，从给定的点集中计算最大体积空轴平行盒；星差异可在 $O(n^{d/2+1})$ 时间内计算， [25],最大权重矩形问题可在 $O(n^d)$ 时间内求解， [9], 以上仅举数例。事实上，可以证明 [18, 28, 9] 对于所列出的所有问题，若存在一个运行时间为 $n^{o(d)}$ 的算法，就会推翻指数时间假设（ETH）。因此，接下来的挑战是

© Egor Gorbachev 和 Marvin Künnemann；依据知识共享许可
协议 CC-BY 4.0 授权

确定运行时间为 $n^{f(d)}$、满足 $f(d) = \Theta(d)$ 的算法，并在细粒度复杂性假设下证明其最优性。鉴于这些运行时间的性质（它们会随着d迅速增长），确定小维度（如 $d \in \{2, 3, 4, 5\}$）下的最优时间界尤其值得关注。

对于其中一些问题，已知较强的条件下界：对于 Klee测度问题和深度问题，Chan [18] 给出了针对组合算法的紧条件下界$n^{d/2-o(1)}$——粗略地说，这类算法会避免使用快速矩阵乘法算法所依赖的代数技术。考虑一般算法（而不只是组合算法）时，只有对于加权问题或低维情形，才已知紧下界：对于加权深度问题和最大权重矩形问题，在加权 k-团假设 [8] 下，分别可以证明紧下界 $n^{d/2-o(1)}$ 和 $n^{d-o(1)}$。然而，要为更简单的无权问题证明较强下界，似乎更为困难。对于 Klee测度问题和无权深度问题，近期一项结果证明了在 3-一致超团假设 [34], 下的 $n^{d/(3-3/d)-o(1)}$ 条件下界，该下界对 $d = 3$是紧的，但对 $d \geq 4$则不是。

因此，本文要探讨的核心问题如下：

对于较小维度 $d \geq 4$（例如 $d \in \{4,5,6\}$），我们能否证明已知的 *Klee*测度问题、深度问题及相关问题算法在条件下是最优的？

1.1 我们的结果

作为本工作的起点，我们将 [34] 中用于证明 $d = 3$ 紧确困难性的思路形式化。为此，我们定义以下组合对象，并将其称为前缀覆盖设计 （因为它在概念上与某些组合设计[1]相似）。

在以下定义中，令 $\binom{S}{t}$ 表示 S 的 t 元子集的集合。

▶ **定义 1.** 设 d、K、$\alpha \in \mathbb{N}$ 满足 $d \geq 3$ 且 $K \geq 4$。一个(d, K, α)-前缀覆盖设计由 d 个定义在 $[K]$ 上的序列 s_1、……、s_d 构成，并具有以下性质。

三元组条件：对于每个 $\{a, b, c\} \in \binom{[K]}{3}$，存在 $i, i', i'' \in [d]$ 和 $\ell, \ell', \ell'' \in \mathbb{N}_0$，使得 $\{a, b, c\}$ 中的每个元素都包含在 $s_i[..\ell]$、$s_{i'}[..\ell']$ 或 $s_{i''}[..\ell'']$ 中。（这里，$s[..\ell]$ 表示 s 的前 ℓ 个元素构成的前缀。）$\ell + \ell' + \ell'' \leq \alpha$。

单元素条件：对于在 $s_1, \ldots, s_d$ 中出现不止一次的每个 $x \in [K]$，定义$\ell_{\min}(x)$ ($\ell_{\max}(x)$) 为满足存在某个 i 使得 $s_i[\ell] = x$ 的最小（最大） ℓ。那么我们有

$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq \alpha + 1$。

例如，很容易看出，对于任意 d，序列 $s_1 = (1, d+1)$ $s_2 = (2, d+1)$ ……，$s_d = (d, d+1)$ 构成一个 $(d, d+1, 3)$ 前缀覆盖设计。[2]

[1] 事实上，我们稍后将建立这些概念之间的正式联系。[2] 关于三元组条件，注意到三元组 $\{a, b, c\} \in \binom{[d]}{3}$ 包含在前缀$s_a[..1], s_b[..1], s_c[..1]$ 中，这些前缀的总长度为 $\alpha = 3$；并且，任何满足 $\{a, b\} \in \binom{[d]}{2}$ 的三元组 $\{a, b, d+1\}$ 都包含在总长度为 $\alpha = 3$ 的前缀 $s_a[..2], s_b[..1]$ 中。单元素条件只需对 $x = d + 1$ 进行检查；对此我们注意到 $\ell_{\min}(d+1) = \ell_{\max}(d+1) = 2$，因此对于 $\alpha = 3$，有 $\ell_{\min}(d+1) + \ell_{\max}(d+1) = 4 \leq \alpha + 1$。

前缀覆盖设计构成了 [34] 中所用证明技术的核心。具体而言，我们证明，良好的前缀覆盖设计的存在可直接为若干问题带来强下界（这些归约在 [34] 中是隐含的，或根据 [28] 改编为适用于前缀覆盖设计的归约）。

▶ **命题 2.** 设 $d, K, \alpha \in \mathbb{N}$ 满足存在一个(d, K, α) 前缀覆盖设计。除非 *3*-一致超团假设不成立，否则不存在 $\varepsilon > 0$ 使得以下任一问题存在一个$O(n^{\frac{K}{\alpha}-\varepsilon})$时间算法：

- $\mathbb{R}^d$中的 *Klee*测度问题、 $\mathbb{R}^d$中的深度问题、 $\mathbb{R}^{2d}$中的最大
- 体积空锚定盒问题、 $\mathbb{R}^{2d}$中的最大周长空锚定盒问题。

除了这些问题之外，对于相关问题也可以进行类似的归约，例如 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的双色盒问题（给定红点集和蓝点集，寻找一个轴平行盒，使其包含尽可能多的蓝点，同时不包含任何红点），以及各种相关差异问题，例如星差异，见 [28]。请注意，空锚定盒问题的维数会膨胀；事实证明，假设 3-一致超团假设成立，这种膨胀是不可避免的，因为这些问题存在 $O(n^{(1/2-\varepsilon)d})$算法（见下文）。在此，我们只对归约作粗略概述；完整证明将在 A 节给出，届时我们也会正式定义所有列出的问题，并讨论 3-一致超团假设。

命题 2 的证明概要。对于每个问题，我们都给出一个从 3-一致超团问题出发的归约：给定一个含有 $V = V_{(1)} \cup \cdots \cup V_{(K)}$个顶点和 $|V_{(1)}| = \cdots = |V_{(K)}| = n$条边的 3-一致超图 $G = (V, E)$，判断是否存在 $v^{(1)} \in V_{(1)} \ldots, v^{(K)} \in V_{(K)}$，使它们在 G 中构成一个团。3-一致超团假设指出，这个问题需要运行时间 $n^{K-o(1)}$。

直观地说，上述每个问题的一个特殊情形都是寻找满足某些性质的轴平行盒Q 。更具体地说，任意候选盒 Q 都可通过为每个维度 $i \in [d]$选择一个值 $v_i \in \{0, \ldots, U-1\}$ 来确定。我们使用一个 (d, K, α) 前缀覆盖设计 $s_1, \ldots, s_d$，将值 $v_1, \ldots, v_d$解释为在 $V(1) \ldots, V(K)$ 中选择顶点：也就是说，对于 $s_i = (s_i[1], \ldots, s_i[L])$，我们将任意满足 $U = n^L$ 的数 $v_i \in \{0, \ldots, U-1\}$ 看作一个以 n 为基数的数 $v_i = (v_i[1], \ldots, v_i[L])$。我们将满足 $\in \{0, \ldots, n-1\}^L$ 的 $(v_i[1], \ldots, v_i[L])$ 解释为：对所有 $1 \le \ell \le L$，选择 $V(s_i[\ell])$ 中第 $(v_i[\ell] + 1)$ 个顶点。

固定这种编码后，接下来需要确保唯一的真解 Q 编码出 G中的一个团。这包含两项任务：(1) 确保候选盒 Q 一致地选择顶点，即对于每个 $V^{(x)}$，若 x 在多个 s_i中出现，就必须确保每次出现时选择的是同一个顶点；(2) 确保所选顶点构成一个团。关键的是，对于这两项任务，我们的几何问题都允许排除满足特定前缀条件的候选盒 Q 。具体而言，由于单元素条件，只需构造 $O(n^\alpha)$ 个盒子，就能确保剩余候选解 Q的一致性。同样，利用三元组条件，只需额外构造 $O(n^\alpha)$ 个盒子，就能排除所有编码了非团的候选盒 Q （其中三元组 $\{v^{(a)}, v^{(b)}, v^{(c)}\}$ 不是 G中的一条边）。总之，这为目标问题构造了一个规模为 $O(n^\alpha)$ 的实例，从而在 3-一致超团假设下得到一个 $n^{\frac{K}{\alpha}-o(1)}$ 下界。◀

由命题 2 可直接得到以下推论。

▶ **推论3**。对于任意 $d \geq 3$，令 $\gamma_d := \text{上确界}\{\frac{K}{\alpha} \mid \text{存在一个}(d, K, \alpha)\text{ 前缀覆盖设计}\}$。那么，对于任何 $\varepsilon > 0$，除非 *3*-一致超团假设不成立，否则命题 *2* 中列出的任何问题都不存在一个 $O(n^{\gamma_d - \varepsilon})$算法。

Klee测度问题和 $\mathbb{R}^3$ 中的深度问题的紧条件下界 [34] 可由以下构造得出：对于任意 $g \in \mathbb{N}$，令 $K = 3g$，记作$[K] = \{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, c_1, \ldots, c_g\}$，并注意到

$$s_1 = (a_1, \ldots, a_g, b_g, \ldots, b_1), s_2 = (b_1, \ldots, b_g, c_g, \ldots, c_1), s_3 = (c_1, \ldots, c_g, a_g, \ldots, a_1)$$

构成一个（3，$3g$，$2g+1$）前缀覆盖设计。因此，我们得到 $\gamma_3 \geq \lim_{g\to\infty} \frac{3g}{2g+1} = \frac{3}{2}$，从而为 $\mathbb{R}^3$中的KMP及相关问题建立了 $n^{\frac{3}{2}-o(1)}$ 条件下界。[3]

鉴于前缀覆盖设计可直接应用于Klee测度问题、深度问题以及许多相关问题，自然会想到，利用这一技术能够获得的最高下界是多少。一方面，设计出更好的前缀覆盖设计可以得到更强的下界。另一方面，确定前缀覆盖设计的界限，或许能揭示改进KMP及相关问题算法的潜力（其他背景下也观察到了这种现象，例如 [16]）。

我们的第一个结果是，前缀覆盖设计无法给出高于$n^{\frac{d}{3}+O(\sqrt{d})}$的下界。以下界将在第3节中证明。

▶ **命题4.** 我们有 $\gamma_d \leq \frac{d}{3}(1-\sqrt{\frac{2}{d}}) = \frac{d}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{d} + o(\sqrt{d})$。

然而，由于$\frac{d}{3}(1-\sqrt{2/d}) \geq \frac{d}{2}$ 对于 $d \leq 18$，这一结果并未排除较小维度下存在紧下界的可能。事实上，结合计算机辅助搜索与针对问题的洞见，我们为 $d \in \{4,5\}$给出了改进的构造，其下界出乎意料地接近 $\frac{d}{2}$。

▶ **定理5.** 存在一个$(4,40,21)$ 前缀覆盖设计，可得 $\gamma_4 \geq \frac{40}{21} > 1.90476$。存在一个$(5,40,18)$ 前缀覆盖设计，可得 $\gamma_5 \geq \frac{40}{18} > 2.22222$。

证明。以下序列构成一个 $(4, 40, 21)$ 前缀覆盖设计：

$s_1 =$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 40, 19, 28, 37, 26),$s_2 =$(11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 9, 38, 27, 36),$s_3 =$(21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 39, 8, 7, 37),$s_4 =$(31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 10, 29, 18, 17, 27).

以下序列构成一个 (5，40，18) 前缀覆盖设计：

$s_1 =$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 24, 31, 38, 30, 14),$s_2 =$(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 32, 40, 6, 31, 22),$s_3 =$(17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 8, 7, 39, 15, 30),$s_4 =$ (25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 40, 16, 23, 39, 6),$s_5 =$ (33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 16, 32, 15, 23).

为方便读者，我们提供了检查程序，用于验证 [1] 中的单例条件和三元组条件（详情请参见 B 节）。◀

[3] 不难证明，$\gamma_3 \leq \frac{3}{2}$，从而得到 $\gamma_3 = \frac{3}{2}$。这引出了一个问题：我们能否找到 $d \geq 4$中 γ_d 的精确值。

因此，对于 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{R}^5$ 中的 Klee测度问题和深度问题，所得条件下界与已知上界之间的差距至多分别为 $O(n^{0.09524})$ 和 $O(n^{0.27778})$。这改进了此前基于超团的下界 $\Omega(n^{1.777})$ 和 $\Omega(n^{2.0833})$。

这些结果或许能（重新）点燃希望，让人相信有可能找到前缀覆盖设计，为 $d = 4$ 和 $d = 5$给出紧的下界。遗憾的是，通过仔细研究前缀覆盖设计的界限，我们驳斥了这一希望。

▶ **定理 6**。我们有 $\gamma_4 < 2$。

这一结果通过仔细分析质量 $\binom{K}{\alpha}$ 趋近于 2 的前缀覆盖设计的结构得以证明：我们证明，某些层（即 $s_1[\ell]$、……、$s_4[\ell]$，其中 ℓ 取某些值）必须具有非常严格的结构。从本质上说，这样一层上的每个元素在相应的另一层上都必须恰好有一个副本。对所有可能情况的详细分析表明会导致矛盾；我们无法得到任意接近 2 的质量 $\binom{K}{\alpha}$。完整证明见 C 节。确定 γ_4 的精确值仍是一个有趣的问题；我们的结果给出 $1.90476 \leq \gamma_4 < 2$。

与覆盖设计的联系

我们此前的结果表明，设计优良的前缀覆盖设计十分复杂。遗憾的是，针对 $d = 4$ 和 $d = 5$ 这类低维情形设计优化方案，难以深入揭示 d 中的渐近行为，也无法说明更高维度下优良前缀设计的一般结构。

为此，我们给出了适用于所有 d 的一般构造，并借鉴了关于 组合设计 的大量文献。具体而言，我们发现所谓的 覆盖设计 （例如，参见综述 [38, 30, 31, 29] 和 [20]，其中介绍了其在计算几何中的一种算法应用）与前缀覆盖设计之间存在有趣的联系。(v, k, t) 覆盖设计是由若干个大小为 k 的子集 $B_1, \ldots, B_b$ 组成的集合，这些子集称为 区块，它们取自 $[v]$，并满足：$[v]$ 中每个包含 t 个元素的子集，都完全包含在某个区块 B_i 中。这类覆盖设计是平衡不完全区组设计的一种松弛形式。

请注意，(d, K, α) 前缀覆盖设计 $s_1, \ldots, s_d$ 中，每个 s_i 的长度至多为 L；它表面上与一个包含 $v = K$ 个元素、块大小为 $k = L$、参数为 $t = 3$ 且有 d 个区块的 (v, k, t) 覆盖设计相似：两种设计都使用 d 个序列/块覆盖 $v = K$ 个元素中的三元组。然而，两者有两个关键区别。(1) 在覆盖设计中，每个三元组由一个区块覆盖；而在前缀覆盖设计中，我们可以使用至多三个序列的前缀。(2) 前缀覆盖设计中的序列具有内在的顺序性（这是由单元素条件和三元组条件中的 前缀 性质决定的），而覆盖设计中的区块没有顺序。乍一看，不清楚是否存在一种通用方法，能利用优良的覆盖设计构造优良的前缀覆盖设计，或反过来。或许令人意外的是，我们展示了如何利用具有 $t = 2$ 的优良 (v, k, t) 覆盖设计（而不是看起来更自然的对应参数 $t = 3$）来构造强有力的前缀覆盖设计。

具体而言，对于任何满足温和匹配类条件（许多文献中已知的构造都满足该条件）的此类覆盖设计，我们都能得到高质量的前缀覆盖设计。我们将在下文看到，通过代入已知构造，当 $d \to \infty$ 时，我们可以得到接近最优的前缀覆盖设计。

▶ **定理 7.** 设 $d \geq 3, k \in \mathbb{N}$ 和 v 是 d 的倍数，且存在一个 $(v, k, 2)$ 覆盖设计，其中有 d 个块，并满足以下性质：对于每个块 B_i，都存在一个大小为 $\frac{v}{d}$ 的 $U_i \subseteq B_i$，使得 $U_1, \ldots, U_d$ 划分 $[v]$。那么 $\gamma_d \geq 3 - 2\binom{d}{\frac{v}{kd}}$。

6 Klee测度问题及相关问题的更高下界， $\mathbb{R}^d$，$d \geq 4$

下面给出该定理的一个应用示例（更强的推论见第1.2节和附录B）。众所周知，阶为 q 的射影平面（其中 q 是素数幂）给出一个包含 $v = q^2+q+1$ 个点和 $d = q^2+q+1$ 条直线的集合，每条直线上有 $k = q+1$ 个点，且任意一对点都由一条直线连接。这给出一个 $(v, k, 2)$-设计，其中$d = v = q^2+q+1$ 且 $k = q+1$。可以证明，该设计满足匹配类条件（见 C 节）。因此，对于无穷多个 d，我们得到下界 $\gamma_d \geq 3 - \frac{d}{q^2+1}$。由于 $q = O(\sqrt{d})$，对于无穷多个 d，我们得到 $\gamma_d \geq 3 - \frac{d}{\Omega(1/\sqrt{d})} = \frac{d}{3} + \Omega(\sqrt{d})$，优于 [34]中隐含的下界 $\gamma_d \geq \frac{d}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3(d-1)}$。

1.2 推论：改进的条件下界

利用定理 7，我们可以选取文献中已知的任意一个含有 d 个区块的 $(v,\ k,\ 2)$ 覆盖设计，检验其是否满足匹配类条件，并由此得到相应的 γ_d 下界。表1列出了以此方式得到的 γ_d，$d \leq 10$ 下界；具体而言，我们使用了 La Jolla 覆盖数据库 [29] 中列出的覆盖设计（详情见第 2 节）。值得注意的是，对于 $d \geq 4$，由此得到的下界优于 [34] 中的构造。

我们还给出了一个适用于所有 γ_d 的下界；当 $d \to \infty$ 时，该下界接近最优。

▶**定理8**。存在某个函数 $f(d) = d/3 + 2\sqrt{d}/9 - o(\sqrt{d})$，使得对所有 $d \geq 3$，都有 $\gamma_d \geq f(d)$。

通过展示如何以恰当的方式扩展射影平面覆盖设计，我们得到了这个下界，从而为所有 d 值构造出强前缀覆盖设计。

根据上述定理，我们得到了 Klee测度问题及相关问题的 $n^{d/3+2/9\sqrt{d}-o(\sqrt{d})}$ 条件下界。注意，Chan从 K-团 [18] 得到的归约可以解释为：假设当前的 K-团算法是最优的，则下界为 $n^{(\omega/6)d-o(1)}$。如果 $\omega = 2$，那么这无法给出高于 $n^{d/3-o(1)}$ 的下界。

表1还列出了 Klee测度问题和深度问题相应的上界 $O(n^{d/2})$，以供比较。$\mathbb{R}^d$ 中最大体积/最大周长空（锚定）盒问题的差距稍大一些：对于 $\sim$ 的锚定版本，Chan [21] 得到了上界[4]$\mathcal{O}(n^{d/3+\lfloor d/2 \rfloor/6}) \leq \tilde{\mathcal{O}}(n^{5d/12})$，其中 $d \geq 4$。特别地，这分别给出了 $d = 6$、$d = 8$ 和 $d = 10$ 的上界 $\tilde{\mathcal{O}}(n^{2.5})$、$\tilde{\mathcal{O}}(n^{3.3334})$ 和 $\tilde{\mathcal{O}}(n^{4.1667})$；而对于偶数 $d \geq 6$，我们给出了条件下界 $n^{\gamma_{d/2}-o(1)}$，由此分别得到 $d = 6$、$d = 8$ 和 $d = 10$ 的下界 $n^{1.5-o(1)}$、$n^{1.9047-o(1)}$ 和 $n^{2.2222-o(1)}$。一个有趣的问题是：我们能否针对任何 d 证明高于 $n^{d/4-o(1)}$ 的下界，或者进一步改进 Chan的算法?

相关工作 自20世纪70年代以来，Klee测度问题一直受到广泛研究 [33, 10,27, 41, 40, 18, 19, 34], ，其中包括在各种特殊情形下优于 $n^{d/2\pm o(1)}$ 的算法，例如 [4, 11, 3, 12, 43, 13]。

轴平行盒的深度问题与Klee测度问题密切相关，通常也适用类似的算法思想，特别参见 [19]。

寻找最大体积空轴平行盒最初主要是在二维中得到研究（例如，参见 [39, 22, 5]）。在更高维度中，Backer 和 Keil [7] 给出了一个$\tilde{\mathcal{O}}(n^d)$ 算法，Chan [21]最近将其改进为 $\tilde{\mathcal{O}}(n^{(5d+2)/6})$。请注意

[4] 虽然 Chan 关注的是最大体积空盒问题，但他指出，他针对 $d \geq 4$ 的算法也适用于最大周长版本，参见 [21, 第 5] 节。

d	上界	此前已知的下界	SAT 求解器下界	覆盖设计下界
3	1.5	1.5		1.5
4	2	1.7777	1.9047	1.8461
5	2.5	2.0833	2.2222	2.1929
6	3	2.4		2.5714
7	3.5	2.7222		3
8	4	3.0476		3.3333
9	4.5	3.375		3.6818
10	5	3.7037		4.0540

表1 Klee测度问题和 $\mathbb{R}^d$ 中的深度问题在 $d \leq 10$下的上界及条件下界的指数。上界列基于 $n^{d/2\pm o(1)}$时间算法 [40, 18, 19], ; 条件下界基于3-一致超团假设，分别来自 [34] （第3列）、定理5（第4列），以及将定理 7 与 D. Gordon 维护的 La Jolla 覆盖数据库中的覆盖设计相结合所得结果 [29] （第5列）。

我们的下界对于该问题的锚定版本最有意义，该版本可在更短的运行时间内求解 $\widetilde{\mathcal{O}}(n^{5d/12})$ [21]。文献 [26] 中给出了近似算法。Giannopoulos 等人 [28] 给出了一个从 d-团出发的归约；若假设当前的团算法已达到最优，则可将其理解为一个 $n^{(\omega/12)d-o(1)}$ 下界。

2 构造

本节中，我们证明将覆盖设计转化为前缀覆盖设计的一般性结果（定理 7）。其余关于构造前缀覆盖设计的证明和细节将在附录的 B 节中给出。

对于一个具有序列 $s_1, s_2, \ldots, s_d$ 的 (d, K, α) 前缀覆盖设计（PCD），我们称元素 $s_1[i], s_2[i], \ldots, s_d[i]$ 为该 PCD 的第 i 层级。

分析这类前缀覆盖设计时，区分某个元素的“首次”出现（我们称之为主 元素）和所有其他出现（我们称之为副本）会很有帮助。若 $1 \leq i \leq d$, $1 \leq \ell$，且 s_i 中存在第 ℓ 个元素，我们称一对 (i, ℓ) 为一个位置。

▶ **定义 9**。 对于任意前缀覆盖设计 $s_1, \ldots, s_d$，当且仅当 $s_i[\ell] = x$ 且对于每个满足字典序中 (ℓ', i') 先于 (ℓ, i) 的其他位置 (i', ℓ')， $s_{i'}[\ell'] \neq x$ ，我们称位置 (i, ℓ) 为值 x $(1 \leq x \leq K)$ 的主位置 。

其他每次出现的(i', ℓ') 且满足 $s_{i'}[\ell'] = x$ 的情况称为 x的一个副本 。

请注意，如果 (i, ℓ) 是值为 x的主位置，那么 $\ell = \ell_{\min}(x)$。

▶ **定义 10**。 一种(v, k, t) 覆盖设计，其中 $v \geq 2$, $k \geq t \geq 1$ 是由 $[v]$ 的k元子集组成的集合（称为块），且每个 t元子集都包含在至少一个块中。

在下面的证明中，我们将大量使用 (v, k, t) 覆盖设计来处理 $t = 2$。因此，每一对元素都至少包含在一个块中。

s_1	8	9	10	1	2	3
s_2	11	12	13	4	1	5
s_3	14	15	16	7	1	6
s_4	17	18	19	6	2	4
s_5	20	21	22	2	5	7
s_6	23	24	25	3	4	7
s_7	26	27	28	5	3	6

图1 由一个含有7个块的（7, 3,2）覆盖设计构造（7, 28, 10）PCD的示例。

定理 7 的证明。考虑一个由 d 个块组成的 $(v, k, 2)$ 覆盖设计，其中v可被 d 整除，并令 $v' := \frac{v}{d} \in \mathbb{N}$。将此覆盖设计的各块定义为 $B_1, B_2, \ldots, B_d$。假设存在集合 $U_1 \subseteq B_1$, $U_2 \subseteq B_2, \ldots, U_d \subseteq B_d$，使得$|U_1| = |U_2| = \ldots = |U_d| = v'$，且 $U_1, U_2, \ldots, U_d$ 划分 $[v]$。那么我们将证明，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 K 和 α，使得 $\frac{K}{\alpha} \geq \frac{d}{3-2\frac{v}{kd}} - \varepsilon$，并且存在 (d, K, α) PCD。由此，通过取极限，我们便自动得到 $\gamma_d \geq \frac{d}{3-2\frac{v}{kd}}$。

首先，我们给出一个稍差的构造 n.

对给定覆盖设计的各块内元素进行排序，使得U_i 的元素位于 B_i的前 v' 个位置，即$\{B_i[j] \mid 1 \leq j \leq v'\} = U_i$。为构造我们的PCD序列，我们取覆盖设计中的这些块，并在每个序列前添加 k 个新的不同元素。换言之，所得PCD包含序列 s_1、s_2、…、s_d，每个序列长度为 $2k$，且 $s_i[j] = v + (i-1) \cdot k + j$对 $j \leq k$ 成立，而 $s_i[j] = b_i[j-k]$ 对 $j > k$成立。图1给出了 $d = 7$ 的一个示例。我们将证明，这样可以得到一个（d, K,{v33>）PCD，其中 $K = (v' + k)d$ 且 $\alpha \leq 3k + v'$。

来自覆盖设计的元素有 $v'd$ 个，我们添加了 kd 个额外的唯一元素，因此 $K = (v' + k)d$。还需检查 $\alpha \leq 3k + v'$。

首先，我们检查单元素条件。由于覆盖设计中块的排序方式，所有元素的所有主位置都位于前 $k + v'$ 层，因此对于每个元素 x，$\ell_{\min}(x) \leq k + v'$。同时，每个序列总共有 $2k$ 个元素，因此$\ell_{\max}(x) \leq 2k$。于是，对于每个 $x \in [K]$，$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq (k + v') + 2k = 3k + v'$。

其次，我们检查三元组条件。假设我们选取了三个元素 a、b 和 c。分别将它们的主位置定义为 (i_a, ℓ_a)、(i_b, ℓ_b) 和 (i_c, ℓ_c)。不失一般性，假设 $\ell_a \leq \ell_b \leq \ell_c$。考虑两种情况。

1. 如果这三者中至多只有一个元素属于覆盖设计，那么 $\ell_a \leq k$，$\ell_b \leq k$ 和 $\ell_c \leq k + v'$，因此我们可以用前缀 $s_{i_a}[..\ell_a]$，$s_{i_b}[..\ell_b]$ 和 $s_{i_c}[..\ell_c]$覆盖它们，总大小为 $\ell_a + \ell_b + \ell_c \leq k + k + (k + v') = 3k + v'$。

2. 如果这三者中至少有两个元素属于覆盖设计，那么 b 和c 属于覆盖设计。根据覆盖设计的定义，应该存在一个序列 s_i 同时包含 b 和 c。因此，我们可以用两个前缀覆盖所有三个元素：$s_i[..2k]$（整个序列）和 $s_{i_a}[..\ell_a]$，总大小为 $2k + \ell_a \leq 2k + (k + v') = 3k + v'$。

这就完成了证明，证明了 $\alpha \leq 3k + v'$，并已给出界 $\gamma_d \geq \frac{K}{\alpha} \geq \frac{(k+v')d}{3k+v'} = \frac{d}{3} \cdot \frac{3k+3v'}{3k+v'} = \frac{d}{3} \cdot \left(1 + \frac{2v'}{3k+v'}\right) = \frac{d}{3} \cdot \left(1 + \frac{2v}{3dk+v}\right)$。

为了改进这一构造，我们将覆盖设计复制 n 次，其中 n 为某个正整数。定义 B_i^j 为 $1 \leq i \leq d$，并将 $1 \leq j \leq n$ 定义为覆盖设计第 j 个副本中的第 i 个块。我们希望覆盖设计的不同副本使用不同的

s_1	22	23	24	25	26	27	28	1	8	15	19	20	12	13	5	6
s_2	29	30	31	32	33	34	35	2	9	16	15	21	8	14	1	7
s_3	36	37	38	39	40	41	42	3	10	17	15	18	8	11	1	4
s_4	43	44	45	46	47	48	49	4	11	18	19	16	12	9	5	2
s_5	50	51	52	53	54	55	56	5	12	19	21	17	14	10	7	3
s_6	57	58	59	60	61	62	63	6	13	20	16	17	9	10	2	3
s_7	64	65	66	67	68	69	70	7	14	21	20	18	13	11	6	4

图 2 通过缩放构造得到的一个 (7，70，24) 前缀覆盖设计示例，其中包含 $v = 7\,(v' = 1)$、$k = 3$、$d = 7$ 和 $n = 3$。

元素，因此 B^j 的 v 个元素为 $\{(j-1)v+1, \ldots, jv\}$。定义 U_i^j 为 B_i^j 的 v' 元子集，使得 $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_d^j$ 划分 $\{(j-1)v+1, \ldots, jv\}$。定义 $R_i^j := B_i^j \setminus U_i^j$ 为每个块中剩余的 $k - v'$ 个元素。此外，对于 PCD 中的每个序列，我们定义 $m := nk - (n-1)v'$ 个唯一元素，并将它们放在该序列的开头。将序列 i 的这些唯一元素记为 A_i ($A_i = \{nv + (i-1)m + 1, \ldots, nv + im\}$)。现在，我们可以通过以下方式构造前缀覆盖设计中的序列 $s_1, \ldots, s_d$：

$$s_i = (A_i, U_i^1, U_i^2, \ldots, U_i^n, R_i^n, R_i^{n-1}, \ldots, R_i^1).$$

图 2 给出了此类构造的一个示例。

我们将证明，此类 PCD 满足 $K = (nk + v')d$ 和 $\alpha \le 3nk - (2n-3)v'$，这与较简单构造的证明类似。首先，每个覆盖设计中有 $v'd$ 个元素，并且共有 n 个设计，因此覆盖设计中的元素总数为 $nv'd$。此外，我们还添加了 $md = nkd - (n-1)v'd$ 个唯一元素，因此确有 $K = (nk + v')d$。剩下需要验证的是 $\alpha \le T$，其中 $T := 3nk - (2n-3)v'$。我们将用到 $T = 2m + nk + v' = 3m + nv'$。

首先，我们检查单元素条件。由于我们对覆盖设计的块进行了排序，所有元素的主位置都位于前 $m + nv'$ 层，因此对于每个元素 x，都有 $\ell_{\min}(x) \le m + nv'$。如果 $\ell_{\min}(x) \le m$，则该元素只出现一次，无需检查它是否满足单元素条件。如果对于某些 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le v'$，有 $\ell_{\min}(x) = m + (n-i)v' + j$，则这意味着元素 x 属于第 $(n-i+1)$ 个覆盖设计，其余出现位置位于从 $m + nv' + (i-1)(k-v') + 1$ 到 $m + nv' + i(k-v')$ 的各层。因此，$\ell_{\max}(x) \le m + nv' + i(k-v')$。由此，$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \le (m + (n-i)v' + j) + (m + nv' + i(k-v')) = 2m + 2nv' + i(k-2v') + j \le 2m + 2nv' + n(k-2v') + v' = 2m + nk + v' = T < T + 1$，其中我们利用了以下引理所给出的事实：$k - 2v' = k - 2\frac{v}{d} \ge 0$。我们甚至证明了一个稍强的不等式：

$$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \le T. \tag{1}$$

▶ **引理 11.** 对于每个 $(v, k, 2)$ 覆盖设计，若其有 $d \ge 2$ 个区块，则 $k \ge 2v/d$ 成立。

引理证明。 如果 $k < v$，那么每个元素 $x \in [v]$ 都应至少出现在两个集合中：否则，我们只能覆盖涉及 $k - 1 < v - 1$ 的元素对 x，这与它是覆盖设计这一事实矛盾。但如果每个元素都至少出现在两个集合中，那么所有集合大小之和 kd 至少为 $2v$。将两边同时除以 d，即可得到所需的不等式。

如果 $k \ge v$，那么 $k \ge v \ge 2\frac{v}{d}$，因为 $d \ge 2$。 ◁

其次，我们检查三元组条件。任取三个元素 a、b 和 c。分别将它们的主要位置定义为 (i_a, ℓ_a)、(i_b, ℓ_b) 和 (i_c, ℓ_c)。不失一般性，假设 $\ell_a \le \ell_b \le \ell_c$。分两种情况讨论。

10 Klee测度问题及相关问题的更高下界（$\mathbb{R}^d$，$d \geq 4$

1. 如果这三个元素中至多有一个来自覆盖设计，那么我们知道 $\ell_a \leq m$、$\ell_b \leq m$ 和 $\ell_c \leq m + nv'$，因此可以用前缀 $s_{i_a}[..\ell_a]$、$s_{i_b}[..\ell_b]$ 和 $s_{i_c}[..\ell_c]$ 覆盖它们，总大小为 $\ell_a + \ell_b + \ell_c \leq m + m + (m + nv') = 3m + nv' = T$。2. 如果这三个元素中至少有两个来自覆盖设计，那么 b 和 c 属于覆盖设计。根据覆盖设计的定义，存在一个序列 s_i，其中同时包含 b 和 c。[5] 于是，我们可以用两个前缀覆盖全部三个元素：$s_i[..\max(\ell_b^i, \ell_c^i)]$ 和 $s_{i_a}[..\ell_a]$，其中 ℓ_b^i 和 ℓ_c^i 分别是元素 b 和 c 在序列 i 中的位置。我们已经知道元素 b 和 c 满足 (1)。由此可得 $\ell_a + \ell_b^i \leq \ell_b + \ell_b^i \leq T$ 和 $\ell_a + \ell_c^i \leq \ell_c + \ell_c^i \leq T$。因此可以得出 $\ell_a + \max(\ell_b^i, \ell_c^i) \leq T$，这正是所需结果。

至此，$\alpha \leq T = 3nk - (2n-3)v'$的证明完成。该构造给出了界 $\gamma_d \geq \frac{K}{\alpha} \geq \frac{nk+v'}{3nk-(2n-3)v'} = \frac{(k+\frac{v'}{n})}{3k-(2-\frac{3}{n})\frac{v'}{n}}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 可以任意选取。当 n 趋于无穷时，该值趋于 $\frac{d}{3-2\frac{v}{kd}} = \frac{kd}{3k-2v'} = \frac{d}{3-2\frac{v'}{k}}$。因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 n，使得这样的构造给出 $\frac{K}{\alpha} \geq \frac{d}{3-2\frac{v}{kd}} - \varepsilon$，如所需。◀

如果一个含有 d 个块的（v，k，2）覆盖设计满足以下条件，我们就称其具有多重匹配：对于每个块 B_i，都可以选取一个大小为 v/d 的子集 U_i，使得 U_1，U_2，…，U_d 划分 $[v]$。下面的观察表明，在定理 7 中，假设 v 能被 d 整除并不构成限制，因为我们总能适当地缩放覆盖设计：

▶ **观察12**。每个有 d 个块的 $(v, k, 2)$ 覆盖设计，都可以通过将每个包含 v 个元素的块替换为包含 d 个不同元素的块，转化为有 d 个块的 $(vd, kd, 2)$ 覆盖设计。$_d$ 如果这个缩放后的覆盖设计存在多重匹配，我们就能得到 γ_d 的下界：$\frac{d}{3-2\frac{v}{(kd)d}} = \frac{d}{3-2\frac{v}{(vd)(kd)}}$。

我们给出的界取决于是否存在具有多重匹配的特定覆盖设计。在 B 节中，我们将这个下界转化为一个仅取决于 d 的一般下界；在表3中，我们列出了针对 d 的特定取值所得到的界。这些取值的求法如下：固定 d 的值后，可以通过寻找使 $\text{freq} := \frac{kd}{v}$ 最小的覆盖设计，得到最佳下界；我们将其称为频率（对于固定的覆盖设计，频率是各元素出现次数的平均值）。我们在 La Jolla 覆盖数据库中搜索覆盖设计 [29]，，将块数固定为 d，并选取频率最低的设计。随后，我们根据观察12将这些覆盖设计中的元素数和集合大小乘以 d（因为定理 7 仅适用于 v 可被 d 整除的覆盖设计），并检查它们是否存在多重匹配。或许令人惊讶的是，对于我们检验过的所有 d 的特定取值，所得覆盖设计确实都存在多重匹配。所用的覆盖设计及其多重匹配可在 [1] 中找到，其中还附有一个计算机程序，用于检查给定的构造是否确实为覆盖设计，以及它们是否确实存在多重匹配。

问题仍然是：某个维度 d 下的频率能否由一种不 允许多重匹配的覆盖设计达到最小。事实上，可以构造出不允许多重匹配的覆盖设计。然而，由于我们的目标是使频率最小，因此我们考虑的覆盖设计应当具有相对较小的冗余度——否则，它们很可能还可以改进。在 B 节中，我们提出相应的猜想：“足够好的”覆盖设计总是允许

[5] b 和 c 可能属于我们覆盖设计的不同副本，但所有副本都是相同的，因此所有覆盖设计中的等价元素都出现在相同的序列中，所以这样的 s_i 确实应该存在。

多重匹配，并讨论了一些支持这一猜想的证据。我们还给出了基于不允许多重匹配的覆盖设计所得到的较弱界。

3 界限

在本节中，我们证明前缀覆盖设计的界限，即 $\gamma_d = \sup\{\frac{K}{\alpha} \mid$ 存在一个 (d, K, α) 前缀覆盖设计$\}$的上界。关于 $\gamma_4 < 2$ 的证明推迟至附录的 C 节。

以下引理形式化了这样一种直觉：增大 K 的值，只会带来更好的（更准确地说，不会更差的）前缀覆盖设计。

▶ **引理 13** (缩放引理)。 对于每个(d, K, α) *PCD* 和正整数 $\lambda \in \mathbb{N}$，还存在一个$(d, \lambda \cdot K, \lambda \cdot \alpha)$ *PCD*。

这一事实的证明推迟至附录的 C 节。

命题4的证明。 对于固定的 $(d,\ K,\ \alpha)$ PCD 定义 $g := \lceil \frac{K}{d} \rceil$。如果 $\alpha \geq 3g$那么 $\frac{K}{\alpha} \leq \frac{K}{3g} \leq \frac{K}{3K/d} = \frac{d}{3}$命题陈述成立。否则定义 $a := \lceil g - \frac{\alpha}{3} \rceil \geq 1$，即$3(g-a) \leq \alpha < 3(g-a+1)$。我们将证明 $a < \sqrt{\frac{2}{d}} + 2$。如果 $a = 1$，则结论成立，因此从现在起我们假设 $a \geq 2$。

定义 B 为所有满足 $\ell_{\min}(x) > g-a$ 的元素 x 的集合。我们声称 $|B| \geq d(a-1)$：在所有 s_i 中，前 $(g-a)$ 个位置上的（不一定互不相同的）元素数量为$d \cdot (g-a) = dg - da < d \cdot (\frac{K}{d} + 1) - da = K - d(a-1)$。由于总共有 K 个不同的数，因此该断言成立。

为了证明该命题，我们将定义一个图 G_B，其顶点集为 B。当且仅当存在某个序列 s_i 同时包含元素 x、$y \in B$、x 和 y时，我们就在这两个元素之间连一条边。通过证明边数的上界和下界，我们便可得到所需结果。

为了给边数建立一个下界，考虑三元组$\{a, b, c\} \in \binom{B}{3}$如何由前缀覆盖：对于任意这样的三元组$\{a, b, c\}$，存在前缀 $s_i[..\ell]$、$s_{i'}[..\ell']$和 $s_{i''}[..\ell'']$，它们分别包含 a、b和 c，并满足 $\ell + \ell' + \ell'' \leq \alpha$。

▷ 断言14. 不失一般性，我们可以假设 ℓ、ℓ' 和 ℓ'' 中至少有一个为零。

证明。如果它们都至少为 $g-a+1$，那么 $\ell + \ell' + \ell'' \geq 3(g-a+1) > \alpha$，这就导出了矛盾。否则，如果其中至少有一个至多为 $g-a$，那么该前缀就不可能包含 a、b和 c，因为 $\ell_{\min}(a)\ \ell_{\min}(b)\ \ell_{\min}(c) > g-a$。不失一般性，我们可以将该前缀设为空前缀。◀

因此，我们确实可以设想，B 中的元素三元组只需用两个前缀覆盖，而非三个。特别是，对于来自 B的每个元素三元组，其中至少两个必须出现在同一个序列中，也就是说，它们在 G_B中必须有一条边。换言之，G_B 的补图是无三角形的，因此根据曼特尔定理 [37]（图兰定理的一个特例），其中至多包含 $|B|^2/4$ 条边。由此可得，G_B 至少有 $\binom{|B|}{2} - \frac{|B|^2}{4} = \frac{|B|^2 - 2|B|}{4} \geq \frac{(|B|-2)}{4}^2$ 条边，因为 $|B| \geq 2$。

现在我们证明，边的数量至多为 $dg^2/2$ 或 $|B| \leq 2g$。我们要问，序列中的哪些位置可以放置来自 B 的元素。我们知道，对于任意 $x \in B$，$\ell_{\min}(x) \geq g-a+1$。与此同时，如果某个来自 B 的元素位于位置 $\geq 2(g-a)+3$（在某个序列 i 中），那么它必定只出现一次，否则就会违反单元素条件。此外，任何包含此类元素的三元组覆盖都不能在其他序列中包含来自 B 的元素，因为

这会要求序列 i 中长度至少为 $2(g-a)+3$ 的前缀，以及某个其他序列中长度至少为 $g-a+1$ 的前缀，从而违反三元组条件。据此我们可以得出结论：如果包含此元素且其他元素来自 B 的每个三元组都被覆盖，那么来自 B 的所有元素都必须出现在序列 i 中。我们可以假设所有元素的索引至多为 α（否则，它们对覆盖没有用处），因此该序列中来自 B 的元素至多有 $\alpha - (g-a) \leq 2g$ 个。这就得到 $|B| \leq 2g$。在剩余情况下，所有 $x \in B$ 都满足 $\ell_{\max}(x) \leq 2(g-a)+2$，且 $\ell_{\min}(x) > (g-a)$，因此每个序列中来自 B 的元素至多有 $g-a+2 \leq g$ 个。因此，来自 B、且出现在同一序列中的元素对至多有 $d \cdot \binom{g}{2}$ 个。

根据上述边数的下界和上界，我们推导出

$$\frac{(|B|-2)^2}{4} \leq d \cdot \binom{g}{2} < \frac{dg^2}{2}.$$

结合 $d(a-1) \leq |B|$ 这一事实，我们推得 $d(a-1) - 2 \leq |B| - 2 < \sqrt{2d}g$。（注意，在 $|B| \leq 2g$ 的情况下，上界显然成立，因为 $d \geq 2$。）因此，

$$a < \frac{\sqrt{2d}g+2}{d} + 1 \leq \sqrt{\frac{2}{d}}g + 2$$

对于 $d \geq 2$。我们将这个不等式代入关于 α 的初始不等式：

$$\alpha \geq 3(g-a) > 3g\left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}} - \frac{2}{g}\right) \geq \frac{3K}{d}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}} - \frac{2}{g}\right).$$

由此可得

$$\frac{K}{\alpha} \leq \frac{K}{\frac{3K}{d}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}} - \frac{2}{g}\right)} = \frac{d}{3 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}} - \frac{2}{g}\right)}.$$

由于缩放引理 13，我们知道，如果存在一个 $(d,\ K,\ \alpha)$ PCD，那么对于每个正整数 λ，也存在一个 $(d,\ K \cdot \lambda,\ \alpha \cdot \lambda)$ PCD。若将这个覆盖设计代入上面的不等式，我们将得到

$$\frac{K}{\alpha} = \frac{\lambda \cdot K}{\lambda \cdot \alpha} \leq \frac{d}{3 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}} - \frac{2}{g'}\right)}$$

其中 $g' := \left\lceil \frac{K \cdot \lambda}{d} \right\rceil$。若取 $\lambda \to +\infty$，则 $\frac{2}{g'} \to 0$，在极限情况下，我们得到所需的 $\frac{K}{\alpha}$ 上界：

$$\frac{K}{\alpha} \leq \frac{d}{3 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}}\right)} = \frac{d}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{2}{d}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{d}}}\right) = \frac{d}{3} + \frac{\sqrt{2d}}{3\left(1 - \sqrt{\frac{2}{d}}\right)} = \frac{d}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{d} + o(\sqrt{d}). \blacktriangleleft$$

4 结论与展望

在这项工作中，我们在为 $d \geq 4$ 的 Klee测度问题及相关问题获得紧的条件下界方面取得了进展。我们给出了改进的下界，使 $d=4$、$d=5$ 和 $d=6$ 的差距分别仅为 $O(n^{0.09524})$、$O(n^{0.27778})$ 和 $O(n^{0.4286})$。

在负面方面，我们证明，通过前缀覆盖设计和命题 2 所采用的证明技术——尽管它能为 $d = 3$ 得出紧的下界——却无法为 $d \geq 4$ 得出紧的下界，因此，要解决这一问题，需要一种新颖的归约方法。当然，仍然存在一种令人振奋的可能性：对于高维 $d \geq 4$，Klee测度问题的 $n^{d/2 \pm o(1)}$ 运行时间可以被突破。

我们认为，本研究形式化的前缀覆盖设计本身就很有趣。我们通过构建一个将 2-覆盖设计转化为前缀覆盖设计的框架，建立了它与研究成熟的覆盖设计之间的联系。这种联系导出了渐近界 $\gamma_d = \frac{d}{3} + \Theta(\sqrt{d})$，从而为 Klee测度问题及相关问题给出了一个 $n^{d/3+\Theta(\sqrt{d})}$ 条件下界，优于此前的界 $n^{d/3 \mp 1/3 + \Omega(1/d)}$。

参考文献

1 《组合设计与超团相遇：Klee测度问题及维度 $d \geq 4$ 中相关问题的更高下界》的代码与构造。 https://github.com/Peltorator/klees-measure-lower-bounds-repo。 2 Amir Abboud、Karl Bringmann、Holger Dell 和 Jesper Nederlof。证伪 SETH 和正交向量猜想的更多推论。载于 Ilias Diakonikolas 、 David Kempe 和 Monika Henzinger 编，ACM SIGACT 第 50 届年度计算理论研讨会论文集（STOC 2018），第 253–266 页。ACM，2018年。 doi:10.1145/3188745.3188938。 3 Pankaj K. Agarwal。一种改进的立方体并集体积计算算法。载于 David G. Kirkpatrick 和 Joseph S. B. Mitchell 编，第26届 ACM 计算几何研讨会论文集，美国犹他州 Snowbird，2010年6月13日至16日，第 230–239 页。ACM，2010年。 doi:10.1145/1810959.1811000。 4 Pankaj K. Agarwal、Haim Kaplan 和 Micha Sharir。计算立方体并集的体积。载于 Jeff Erickson 编，第23届 ACM 计算几何研讨会论文集，韩国庆州，2007年6月6日至8日，第 294–301 页。ACM，2007年。 doi:10.1145/1247069.1247121。 5 Alok Aggarwal 和 Subhash Suri。计算最大空矩形的快速算法。载于 D. Soule 编，第三届年度计算几何研讨会论文集，加拿大安大略省滑铁卢，1987年6月8日至10日，第 278–290 页。ACM，1987年。 doi:10.1145/41958.41988。 6 Haozhe An、Mohit Gurumukhani、Russell Impagliazzo、Michael Jaber、Marvin Künnemann 和 Maria Paula Parga Nina。多维序性质的细粒度复杂性。《Algorithmica》，84(11):3156–3191，2022年。 doi:10.1007/s00453-022-01014-x。 7 Jonathan Backer 和 J. Mark Keil。所有维度中的单色与双色空矩形及正方形问题。载于 Alejandro López-Ortiz 编，LATIN 2010：理论信息学，第9届拉丁美洲研讨会，墨西哥瓦哈卡，2010年4月19日至23日，论文集，《计算机科学讲义》第 6034 卷，第 14–25 页。施普林格，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-12200-2_3。 8 Arturs Backurs、Nishanth Dikkala 和 Christos Tzamos。最大权重矩形的紧确困难性结果。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Michael Mitzenmacher、Yuval Rabani 和 Davide Sangiorgi 编，第43届国际自动机、语言与程序设计研讨会（ICALP 2016），2016年7月11日至15日，意大利罗马，《LIPIcs》第 55 卷，第 81:1–81:13 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2016年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2016.81。 9 Jérémy Barbay、Timothy M. Chan、Gonzalo Navarro 和 Pablo Pérez-Lantero。 $o(n^2)$ 时间内的最大权重平面盒子问题（及更优算法）。《信息处理快报》，114(8):437–445，2014年。doi:10.1016/j.ipl.2014.03.007。 10 J. L. Bentley。Klee 矩形问题的算法。卡内基梅隆大学计算机科学系，未发表笔记，1977年。

14 Klee测度问题及相关问题的更高下界（$\mathbb{R}^d, d \geq 4$）

11 Nicola Beume、Carlos M. Fonseca、Manuel López-Ibáñez、Luís Paquete 和 Jan Vahrenhold。计算超体积指标的复杂性。IEEE进化计算汇刊，13(5):1075–1082，2009年。 doi:10.1109/TEVC.2009.2015575。 12 Karl Bringmann。一种针对胖盒的 Klee测度问题改进算法。《计算几何》，45(5-6):225–233，2012年。 doi:10.1016/j.comgeo.2011.12.001。 13 Karl Bringmann。为 Klee测度问题的特殊情形理清脉络。载于 Krishnendu Chatterjee 和 Jirí Sgall 编，2013年计算机科学数学基础——第38届国际研讨会（MFCS 2013），奥地利克洛斯特新堡，2013年8月26日至30日，论文集，《计算机科学讲义》第 8087 卷，第 207–218 页。施普林格，2013年。 doi:10.1007/978-3-642-40313-2_20。 14 Karl Bringmann、Nick Fischer 和 Marvin Künnemann。P 中 Schaefer 定理的细粒度类比： $\exists^k \forall$量化的一阶图性质的二分性。载于 Amir Shpilka 编，第34届计算复杂性会议论文集（CCC 2019），《LIPIcs》第 137 卷，第 31:1–31:27 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2019年。 doi:10.4230/LIPIcs.CCC.2019.31。 15 Karl Bringmann、Sándor Kisfaludi-Bak、Marvin Künnemann、André Nusser 和 Zahra Parsaeian。迈向几何相交图的次二次直径计算。载于 Xavier Goaoc 和 Michael Kerber 编，第38届计算几何国际研讨会（SoCG 2022），2022年6月7日至10日，德国柏林，《LIPIcs》第 224 卷，第 21:1–21:16 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.21。 16 Karl Bringmann 和 Marvin Künnemann。对 c- 胖曲线上的弗雷歇距离进行改进近似，并匹配条件下界。《国际计算几何与应用杂志》，27(1-2):85–120，2017年。 doi:10.1142/S0218195917600056。 17 Nofar Carmeli、Shai Zeevi、Christoph Berkholz、Benny Kimelfeld 和 Nicole Schweikardt。使用随机访问和随机顺序枚举回答合取查询（的并集）。载于 Dan Suciu、Yufei Tao 和 Zhewei Wei 编，第39届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI 数据库系统原理研讨会论文集（PODS 2020），美国俄勒冈州波特兰，2020年6月14日至19日，第 393–409 页。ACM，2020年。 doi:10.1145/3375395.3387662。 18 Timothy M. Chan。一种（略快的）Klee测度问题算法。《计算几何》，43(3):243–250，2010年。 doi:10.1016/j.comgeo.2009.01.007。 19 Timothy M. Chan。轻松解决 Klee测度问题。载于 IEEE第54届计算机科学基础年会（FOCS 2013），2013年10月26日至29日，美国加利福尼亚州伯克利，第 410–419 页。IEEE计算机学会，2013年。 doi:10.1109/FOCS.2013.51。 20 Timothy M. Chan。中等维度中的正交范围搜索：k-d树和范围树卷土重来。《离散与计算几何》，61(4):899–922，2019年。 doi:10.1007/s00454-019-00062-5。 21 Timothy M. Chan。更快的最大空矩形和盒子算法。载于 Kevin Buchin 和 Éric Colin de Verdière 编，第37届计算几何国际研讨会（SoCG 2021），2021年6月7日至11日，美国纽约州布法罗（线上会议），《LIPIcs》第 189 卷，第 24:1–24:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2021.24。 22 Bernard Chazelle、Robert L. (Scot) Drysdale III 和 D. T. Lee。计算最大空矩形。《SIAM计算杂志》，15(1):300–315，1986年。 doi:10.1137/0215022。 23 Mina Dalirrooyfard 、 Ce Jin 、 Virginia Vassilevska Williams 和 Nicole Wein。 n 对最短路径和全节点最短环的近似算法与困难性。载于 IEEE第63届计算机科学基础年会（FOCS 2022），第 290–300 页。IEEE，2022年。 doi:10.1109/FOCS54457.2022.00034。 24 Mina Dalirrooyfard 和 Virginia Vassilevska Williams。诱导环和路径比你想象的更难。载于 IEEE 第 63 届计算机科学基础年会（FOCS 2022），第 531–542 页。IEEE，2022年。 doi:10.1109/FOCS54457.2022.00057。

25 David P. Dobkin、David Eppstein 和 Don P. Mitchell。计算差异度及其在超采样模式中的应用。ACM 图形学汇刊，15(4):354–376，1996年。 doi:10.1145/234535.234536。26 Adrian Dumitrescu 和 Minghui Jiang。关于 n 个点中的最大空轴平行盒。Algorithmica，66(2):225–248，2013年。 doi:10.1007/s00453-012-9635-5。27 Michael L. Fredman 和 Bruce W. Weide。关于计算 u[ai, bi] 测度的复杂性。ACM通讯，21(7):540–544，1978年。 doi:10.1145/359545.359553。28 Panos Giannopoulos、Christian Knauer、Magnus Wahlström 和 Daniel Werner。高维差异度计算与 ε-网验证的困难性。复杂性杂志，28(2):162–176，2012年。 doi:10.1016/j.jco.2011.09.001。29 Daniel M. Gordon。La Jolla 覆盖数据库。 https://www.dmgordon.org/cover/。访问日期：2022年11月27日。30 Daniel M. Gordon、Greg Kuperberg 和 Oren Patashnik。覆盖设计的新构造。组合设计杂志，3:269–284，1995年。31 Daniel M. Gordon 和 Douglas R. Stinson。覆盖。载于 Charles J. Colbourn 和 Jeffrey H. Dinitz 编，《组合设计手册》。2006年。32 Albert E. Ingham。关于连续素数之间的差。数学季刊，1:255–266，1937年。33 Victor Klee。能否用少于 $O(n \log n)$ 步计算 $\bigcup_1^n [a_i, b_i]$ 的测度？美国数学月刊，84(4):284–285，1977年。34 Marvin Künnemann。Klee测度问题在三维中的一个紧（非组合）条件下界。载于第63届IEEE计算机科学基础年会（FOCS 2022），第555–566页。IEEE，2022年。 doi:10.1109/FOCS54457.2022.00059。35 Marvin Künnemann 和 Dániel Marx。比蛮力法更快地寻找小型满足赋值：从精细复杂性视角看布尔约束满足。载于 Shubhangi Saraf 编，第35届计算复杂性会议论文集（CCC 2020），LIPIcs第169卷，第27:1–27:28页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.CCC.2020.27。36 Andrea Lincoln、Virginia Vassilevska Williams 和 R. Ryan Williams。稀疏图中短环和短路径问题的紧困难性。载于 Artur Czumaj 编，第29届ACM-SIAM离散算法年会论文集（SODA 2018），2018年。 doi:10.1137/1.9781611975031.80。37 W. Mantel。问题28：H. Gouwentak、W. Mantel、J. Teixeira de Mattes、F. Schuh 和 W. A. Wythoff 的解答。载于《Wiskundige Opgaven》第10卷，第60–61页。1907年。38 W. H. Mills 和 R. C. Mullin。覆盖与装填。载于 J. H. Dinitz 和 D. R. Stinson 编，《当代设计理论：综述集》，第371–399页。Wiley，1992年。39 Amnon Naamad、D. T. Lee 和 Wen-Lian Hsu。关于最大空矩形问题。离散应用数学，8(3):267–277，1984年。 doi:10.1016/0166-218X(84)90124-0。40 Mark H. Overmars 和 Chee-Keng Yap。Klee测度问题的新上界。SIAM计算杂志，20(6):1034–1045，1991年。 doi:10.1137/0220065。41 Jan van Leeuwen 和 Derick Wood。d维空间中矩形范围的测度问题。算法杂志，2(3):282–300，1981年。 doi:10.1016/0196-6774(81)90027-4。42 Virginia Vassilevska Williams 和 Yinzhan Xu。针对结构性较弱矩阵的真正次立方最小加乘积及其应用。载于 Shuchi Chawla 编，《2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第12–29页。SIAM，2020年。 doi:10.1137/1.9781611975994.2。43 Hakan Yildiz 和 Subhash Suri。关于接地盒的Klee测度问题。载于 Tamal K. Dey 和 Sue Whitesides 编，《第28届ACM计算几何研讨会论文集》，美国北卡罗来纳州教堂山，2012年6月17日至20日，第111–120页。ACM，2012年。 doi:10.1145/2261250.2261267。

16 Klee测度问题及相关问题的更高下界 $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$

A 归约

本节中，我们给出从3-一致超团问题到所有所考虑问题的归约。

我们首先陈述 3-一致 K-超团问题，并采用一种众所周知与一般情形等价的 K-部图表述：

▶ 问题 15（3-一致 K-超团）。设 $K \geq 4$。给定一个 K-部 3-一致超图 $G = (V, E)$，即 V是顶点部 $V(1) \dots, V(K)$的不相交并集，每个部包含n 个节点，并且 $E \subseteq \binom{V}{3}$ 满足每条边都连接来自不同顶点部的 3 个顶点。任务是确定是否存在 $v_1 \in V(1) \dots, v_K \in V(K)$，使其构成一个$K$-团；也就是说，对于所有$\{i, j, k\} \in \binom{[K]}{3}$，都有$\{v_i, v_j, v_k\} \in E$。

众所周知，图中的 K-团问题可以在 $O(n^{(\omega/3)K})$时间内求解（只要 K 能被 3 整除），但对于 3-均匀 K-超团问题，目前尚无算法能以多项式因子将其暴力搜索运行时间$n^{K \pm o(1)}$降低。事实上，已知用于快速 K-团算法的代数方法无法用于 K-超团问题，详见 [36] 中的深入讨论。因此，人们提出了以下假设：

▶ **假设 16**（3-均匀 K-超团假设）。对于任何 $K \geq 4$ 和 $\varepsilon > 0$，都不存在一个运行时间为 $O(n^{K-\varepsilon})$的算法来解决 3-均匀 K-超团问题。

若能推翻 3-均匀 K-超团假设，就能为 Max3SAT [2, 36], 带来一种新颖的 $O(2^{(1-\varepsilon)n})$算法，并改进以解的大小 [35] 为参数的布尔约束满足问题算法，以及针对某些一阶性质 [14]的模型检验算法。该假设已被用于为各种问题给出强有力的条件下界，例如 [2, 36, 14, 42, 17, 6, 15, 24, 23]。

我们转向第一组问题：在覆盖问题中，输入为 n 轴平行盒 $A_1, \dots, A_n$和一个包围盒 B，问题是判断 $A_1, \dots, A_n$的并集是否等于 B。显然，这个问题是*Klee*测度问题的一个特例。后者的输入为 $A_1, \dots, A_n$，要求计算 $A_1, \dots, A_n$的并集的体积。最后，对于无权轴平行盒的深度问题，输入为 $A_1, \dots, A_n$，要求找出一个被最多个盒子包含的点，我们称其为 $A_1, \dots, A_n$ 的深度。不难看出（例如参见 [18]），覆盖问题可归约为包含 $n2^d$ 个盒子的深度问题：对于每个 A_i，计算一组 2^d 个盒子，使其覆盖 B中 A_i 的补集。这些盒子的深度至少为 n，当且仅当原覆盖问题是一个否实例。

因此，通过对覆盖问题进行高效归约，我们为 Klee测度问题和深度问题得到了相同的下界。以下命题隐含于三维 [34] 中 Klee测度问题和深度问题的紧条件下界：

▶ **命题 17**（隐含于 [34]）。设 $d, K, \alpha \in \mathbb{N}$，且存在一个（$d, K, \alpha$）前缀覆盖设计。除非 *3*-一致超团假设不成立，否则不存在 $\varepsilon > 0$ 使得存在一个 $O(n^{\frac{K}{\alpha}-\varepsilon})$ 时间算法来解决：

- 三维 $\mathbb{R}^d$ 中针对轴平行盒的覆盖问题。$\mathbb{R}^d$ 中针对无权轴
- 平行盒的深度问题。$\mathbb{R}^d$ 中针对轴平行盒的 *Klee*测度问题。
-

在给出证明之前，出于技术上的原因，我们先给出一个关于前缀覆盖设计的简单观察。

▶ **观察 18.** 设 $s_1, \ldots, s_d$ 是一个(d, K, α) 前缀覆盖设计。不失一般性，我们可以假设所有 s_i 的长度都相等，为 α。

证明。 设 $s'_1, \ldots, s'_d$ 表示按如下方式得到的前缀覆盖设计：(1) 删除所有满足 $s_i[\ell]$ 且 $\ell > \alpha$ 的元素；(2) 对于任意满足 s'_i 且 $|s_i| < \alpha$的序列，令 $s'_i[\ell] = s_1[1]$ 取$|s_i| < \ell \leq \alpha$。注意， $s'_1, \ldots, s'_d$的长度均为 α。不难验证，所得仍是一个(d, K, α) 前缀覆盖设计。 ◁

命题 17 的证明。 令 $s_1, \ldots, s_d$为一个 (d, K, α) 前缀覆盖设计。我们将 3-一致超图 K-超团问题归约为覆盖问题，方法如下：令 $G = (V, E)$ 表示一个具有顶点部 $V_{(1)} \ldots, V_{(K)}$的 K-部 3-一致超图。

令 L_1，……，L_d表示序列 s_1，……，s_d的长度，并令 $L \coloneqq \max_i L_i$。我们将指定一个包围盒为 $[0, U)^d$ 的覆盖问题实例，其中 $U \coloneqq n^L$。对于任意满足 $\ell \leq L$ 的元组 $v = (v[1]$，……，$v[\ell]) \in \{0$，……，$n\}^\ell$，我们定义

$$\mathrm{ind}(v) = v[1]n^{L-1} + v[2]n^{L-2} + \cdots + v[\ell]n^{L-\ell}.$$

因此，对于 v_1，……，$v_d \in \{0$，……，$n-1\}^L$，超立方体 $\prod_{i=1}^d [\mathrm{ind}(v_i), \mathrm{ind}(v_i) + 1)$ 划分了包围盒。对于任意子集 $X \subseteq [K]$，我们将 $f\colon X \to \{0$，……，$n-1\}$ 理解为：对每个 $x \in X$，选取 $V(x)$ 中第 $(f(x) + 1)$ 个顶点，记作 $v_{f(x)}^{(x)}$。对于任意满足 $\ell \leq L$ 的 $v = (v[1]$，……，$v[\ell]) \in \{0$，……，$n-1\}^\ell$，我们定义

$$\begin{aligned}
I_<(v) &= [\mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], 0), \quad \mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], v[\ell])),\\
I(v) &= [\mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], v[\ell]), \quad \mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], v[\ell]+1)),\\
I_>(v) &= [\mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], v[\ell]+1), \mathrm{ind}(v[1], \ldots, v[\ell-1], n)).
\end{aligned}$$

注意，对于任意 $v' \in \{0, \ldots, n-1\}^L$，区间 $[\mathrm{ind}(v'), \mathrm{ind}(v') + 1)$ 包含于 $I(v)$ 当且仅当 $v[1], \ldots, v[\ell]$ 与 $v'[1], \ldots, v'[\ell]$ 一致（否则二者不相交）。类似地，$[\mathrm{ind}(v'), \mathrm{ind}(v') + 1)$ 包含于 $I_<(v)$ 当且仅当 v' 和 v 在前 $\ell - 1$个位置 以及 $v'[\ell] < v[\ell]$上一致。对于 $I_>(v)$，也有类似的结论。对于空前缀$v = ()$，我们定义 $I(v) = [0, n^L)$。

我们将构造如下形式的盒子：对于任意互不相同的维度 $i_1, \ldots, i_k \in [d]$以及区间 $I_1, \ldots, I_k$，其中 $[0, U)$，我们定义检查盒 $B(i_1\colon I_1, \ldots, i_k\colon I_k) = J_1 \times \cdots \times J_d$，其中 $J_{i_1} = I_1, \ldots, J_{i_k} = I_k$，且 $J_i = [0, U)$ 对所有 $i \in [d] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ 均成立。

我们定义两类盒子。第一类是边检查盒。具体而言，对于任意 $\{a, b, c\} \in \binom{[K]}{3}$，我们将按如下方式构造一个盒子：根据前缀覆盖设计 $s_1, \ldots, s_d$ 的三元组条件，存在 $i, i', i'' \in [d]$ 和 $\ell, \ell', \ell'' \in \mathbb{N}_0$，使得出现在 $s_i[..\ell], s_{i'}[..\ell'], s_{i''}[..\ell'']$ 中的元素集合 X 满足 $a, b, c \in X$ 和 $|X| \leq \alpha$。对于任意函数 $f\colon X \to \{0, \ldots, n-1\}$，若 $\{v_{f(a)}^{(a)}(), v_{f(b)}^{(b)}(), v_{f(c)}^{(c)}()\} \notin E$，我们定义该边检查盒

$$\begin{aligned}
C_{a,b,c,f} = B(&i : I(f(s_i[1]), \ldots, f(s_i[\ell]))),\\
&i' : I(f(s_{i'}[1]), \ldots, f(s_{i'}[\ell']))),\\
&i'' : I(f(s_{i''}[1]), \ldots, f(s_{i''}[\ell'']))).
\end{aligned}$$

第二类盒子是一致性检查盒。具体来说，对于 $s_1, \ldots, s_d$中出现多次的任意 $x \in [K]$，我们执行以下操作。设$(i, \ell_{\min})$满足 $\ell_{\min}$在 $s_i[\ell_{\min}] = x$中取最小值。对于每个满足 $s_{i'}[\ell'] = x$的$(i', \ell') \neq (i, \ell_{\min})$，我们用$X_{i',\ell'}$ 表示出现在 $s_i[..\ell_{\min}], s_{i'}[..\ell']$中的元素。根据单元素条件，我们有$|X_{i',\ell'}| \leq \alpha$，

因为这些前缀的总长度为 $\ell_{\min} + \ell' \leq \ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq \alpha + 1$，且 x 同时出现在这两个前缀中。对于每个 $f\colon X \to \{0, \ldots, n-1\}$，我们构造一致性检查盒

$$\begin{aligned} C^{<}_{x,i',\ell',f} = B(&i : I(f(s_i[1]), \ldots, f(s_i[\ell_{\min} - 1]), f(x)) \\ &i' : I_{<}(f(s_{i'}[1]), \ldots, f(s_{i'}[\ell' - 1]), f(x))), \\ C^{>}_{x,i',\ell',f} = B(&i : I(f(s_i[1]), \ldots, f(s_i[\ell_{\min} - 1]), f(x)) \\ &i' : I_{>}(f(s_{i'}[1]), \ldots, f(s_{i'}[\ell' - 1]), f(x))). \end{aligned}$$

至此，归约的构造完成。

回想一下，超立方体 $\prod_{i=1}^{d}[\mathrm{ind}(v_i), \mathrm{ind}(v_i) + 1)$ 对于 $v_1, \ldots, v_d \in \{0, \ldots, n-1\}^L$ 划分了包围盒。我们称 $v_1, \ldots, v_d$ 为一致编码，如果对于每个满足 $s_i[\ell] = s_{i'}[\ell']$ 的 $(i, \ell), (i', \ell')$，都有 $v_i[\ell] = v_{i'}[\ell']$。注意，一致编码 $v_1, \ldots, v_d$ 与 $v^{(1)} \in V(1), \ldots, v^{(K)} \in V(K)$ 之间存在一个双射，定义方式是：对于每个满足 $s_i[\ell] = x$ 的 (i, ℓ)，令 $v^{(x)} = v^{(x)}_{v_i[\ell]}$。

我们声称，对于 $v_1、\ldots、v_d \in \{0、\ldots、n-1\}^L$，任意超立方体 $\prod_{i=1}^{d}[\mathrm{ind}(v_i), \mathrm{ind}(v_i) + 1)$ 都不会被构造出的盒子覆盖，当且仅当 $v_1、\ldots、v_d$ 给出了 G 中 K-超团的一致编码：

1. 任何不一致编码都会被相应的一致性检查盒覆盖：具体而言，设 $x \in [K],\ i',\ i'' \in [d]$ 和 $\ell' \geq \ell''$ 满足 $s_{i'}[\ell'] = s_{i''}[\ell''] = x$、$v_{i'}[\ell'] \neq v_{i''}[\ell'']$和 ℓ' 具有此性质且是极小的；也就是说，所有满足 $\ell < \ell'$ 的位置 $(i,\ \ell)$ 都是一致的。接着，令 $(i,\ \ell_{\min})$ 如一致性检查盒的定义中为x所选。注意，要么 $v_{i'}[\ell'] \neq v_i[\ell_{\min}]$，要么 $v_{i''}[\ell''] \neq v_i[\ell_{\min}]$；不失一般性，假设 $v_{i'}[\ell'] \neq v_i[\ell_{\min}]$。回顾一下，$X_{i',\ \ell'}$ 表示出现在 $s_i[..\ell_{\min}],\ s_{i'}[..\ell']$ 中的元素集合，并注意 $v_i[..\ell_{\min}],\ v_{i'}[..\ell' - 1]$ 是某个f的一致编码：$X_{i',\ \ell'} \to \{0,\ \ldots,\ n-1\}$。

反过来，很容易看出，所有一致编码对应的超立方体都不会被一致性检查盒覆盖。

2. 任何不构成超团的 $v^{(1)} \in V(1) \ldots, v^{(K)} \in V(K)$ 的一致编码，都会被相应的边检查盒覆盖：令 $\{a, b, c\} \in \binom{[K]}{3}$，使得 $\{v^{(a)}, v^{(b)}, v^{(c)}\} \notin E$，这表明 $v^{(1)}, \ldots, v^{(K)}$ 不构成超团。我们断言，相应的一致编码 $v_1, \ldots, v_d$ 会被边检查盒 $C_{a,b,c,f}$ 覆盖，其中 f 经过适当选择。具体而言，令 $s_i[..\ell], s_{i'}[..\ell'], s_{i''}[..\ell'']$ 表示根据三元组条件选取的前缀，令 X 表示这些前缀中出现的元素集合，并令 $f\colon X \to \{0, \ldots, n-1\}$ 由 $f(s_j[t]) = v_j[t]$ 定义，对所有 $(j, t) \in \{(i, 1) \ldots, (i, \ell), (i', 1) \ldots, (i', \ell'), (i'', 1) \ldots, (i'', \ell'')\}$ 均成立（对于一致编码 $v_1, \ldots, v_d$，该定义良好）。那么，超立方体 $\prod_{i=1}^{d}[\mathrm{ind}(v_i), \mathrm{ind}(v_i) + 1)$ 会被此边检查盒 $C_{a,b,c,f}$ 覆盖；该盒存在，因为 $\{v^{(a)}, v^{(b)}, v^{(c)}\} \notin E$。

反过来，不难看出，被某些边检查盒 $C_{a、b、c、f}$ 覆盖的一致编码，仅对应于满足$\{v^{(a)}、v^{(b)}、v^{(c)}\} \notin E$的顶点选择 $v^{(1)},\ \ldots\ldots,\ v^{(K)}$。

最后，我们得到条件下界：构造的边检查盒 $C_{a,b,c,f}$ 的数量至多为 $\binom{K}{3} n^{\alpha} = O(n^{\alpha})$，因为对于 $|X| \leq \alpha$，形式为 $f\colon\ X \to \{0, \ldots, n-1\}$ 的函数至多有 n^{α} 个。类似地，一致性检查盒 $C^{<}_{x,i',\ell',f}$ 和 $C^{<}_{x,i',\ell',f}$ 至多有 $O(n^{\alpha})$ 个，因为 x, i', ℓ' 有 $O(1)$ 种选择，而对于 $|X| \leq \alpha$，形式为 $f\colon\ X \to \{0, \ldots, n-1\}$ 的函数至多有 n^{α} 个。这些盒子可以在 $O(n^{\alpha})$ 时间内构造。因此，任何能在 $N^{\frac{K}{\alpha} - \varepsilon}(O)$ 时间内解决涉及 n^{α} 个 $N = O$ 盒子的覆盖问题的算法，都能在 $O(n^{K - \alpha\varepsilon})$ 时间内判定给定的 3-一致超团实例，从而推翻 3-一致超团猜想。

根据覆盖问题到 Klee测度问题和深度问题的已知归约，命题得证。◀

请注意，对于 Klee测度问题，上述归约实际上表明，即使在更弱的假设下，$n^{K/\alpha-o(1)}$ 下界也成立：在 3-一致超图中计数 K-超团需要时间 $n^{K-o(1)}$。

空盒问题

我们转而研究寻找不包含任何点的“大型”轴平行盒问题。具体而言，在最大体积空盒问题中，给定 $\mathbb{R}^d$ 中的一组 P n 个点以及一个包围盒 $B_0 = [0,U]^d$。任务是在 B_0 中找到一个最大体积的盒子 B，使其内部不包含 P 中的任何点。我们研究较简单的锚定 变体，其中盒子必须具有形式 $(0, b_1) \times (0, b_2) \times \cdots (0, b_d)$，也就是说，它以原点作为一个顶点。

同样，在最大周长空锚定盒问题中，输入相同，任务是找到一个形式为 $(0, b_1) \times (0, b_2) \times \cdots (0, b_d) \subseteq B_0$ 的盒子 B，其内部不包含 P中的任何点，并使$\cdots + b_d$最大。

我们将 [28] 中针对类似问题的思路推广，以利用前缀覆盖设计：

▶ **命题 19.** 设 $d, K, \alpha \in \mathbb{N}$，且存在一个$(d, K, \alpha)$ 前缀覆盖设计。除非 *3*-一致超团假设不成立，否则不存在 $\varepsilon > 0$，使得存在一个运行时间为 $O(n^{\frac{K}{\alpha}-\varepsilon})$ 的算法来解决：

- $\mathbb{R}^{2d}$ 中的最大周长空锚定盒问题。
- $\mathbb{R}^{2d}$ 中的最大体积空锚定盒问题。

证明。 我们给出一个类似于命题 17 的证明，使用了如下归约中的思路：d-团到双色矩形的归约，见 [28]。我们先给出最大周长空锚定盒问题的论证，随后说明最大体积空锚定盒问题所需的改动。

与 [28]，中一样，我们将 $\mathbb{R}^{2d}$ 视为二维子空间的乘积

$$\mathbb{R}_i^2 = \{(x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d) \mid x_j = y_j = 0, j \neq i)\} \subseteq \mathbb{R}^{2d}.$$

对于点 $p \in \mathbb{R}^{2d}$ 和 $i \in [d]$，我们用 p_i 表示其在 $\mathbb{R}_i^2$ 上的投影。

设 $s_1, \ldots, s_d$ 是一个 (d, K, α) 前缀覆盖设计。我们将 3-一致 K-超团问题归约为最大周长空锚定盒问题，具体如下：设 $G = (V, E)$ 表示一个具有顶点部 $V_{(1)} \ldots, V_{(K)}$ 的 K-部 3-一致超图。

根据观察 18，我们可以假设序列 $s_1, \ldots, s_d$ 的长度均为 $L := \alpha$。与命题 17 中一样，对于任意元组 $v = (v[1], \ldots, v[\ell]) \in \{0, \ldots, n\}^\ell$（其中 $\ell \leq L$），我们定义

$$\mathrm{ind}(v) = v[1]n^{L-1} + v[2]n^{L-2} + \cdots + v[\ell]n^{L-\ell}.$$

设 $U := n^L$。为了表示 $\mathbb{R}_i^2$ 中 $\{0, \ldots, U-1\}$ 的可行选取，我们使用 的脚手架构造，即对于每个 $\{0, \ldots, U\}$，定义点 $p(x; i) \in \mathbb{R}_i^2$ 为

$$p_i(x; i) = (x, U - x).$$

对于锚定盒 X，令 b 表示 X 中与原点相对的顶点。注意，若 X 不含点 $p(x; i)$，则 $\mathbb{R}_i^2$ 对周长的贡献至多为 $U + 1$；选取满足 $b_i = (x + 1, U - x)$ 的 b（其中某个 $x \in \{0, \ldots, U-1\}$）即可达到该上界。此外，仅当 $(x, U - x - 1) < b_i$（其中某个 $x \in \{0, \ldots, U-1\}$）时，$\mathbb{R}_i^2$ 对周长的贡献才是 $U + 1$。

因此，任何周长为 $\geq d$（$2U+2$）的空锚定盒，对每个 $i \in [d]$ 都会选取某个$x_i \in \{0,\ldots,U-1\}$，使得（， $U - x_i - 1$） $< b_i$。现在，我们将 x_i 视为 $x_i \in \{0,\ldots,n-1\}^L$，并引入额外的点，使得相应的选择当且仅当 $x_1,\ldots,x_d$ 在 G 中编码了一个 K-超团时，才对应一个空盒（依据前缀覆盖设计$s_1,\ldots,s_d$）。

作为一种构造组件，我们展示如何引入一些点，使其排除特定区间 $I \subseteq \{0, \ldots\ldots, U-1\}$。具体而言，对于任意 $I \subseteq \{0, \ldots\ldots, U-1\}$ 和 $i \in [d]$，我们定义 $q(I; i) \in \mathbb{R}_i^2$如下：

$$q_i(I;i) = (\min(I), U - \max(I) - 1).$$

对于任意不同的维度 $i_1, \ldots\ldots, i_k \in [d]$ 以及 $\{0, \ldots\ldots, U-1\}$中的区间 $I_1, \ldots\ldots, I_k$，我们可以将 $q(i_1 : I_1, \ldots\ldots, i_k : I_k)$ 定义为一个检查点，其定义类似于检查盒 $B(i_1 : I_1, \ldots\ldots, i_d : I_d)$：

$$q(i_1 : I_1, \ldots, i_d : I_d) = q(I_1; i_1) + \cdots + q(I_d; i_d).$$

注意，周长为 $\geq d(U+1)$ 且不包含 $q(i_1 : I_1, \ldots, i_d : I_d)$ 的空盒子，对每个 $i \in [d]$ 都必须选取某个 $x_i \in \{0, \ldots, U-1\}$，使得对所有 $j \in [k]$, $x_k \notin I_k$ 均成立。这与命题 17 中的边检查盒具有完全相同的语义。因此，我们可以像命题 17 中那样定义检查对象 $C_{a,b,c,f}$, $C^{<}_{x,i'}$, $_{\ell',f}$ 和 $C^{>}_{x,i',\ell',f}$（将 $B(\cdot)$替换为 $q(\cdot)$）。

注意，我们得到 $O(n^\alpha)$ 个检查点 $q(\cdot)$（如命题 17 中所分析），以及额外的 $O(n^\alpha)$ 个点 $p(x; i)$，对应于 $x \in \{0, \ldots, U-1\}$ $i \in [d]$，因为 $U = n^L = n^\alpha$。因此，我们得到：若存在一个针对 $N = n^\alpha$ 个点、运行时间为 $O(N^{\frac{K}{\alpha}-\varepsilon})$ 的最大周长空锚定盒问题算法，就能得到一个针对 3-一致K超团问题、运行时间为 $O(n^{K-\alpha\varepsilon})$ 的算法，从而推翻 3-一致超团猜想。

上述归约可以用一种直接的方式改编到最大体积空锚定盒问题上，这与 [28] 中归约到最大空星问题的做法类似。具体而言，我们定义 $C = \mu^U$，其中 μ 将在后文确定，并将每个点 $p(x; i) \in \mathbb{R}_i^2$ 的定义替换为

$$p_i(x;i) = (\mu^i, \frac{C}{\mu^i}).$$

这样，不包含任何点 p（$x; i$）的 $[0, C]^{2d}$ 中最大体积的锚定盒会选择一个满足 $b_i =$ （μ^{x_i+1}, C/μ^{x_i}）的顶点 $b_i \in \mathbb{R}_i^2$，其体积为（$C\mu$）^{d}。此外，我们将点 q（$I; i$） $\in \mathbb{R}_i^2$ 替换为

$$q_i(I;i) = (\mu^{\min(I)}, \frac{C}{\mu^{\max(I)-1}}).$$

这些点的定义与最大周长问题中的语义相同；在最大周长问题中，我们寻找周长为 d（$U+1$）的空锚定盒，而现在我们寻找体积为（$C\mu$）^{d}的空锚定盒。因此，类似于之前，我们在 3-一致超团猜想下得到一个 $n^{\frac{K}{\alpha}-o(1)}$ 下界。◀ −

B 构造：省略的证明与细节

下面讨论的 $d = 4$ 和 $d = 5$ 构造，是在假设$K = gd$ 对某个正整数 g成立的基础上得到的；它们拟合了序列前 g 层中所有元素的主要出现，即对于所有 $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq g$，均有 $s_i[j] =$ （$i-1$）$g + j$，然后运行一个

d	Best 已知上界 来自 [19]	此前已知下界 界 from [34]	SAT 求解器下 界 来自定理 5	覆盖设计下界 下界 from 定理 7	(v, k) of the 覆盖设计
3	1.5	1.5		1.5	(3, 2)
4	2	1.777	1.9047	1.8461	(20, 12)
5	2.5	2.0833	2.2222	2.1929	(45, 25)
6	3	2.4		2.5714	(6, 3)
7	3.5	2.7222		3	(7, 3)
8	4	3.0476		3.3333	(24, 10)
9	4.5	3.375		3.6818	(90, 36)
10	5	3.7037		4.0540	(80, 30)
11	5.5	4.0333		4.4160	(308, 110)
12	6	4.3636		4.8	(36, 12)
13	6.5	4.6944		5.2	(13, 4)
14	7	5.0256		5.5322	(966, 294)
15	7.5	5.3571		5.8823	(405, 120)
16	8	5.6888		6.2249	(880, 256)
17	8.5	6.0208		6.5796	(782, 221)
18	9	6.3529		6.9428	(198, 54)
19	9.5	6.6851		7.3076	(19, 5)
20	10	7.0175		7.6923	(80, 20)
21	10.5	7.35		8.0769	(21, 5)

图 3 $\mathbb{R}^d$ 中 $d \leq 21$ 通过覆盖设计获得的 Klee测度问题和深度问题下界指数表，以及与其他下界和上界的比较。所有使用的覆盖设计和验证程序均可在 [1] 中找到。

针对 d、g 和 α 的固定取值使用 SAT 求解器，尝试从 $g+1$ 级开始填充各层，以确定是否存在这样的前缀覆盖设计。不过，无法保证这些构造是最优的。对于 $d \geq 6$，该 SAT 求解器得到的构造并不优于定理 7 在一般情况下得到的结果，因此我们在此仅讨论 $d = 4$ 和 $d = 5$ 的情况。

定理5的证明。 我们通过给出具有所需 $\frac{K}{\alpha}$ 值的前缀覆盖设计构造来证明这两个事实。

对于 $d = 4$，我们给出如下 (4, 40, 21) PCD，它使我们得到 $\frac{K}{\alpha} = \frac{40}{21} > 1.90476$。

s_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	40	19	28	37	26
s_2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	9	38	27	36
s_3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	20	39	8	7	37
s_4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	10	29	18	17	27

显然，该 PCD 满足 $d = 4$ 和 $K = 40$。现在我们证明 $\alpha = 21$。

首先，我们检查所有元素是否满足单元素条件。假设我们要检查元素 $x = 10y + z$ where $0 \leq y \leq 3$ and $1 \leq z \leq 10$ 的单元素条件。那么$\ell_{\min}(x) = z$。每个序列中总共有 15 个元素，因此 $\ell_{\max}(x) \leq 15$。这意味着，对于 $z \leq 7$，$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq 7 + 15 = 22 \leq 21 + 1$ 成立，单元素条件也就满足了。对于 $z \geq 8$，不难看出，每个元素恰好出现两次，并且$\ell_{\max}(x) = 21 - z$，因此 $\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) = 21 \leq 21 + 1$。所以单元素条件也满足。

难点在于证明三元组条件。不难看出，大多数三元组都可以通过覆盖其主要位置来覆盖。对于剩余的三元组，可以通过一些观察来缩小搜索范围，但最终仍需要逐一检查许多情况。为此，我们提供了一个计算机程序，根据定义手动检查所有元素的单元素条件以及所有三元组的三元组条件。程序见 [1]。

对于 $d = 5$，我们给出如下 (5, 40, 18) PCD，它为我们提供了$\frac{K}{\alpha} = \frac{40}{18} > 2.22222$。

s_1	1	2	3	4	5	6	7	8	24	31	38	30	14
s_2	9	10	11	12	13	14	15	16	32	40	6	31	22
s_3	17	18	19	20	21	22	23	24	8	7	39	15	30
s_4	25	26	27	28	29	30	31	32	40	16	23	39	6
s_5	33	34	35	36	37	38	39	40	16	32	15	23	

同样容易看出，该 PCD 满足 $d = 5$ 和 $K = 40$。现在我们证明 $\alpha = 18$。

首先，我们检查所有元素是否满足单元素条件。设我们要检查元素 $x = 8y + z$ 是否满足单元素条件，其中 $0 \leq y \leq 4$ 且 $1 \leq z \leq 8$。那么 $\ell_{\min}(x) = z$。每个序列中总共至多有 13 个元素，因此 $\ell_{\max}(x) \leq 13$。这意味着，对于$z \leq 6$，$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq 6 + 13 = 19 \leq 18 + 1$ 成立，且单元素条件满足。具有 $z = 7$ 的元素不位于第 13 层，因此对它们而言，$\ell_{\max}(x) \leq 12$ 且$\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq 7 + 12 = 19 \leq 18 + 1$。具有 $z = 8$ 的元素不位于第 12 层和第 13 层，因此对它们而言，$\ell_{\max}(x) \leq 11$ 且 $\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \leq 8 + 11 = 19 \leq 18 + 1$。

难点仍然在于证明三元组条件。我们再次略过这部分，并请参阅 [1]中提供的、用于完成该证明的计算机程序。

◀

我们尝试回答第 2 节提出的一个问题：

优良的覆盖设计总是能拥有多重匹配吗?

更正式地表述，我们得到以下猜想：

▶ **猜想20**。 对于每个整数 $d \geq 3$，都存在一个界 $\beta_d > 0$，使得至少存在一个具有 d 个块、频数为 $\text{freq} \leq \beta_d$ 的覆盖设计；并且，对于所有具有 d 个块、频数为 $\text{freq} \leq \beta_d$ 的 $(v,k,2)$ 覆盖设计，其缩放版本 $(vd,kd,2)$ 都存在多重匹配。

换句话说，如果这个猜想成立，就意味着 $\gamma_d \geq 3-2^{d}/\text{频数}_d$，其中 freq_d 是所有具有 d 个块的覆盖设计的频数下确界。我们不知道这个猜想是真是假，但有一些迹象表明它可能是正确的。

但是，如果这个猜想是错的呢？我们还能得到合理的界吗？答案是“可以”。我们只需构造冗余度更高的覆盖设计。假设存在一个有 d 个块、且不存在多重匹配的 $(vd,kd,2)$ 覆盖设计。那么，我们可以构造一个存在多重匹配的 $(vd,kd+v,2)$ 覆盖设计（其中块是多重集而非集合，但这并不妨碍我们，因为在前缀覆盖设计的每个序列中，我们只需保留每个元素第一次出现的位置）。这可以通过为每个块添加唯一的 v 个值来实现（总共添加所有 vd 个值）。例如，向第 i 个块添加 $(i-1)v+1$、$(i-1)v+2$、…、iv。这样，就可以在每个块中选取这些新元素作为多重匹配中的唯一元素。将这个覆盖设计代入公式，我们就得到一个 $3-2^{d}_{kd+v}$ 下界。定理8将证明，对于“足够优良”的覆盖设计 $v = o(kd)$，因此这不会改变关于 d 的渐近下界，但会使特定 d 值对应的下界变差。

定理8的证明。目前，我们已经得到了 d 精确取值的一些具体下界，也有适用于任意 d 的一般构造，而这取决于覆盖设计的“质量”。我们希望得到只取决于 d 的下界。为此，我们考察能够容纳多重匹配的特定覆盖设计，具体来说就是有限射影平面。它们是参数为 $(m^2+m+1, m+1, 2)$ 且有 $d = m^2+m+1$ 个区块的覆盖设计。已知当 p 是素数且 n 是正整数时，这类设计存在，其中 $m = p^n$。事实上，射影平面比覆盖设计更强，它们属于所谓的平衡不完全区组设计，这意味着每个元素都位于相同数量的块中，并且每一对元素也都位于相同数量的块中（在我们的情形下，恰好一次）。在这种情况下，每个块的大小为 $m+1$，每个元素位于 $m+1$ 个块中。这意味着，如果把块和元素看作二分图，那么两侧的每个顶点的度都是 $m+1$，因此这是一个 $(m+1)$-正则二分图。根据霍尔定理，它存在匹配，所以每个块中都存在一个唯一的元素（在这种情况下，块的数量等于元素的数量，因此多重匹配实际上就是匹配）。因此，有限射影平面满足定理 7 的条件，可用于构造针对 $d = m^2+m+1$ 的 $3-2^{d}_{kd} = 3-2^{d}_{k} = 3^{d} + 3^{d}\cdot 3k-2^{2}$ 下界，其中 m 为素数幂。对于这些特定的 d 值，这种构造给出了 $3^{d} + 3^{d}\cdot 3k-2^{2} = 3^{d} + 3^{d}\cdot 3m+1^{2} = 3^{d} + 9^{2}\cdot$ $\frac{d}{m+\frac{1}{3}} = 3^{d} + 9^{2}\sqrt{d} + o\left(\sqrt{d}\right)$ 下界（因为 $\sqrt{d}-1 < m+\frac{1}{3} < \sqrt{d}$）。

现在，我们将这一构造推广到 d 的所有取值。还记得我们如何为覆盖设计构造缩放构造吗？我们有 $K = (nk+v')d$ 和 $\alpha \leq 3nk-(2n-3)v'$，其中 $v' = \frac{v}{d}$，且所有元素的主位置都在前 $nk+v'$ 层。为了将这一构造推广到 $d' > d$，我们将增加 $d'-d$ 个新维度，每个维度都包含 $nk-(2n-1)v'$ 个唯一元素。我们声称 α 的值仍为 $\leq 3nk-(2n-3)v'$，因为如果一个三元组至少包含一个来自这些新维度的元素，就可以通过覆盖

三个元素的主位置来覆盖它：$(nk-(2n-1)v')+(nk+v')+(nk+v') = 3nk-(2n-3)v'$。并且 $K = (nk+v')\cdot d+(nk-(2n-1)v')\cdot(d'-d)$。对于我们的具体情况，这意味着 $\alpha \leq 3nk-2n+3$，且 $K = (nk+1)d+(nk-2n+1)(d'-d) = (nk+1)d'-2n(d'-d)$，因为 $v' = 1$。于是 $\frac{K}{\alpha} \geq \frac{(nk+1)d'-2n(d'-d)}{3nk-2n+3} = (k+\frac{1}{n})d'-2(d'-d)\frac{3k-2+\frac{3}{n}}{3k-2}$。它趋近于 $kd'-2(d'-d)\frac{3k-2}{3k-2}$ 当 n 趋于无穷时。它等于 $\frac{d'}{3}\cdot\frac{3k-6\frac{d'-d}{d'}}{3k-2} = \frac{d'}{3}(1+\frac{2-6\frac{d'-d}{d'}}{3k-2}) = \frac{d'}{3}+\frac{d'}{3}\cdot\frac{2-6\frac{d'-d}{d'}}{3k-2}$。对于固定的 d'，我们取 $d := p_i^2+p_i+1$，其中 p_i 是满足 $p_i^2+p_i+1 \leq d'$的最大素数。d越接近，得到的界就越好。平均而言，相邻素数之间的间距呈对数级，因此平均来说，$d'-d \leq (p_{i+1}^2+p_{i+1}+1)-(p_i^2+p_i+1) = O(p_{i+1}^2-p_i^2) = O(p_i\cdot(p_{i+1}-p_i)) = O(\sqrt{d'}\cdot\log d')$，但在最坏情况下未必成立。勒让德猜想指出，每两个连续平方数之间都存在一个素数，因此这意味着 $p_{i+1}-p_i = O(\sqrt{p_i})$，也就是说 $d'-d = O\left(d'^{\frac{3}{4}}\right)$。但顾名思义，勒让德猜想仍是一个猜想，因此我们将使用 Ingham 的一个较弱结果 [32]，该结果指出 $p_{i+1}-p_i = O\left(p_i^{\frac{3}{5}}\right)$。对我们来说，这意味着 $d'-d = O\left(d'^{\frac{5}{6}}\right)$。与此同时，我们知道 $k = m+1 = \sqrt{d}+o\left(\sqrt{d}\right) = \sqrt{d'}\pm o\left(\sqrt{d'}\right)$，因此可以用 d' 表示下界：

$$\frac{d'}{3}+\frac{d'}{3}\cdot\frac{2-6\frac{d'-d}{d'}}{3k-2} = \frac{d'}{3}+\frac{d'}{3}\cdot\frac{2-6\frac{O\left(d'^{\frac{5}{6}}\right)}{d'}}{3\sqrt{d'}\pm o(\sqrt{d'})} =$$

$$= \frac{d'}{3}+\frac{d'}{3}\cdot\frac{2-o(1)}{(3\pm o(1))\sqrt{d'}} = \frac{d'}{3}+\frac{2}{9}\sqrt{d'}-o\left(\sqrt{d'}\right).$$

这与 d' 在前两个求和项中存在有限射影平面时所能得到的界限相符。

◀

C 界限——省略的证明

缩放引理 13 的证明。设 $s_1,\ldots,s_d$ 是一个 (d,K,α) PCD，并称 λ 为缩放因子。我们通过将 $s_1,\ldots,s_d$ 中的每个元素替换为 λ 个元素，构造一个 PCD $s'_1,\ldots,s'_d$，使其具有 $K' := \lambda\cdot K$ 个元素，且 $\alpha' := \lambda\cdot\alpha$。具体而言，对于每个值为 x 的主位置 (i,ℓ)，我们将 x 替换为元素 $\lambda x-\lambda+1,\lambda x-\lambda+2,\ldots,\lambda x-1,\lambda x$。若 (i,ℓ) 是 x 的一个副本，我们就将 x 替换为元素 $\lambda x,\lambda x-1,\ldots,\lambda x-\lambda+2,\lambda x-\lambda+1$。

我们需要检查 $\alpha' = \lambda\cdot\alpha$ 是否满足三元组条件和单元素条件。对于每个由元素组成的三元组 $\{a,b,c\}\in\binom{[K']}{3}$，考虑三元组 $\left\{\left\lceil\frac{a}{\lambda}\right\rceil,\left\lceil\frac{b}{\lambda}\right\rceil,\left\lceil\frac{c}{\lambda}\right\rceil\right\}\subseteq[K]$。[6]由于 $s_1,\ldots,s_d$ 是一个前缀覆盖设计，因此必定存在前缀 $s_i[..\ell]$、$s_{i'}[..\ell']$ 和 $s_{i''}[..\ell'']$覆盖该三元组，并满足 $\ell+\ell'+\ell''\leq\alpha$。显然，前缀 $s'_i[..\lambda\ell]$、$s'_{i'}[..\lambda\ell']$和 $s'_{i''}[..\lambda\ell'']$ 覆盖元素 $\{a,b,c\}$，且总长度为 $\lambda\ell+\lambda\ell'+\lambda\ell''\leq\lambda\alpha=\alpha'$。

单元素条件的证明类似：设 $a\in[K']$ 是在 s'_1、……、s'_d 中至少出现两次的一个元素。定义 $x := \left\lceil\frac{a}{\lambda}\right\rceil$ 和 $y := \lambda x-a$。考虑元素 x 在 s_1、……、s_d 中的主位置 $(i,\ \ell_{\min}(x))$。那么，由 $s'_i[\lambda\ell_{\min}$ 的构造可得 $s'_i[\lambda\ell_{\min}(x)-y] = a$

[6] 在前缀覆盖设计的定义中，所有$\{a,b,c\}\in\binom{[K]}{3}$都应满足三元组条件。我们可以假设所有$\{a,b,c\}\subseteq K$都应满足三元组条件，因为如果这三个值中有些相等，我们可以任意添加值，使其成为一个三元组（这是可行的，因为 $K\geq 3$），而对这三个互不相同的元素进行覆盖，就会覆盖$\{a,b,c\}$。

s'_i。因此，$\ell'_{\min}(a) \le \lambda\ell_{\min}(x) - y$。另一方面，对于 a 在 s'_1、……、s'_d 中的任意其他位置 (i, ℓ)，由 $z := \lceil \frac{\ell}{\lambda} \rceil$ 可知 $s_i[z] = x$。因此，由 s'_1、……、s'_d 的构造可得 $\ell = \lambda(z-1) + y + 1$。由于 $z \le \ell_{\max}(x)$，我们得出

$$\begin{aligned}\ell'_{\min}(a) + \ell'_{\max}(a) &\le (\lambda\ell_{\min}(x) - y) + (\lambda(\ell_{\max}(x) - 1) + y + 1) \\ &= \lambda(\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) - 1) + 1 \le \lambda\alpha + 1 = \alpha' + 1,\end{aligned}$$

其中最后一行用到了 $\ell_{\min}(x) + \ell_{\max}(x) \le \alpha + 1$（因为 $s_1, \dots, s_d$ 是一个 (d, K, α) PCD）。因此，$s'_1, \dots, s'_d$ 是一个 $(d, \lambda K, \lambda\alpha)$ PCD，如所需。◀

定理 6 的证明。反设 $\gamma_4 \ge 2$。那么存在一个由 $(4, K_i, \alpha_i)$ 前缀覆盖设计组成的序列，使得 $\liminf_{i\to\infty} \frac{K_i}{\alpha_i} \ge 2$。根据缩放引理 13，我们可以对序列中的每个前缀覆盖设计进行缩放，使其 K_i 的值大于前一个，因此可以假设对所有 $i \ge 1$，都有 $K_i < K_{i+1}$。我们证明该序列中所有 PCD 在充分大的 i 下都成立的一系列性质。为便于表述（稍微滥用一下记号），我们将使用渐近表述（关于 i），并用 α 代替 α_i，用 K 代替 K_i。例如，我们现在就可以写成 $K \ge 2\alpha - o(\alpha)$ 和 $\alpha \le \frac{K}{2} + o(K)$。对于任意考虑的 PCD s_1，s_2，……，s_d，我们还可以假设没有元素在同一个序列 s_i 中出现两次；否则，只需删去第二次出现的元素，这只会改善构造。

▶ **引理 21.** 如果 $\alpha \le \frac{K}{2} + o(K)$，则主位置的最高层级至多为 $\frac{\alpha}{2} + o(\alpha)$。 –

引理 21 的证明。称 (i_m, m) 为该 PCD 的最大主位置（具有最大的 m）。我们将证明 $m \le \frac{\alpha}{2} + o(\alpha)$。反设 $m = \frac{\alpha}{2} + \varepsilon\alpha$ 对某个 $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ 成立，其中 ε_0 是一个与 K 和 α 无关的常数。容易看出，$s_{i_m}[m]$ 不可能有副本；否则我们会得到 $m + m' \ge m + m \ge \alpha + 2\varepsilon\alpha > \alpha$，其中 m' 是任意副本的层级，这与 $s_{i_m}[m]$ 的单元素条件矛盾。我们证明，前缀 $s_{i_m}[..m]$ 以及对所有 $i \ne i_m$ 的前缀 $s_i[..\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha]$ 覆盖了全部 K 个元素。反设这不成立。区分元素还可能位于何处的两种情况。

1. 如果某个元素在序列 $y \ge m + 1 \ge \frac{\alpha}{2} + \varepsilon\alpha + 1$ 的位置 (i_m, y)，那么它不可能是其主位置，因为 m 是最大的主位置，所以为了满足单元素条件，该元素应当在某个其他序列 $i \ne i_m$ 中拥有一个层级至多为 $\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha$ 的主位置。但所有这类元素都被前缀 $s_i[..\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha]$ 覆盖。
2. 如果某个元素不在序列 i_m 中，则将其主位置定义为 (i_y, y)。但要覆盖任何形如 $\{s_{i_m}[m], s_{i_y}[y], c\}$ 且满足 $c \in [K]$ 的三元组，我们需要总大小至少为 $m + y$ 的前缀。因此 $m + y \le \alpha$，从而得到 $y \le \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha$，而该元素被前缀 $s_{i_y}[..\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha]$ 覆盖。

–

因此，这些前缀确实覆盖了所有元素。于是，它们必须包含至少 K 个元素。但它们的总大小为 $m + 3 \cdot (\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \varepsilon\alpha + 3 \cdot (\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\alpha) = (2 - 2\varepsilon)\alpha < (2 - 2\varepsilon_0)\alpha < K$，其中 K 足够大。因此我们得到了一个矛盾。

◀

因此，所有主要位置都位于最初的 $m = \frac{\alpha}{2} \pm o(\alpha)$ 层（显然 $m \ge \frac{\alpha}{2} - o(\alpha)$，因为在 4 个序列中有 $K \ge 2\alpha - o(\alpha)$ 个元素应具有主要位置）。但这些层总共包含 $K + o(K)$ 个元素，因此这些层中几乎所有[7]元素都是主要元素。

[7] 在此处及下文中，几乎所有都表示除 $o(K)$ 之外的全部。

26 Klee测度问题及相关问题的更高下界 $\mathbb{R}^d,\ d \geq 4$

▶ **引理22**。令 m 表示主要位置所在的最大层级。存在一个与 K 无关的 $\varepsilon > 0$，使得每个主要位置层级为 p 、满足 $(1-\varepsilon)m \leq p \leq m$ 的元素至少有一个副本。

引理22的证明。反设存在一个元素，其主位置的层级介于 $m - \varepsilon m$ 和 m 之间，且没有任何副本。不失一般性，定义其主位置为 $(1,\ m-x)$，其中 $0 \leq x \leq \varepsilon m$。我们分两种情况讨论：在序列 $[m-2\varepsilon m, m]$中的 2、3 或 4 中，层 是否存在主位置上没有副本的元素。

1. 如果存在，不失一般性，定义其主位置为 $(2, m-y)$，其中$0 \leq y \leq 2\varepsilon m$。考虑如何覆盖形如 $\{s_1[m-x], s_2[m-y], s_i[z]\}$ 的三元组，其中 $i \in \in \{3,4\}$ 且 $z \in [m-2\varepsilon m, m]$，使得 (i,z) 是 $s_i[z]$ 的主位置（这样的元素确实存在，因为前 m 层共有 $4m = K + o(K)$ 个位置，因此其中几乎全部都是主位置）。我们无法用三个序列覆盖它们，因为当 ε 足够小时，这需要$\geq (3-5\varepsilon)m \geq \left(\frac{3-5\varepsilon}{2} - o(1)\right)\alpha > \alpha$。因此，我们必须至多用两个序列覆盖此类三元组。但是， $s_1[m-x]$ 和 $s_2[m-y]$ 都没有副本，所以 $s_i[z]$必须在序列1或2中有副本。如果将其复制到序列1，为满足三元组条件，其位置必须为$\leq m + 2\varepsilon m + o(m)$；如果将其复制到序列2，为满足三元组条件，其位置必须为 $\leq m + \varepsilon m + o(m)$。由于前 m 层有$o(m)$ 个副本位置，这意味着前两个序列总共有 $3\varepsilon m + o(m)$ 个合适的副本位置。但是，序列3和4中来自层 $[m-2\varepsilon m, m]$ 的主元素有 $4\varepsilon m - o(m)$ 个需要复制。这就导致了矛盾。

2. 如果不存在这样的元素 $s_2[m-y]$，那么序列 2、3 和 4 中主位置位于层级 $[m-2\varepsilon m, m]$ 上的所有元素都有副本。如果其中一些元素在序列 2、3 或 4 的位置 $\geq m + \varepsilon m + \delta m$ 上有副本，其中 $\geq m + \varepsilon m + \delta m$ 对于某个与 K无关的常数 $\delta > 0$成立，那么由于三元组条件，这些位置不能用于覆盖包含 $s_1[m-x]$的三元组。因此，这种情况等同于这样的元素根本没有副本，而我们已经知道这是不可能的。所以，序列 2、3 和 4 中只有层 $\leq m + \varepsilon m + o\,(m)$ 可用于放置副本。同时，这些元素的主位置为 $\geq m - 2\varepsilon m$，因此根据单元素条件，它们在序列 1 中的副本不能高于层级 $m + 2\varepsilon m + o\,(m)$。我们知道，所有序列的前 m 层中有 $o\,(m)$ 个副本位置，因此这些元素有 $2\varepsilon m + \varepsilon m + \varepsilon m + \varepsilon m + o\,(m)$ 个 $= 5\varepsilon m + o\,(m)$ 副本位置。但序列 2、3 和 4 中总共有 $6\varepsilon m - o\,(m)$ 个这样的主元素。因此，其中一些元素无法拥有副本，从而导致矛盾。

◀

▶ **引理23**。令 m 表示主位置的最高层级。存在一个与 K 无关的 $\varepsilon > 0$，使得主位置层级为 p 且满足$(1-\varepsilon)m \leq p \leq m$ 的几乎所有元素都恰有一个副本，且该副本位于层级 $2m - p \pm o\,(m)$。

引理23的证明。由引理22可知，所有主位置位于层 $[m-\varepsilon m, m]$ 的这些元素至少有一个副本。同时，由于单元素条件，它们的副本应位于层 $\leq m + \varepsilon m + o(m)$，并且我们知道，前 m 层中有 $o(m)$ 个副本位置，因此它们总共有 $4\varepsilon m + o(m)$ 个副本位置。但这样的元素有 $4\varepsilon m - o(m)$ 个。因此，主位置位于层 $[m-\varepsilon m, m]$ 的几乎所有元素都恰好有一个副本。对于一个主位置为

$(k, m-x)$ 的元素，由于单元素条件，这样的副本应位于层级 $\le m+x+o(m)$。与此同时，它所在的层级不能小太多。为导出矛盾，假设对于某个与 K 无关的常数 $\delta>0$，有 $\ge \delta m$ 个主位置为 $(k_i, m-x_i)$ 的元素，且它们的副本位于位置 $y_i \le m+x_i-\gamma m$，其中 $\gamma>0$ 是与 K 无关的常数。定义 S 为所有主位置位于层 $[m-\varepsilon m, m]$ 且恰好有一个副本的元素的副本位置之和。对于主位置位于层级 $m-x$ 的元素，每个这样的位置至多为 $m+x+o(m)$，但副本位置为 $\le m+x-\gamma m$ 的元素有 $\ge \delta m$ 个。这意味着 $S \le 4(\sum_{i=0}^{\varepsilon m} m+i) - (\gamma m)\cdot(\delta m) = (4\varepsilon + 2\varepsilon^2 + o(1) - \gamma\cdot\delta)m^2$。另一方面，我们可以给 S 找到一个下界。只有 $o(m)$ 个元素的副本位置小于 m，因此有 $4\varepsilon m - o(m)$ 个元素应当在从第 m 层开始的层上拥有副本。若将这些副本位置按递增顺序排列，前四个位置为 $\ge m$，接下来的四个位置为 $\ge m+1$，依此类推：索引为 $4i+1$、$4i+2$、$4i+3$ 和 $4i+4$ 的位置均为 $\ge m+i$（否则，我们至少需要将 $4i+1$ 个元素安排在由四个序列构成的 i 层上）。这意味着它们的和 S 至少为 $4\varepsilon m^2 + 2\varepsilon^2 m^2 - o(m^2) = (4\varepsilon + 2\varepsilon^2 - o(1))m^2$。这与我们得到的上界矛盾。

◀

因此，这些主位置位于层级 $[m-\varepsilon m, m]$ 的元素中，几乎所有元素都恰有一个副本；若此类元素的主位置为 $m-x$，那么几乎所有元素的副本都位于层级 $m+x\pm o(m)$。这也意味着，对于与 K 无关的常数$0 \le \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \le \varepsilon$，几乎所有来自 $[m-\varepsilon_1 m, m-\varepsilon_2 m)$ 的元素都是主元素，且几乎所有主元素都各自恰有一个副本；对于其中几乎所有元素，这些副本都位于层级 $[m+\varepsilon_2 m - o(m)\ m+\varepsilon_1 m + o(m))$。但层级 $[m+\varepsilon_2 m - o(m)\ m+\varepsilon_1 m + o(m))$ 上有 $o(m)$ 个位置 $\setminus\ [m+\varepsilon_2 m, m+\varepsilon_1 m)$，因此我们可以说，这些元素中几乎所有元素的副本都位于层级 $[m+\varepsilon_2 m, m+\varepsilon_1 m)$。

现在所有准备工作都已完成，我们可以证明这样的构造是不可能的。我们称主位置为 $(i, m-x)$ 的元素被唯一复制到序列 j，如果它恰好有一个副本，且该副本位于序列中的第 $m+x\pm o(m)$ 层j。我们固定一个与 K 无关的充分小的常数 $\gamma>0$。如果存在 $\ge \gamma m$ 个元素，它们在序列 i 中的主位置位于这些层级上，且它们唯一的副本位于序列 j 的第 $[m+\varepsilon_2 m, m+\varepsilon_1 m)$ 层，那么我们称序列 i 中第 $[m-\varepsilon_1 m, m-\varepsilon_2 m)$ $(0 \le \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \le \varepsilon)$ 层的元素被唯一复制到序列 j。

称 $P_{[\ell,r)}$ 为所有满足以下条件的元素对 $(i,\ j)$ 的集合：序列 i 中第 $[\ell, r)$ 层的元素中，有 $\ge \gamma m$ 个被唯一复制到序列 j 中的第 $[2m-r, 2m-\ell)$ 层。

▶ **引理 24.** 存在一个与 K 无关的 $\delta>0$，使得存在 $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1\le\varepsilon$，满足 B：$= \frac{\varepsilon_1 m-\varepsilon_2 m}{5} \ge \delta m$ ~~以及 $P_{[m-\varepsilon_1 m, m-\varepsilon_2 m)}$~~ $= P_{[m-\varepsilon_1 m+iB, m-\varepsilon_1 m+(i+1)B)}$ 对所有$0 \le i \le 4$均成立。

证明。 我们通过一个构造来证明这一陈述。δ 将等于 $\frac{\varepsilon}{5^{12}}$（并且我们应取 γ 远小于 δ）。我们给出一个至多包含 12 步的迭代过程，从而得到所需的 ε_1 和 ε_2。

我们从一条线段 $[m-\varepsilon m, m)$ 开始。每次迭代中，我们将当前线段$[\ell, r)$ 分成五段长度几乎相等的子线段，并考虑这六条线段对应的 P-集合。将它们分别记为P、P_1、P_2、P_3、P_4 和 P_5。如果它们全都相等，则引理成立，我们就将当前线段 $[\ell, r)$ 作为答案。否则，存在 $1 \le i \le 5$ 使得 $P \ne P_i$。由于 $[\ell, r)$ 的五条子线段都严格位于 $[\ell, r)$ 内部，这意味着 $P_i \subsetneq P$，因而$|P_i| \le |P| - 1$。我们用 $[\ell + (i-1)(r-\ell)/5,\ \ell + i(r-\ell)/5)$ 替换当前线段 $[\ell, r)$，并继续下一阶段。注意，$|P_{[m-\varepsilon m, m)}| \le 4\cdot 3 = 12$，并且在接下来的每次

迭代中，线段的长度缩小为原来的五分之一，而 P-集合的大小至少减少一。因此，至多经过 12 次迭代，我们就会得到一条长度至少为 $\frac{\varepsilon}{5^{12}}$ 的合适线段。

—

◀

由引理 24 可知，存在一条线段 $[A, A+5B)$，满足 $A \geq m - \varepsilon m$,$A + 5B \leq m$, $B = \Theta(m)$，且该线段符合引理陈述。现在我们来回答一个问题：哪些元素对 $(i,\ j)$ 可以出现在该线段 $[A, A+5B)$ 的 P-集合中?

▶ **引理 25**。若 $1 \leq i, j, k, \ell \leq 4$ 是四个互不相同的整数，则元素对 (i, j)、(j, i) 和 (k, ℓ) 中至少有一个不属于 $[A, A+5B)$ 的 P-集合。

证明。反设这些元素对都属于 $[A, A+5B)$ 的 P-集合。由引理 24，这些元素对都包含在全部 5 个子线段的 P-集合中。特别地，这意味着存在一个主位置为 $(i, A+x)$ 的元素，其中 $0 \leq x < B$在层级 $2m - A - x \pm o(m)$ 的序列 j 中只有一个副本。此外，还存在一个主位置为 $(j, A+y)$ 的元素，其中 $0 \leq y < B$在层级$2m - A - y \pm o(m)$ 的序列 i 中只有一个副本；以及一个主位置为 $(k, A+4B+z)$ 的元素，其中 $0 \leq z < B$在层级 $2m - A - 4B - z \pm o(m)$ 的序列 ℓ 中只有一个副本。我们声称，不可能用总大小至多为 $\alpha = 2m + o(m)$ 的前缀覆盖这三个元素。若使用三个不同的前缀，其长度之和至少为 $3 \cdot (1-\varepsilon)m > \alpha$，因为$A \geq m - \varepsilon m$。元素 $s_k[A + 4B + z]$ 与另外两个元素不在同一序列中，因此必须单独覆盖。它有 $\ell_{\min}(s_k[A + 4B + z]) = A + 4B + z$，所以这样的前缀大小至少为 $A + 4B + z$。另外两个元素都位于序列 i 和 j 中，因此我们应当在其中一个序列中取一个前缀。不失一般性，假设我们取序列 j。覆盖大小为 $(A + 4B + z) + (2m - A - x \pm o(m)) = 2m + 4B + z - x \pm o(m) \geq 2m + 4B - x \pm o(m) \geq 2m + 3B \pm o(m) = (2 + \Theta(1))m > \alpha$。因此，我们不能让这三个元素对 (i, j)、(j, i) 和 (k, ℓ) 同时出现在我们的 P-集合中。◀

我们证明关于另外三组元素对的相同结论。

▶ **引理 26.** 若 $1 \leq i, j, k, \ell \leq 4$ 是四个互不相同的整数，则元素对 (i, j)、(j, k) 和 (k, ℓ) 中至少有一个不在 $[A, A+5B)$ 的 P-集中。

证明。反设这些元素对都存在于 $[A, A+5B$ 的 P-集合中。根据引理 24，这些元素对都包含在 5 个子线段各自的 P-集合中。特别地，存在一个主位置为 $(i, A + 2B + x)$ 的元素，其中 $0 \leq x < B$，它在层级 $2m - A - 2B - x \pm o(m)$ 上仅有一个副本，位于序列 j 中。另有一个主位置为 $(j, A + y)$ 的元素，其中 $0 \leq y < B$，它在层级 $2m - A - y \pm o(m)$ 上仅有一个副本，位于序列 k 中；还有一个主位置为 $(k, A+4B+z)$ 的元素，其中 $0 \leq z < B$，它在层级 $2m - A - 4B - z \pm o(m)$ 上仅有一个副本，位于序列 l 中。我们断言，不可能用总大小至多为 $\alpha = 2m + o(m)$ 的前缀覆盖这三个元素。如果使用三个不同的前缀，它们长度的和至少为 $3 \cdot (1-\varepsilon)m > 2m + o(m)$，因为 $A \geq m - \varepsilon m$。现在考虑使用两个序列的情况（显然不可能只用一个序列，因为没有一个序列同时包含这三个元素）。不难看出，我们应该在序列 k 中取一个前缀，否则，元素 $s_k[A+4B+z]$ 只能用序列 ℓ 覆盖；这三个元素中的其他元素都不在该序列中，而且 $s_k[A+4B+z]$ 在该序列中的层级不低于该元素在序列 k 中的层级（因为它在序列 k 中具有主位置），所以改为在序列 k 中取前缀不会更差。因此，我们应该选取序列 k，以及序列 i 或 j。如果选取序列 i，覆盖大小将为

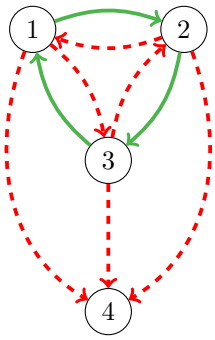


图 4 实线边表示存在，虚线边表示不可能存在。由此可得矛盾，因为不允许有指向顶点 4 的入边。

$(A+2B+x)+(2m-A-y\pm o(m)) = 2m+2B+x-y\pm o(m) \geq 2m+2B-y\pm o(m) \geq 2m+B\pm o(m) = (2+\Theta(1))m > \alpha$，因为 $B=\Theta(m)$。如果选取序列 j，覆盖大小将为 $(A+4B+z)+(2m-A-2B-x\pm o(m)) = 2m+2B+z-x\pm o(m) \geq 2m+2B-x\pm o(m) \geq 2m+B\pm o(m) = (2+\Theta(1))m > \alpha$。因此，我们不能让这三个元素对 (i,j)、(j,k) 和 (k,ℓ) 同时属于我们的 P-集合。
◀

这两项限制足以证明这样的构造不可能存在。考虑有向图 $G=(V, E)$，其中 $V=[4]$ 和 $E=P$。一条边$i\to j$ 的权重等于从序列 i 转移到序列 j 的元素数量（注意，根据 P-集的定义，所有权重都是 $\geq \gamma m$）。每个序列中都有 $5B\pm o(m)$ 个元素需要在某处被唯一复制，而在该序列中有 $5B$ 个位置（位于层级$[2m-A-5B, 2m-A)$）可以唯一复制来自其他序列的元素。这意味着，对于每个顶点，所有出边的权重之和为 $5B\pm o(m)$，所有入边的权重之和为 $5B\pm o(m)$。

区分两种情况：对于某个 $i\neq j$，在 P-集合中是否存在元素对 (i, j) 和 (j, i)。

1. 首先，考虑不存在这两个元素对的情况。因此，如果存在元素对 (i,j)，则不能存在反向的元素对 (j,i)。不失一般性，设存在一条边 $1\to 2$。这意味着不可能存在一条边 $2\to 1$。不失一般性，设存在一条边 $2\to 3$。这意味着不可能存在边 $3\to 2$。序列 3 中的元素不能唯一复制到序列 4，否则我们就会得到一个构造，其中有元素对 (i,j)、(j,k) 和 (k,ℓ)，其中 $i=1$、$j=2$、$k=3$ 和 $\ell=4$，这将违反引理 26。因此，序列 3 中的元素唯一可以复制到的位置只有序列 1。现在我们有一个三角形$1\to 2\to 3\to 1$。同样地，我们可以看出，不可能存在边 $1\to 4$ 和$2\to 4$，否则也会违反引理 26。这意味着没有边指向顶点 4。因此，唯一可以在那里被唯一复制的元素是 $o(m)$。但它至少应有 $5B\pm o(m) = \Theta(m)$ 个入边元素。这是一个矛盾。参见图 4 以便更好地理解。

2. 其次，考虑存在某个 $i\neq j$，同时有元素对 (i,j) 和 (j,i) 的情况。定义 k,ℓ，使得 $\{k,\ell\} = \{1,2,3,4\}\setminus\{i,j\}$。不能存在边 (k,ℓ) 或 (ℓ,k)，因为这会违反引理 25。因此，这意味着序列 k 和 ℓ 中的几乎所有元素都会被唯一复制到序列 i 和 j中。这样的元素有 $10B\pm o(m)$ 个，因此占据 $10B\pm o(m)$ 个位置。但序列 $10B\pm o(m)$ 中有 个可供副本使用的位置

30 Klee测度问题及相关问题的更高下界 $\mathbb{R}^d$， $d \geq 4$

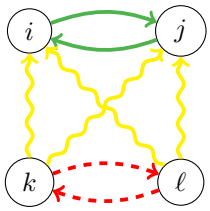


图 5 实线边存在，蛇形边可能存在，虚线边不可能存在。我们得出矛盾，因为有太多元素被唯一复制到序列 i 和 j。

序列 i 和 j 中总共有 i 个位置。于是，边 $(i,\ j)$ 和 $(j,\ i)$ 的权重应为 $o(m)$。但不能有值如此小的边，否则我们甚至不会将这样的元素对加入 P。这是一个矛盾。参见图 5，以便更好地理解。

由此得出该定理的证明。也就是说，对于任意 $(4,\ K,\ \alpha)$ PCD，都有 $\frac{K}{\alpha} \leq 2-\varepsilon'$ 对某个固定的 $\varepsilon' > 0$ 成立，且该值与 K 无关；例如，采用这种方法无法得到四维 Klee 测度问题的匹配下界。◀