arXiv:2303.08614v1 [math.CT] 15 Mar 2023

反同态的一种推广

TIANWEI LIANG

Abstract. 我们证明了反同态的一些优良性质，其中有些性质与同态的性质类似。同时，我们引入了一种称为 $*$-复合的新型复合，使得两个反同态的 $*$-复合仍然是反同态。此外，我们提出了一类称为分解范畴的范畴，它们推广了反同态的概念，并为研究“反”现象提供了一个一般框架。我们在高度一般的情形下推导出若干关于反同态的结果。

Contents

1. 引言 1.1. 背景与动机 1.2. “反”的概念 1
1.3. 本文获得的进一步结果 1.4. 本文的主要结果 2. 群的反同态 3. 环的反同态 4. 分解范畴 5. 可因子化函子 参考文献
1
1
2
2
8
15
19
29
33

1. Introduction

1.1. **背景与动机**。

众所周知，群（采用乘法记号）之间的同态 $f: G \to H$ 会保持积不变，即对于 $x, y \in G$，有 $f(xy) = f(x)f(y)$。然而，群（采用乘法记号）之间的反同态 $f^*: G \to H$ 会反转积，即对于 $x, y \in G$，有 $f(xy) = f(y)f(x)$。关于群、环等的反同态的文献很少。例如，两个反同态的复合是同态而非反同态，因此这类主题并未受到广泛研究。此外，反同构不能在群上构成等价关系，我们也无法构造一个以群为对象、以反同态为态射的范畴。看来反同态并未捕捉到某些良好的性质。

不过，一些作者如 C. C. MacDuffee 也曾以较为简略的方式探讨这一概念。2006 年，Chandrasekhara Rao, K. 和 G. Gopalakrishnamoorthy 定义了一种新的反同态复合，使得两个反同态的复合仍然是反同态。他们还证明了群论中关于同态的基本结果在反同态情形下的类似结论，包括同构定理。因此，我们的主要思路是将同态的一些良好性质推广到反同态上。

1.2. **“反”的概念**。

我们进一步讨论“反”这一概念。我们称环的一个同态 $\varphi: A \to B$ 为映射 $\varphi: A \to B$，满足 $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$，且 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，其中 $x, y \in A$。当我们说环的一个反同态 $\varphi: A \to B$ 时，指的是映射 $\varphi: A \to B$，满足

Key words and phrases. 范畴论、反同态、群论、同调代数、环论 .

that $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$，且 $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$，其中 $x,\ y \in A$。此外，复向量空间之间的反线性映射$\varphi : V \to W$是映射 $\varphi : V \to W$，满足 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$，且 $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$，其中 $x,\ y \in V$及 $\lambda \in \mathbb{C}$。将“反”这一概念理解为一种对偶性，是很自然的。

1.3. **本文所得的进一步结果**。

本文将研究所谓反同态的性质，并推导出一些反同态所具有、且同态也具备的良好性质。随后，我们将反同态推广为所谓的反态射，并构造一类称为分解范畴的范畴。借助这些概念，我们将推导出一些一般性结果，说明反态射在原范畴中具有态射所具备的性质。下面概述本文的主要结果。

1.4. **本文的主要结果**。

在第2节中，我们研究群的范畴<系 style id='1'>群。首先，我们介绍一些关于群的反同态的基本知识。

以下是 K. Chandrasekhara Rao 和 Swaminathan Venkatara- man 在 [3,定理 2.3，定理 2.4]中给出的一个重要结果。

命题1.1。 设 $\varphi : A \to B$ 是群同态（分别为群反同态），且$\psi : B \to C$ 是群反同态（分别为群同态）。那么 $\psi \circ \varphi : A \to C$ 是群反同态。若 $\varphi : A \to B$ 和 $\psi : B \to C$ 是群反同态，则 $\psi \circ \varphi : A \to C$ 是群同态。

这启发我们反过来思考：任意群同态是否都能分解为群反同态的复合。注意到每个同态都可以表示为一个反向映射与一个反同态的复合，由此可得以下定理:

定理1.2。 每个群同态都可以表示为群反同态的复合。

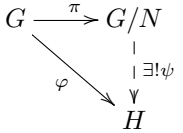
为弥补反同构无法在群上构成等价关系这一缺陷，我们定义了反同态之间的等价关系：若两对反同态的复合是同一个同态，则称它们等价。借助这一等价关系，我们可以定义一个函数，将每个同态对应到由反同态对构成的等价类。我们将此函数称为分解律。

命题 1.3 节。对于Ob(群)中的每组三个对象 $A, B, C \in$，我们有一个分解律 n

$$\mathrm{Hom}(A, C) \to [An(A, B), An(B, C)], \quad f \mapsto [f].$$

由于文献资料散佚， [2], 我们重新证明反分解定理、反同态定理、第二反同构定理和第三反同构定理；它们分别对应于分解定理、同态定理、第二同构定理和第三同构定理。

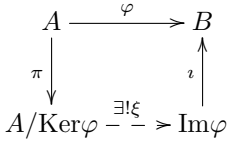
定理 1.4 (反分解定理**)**。 设 N 是 G 的正规子群，且 $\varphi :\ G \to H$ 是一个反同态，其核包含 N，则存在唯一的反同态$\psi :\ G/N \to H$，使下图交换（π 是自然投影）：



定理 1.5 (反同态定理**)**。 若 $\varphi : A \to B$ 是反同态，则存在一个典范反同构

$$A/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi,$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $A/$核$\varphi \xrightarrow{\sim}$ 像φ ，使下图交换:

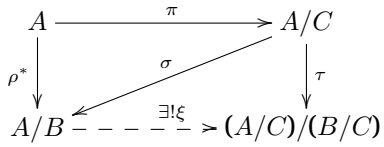


（$\imath$ 是包含同态， π 是自然投影。）

定理 1.6 （第二反同构定理）。 设 A 是一个群， B、 C 是 A的正规子群。若 $C \subset B$，则 C 是 B 的正规子群，且 B/C 是 A/C的正规子群。于是存在唯一的反同构

$$A/B \cong (A/C)/(B/C),$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $A/B \xrightarrow{\sim}$（A/C）/（B/C） 使得下图交换:

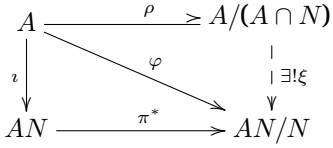


（π、 τ 是自然投影， ρ^* 是反投影，即对于自然投影 ρ， $\rho^* = \rho \circ 1^*$。）

定理 1.7 (第三反同构定理**)**。 设 A 是群 G的一个子群，且N是 G的一个正规子群。那么， AN是 G的一个子群， N是 AN的一个正规子群， $A \cap N$是 A的一个正规子群，并且存在唯一的反同构

$$AN/N \cong A/(A \cap N),$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $AN/N \xrightarrow{\sim} A/$（$A \cap N$），使得下图交换:



（$\imath$ 是包含同态， ρ 是自然投影，而 π^* 是反投影。）

于是我们定义一种称为 $*$-复合 的复合运算，使得两个反同态的 $*$-复合仍是反同态。利用 $*$-复合，我们最终可以构造由群和反同态组成的范畴，记作**Groups-An**。可以看出，我们能够定义一个将每个同态映射为一个反同态的函数。事实上，我们有如下命题:

命题 1.8。 对于任意$A, B \in$ Ob(群)，集合$\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} An(A, B)$ 之间存在一一对应。

利用上述命题，我们得到以下定理:

定理 1.9。 群及同态构成的范畴群 与群及反同态构成的范畴 ***Groups-An***等价。

在第 3 节中，我们研究环的范畴**环** 。我们还首先介绍一些关于环的反同态的基础知识。接着，我们推导出若干优美的结果，其中一些与群的情形或多或少相同。然后，我们列出一些有趣的结果。

我们证明，环的反同态保持子环，并且可能反转理想。

命题 1.10. 设 φ: $A \to B$ 是环的反同态。若 A_0 是 A的子环，则

$$\varphi(A_0) = \{\varphi(x) \mid x \in A_0\}$$

是 B 的子环。如果 B_0 是 B 的子环，那么

$$\varphi^{-1}(B_0) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B_0\}$$

是 A 的子环。此外，如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的左理想，且 φ 是反满同态，那么 $\varphi(\mathfrak{a})$ 是 B 的右理想。并且，如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 的左理想，且 φ 是反满同态，那么 $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ 是 A 的右理想。

我们还证 明每个同态都可以表示为反同态的复合。

定理 1.11. 每个环同态都可以表示为环的反同态的复合。

并且我们 证明环的反分解定理和反同态定理 .

定理 1.12（反分解定理）。设 I 是环 R 的一个理想。对于任意一个核包含 I 的环反同态 f：$R \to S$，存在唯一的反同态ψ： $R/I \to S$，使得下图可交换（π 是自然投影）：

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi} & R/I \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ & & S \end{array}$$

定理 1.13（反同态定理）。若 φ： $R \to S$ 是环的反同态，则存在一个典范反同构

$$R/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi,$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $R/$核$\varphi \xrightarrow{\sim}$ 像φ，使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \imath} \\ R/\mathrm{Ker}\varphi & \xrightarrow{\xi} & \mathrm{Im}\varphi \end{array}$$

（π 是自然投影， $\imath$ 是包含同态）。

以下是我们希望置于更广泛背景下讨论的结果:

定义/命题 1.14. 考虑范畴 $\mathcal{C}$，它是群 或环 .

(1) 对于每一对对象 $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，我们将同态集合 记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$，将反同态集合 记为 $An(A,B)$。同构集合 记为$\mathrm{Hom.Is}(A,B)$，反同构集合 记为 $An.\mathrm{Is}(A,B)$。(2) 对于每三個对象 $A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，我们有复合律

$$\begin{aligned} &An(A,B) \times An(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C) \\ &An(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \to An(A,C) \\ &\mathrm{Hom}(A,B) \times An(B,C) \to An(A,C) \\ &\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C) \end{aligned}$$

以及分解律

$$\mathrm{Hom}(A,C) \to [An(A,B), An(B,C)], \quad f \mapsto [f].$$

(3) 对于每个 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，都存在一个反向映射 $1_A^* \in An(A,A)$，使得对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$，都有 $f \circ 1_A^* \in An(A,B)$。并且对于任意 $g \in \mathrm{Hom}(B,A)$，都有 $1_A^* \circ f \in An(B,A)$。

(4) 上述定义的复合是结合的。

通过比较**群**与**环**中的“反”现象，我们认为，这种“反”现象可以在更一般的范畴论框架中加以研究。这促使我们在第 4 节定义所谓的分解范畴。粗略地说，分解范畴是一种范畴 $\mathscr{C}$，我们在其中加入了反态射，并要求其满足若干公理。

利用分解范畴，我们成功地推导出了群和环中的一些推广结果。由于两个反态射的复合是一个态射，我们也反过来考虑：如果每个态射都能表示为反态射的复合，那么，同样地，注意到每个态射都可以写成一个反向态射与一个反态射的复合，便可得到以下定理：

定理 1.15. 每个态射都可以表示为反态射的复合 $s.$

上述定理在反态射上导出了一个等价关系。如果两对可复合反态射的复合相等于同一个态射，则称它们等价 。如此定义的等价关系导出一个函数，将每个态射对应到反态射对的等价类。我们称此函数为分解律。

命题 1.16. 设 $\mathscr{C}$ 是一个分解范畴。对于任意 A、B、$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，我们有一个分解律

$$\mathrm{Hom}(A,C) \to [An(A,B), An(B,C)], \quad f \mapsto [f].$$

我们发现，分解范畴可以将底层范畴中态射的某些性质继承到反态射上。这使我们能够定义反态射的核、余核、余像和像，以及反单态射和反满态。然后，利用这些概念，我们证明了反态射的若干结果：这些结果中的态射在预加性范畴和阿贝尔范畴中成立。

引理 1.17。 设 $f^*: \ x \to y$ 是预加性分解范畴中的一个反态射。若核、余核、余像和像均存在，则 f^* 可唯一分解为如下序列：

$$x \to \mathrm{Coim}(f^*) \to \mathrm{Im}(f^*) \to y.$$

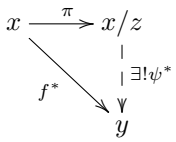
Le引理 1.18。设 $f^*: \ x \to y$ 是一个反-阿贝尔分解范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射。则

（1） f^* 是单射，当且仅当 f^* 是反单态射。（2） f^* 是满射，当且仅当 f^* 是反满态。

更重要的是，我们在阿贝尔分解范畴的情形下，推导出了广义反同态定理、广义反分解定理和广义第二反同构定理。

定理 1.19 (广义反同态定理)。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 $f^*: \ x \to y$ 是 $\mathscr{C}$中的一个反态射。那么我们有一个反同构 $x/$核$(f^*) \cong$像(f^*)。特别地，若 f^* 是单射，则 $x \cong$像(f^*)。若 f^* 是满射，则 $x/$核$(f^*) \cong y$。

定理 1.20 (广义反分解定理)。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 $f^*: \ x \to y$ 是 $\mathscr{C}$中的一个反态射。若 $\mu: \ z \to x$ 是一个单态射，且满足 $f\mu = 0$，则存在唯一的反态射 $\psi^*: \ x/z \to y$，使得下图交换（π是典范映射）：



定理 1.21 (广义第二反同构定理)。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 满足 $C \subset B \subset A$。那么存在唯一的反同构

$$(A/C)/(B/C) \cong A/B.$$

此外，我们可以在分解范畴中定义反态射的 $*$-复合，使得两个反态射的$*$-复合仍是一个反态射。利用 $*$-复合，我们可以从一个分解范畴构造其反范畴 $\mathscr{C}^{An}$，它与 $\mathscr{C}$ 相关。它是一个范畴，其对象与 $\mathscr{C}$ 相同，态射则是 $\mathscr{C}$中的反态射。注意，我们可以定义一个函数，将每个态射映射为一个反态射。事实上，我们有以下命题：

命题 1.22. 设 $\mathscr{C}$ 是任意一个分解范畴。对于任意 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，存在集合之间的一一对应 $\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} An(A, B)$ 。

利用上述命题，我们得到以下定理：

定理 1. 23. 设 $\mathscr{C}$ 是一个分解范畴。与之相关的反范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 和底层范畴 $\mathscr{C}$ 等价。

因此，上述定理可以直接推出以下定理：

定理 1. 24. 如果 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，那么与之相关的反范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 是一个阿贝尔范畴。

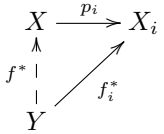
此外，利用 $*$-复合，我们可以定义双函子 $An(-,-)$：它将相关阿贝尔反范畴 $\mathscr{C}^{An}$中的对象A, B对应到从 A到 B的反态射群。可以验证， $An(-,-)$ 与双函子 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 同构。

定理 1.25。 $An(-,-)$ 是从相关阿贝尔反范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 到阿贝尔群范畴$\boldsymbol{Ab}$ 的双函子。它对第一个变量是反变的，对第二个变量是协变的。此外，函子 $An(-,-)$ 与 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 同构。

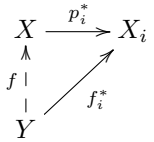
通过考察范畴中积的泛性质，我们证明了具有积的分解范畴中的两个泛性质反类比，称为反泛性质。

命题 1.26。 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有积的分解范畴。

(1) 设$(X_i)_{i\in I}$ 是中由集合 I 索引的对象族，且$X = \prod_{i\in I} X_i$ 是 X_i 的积，其投影为 $p_i: X \to X_i$。那么，对于任意对象 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 以及中的反态射f_i^*: $Y \to X_i$，存在唯一的反态射 f^*: $Y \to X$，使得 $f_i^* = p_i \circ f^*$，也就是说，下图交换：



(2) 设$(X_i)_{i\in I}$ 是中由集合 I 索引的对象族，且 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是 X_i 的积，其反投影为 p_i^*: $X \to X_i$ $(p_i^* = p_i \circ 1^*)$。那么，对于任意对象 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$以及中的反态射 f_i^*: $Y \to X_i$，存在唯一的态射 f: $Y \to X$，使得$f_i^* = p_i^* \circ f$，也就是说，下图交换：



利用反泛性质，我们定义了与给定积相关的反积 概念，它可视为范畴积的反向类比。借助反泛性质，我们分别证明了关于积的反同构定理和关于反积的同构定理。

定理1.27。 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有积的分解范畴。

(1) 若 $(X;p_i)$ 和 $(X';p'_i)$ 都是 $\mathscr{C}$ 中族 $(X_i)_{i\in I}$ 的积，则存在唯一的反同构 $g^*: X \xrightarrow{\sim} X'$，使得 $p_i^* = p'_i \circ g^*$。(2) 若 $(X;p_i^*)$ 和 $(X';p_i'^*)$ 都是 $\mathscr{C}$ 中族 $(X_i)_{i\in I}$ 的反积，则存在唯一的同构 $g: X \xrightarrow{\sim} X'$，使得 $p_i^* = p_i'^* \circ g$。

在第5节中，我们定义了两个分解范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 之间某种类型的函子。设 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是一个函子。注意，对于任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，集合映射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ 会诱导出一个集合映射 $An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。事实上，有如下引理:

引理*1.28.* 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是分解范畴，$F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是底层范畴之间的函子。那么，对于任意 $x, y \in Ob(\mathscr{C})$，集合映射 $Hom_{\mathscr{C}}(x, y) \to Hom_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ 会诱导出一个集合映射 $An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。此外，若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是预加性分解范畴，且 F 是底层预加性范畴之间的加性函子，则群同态 $Hom_{\mathscr{C}}(x, y) \to Hom_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ 会诱导出一个群同态 $An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。

这使我们能够定义分解范畴之间的可分解函子这一概念。粗略地说，可分解函子由一个函子以及反态射集合之间所有诱导的集合映射构成，并且保持反态射与态射的复合，以及反态射与反态射的复合。因此，分解范畴之间的可分解函子若其定义域和陪域都具有积，则它保持反积，这一点可直接得出。

受小范畴与函子组成的范畴**Cat** 这一例子的启发，我们构造小分解范畴与可分解函子组成的范畴**Fa** 。容易看出，可以定义从**Cat** 到**Fa** 以及从**Fa** 到**Cat**的函子。我们定义遗忘分解结构函子 $\mathbf{FCA}$:**Fa** $\to$**Cat**，它遗忘每个分解范畴的分解结构。我们还定义分解函子$\mathbf{CAF}$: **Cat** $\to$ **Fa**，它为每个范畴赋予分解结构，使之成为分解范畴。由此我们推得，**CAF** 既是**FCA**的左伴随，也是其右伴随。

定理 1.29. 分解函子$\boldsymbol{CAF}$ 既是遗忘分解结构函子$\boldsymbol{FCA}$的左伴随，也是其右伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa})$，存在函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa}}(\boldsymbol{CAF}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA}(\mathscr{D}))$$

and

$$\xi'_{\mathscr{D},\mathscr{C}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa}}(\mathscr{D}, \boldsymbol{CAF}(\mathscr{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat}}(\boldsymbol{FCA}(\mathscr{D}), \mathscr{C}).$$

此外，我们考虑由小预加性分解范畴和可分解加性函子构成的**Fa-Pa** 子范畴。令**Cat-Pa** 为 **Cat** 中由**Fa** 的小预加性范畴和加性函子构成的子范畴。我们可以定义遗忘型预加性因子函子 **FCA-Pa** :**Fa-Pa** $\to$**Cat-Pa**，它可视为**FCA** 在**FCA-Pa**上的限制。我们还可以定义分解预加性函子 **CAF-Pa** : **Cat-Pa** $\to$ **Fa-Pa**，它可视为**CAF** 在**Cat-Pa**上的限制。通过几乎相同的证明，我们可以证明**CAF-Pa** 既是**FCA-Pa**的左伴随，也是其右伴随。

定理 1.30. 分解预加性函子 $\boldsymbol{CAF\text{-}Pa}$ 既是遗忘型预加性因子函子 $\boldsymbol{FCA\text{-}Pa}$的左伴随，也是其右伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Pa})$ 和$\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Pa})$，存在函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Pa}}(\boldsymbol{CAF\text{-}Pa}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Pa}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA\text{-}Pa}(\mathscr{D}))$$

and

$$\xi'_{\mathscr{D},\mathscr{C}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Pa}}(\mathscr{D}, \boldsymbol{CAF\text{-}Pa}(\mathscr{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Pa}}(\boldsymbol{FCA\text{-}Pa}(\mathscr{D}), \mathscr{C}).$$

设**Fa-Ab** 是由小阿贝尔分解范畴和可分解加性函子构成的**Fa** 的子范畴，**Cat-Ab** 是由小阿贝尔范畴和加性函子构成的**Cat** 的子范畴。若**CAF-Ab** 是**CAF-Pa** 在**Cat-Ab** 上的限制，且 **FCA-Ab** 是**FCA-Pa**在**Fa-Ab**上的限制，那么同理可得

定理 1.31. 函子$\boldsymbol{CAF\text{-}Ab}$既是函子$\boldsymbol{FCA\text{-}Ab}$的左伴随，也是其右伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Ab})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Ab})$，存在函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Ab}}(\boldsymbol{CAF\text{-}Ab}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Ab}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA\text{-}Ab}(\mathscr{D}))$$

and

$$\xi'_{\mathscr{D},\mathscr{C}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Ab}}(\mathscr{D}, \boldsymbol{CAF\text{-}Ab}(\mathscr{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Ab}}(\boldsymbol{FCA\text{-}Ab}(\mathscr{D}), \mathscr{C}).$$

2. Anti-homomorphisms of Groups

本节中，所有群不一定都是阿贝尔群。我们首先介绍一些关于群反同态的基础知识。为简便起见，有时我们会简称为反同态，而不说群反同态。

定义 2.1 ([3], 定义 2.1)。群的一个反同态 $\varphi : A \to B$，采用乘法记号表示，是一个映射 $\varphi : A \to B$ 使得 $\varphi(x \cdot y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$ 对所有 $x, y \in A$均成立。

群反同态保持单位元、逆元和幂。

命题 2.2 ([1])。**</style}若：** $A \to B$ 是群的反同态，则 $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$，且 $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$ 对所有 $x \in A$ 和 $n \in \mathbb{Z}$均成立。

设 A，B，C为群。显然，若 $\varphi : A \to B$是同态，且 $\psi : B \to C$是反同态，则它们的复合 $\psi \circ \varphi : A \to C$ 也是反同态。若$\varphi : A \to B$ 是反同态，且 $\psi : B \to C$ 是同态，则它们的复合也为反同态。然而，若 $\varphi : A \to B$ 和 $\psi : B \to C$ 都是反同态，则它们的复合 $\psi \circ \varphi : A \to C$ 是同态。我们将这些结论总结为以下命题。

命题 2.3 （[3], 定理 2.3，定理 2.4）。设 $\varphi : A \to B$ 是群之间的同态（分别为反同态），且 $\psi : B \to C$ 是群之间的反同态（分别为同态）。那么 $\psi \circ \varphi$ 是反同态。若 $\varphi : A \to B$和 $\psi : B \to C$ 是群反同态，则 $\psi \circ \varphi$ 是同态。

由于两个反同态的复合是同态，因此自然会提出这样的问题：一个同态能否表示为若干反同态的复合？下面的定理给出了答案。

定理 2.4. 任何同态都可以表示为反同态的复合 *s.*

由于有些记号尚未定义，我们将证明留到后面。设 A，B，C，D 是群，且φ，φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2是满足 $\varphi_2 \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi_1 = \varphi$ 的映射。事实上，定理 2.4 表明，如果下列交换图的对角线 φ 是同态，那么 φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2 都是反同态。

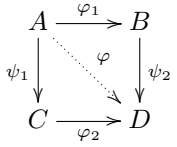


Figure 1. 交换图

对于群及其同态，我们可以构造群范畴 **Groups**，其对象是群，态射是同态。然而，群及其反同态无法构成一个范畴 $\mathscr{C}$，其对象是群，态射是反同态。因为对于 $\mathscr{C}$ 中任意三个对象 A,B,C，复合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$ 并不封闭（两个反同态的复合是同态）。

对于群的任意反同态 $\varphi: A \to B$，如果 A 或 B 是阿贝尔群，那么该反同态就成为同态，因为 $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(y)$，其中 $x, y \in A$。因此，阿贝尔群及其同态构成的范畴 $\mathbf{Ab}$ 也可以视为阿贝尔群及其反同态构成的范畴，因为在交换性条件下，同态与反同态没有区别。

以下 定理说明了同态与反同态之间的关系。

定理 2.5. 设 $\varphi: A \to B$ 是群反同态。那么，当 A 或 B 是阿贝尔群时，φ 是群同态。特别地，

(1) 若 φ 是单射，则 f 是同态当且仅当 A 是阿贝尔群；(2) 若 φ 是满射，则 f 是同态当且仅当 B 是阿贝尔群；(3) 此外，若 φ 是双射，则群 A、B 是同构的阿贝尔群。

证明。 不失一般性，假设 A 是阿贝尔群，则有

$$\varphi(yx) = \varphi(x)\varphi(y),$$
$$\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x),$$
$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) \text{ (since } \varphi(yx) = \varphi(xy)),$$

这表明 φ 是一个同态。

反过来，假设 φ 是一个同态，那么对于 x，$y \in A$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx),$$

这表明如果 φ 是满射，则B 是阿贝尔群。注意，在这种情况下，A 是阿贝尔群当且仅当 φ是单射。如果 φ 是反同构，那么 $\varphi(xy) = \varphi(yx)$蕴含 $xy = yx$，这表明A 也是阿贝尔群，并且A 与B同构。□

接下来，我们将定义一种新的反同态复合，使得两个反同态的这种复合在没有交换性的情况下仍然是反同态。

接下来，我们将定义反单态射、反满态和反同构。在此之前，我们先给出以下命题:

命题 2.6 ([1])。 如果 φ 是群的一个双射反同态，那么它的逆双射φ^{-1} 也是群的反同态。

定义 2.7 ([1])。 群的反单态射 是群的单射反同态。群的反满同态 是群的满射反同态。

群的反同构 是群的双射反同态。若存在反同构 $A \cong B$，则称两个群A 和B反同构 。若 f 是反同构，则其逆 f^{-1} 称为它的反逆。

接下来，我们定义反同态的核和像。

定义 2.8. 设 φ: $A \to B$ 是群的反同态。那么，φ 的核 为

$$\text{Ker } \varphi := \{a \in A \mid \varphi(a) = 1\}.$$

φ的像 为

$$\text{Im } \varphi := \{\varphi(a) \mid a \in A\}.$$

我们列出一些关于群反同态的核、余核和像的命题。

命题 2.9. 设 $\varphi: A \to B$ 是一个群反同态。那么$\text{Ker}\varphi$ 是 A 的正规子群，而$\text{Im}\varphi$ 是 B的子群。

证明。 我们只证明 Ker φ 是 A 的正规子群。由于在 [1], 中，对于任意 $x, y \in A$，$\varphi(x) = \varphi(y)$ 当且仅当 $x - y \in$ Ker φ。于是 $x \in$ Ker $\varphi + y$ 当且仅当 $x \in y +$ Ker φ，这表明 Ker φ 是 A的正规子群。其余部分留作练习。□

命题 2.10. 设 $\varphi: A \to B$ 是一个群反同态。那么，φ 是反单态射，当且仅当核$\varphi = 0$。并且，φ 是反满同态，当且仅当余核$\varphi = 0$。

备注 2.11。 注意，Coker$\varphi := B/\text{Im}\varphi$。

证明. 第一部分见 [1]。若 φ 是满射，则像 Im $\varphi = B$，这表明 Coker $\varphi = 0$。反之，若 Coker $\varphi = 0$，则有 Im $\varphi = B$，这表明 φ 是满射。□

自然会想到，是否可以通过反同构来定义等价关系。然而，尽管同构是群上的一种等价关系，我们可以证明反同构并不能在群上构成等价关系。事实上，我们可以定义一个反同构 $\varphi: A \to A$，令 $\varphi(x) = x^{-1}$，其中 $x \in A$（注意，对于，$y \in A$，我们有 $\varphi(xy) = y^{-1}x^{-1}$），这证明了自反性。然后，如果 $\varphi: A \to B$ 是一个反同构，根据命题 2.4，φ^{-1} 也是一个反同构，这证明了对称性。然而，由于两个反同态的复合是一个同态，我们看到传递性不成立。

为弥补这一缺陷，接下来我们将以一种不那么显然的方式，在反同态上定义一个等价关系。

事实上，定理 2.4 给出了反同态上的这样一个等价关系。考虑图 1 中的交换图。若 $\varphi_2 \circ \psi_1$ 和 $\varphi_1 \circ \psi_2$ 都等于同一个同态 φ，则我们可以定义 $(\varphi_2, \psi_1) \sim (\varphi_1, \psi_2)$，也就是说，$(\varphi_2, \psi_1)$ 和 (φ_1, ψ_2) 是同一个同态 φ 的分解。接下来，我们证明这一关系实际上是一个等价关系。由于自反性和对称性显而易见，我们只需证明传递性。若 (φ_3, ψ_3) 是同态 φ 的另一个分解，则三元组 (φ_2, ψ_1)、(ϕ_2, ψ_1) 和 (ϕ_3, ψ_3) 都是同态 φ 的分解，由此即可证明传递性。

我们用 $[(\varphi_1, \psi_2)]$ 表示等价类，即有序对 (φ_1, ψ_2) 的等价类。我们用 $[\varphi]$ 表示由所有复合为同态φ的反同态对的等价类构成的集合。符号 $[An(A, B)\ An(B, C)]$ 则表示由所有形如 $(A \to B, B \to C)$ 的反同态对的等价类构成的集合。

由于同态的复合满足结合律，下面的命题表明，同态与反同态的复合也满足结合律。

命题 2.12. 同态与反同态的复合满足结合律。反同态的复合也满足结合律。

证明。 我们只证明两种情形，其余情形类似。若 f_1, f_2, f_3 是同态，且 f_1^*, f_2^*, f_3^*是反同态。那么，当这些复合有意义时，对于源群中的 x，有

$$\begin{aligned}
[(f_1 \circ f_2) \circ f_3^*](x) &= (f_1 \circ f_2)(f_3^*(x)) = f_1(f_2(f_3^*(x))), \\
[f_1 \circ (f_2 \circ f_3^*)](x) &= f_1((f_2 \circ f_3^*)(x)) = f_1(f_2(f_3^*(x))); \\
[(f_1 \circ f_2^*) \circ f_3^*](x) &= (f_1 \circ f_2^*)(f_3^*(x)) = f_1(f_2^*(f_3^*(x))), \\
[f_1 \circ (f_2^* \circ f_3^*)](x) &= f_1((f_2^* \circ f_3^*)(x)) = f_1(f_2^*(f_3^*(x))).
\end{aligned}$$

这表明 $(f_1 \circ f_2) \circ f_3^* = f_1 \circ (f_2 \circ f_3^*)$ 和 $(f_1 \circ f_2^*) \circ f_3^* = f_1 \circ (f_2^* \circ f_3^*)$。 □

事实上，我们可以将任意反同态看作一个同态与一个反向映射的复合。群 $G \to G$ 的反向映射 f 是一个映射 $f: G \to G$，满足$f(x) = x$且 $f(xy) = yx$，对所有 $x, y \in G$均成立。设 $\varphi: S \to H$ 是群之间的一个同态，$\psi: H \to H$ 是一个反向映射。那么 $\psi \circ \varphi: S \to H$, $\psi \circ \varphi(xy) = \psi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(y)\varphi(x)$ 对于 $x, y \in S$成立，这表明该复合是一个反同态。这确实证明了定理 2.4，但我们可以简化记号。

W我们在以下命题中总结了我们特别感兴趣的结果 n:

定义/命题 2.13。

(1) 对于每一对对象 $A,B \in$ Ob(群)，我们将同态集合记为Hom(A, B)，将反同态集合记为 $An(A, B)$。我们将同构集合记为Hom。Is(A, B)，将反同构集合记为 An.Is(A, B)。

(2) 对于每三个对象 $A,B,C \in \mathrm{Ob}(\text{群})$，我们有复合律

$$An(A,B)\times An(B,C)\to \mathrm{Hom}(A,C)$$
$$An(A,B)\times \mathrm{Hom}(B,C)\to An(A,C)$$
$$\mathrm{Hom}(A,B)\times An(B,C)\to An(A,C)$$
$$\mathrm{Hom}(A,B)\times \mathrm{Hom}(B,C)\to \mathrm{Hom}(A,C)$$

以及一条分解律

$$\mathrm{Hom}(A,C)\to [An(A,B),An(B,C)],\quad f\mapsto [f].$$

(3) 对于每个 $A,B\in \mathrm{Ob}(\text{群})$，都存在一个反向映射 $1_A^*\in An(A,A)$，使得对于任意态射 $f\in \mathrm{Hom}(A,B)$，都有 $f\circ 1_A^*\in An(A,B)$。并且对于任意 $g\in \mathrm{Hom}(B,A)$，都有 $1_A^*\circ f\in An(B,A)$。

(4) 上述定义的复合是结合的。

注记 2.14。注意，对于每个 $A,B\in$**Ob(群)**，以及任意 $f^*\in An(A,B)$，都有 $f^*\circ 1_A^*\in$**Hom**(A,B)。并且对于任意 $g^*\in An(B,A)$，都有 $1_A^*\circ g^*\in$**Hom**(B,A)。对于反向映射1_A^*，若不致混淆，我们将省略下标，直接写作 1^*。

命题 2.15. 对于群范畴 群，任意 $A,B\in \mathrm{Ob}(\text{群})$，集合$\mathrm{Hom}(A,B)\xrightarrow{\sim} An(A,B)$ 之间存在一一对应。

证明。事实上，我们可以定义一个函数 **Hom**$(A,B)\to An(A,B)$ $f\mapsto f^*=f\circ 1^*$，其逆函数由 $An(A,B)\to$ **Hom**(A,B) $f^*\mapsto f=f^*\circ 1^*$定义。因此，我们得到所需的一一对应 **Hom**$(A,B)\xrightarrow{\sim} An(A,B)$。□

备注 2.16。对于任意同态 f，反同态 $f^*=f\circ 1^*=1^*\circ f$ 称为 f 的对应反同态。由于每个反同态 φ 都可以写成$f\circ 1^*=1^*\circ f$，其中 f 是某个同态，因此对于任意反同态，我们可以写作 f^*。类似地，对于任意反同态 f^*，同态 $f=f^*\circ 1^*=1^*\circ f^*$ 称为 f^* 的对应同态。显然，我们有 $f=f^{**}$。

于是，在群的情形下，[4], 定理 7 成为命题 2.15 的一个推论。

推论 2.17。若 $A,B\in \mathrm{Ob}(\text{群})$，则 A,B 同构，当且仅当 A,B 反同构。

利用命题 2.13 中定义的记号，我们可以简要证明定理 2.4。

定理 *2.4* 的证明。设 $\phi\colon A\to B$ 是群的一个同态。那么存在一个 A 的反向映射$1^*\colon A\to A$ 以及一个反同态 $\varphi\colon A\to B$，使得 $(\varphi\circ 1^*)(xy)=\varphi(1^*(xy))=\varphi(yx)=\varphi(x)\varphi(y)$ 对于 $x,y\in A$ 成立。因此，我们得到所需的 $\phi=\varphi\circ 1^*$。□

推论 2.18。每个群同态 $\phi\colon A\to B$ 都可以分解为一个序列 *ce*

$$A\xrightarrow{1^*}A\xrightarrow{\varphi}B,$$

其中，1^* 是 A 的反向映射，而 φ 是反同态。

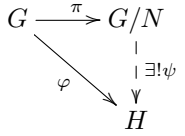
采用命题 2.13 中引入的记号，我们由定理 2.5 推出以下命题，它是群情形下的 [4], 定理 8：

命题 2.19。如果群 A 不是阿贝尔群，那么对于任意$B\in \mathrm{Ob}(\text{群})$，都有$\mathrm{Hom.Is}(A,B)\cap An.\mathrm{Is}(A,B)=\varnothing$。

证明。如果 $f\in$**Hom.Is**$(A,B)\cap An.$**Is**(A,B)，那么根据定理 2.5，B 是阿贝尔群。然而，A 不是阿贝尔群，而是 $A\cong B$，这就产生了矛盾！因此，我们有 **Hom.Is**$(A,B)\cap An.$**Is**$(A,B)=\varnothing$。□

接下来，我们证明分解定理的一个类似结论（参见 [5], 第一章，定理 5.1），称为反分解定理。

定理 2.20 (反分解定理)。 设 N 是 G 的一个正规子群，且 φ： $G \to H$是一个反同态，其核包含 N，则存在唯一的反同态ψ： $G/N \to H$，使下图交换（π 是自然投影）：



证明。 首先，对所有 $x \in G$，我们定义 $\psi(xN) := \varphi(x)$。接下来要证明 ψ 是良定义的。由于 Ker φ包含 N，若 $x^{-1}y \in N$，则有 $\varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}y) = 1$，因此 $xN = yN$推出$\varphi(x) = \varphi(y)$。于是我们得到 $\varphi = \psi \circ \pi$。

接下来，由于 φ 是反同态，我们可以很容易地证明 ψ 也是反同态。然后，我们要证明 ψ 是唯一的。设 ℓ: $G/N \to H$ 是另一个满足$\varphi = \ell \circ \pi$的反同态。那么，对所有 $xN \in G/N$， $\ell(xN) = \varphi(x) = \psi(xN)$，这表明 $\ell = \psi$。 □

以下定理也可以看作是同态定理的一个类似结果，但由于其证明与同态定理的证明并不类似，我们不会称之为反同态定理。

定理 2.21. 设 φ： $A \to B$ 是群同态，则存在一个典范反同构

$$A/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi.$$

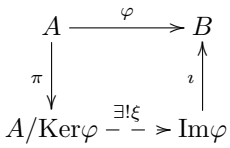
证明. 同态定理给出一个典范同构 φ： A/核 $\varphi \cong$ 像 φ。再与反向映射 1^*复合，即得所需的反同构 $\varphi \circ 1^*$： A/ 核 $\varphi \cong$ 像 φ。□

接下来，我们将证明同态定理、第二同构定理和第三同构定理的反类比（见 [5], 第一章，定理 5.2、定理 5.8 和定理 5.9）。这些结果可能已在 [2], 中证明，但相关文献已佚。因此我们重新证明这些重要结果。

定理 2.22 （反同态定理）。 若 φ: $A \to B$ 是反同态，则存在一个典范反同构

$$A/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi,$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： A/核$\varphi \xrightarrow{\sim}$ 像φ ，使得下图交换:



（$\imath$ 是包含同态， π 是自然投影。）

证明。 设 ψ: $A \to$像 φ是一个反同态，满足 $\varphi = \imath \circ \psi$。那么核 $\psi =$核 φ，由定理 2.20 可知，存在唯一的反同态 ξ： A/核 $\psi \to$像 φ ，使得$\psi = \xi \circ \pi$。因此我们有 $\varphi = \imath \circ \xi \circ \pi$。此外， ψ 的满射性意味着 ξ 是满射。又因为 ξ(x核 ψ) $= 1 \Rightarrow \varphi(x) = 1 \Rightarrow x \in$核 ψ，所以 ξ 是单射。因此， ξ 是反同构。

接下来，我们证明唯一性。若 ℓ 是另一个满足 $\varphi = \imath \circ \ell \circ \pi$的反同态，则对于所有 x核 $\varphi \in A$/核 φ，我们有 $\ell(x$核 $\varphi) = \varphi(x) = \xi(x$核 $\varphi)$，这表明 $\ell = \xi$。□

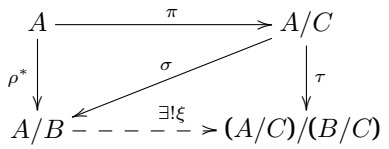
推论 2.23. 设 φ: $A \to B$ 是反同态。若 φ 是单射，则 $A \cong$像φ。若 φ 是满射，则 $B \cong A$/核φ。

证明。 如果 φ 是单射，那么核 $\varphi = 1$，我们有 $A \cong A$/核 $\varphi \cong$ 像 φ。如果 φ 是满射，那么$B =$像 $\varphi \cong A$/核 φ。□

定理 2.24 (第二反同构定理)。 设 A 是一个群， B和C 是 A的正规子群。若 $C \subset B$，则 C 是 B 的正规子群，且 B/C 是 A/C的正规子群。于是存在唯一的反同构

$$A/B \cong (A/C)/(B/C),$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $A/B \xrightarrow{\sim}(A/C)/(B/C)$ 使得下图可交换:



(π, τ 是自然投 影，且 ρ^* 是反投影，即对于自然投影 ρ, $\rho^* = \rho \circ 1^*$)。

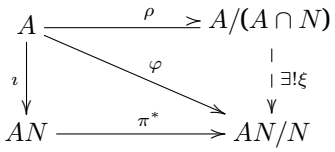
证明。 由定理 2.20，存在唯一的反同态 σ： $A/C \to A/B, aC \mapsto aB$使得 $\rho^* = \sigma \circ \pi$。由于 π 和 ρ^* 均为满射，故 σ 也是满射。接下来，我们要证明 Ker $\sigma = B/C$。首先，若 $bC \in B/C$，其中 $b \in B$，则有 $\sigma(bC) = bB = 1$，且其属于 A/B。反之，若 $\sigma(aC) = aB = 1$，则有 $a \in B$。因此 Ker $\sigma = B/C$，且 Ker σ 是 A/C 的正规子群。由定理 2.22， $A/B = \text{Im } \sigma \cong (A/C)/\text{Ker } \sigma = (A/C)/(B/C)$。事实上，定理 2.22 给出一个反同构 ξ: $A/B \cong (A/C)/(B/C)$，使得 $\tau = \xi \circ \sigma$，进而得到 $\xi \circ \rho^* = \tau \circ \pi$。

若 ℓ 是另一个满足 $\xi \circ \rho^* = \tau \circ \pi$ 的反同构，则由 ρ^* 的满射性可知 $\ell = \xi$。□

定理 2.25 （第三反同构定理）。设 G 是一个群， A 是其子群，且 G 的正规子群为 N。则 G 的子群为 AN， AN 的正规子群为 N， A 的正规子群为 $A \cap N$，并且存在唯一的反同构

$$AN/N \cong A/(A \cap N),$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $AN/N \xrightarrow{\sim} A/$（$A \cap N$），使得下图交换:



（$\imath$ 是包含同态， ρ 是自然投影， π^* 是反投影。）

证明。首先，我们证明 AN 是 G 的子群。由于 N 是 G 的正规子群，因此有 $AN = NA$。于是，对于 $a \in A$， $an \in AN$ 蕴含着 $(an)^{-1} = n^{-1}a^{-1} \in NA = AN$。显然，我们还有 $1 \in AN$ 和 $ANAN = AANN = AN$。因此， AN 是 G 的子群。接着，我们证明 N 是 AN 的正规子群。

设 $\varphi = \pi^* \circ \imath$。那么对于每个 $a \in A$， $\varphi(a) = aN \in AN/N$，且 φ 是满射。由于 $\varphi(a) = 1$ 当且仅当 $a \in N$，也就是说，当且仅当 $a \in A \cap N$，故 Ker $\varphi = A \cap N$。由定理 2.22， $AN/N = \text{Im } \varphi \cong A/\text{Ker } \varphi = A/(A \cap N)$。事实上，定理 2.22 给出了唯一的反同构 ξ: $A/(A \cap N) \cong AN/N$，使得 $\xi \circ \rho = \pi^* \circ \imath$，因为 $\varphi = \pi^* \circ \imath$。□

接下来，我们想定义一种称为 $*$-复合的运算，它不同于 [2]，中定义的复合，使得两个反同态的 $*$-复合仍然是反同态。

定义 2.26. 设 φ： $A \to B, \psi$： $B \to C$ 是两个群的反同态。定义$\psi * \varphi := (\psi \circ \varphi) \circ 1^*$： $A \to C$ 为 ψ 与 φ的 $*$-复合 。

命题 2.27. $*$-复合是良定义的。

证明。 若 φ_1, φ_2： $A \to B, \psi_1, \psi_2$： $B \to C$是群的反同态，且 $\varphi_1 = \varphi_2$和$\psi_1 = \psi_2$，则 $\varphi_1 * \psi_1 = (\psi_1 \circ \varphi_1) \circ 1^* = (\psi_2 \circ \varphi_2) \circ 1^* = \varphi_2 * \psi_2$。 □

命题 2.28。 设 $\varphi\colon A \to B, \psi\colon B \to C$ 是两个反同态。则 $\psi * \varphi$ 是一个反同态。

证明。 根据定义， $\psi \circ \varphi$ 是一个同态。由命题 2.13，复合 1^*后，我们得到一个反同态 $\psi * \varphi = (\psi \circ \varphi) \circ 1^*\colon A \to C$。□

命题 2.29。 反同态的 $*$-复合是结合的。

证明。 设 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 是三个反同态。那么我们有

$$(\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3 = [(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ 1^* \circ \varphi_3] \circ 1^*,$$
$$\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = [\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) \circ 1^*] \circ 1^*.$$

由命题 2.12 和命题 2.13，我们得到 $(\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3 = \varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3)$，如所需。 □

命题 2.30。 如果 f是一个反同构，且 f^{-1}是其反逆，那么 $f * f^{-1} = f^{-1} * f = 1^*$。

证明。 根据定义，我们有

$$f * f^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ 1^* = 1 \circ 1^* = 1^*,$$

and

$$f^{-1} * f = (f^{-1} \circ f) \circ 1^* = 1 \circ 1^* = 1^*.$$

□

命题 2.31。 若 f是反同态，则 $f * 1^* = 1^* * f = f$。

证明。 根据定义，

$$f * 1^* = (f \circ 1^*) \circ 1^* = (1^* \circ f) \circ 1^* = 1^* * f = f.$$

□

由命题 2.29 和 2.31，最终可以构造由群和反同态组成的范畴 **Groups-An** ，即其对象为群、态射为反同态，且反同态的复合是 $*$-复合的范畴。注意，在 **Groups-An** 中，反向映射将充当恒等态射。

接下来，我们想要阐明 **Groups** 与 **Groups-An**之间的关系。
可以定义一个函子

$$F_{An} : \mathbf{Groups} \to \mathbf{Groups\text{-}An}$$

它将每个群映射到同一个群，并将每个同态 f 对应到相应的反同态 f^*。

并且可以定义一个函子

$$G_{An} : \mathbf{Groups\text{-}An} \to \mathbf{Groups}$$

它将每个群映射到同一个群，并将每个反同态 f^* 对应到相应的同态 f。

定理 2.32. 群及其同态所成的范畴 群 与群及其反同态所成的范畴 ***Groups-An***等价，即 群 $\cong$ ***Groups-An***。

证明。 显然，**Groups-An** 中的每个对象 A 都同构于 $F_{An}(A)$。根据命题 2.15，我们可知 F_{An} 是全忠实的。因此， F_{An} 是一个范畴等价。□

设 A 是任意一个群。我们可以在 Hom.Is(A, A) 上使用通常的复合来定义群结构。我们也可以使用 $*$-复合，为 $A \in$ Ob(**群**) 定义群结构 An.Is(A, A)。于是我们得到两个同构的群 (Hom.Is(A, A) $\circ$) 和 (An.Is(A, A) $*$)。

命题 2.33。 群 (Hom.同态同构(A, A) $\circ$) 与 (An.同态同构(A, A) $*$) 同构。

证明。 设 $f, g \in$ Hom.同态同构(A, A)。由命题 2.15， $f \circ g \mapsto (f \circ g)^*$。但是

$$f^* * g^* = (f \circ 1^* \circ g \circ 1^*) \circ 1^* = (f \circ g) \circ 1^* = (f \circ g)^*,$$

因此我们得到了所需的同构。 □

注意，在命题 2.33 中，群 (Hom.Is(A, A) $\circ$) 实际上就是自同构群 (Aut(G) $\circ$)，其元素是 G 的自同构，乘法为通常的复合。群 (An.Is(A, A) $*$) 可视为一个自同构群，其元素为反自同构，乘法为 $*$-复合。我们将 (An.Is(A, A) $*$) 称为反自同构群。

若 (An + Hom).Is(A, A) := An.Is(A, A) $\cup$ Hom.Is(A, A) 配备通常的复合运算，则我们断言 (An + Hom).Is(A, A) 是一个群，且 Hom.Is(A, A) 是其正规子群。事实上，我们在群的情形下证明了 [4],定理 9。

命题 2.34。 (An + Hom).Is(A, A) 在通常的复合运算下构成一个群，其正规子群为 Hom.Is(A, A)。

证明。 由命题 2.12 和命题 2.6 可知， An.Is(A, A)$\cup$Hom.Is(A, A) 在通常的复合运算下构成一个群。设 $f_1^* \in An$.Is(A, A) $f \in$ Hom.Is(A, A)，由于 $f_1^* \circ f = f_1 \circ 1^* \circ f = f_1 \circ f^*$，可知 Hom.Is($A, A$) 是 An.Is(A, A) $\cup$ Hom.Is(A, A) 的正规子群。□

显然，可以在 Hom(A, B) 和 An(A, B) 上定义加法和乘法，其中 $A, B \in$ Ob(群)。我们认为，下一节讨论这一点会比较方便。

3. Anti-homomorphisms of Rings

本节中，环不一定是交换的。根据 [9], ，所有环都应有单位元。我们先介绍一些关于环的反同态的基本知识。为简便起见，有时我们会简称为反同态，而不说环的反同态。关于群的反同态的一些结果可以直接推广到环的反同态。

定义 3.1 ([1]). 环的一个反同态 $\varphi : A \to B$ 是一个映射 $\varphi : A \to B$ ，满足$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$， $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$，并且对所有 $x, y \in A$，都有 $\varphi(1) = 1$。

环的反同态保持零元、整数倍和幂。

命题 3.2. 如果 φ： $A \to B$ 是环的反同态，那么对所有 $x \in A$、 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\varphi(0) = 0$、 $\varphi(mx) = m\varphi(x)$，以及 $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$ 。

证明。 由于 $\varphi : A \to B$ 也是阿贝尔群的反同态，因此对 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\varphi(mx) = m\varphi(x)$。其余部分见 [1]。□

在给出反单态射、反满同态和反同构的定义之前，我们先给出以下命题。

命题 3.3 ([1])。 如果 φ 是环的双射反同态，那么它的逆双射 φ^{-1}也是环的反同态。

定义 3.4 ([1])。 环的反单态射 是环的单射反同态。环的反满同态 是环的满射反同态。

环的反同构 是环的双射反同态。若存在反同构 $A \cong B$，则称两个环A 和B 反同构 。如果 f 是环的反同构，那么它的逆 f^{-1} 称为其反逆。

我们可以定义反同态的核与像。

定义 3.5 ([1])。 设 $\varphi : A \to B$ 是一个环反同态。那么 φ 的核 为

$$\operatorname{Ker} \varphi := \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}.$$

φ的像 为

$$\operatorname{Im} \varphi := \{\varphi(a) \mid a \in A\}.$$

下面的命题表明，环的反同态保持子环，而反满同态反转理想。

命题 3.6. 设 $\varphi: A \to B$ 是环的反同态。若 A_0 是 A 的子环，则

$$\varphi(A_0) = \{\varphi(x) \mid x \in A_0\}$$

是 B 的子环。若 B_0 是 B 的子环，则

$$\varphi^{-1}(B_0) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B_0\}$$

是 A 的子环。此外，若 $\mathfrak{a}$ 是 A 的左理想，且 φ 是反满同态，则 $\varphi(\mathfrak{a})$ 是 B 的右理想。若 $\mathfrak{b}$ 是 B 的左理想，且 φ 是反满同态，则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ 是 A 的右理想。

证明。 设 $a \in \mathfrak{a}$ 满足 $\varphi(a) \in \varphi(\mathfrak{a})$。由于 φ 是反满同态，对每个 $b \in B$，存在$a_0 \in A$ 使得 $\varphi(a_0) = b$。因此我们有 $\varphi(a)b = \varphi(a)\varphi(a_0) = \varphi(a_0 a) \in \varphi(\mathfrak{a})$，这表明 $\varphi(\mathfrak{a})$ 是 B 的右理想。

设 $b \in \mathfrak{b}$ 满足 $\varphi^{-1}(b) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$。由于 $\mathfrak{b}$ 是 B 的左理想，对每个 $b' \in B$，有 $b'b \in \mathfrak{b}$。因此存在 $a', a \in A$，使得 $\varphi(a') = b', \varphi(a) = b$，且 $\varphi(aa') = \varphi(a')\varphi(a) = b'b \in \mathfrak{b}$，这意味着 $aa' \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$，并且 $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ 是 A 的右理想。□

容易看出，反同态与同态的复合是反同态，而两个反同态的复合是同态。我们将这些结论总结为以下命题。

命题 3.7 ([1])。 设 $\varphi: A \to B$ 是环同态（分别地，反同态），且 $\psi: B \to C$ 是环反同态（分别地，同态）。那么 $\psi \circ \varphi$ 是反同态。若 $\varphi: A \to B$ 和 $\psi: B \to C$ 是环反同态，则 $\psi \circ \varphi$ 是同态。

由于两个反同态的复合是同态，因此自然会问，同态是否可以表示为若干反同态的复合。以下定理回答了这个问题。

定理 命题 3.8. 任意同态都可以表示为反同态的复合 $s.$

证明也留待下文给出。接下来，我们给出一些在群的情形下成立的命题。

命题 3.9. 设 $\varphi: A \to B$ 是一个环反同态。那么 φ 是反单同态，当且仅当 核$\varphi = 0$。并且 φ 是反满同态，当且仅当 余核$\varphi = 0$。

证明。 第一部分见 [1]。其余证明与命题 2.10 相同。 □

命题 3.10. 设 $\varphi: A \to B$ 是一个环反同态。那么 核φ 是 A 的一个理想，且 像φ 是 B 的一个子环。

证明。 根据定义，如果 $a, b \in \text{Ker } \varphi$，那么 $a - b \in \text{Ker } \varphi$，这表明 Ker φ 是A的子群。并且如果 $r \in A$, $a \in \text{Ker } \varphi$，我们有 $\varphi(ra) = \varphi(a)\varphi(r) = 0 = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(ar)$，这表明$ra, ar \in \text{Ker } \varphi$。因此，Ker φ 是 A 的理想。其余部分留作 [1]。□

命题 3.11. 同态与反同态的复合是结合的。
并且，复合 反同态的复合是结合的。

证明。 证明与命题 2.12 相同。 □

事实上，定理 3.8 在环的反同态上给出了一个等价关系。设 (φ_2, ψ_1) 和 (φ_1, ψ_2) 是两对反同态。如果复合有定义时，$\varphi_2 \circ \psi_1$ 和 $\varphi_1 \circ \psi_2$ 都等于同一个同态 φ，我们就定义 $(\varphi_2, \psi_1) \sim (\varphi_1, \psi_2)$。容易验证，我们确实定义了一个等价关系。我们用 $[(\varphi_1, \psi_2)]$ 表示对 (φ_1, ψ_2) 的等价类。我们用 $[\varphi]$ 表示所有复合为同态 φ的反同态对的等价类的集合。而记号 $[An(A, B)\ An(B, C)]$ 将表示所有形如 $(A \to B, B \to C)$ 的环的反同态对的等价类的集合。

环 R的反向映射 f是一个映射 $f\colon R\to R$，满足 $f(x)=x$, $f(x+y)=x+y$，并且对所有 $x,y\in R$都有 $f(xy)=yx$。

我们在下文概述特别感兴趣的结果:

Defi定义/命题 3.12。考虑由环及其同态构成的范畴 环 $s.$

(1) 对于任意一对对象 A、$B\in$ Ob(环)，我们用 同态集合 表示Hom(A,B)，用 $An(A,B)$表示反同态集合 。我们用Hom.Is(A,B) 表示同构集合 ，用 An.Is(A,B)表示反同构集合 。(2) 对于任意三个对象 A、B、C $\in$Ob(环)，我们有复合律

$$\begin{aligned}&An(A,B)\times An(B,C)\to \mathrm{Hom}(A,C)\\&An(A,B)\times \mathrm{Hom}(B,C)\to An(A,C)\\&\mathrm{Hom}(A,B)\times An(B,C)\to An(A,C)\\&\mathrm{Hom}(A,B)\times \mathrm{Hom}(B,C)\to \mathrm{Hom}(A,C)\end{aligned}$$

以及分解律

$$\mathrm{Hom}(A,C)\to [An(A,B),An(B,C)],\quad f\mapsto [f].$$

(3) 对于任意 $A,B\in$Ob(环)，存在一个反向映射 $1_A^*\in An(A,A)$，使得对于任意态射 $f\in \mathrm{Hom}(A,B)$，都有 $f\circ 1_A^*\in An(A,B)$。对于任意 $g\in$Hom(B,A)，都有 $1_A^*\circ f\in An(B,A)$。

(4) 上述定义的复合是结合的。

注记 3.13。注意，对于每个 $A,B\in$Ob(环)，以及任意 $f^*\in An(A,B)$，都有 $f^*\circ 1_A^*\in$Hom(A,B)。对于任意 $g^*\in An(B,A)$，也有 $1_A^*\circ g^*\in$Hom(B,A)。对于反向映射1_A^*，若不致混淆，我们将省略下标，直接写作 1^*。

命题 3.14。对于环范畴 环，存在集合Hom$(A,B)\xrightarrow{\sim} An(A,B)$ 之间的一一对应，其中 $A,B\in$Ob(环)。

证明。我们可以定义一个函数 Hom$(A,B)\to An(A,B)$ $f\mapsto f^*=f\circ 1^*$，以及一个函数 $An(A,B)$ $\to$Hom(A,B) $f^*\mapsto f=f^*\circ 1^*$。因此，我们得到了所需的一一对应 Hom$(A,B)\xrightarrow{\sim} An(A,B)$。□

命题 3.14 的以下推论给出了环的情形下的 [4], 定理 7:

推论 3.15。若 $A,B\in$环的对象(环)，则 A,B 同构，当且仅当 A,B 反同构。

利用命题 3.12 中给出的记号，我们可以用一种简单的方法证明定理 3.8。

定理 *3.8* 的证明。设 $\phi\colon A\to B$ 是一个环同态。则存在一个从 A 到 $A\to A$ 的反向映射1^*，以及一个反同态 $\varphi\colon A\to B$，使得对于所有 $x,y\in A$，$(\varphi\circ 1^*)(x+y)=\varphi(1^*(x+y))=\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，且 $(\varphi\circ 1^*)(xy)=\varphi(1^*(xy))=\varphi(yx)=\varphi(x)\varphi(y)$。由此得到所需结果 $\phi=\varphi\circ 1^*$。□

推论 3.16. 每个环的同态 $\phi\colon A\to B$ 都可以分解为一系列映射

$$A\xrightarrow{1^*}A\xrightarrow{\varphi}B,$$

其中 1^* 是 A 的反向映射，而 φ 是反同态。

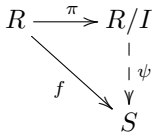
下面的命题给出了环的情形下的 [4], 定理 8。

命题 3.17. 若环 A 不是交换的，则对于任意$B\in$Ob(环)，Hom.Is$(A,B)\cap An$.Is$(A,B)=\varnothing$。

证明. 由命题 2.19 可得 Hom.Is$(A,B)\cap An$.Is$(A,B)=\varnothing$。□

接下来，我们证明环情形下分解定理和同态定理的反类比（参见 [5],第三章，定理 3.5、定理 3.6）。

定理 3.18（反分解定理）。设 I 是环 R的一个理想。对于任意一个核包含 I的环反同态 f：$R \to S$，存在唯一的反同态ψ： $R/I \to S$，使得下图交换（π 是自然投影）：



证明。由定理 2.20，存在唯一的阿贝尔群反同态 ψ： $R/I \to S$，使得 $f = \psi \circ \pi$，即对于所有 $x \in R$，都有 $\psi(x + I) = f(x)$。这样的群反同态确实是环反同态，因为

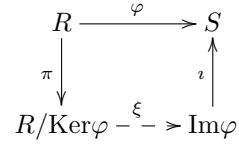
$$\psi((x+I)(y+I)) = \psi(xy+I) = f(xy) = f(y)f(x) = \psi(y+I)\psi(x+I)$$

对于所有 $x+I$， $y+I \in R/I$。此外，我们有 $\psi(1+I) = f(1) = 1$，由此得到所需的环典范反同态。□

定理 3.19 (反同态定理**)**。若 φ： $R \to S$ 是环反同态，则存在一个典范反同构

$$R/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi,$$

也就是说，存在唯一的反同构 ξ： $R/$核$\varphi \xrightarrow{\sim}$ 像φ，使得下图交换:



（π 是自然投影， $\imath$ 是包含同态）。

证明。由定理 2.22，存在唯一的群反同构 ξ: $R/$Ker $\varphi \cong$Im φ，使得$\varphi = \pi \circ \xi \circ \imath$，也就是说，对所有 $x \in R$，我们有 $\xi(x +$ Ker $\varphi) = \varphi(x)$。然后，仿照定理 3.18 的证明可得， ξ 是环反同态。□

对于任意 A， $B \in$ Ob(环)，我们可以在集合 Hom$(A,\ B)$ 和$An(A,\ B)$ 上定义加法和乘法如下:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

对所有 $x \in A$ 和 f， $g \in$ Hom$(A,\ B)$。

$$(f^* + g^*)(x) = f^*(x) + g^*(x)$$
$$(f^*g^*)(x) = f^*(x)g^*(x)$$

对所有 $x \in A$ 和 f^*， $g^* \in An(A,\ B)$。

在这两种运算下，Hom$(A,\ B)$ 和 $An(A,\ B)$ 成为含单位元的环。并且我们看到，Hom$(A,\ B)$ 同构于 $An(A,\ B)$。

命题 3.20. 设 $A, B \in$ Ob(环)。则存在一个环的同构

$$\mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\sim} An(A,B),\ f \mapsto f^* = f \circ 1^*.$$

证明。设 $f, g \in$ Hom(A, B)。于是我们有

$$(f+g)^*(x) = [(f+g)\circ 1^*](x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = f\circ 1^*(x) + g\circ 1^*(x) = (f^* + g^*)(x),$$

这意味着 $(f+g)^* = f^* + g^*$。并且我们有

$$(fg)^*(x) = [(fg)\circ 1^*](x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = (f\circ 1^*)(x)(g\circ 1^*)(x) = (f^*g^*)(x),$$

这意味着 $(fg)^* = f^*g^*$。由命题 3.14，我们得到所需的同构。 □

接下来，我们给出 [1]，中最后一个命题的证明，该命题的原始证明并不严谨。

命题 3.21。设 R 是一个环，I 是 R 的一个理想。则存在一个自然同态φ： $An(R,R) \to An(R,R/I)$。

证明。若 $f \in An(R,R)$，则我们定义 ϕ: $R \to R/I$，使得对每个 $x \in R$，都有 $\phi(x) = f(x) + I$。显然，ϕ 是良定义的，因为 f 是良定义的。并且，由于对任意的 $x,y \in R$，有 $\phi(x+y) = f(x+y) + I = (f(x) + I) + (f(y) + I) = \phi(x) + \phi(y)$，且 $\phi(xy) = f(xy) + I = (f(y) + I)(f(x) + I) = \phi(y)\phi(x)$，所以 ϕ 是一个反同态，且 $\phi \in An(R,R/I)$。

接下来，我们定义 φ： $An(R, R) \to An(R, R/I)$，使其满足 $\varphi(f) = \phi$。若 $f_1 = f_2$，则对于任意 $x \in R$，有 $\varphi(f_1)(x) = f_1(x) + I = f_2(x) + I = \varphi(f_2)(x)$，这表明 φ 定义良好。并且，对于任意 $x \in R$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1 + f_2)(x) &= (f_1 + f_2)(x) + I \\
&= (f_1(x) + I) + (f_2 + I) \\
&= \varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x), \\
\varphi(f_1 f_2)(x) &= (f_1 f_2)(x) + I \\
&= (f_1 + I)(f_2 + I) \\
&= \varphi(f_1)(x)\varphi(f_2)(x).
\end{aligned}$$

这表明 φ 是一个同态。 □

注意，我们不会定义环的反同态的 $*$-复合，而将其留到下一节讨论。以更一般的形式研究它会更方便。

4. Factorization Categories

考虑 t　　两个范畴**群** 和 **Groups-An**。我们可以如下构造一个新的范畴 $\mathscr{G}$：

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{G}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Groups}),\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(x,y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Groups}}(x,y) \cup \mathrm{Hom}_{\mathbf{Groups\text{-}An}}(x,y),$$

且复合就是通常的复合。于是，$\mathscr{G}$ 是一个群范畴，其态射为同态和反同态。根据命题 2.13 和 3.12，我们认为可以将反态射添入一个范畴，从而以更一般的框架研究“反”现象。

定义 4.1. 若范畴 $\mathscr{C}$ 配备了一个分解结构 Σ，并且满足以下附加条件，则称这一对 $(\mathscr{C}, \Sigma)$ 为分解范畴：

(1) 对于每一对对象$A,B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，除了态射集合 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 外，还有一个从 A 到 B的反态射集合 $An(A,B)$。(2) 对于每组三个对象$A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，存在复合律

$$\begin{aligned}
&An(A,B) \times An(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C),\quad (f',g') \mapsto f' \circ g' \\
&An(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \to An(A,C),\quad (f',g) \mapsto f' \circ g \\
&\mathrm{Hom}(A,B) \times An(B,C) \to An(A,C),\quad (f,g') \mapsto f \circ g'
\end{aligned}$$

(3) 对每个 $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，都存在一个反向态射 $1_A^* \in An(A,A)$，使得对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$，有 $f \circ 1_A^* \in An(A,B)$。并且对于任意 $g \in \mathrm{Hom}(B,A)$，有$1_A^* \circ f \in An(B,A)$。(4) 上述定义的复合是结合的。

注记 4.2.注意，对于每个 $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 以及任意的 $f^* \in An(A,B)$，都有 $f^* \circ 1_A^* \in \mathrm{Hom}(A,B)$。对于任意的 $g^* \in An(B,A)$，都有 $1_A^* \circ g^* \in \mathrm{Hom}(B,A)$。此外，对于 $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$，有 $f \circ 1_A^* = 1_B^* \circ f$。为简便起见，在不会引起歧义时，我们将分解范畴中的 $\mathscr{C}$ 简记为 $(\mathscr{C}, \Sigma)$。对于反向态射 1_A^*，若不会引起混淆，我们将省略下标，简记为 1^*。

然而，有时需要确保每个态射都有核和余核等。因此，某些特殊类型范畴的概念为我们提供了良好的框架。

定义 4.3.

(1) 如果一个分解范畴的底层范畴是预加性/加性/阿贝尔的，且对于每组三个对象 $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，复合律

$$An(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \to An(A,C)$$
$$\mathrm{Hom}(A,B) \times An(B,C) \to An(A,C)$$

在群 $\mathrm{Hom}(B,C)$ 和 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 中是线性的。

(2) 带零态射的分解范畴是指其底层范畴为带零态射的范畴的分解范畴。(3) 带积的分解范畴是指其底层范畴为存在积的范畴的分解范畴。

例 4.4. 群的范畴 **Groups** 和环的范畴 **Rings** 都是分解范畴，其态射为同态，而反态射为反同态。

例 4.5. 阿贝尔群范畴**Ab** 是一个阿贝尔分解范畴，其态射为同态，而反态射为反同态。

例 4.6. 容易验证，复向量空间范畴$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 是一个阿贝尔分解范畴，其反态射为反线性映射，反向态射为共轭映射 $\psi\colon\ V \to V$由 $\psi(\lambda x) = \lambda x$ 定义，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $x \in V$。

以下命题推广了命题 2.15 和 3.14 中的结果。

命题 4.7. 对于任意分解范畴 $\mathscr{C}$，集合$\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} An(A, B)$ 之间存在一一对应，其中 A、$B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$任取。此外，若 $\mathscr{C}$是一个预加性分解范畴，则 $An(A, B)$ 从$\mathrm{Hom}(A, B)$ 诱导出阿贝尔群运算，从而得到群同构$\mathrm{Hom}(A, B) \cong An(A, B)$。

证明。 事实上，我们可以定义一个函数

$$\mathrm{Hom}(A,B) \to An(A,B),\ f \mapsto f^* = f \circ 1^*,$$

和一个函数

$$An(A,B) \to \mathrm{Hom}(A,B),\ f^* \mapsto f = f^* \circ 1^*.$$

因此，我们得到了所需的一一对应 $\mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\sim} An(A,B)$。

根据定义，我们有 $(f+g) \circ 1^* = f \circ 1^* + g \circ 1^*$，这表明 $(f+g)^* = f^* + g^*$。 □

注记 4.8。 对于任意态射 f，f^* 表示 $f \circ 1^* = 1^* \circ f$，称为 f的对应反态射 。由于每个反态射 f' 都可以写成 $f \circ 1^*$ 或 $1^* \circ f$ 的形式，其中某个态射，因此对于任意反态射，也可以记作 f^* 。类似地，对于任意反态射 f^*，态射 $f = f^* \circ 1^* = 1^* \circ f^*$ 称为 f^*的对应态射 。显然，我们有 $f^{**} = f$。

由于两个反态射的复合是一个态射，因此自然会想到，任意态射是否都能表示为反态射的复合。这引出了以下定理。

定理 4.9. 每个态射都可以表示为反态射的复合 .

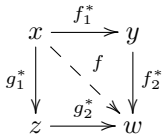
证明。 设 $\mathscr{C}$为一个分解范畴，且设 $f\colon x \to y$ 是 $\mathscr{C}$中的任意态射。那么，存在一个反向态射 $1^*\colon x \to x$ 以及一个属于 $\mathscr{C}$的反态射 $f^*\colon x \to y$，使得 $f = f^* \circ 1^*$。 □

推论 4.10. 每个态射 $f\colon x \to y$ 都可以分解为一个序列

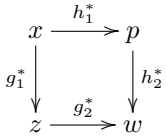
$$x \xrightarrow{1^*} x \xrightarrow{f^*} y,$$

其中 1^* 是反向态射，φ 是反态射。

注意，根据定理 4.9，我们可以定义一个等价关系。首先，考虑以下实线图表



使得 f 是一个态射，并且 (f_1^*, f_2^*)、(g_1^*, g_2^*) 是两对可复合反态射。定义 $(f_1^*, f_2^*) \sim (g_1^*, g_2^*)$ 当且仅当 $f = f_2^* \circ f_1^* = g_2^* \circ g_1^*$，也就是说，当且仅当上述图表交换。换言之，如果一个态射 f 可分解为两对可复合反态射 (f_1^*, f_2^*)、(g_1^*, g_2^*)，那么我们有 $(f_1^*, f_2^*) \sim (g_1^*, g_2^*)$。接下来，我们证明所定义的是一个等价关系。首先，该关系显然具有自反性和对称性。为证明传递性，若 (h_1^*, h_2^*) 是另一对可复合反态射，且满足 $(g_1^*, g_2^*) \sim (h_1^*, h_2^*)$。



于是我们得到 $h_2^* \circ h_1^* = g_2^* \circ g_1^* = f_2^* \circ f_1^*$，这表明 $(f_1^*, f_2^*) \sim (h_1^*, h_2^*)$。因此，我们在反态射上定义了一个等价关系。我们用 $[(f_1^*, f_2^*)]$ 表示有序对 (f_1^*, f_2^*) 的等价类。我们用记号 $[f]$ 表示所有这样的等价类构成的集合，其中每一对反态射的复合为态射 f。我们将所有形如 $(x \to y, y \to w)$ 或 $(x \to z, z \to w)$ 的反态射对的等价类组成的集合记为 $[An(x, y)\ An(y, w)]$或 $[An(x, z)\ An(z, w)]$。于是我们有以下命题。

命题 4.11。 设 $\mathscr{C}$为一个分解范畴。对于任意 $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，我们有如下分解律

$$\mathrm{Hom}(A, C) \to [An(A, B), An(B, C)], \quad f \mapsto [f].$$

定义 4.12. 设 $\mathscr{C}$ 是一个分解范畴，且 $f^* : x \to y$ 是$\mathscr{C}$中的一个反态射。若存在反态射 $g^* : y \to x$属于 $\mathscr{C}$，使得 $f^* \circ g^* = 1_y$且 $g^* \circ f^* = 1_x$，则称 f^*为一个反同构 。此时称 x与 y反同构 ，记作$x \cong y$。我们称 g^* 为 f^*的反逆 。给定 $x,\ y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，我们用 $\mathrm{Hom.Is}(x,\ y)$ 表示同构的集合，用 $An.\mathrm{Is}(x,\ y)$ 表示反同构的集合。

命题 4.13. 设 $\mathscr{C}$ 是一个分解范畴，且 $f : x \to y$ 是 $\mathscr{C}$中的一个态射。那么f 是同构，当且仅当 f^* 是反同构。若 f^{-1} 是其逆，则 f^{-1*} 是其反逆。

证明。 如果 f是一个同构，那么 $f \circ f^{-1} = 1$ 给出

$$f^* \circ f^{-1*} = (1^* \circ f) \circ (f^{-1} \circ 1^*) = 1^* \circ (f \circ f^{-1}) \circ 1^* = 1^* \circ 1 \circ 1^* = 1$$

and

$$f^{-1*} \circ f^* = (1^* \circ f^{-1}) \circ (f \circ 1^*) = 1^* \circ (f^{-1} \circ f) \circ 1^* = 1^* \circ 1 \circ 1^* = 1$$

这表明 f^{-1*} 是 f^*的反逆，因此 f^* 是一个反同构。

反过来，如果 f^* 是一个反同构，那么用类似的方法可以看出，f 是一个同构。

□

下文中，我们用 f^{-1*}表示 f^* 的反逆。命题 4.13 可直接推出以下推论。

推论 4.14。 设 $\mathscr{C}$是一个分解范畴，且 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$。那么， x与 y 反同构，当且仅当 x 与 y同构。

推论 4.15. 对于任意分解范畴 $\mathscr{C}$，集合$\mathrm{Hom.Is}(x, y) \xrightarrow{\sim} An.\mathrm{Is}(x, y)$ 之间存在一一对应，其中任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$。

我们希望从一个分解范畴构造一个新的范畴。以下定理阐述了构造过程。

定理 4.16. 每个分解范畴 $\mathscr{C}$ 都会导出一个范畴 $\tilde{\mathscr{C}}$，称为与 $\mathscr{C}$ 相关联的范畴。

证明. 我们从 $\mathscr{C}$ 构造一个范畴 $\tilde{\mathscr{C}}$。首先，令 $\mathrm{Ob}(\tilde{\mathscr{C}}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$。然后，对于 $A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，我们在 $\tilde{\mathscr{C}}$ 中定义态射如下：

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}(A,B) = An_{\mathscr{C}}(A,B) \cup \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B).$$

根据定义，$\tilde{\mathscr{C}}$ 是一个范畴。 □

如果与阿贝尔分解范畴 $\mathscr{C}$ 相关联的范畴 $\tilde{\mathscr{C}}$ 是一个阿贝尔范畴，那将是一个很好的结果。遗憾的是，下一个定理表明 $\tilde{\mathscr{C}}$ 不是阿贝尔范畴。

定理 4.17. 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴。那么，与 $\mathscr{C}$ 相关联的范畴 $\tilde{\mathscr{C}}$ 是一个几乎阿贝尔范畴，也就是说，它满足阿贝尔范畴的条件，但不是加性范畴。

证明。 首先，由于 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔范畴，态射的所有核和余核都存在，因此反态射也存在。对于 $\tilde{\mathscr{C}}$ 中的任意态射 f，都有一个典范同构

$$\mathrm{Coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f),$$

因此，对于任意反态射 $f^* = f \circ 1^*$，我们都有一个典范反同构

$$\mathrm{Coim}(f^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f^*).$$

然而，对于任意 $x,\ y \in \tilde{\mathscr{C}}$，定义为 $An_{\mathscr{C}}(x,\ y)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,\ y)$ 的并集的集合 $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{C}}}(x,\ y)$ 不能构成一个群，因为 $An_{\mathscr{C}}(x,\ y) \nsubseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,\ y)$，且 $An_{\mathscr{C}}(x,\ y) \nsupseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,\ y)$。□

接下来，我们希望研究分解范畴 $\mathscr{C}$ 中的核、余核、单态射、满态射等（关于预加性范畴中的论述，见 [8], 定义 12.3.9）。设 $f : x \to y$是 $\mathscr{C}$ 中的一个态射，且 f 的核和余核存在。考虑 f的核 τ: $\mathrm{Ker}(f) \to x$，有 $f\tau = 0$；若存在 μ: $z \to x$ 满足 $f\mu = 0$，则存在唯一的 τ_0: $z \to \mathrm{Ker}(f)$ 使得 $f\tau\tau_0 = 0$。接着，若考虑一个反态射 $f^* = 1^* f$，我们仍有 $f^*\tau = 0$；若存在 μ: $z \to x$满足 $f^*\mu = 0$，则存在唯一的 τ_0: $z \to \mathrm{Ker}(f)$ 使得 $f^*\tau\tau_0 = 0$。余核的情形类似。

定义 4.18. 设 $\mathscr{C}$ 是一个带有零态射的分解范畴，且 f^* : $x \to y$ 是 $\mathscr{C}$中的一个反态射。

(1) 我们将 f^* 的核 定义为 f的核，记作 $\mathrm{Ker}(f^*) \to x$。(2) 我们将 f^* 的余核 定义为 f的余核，记作 $y \to \mathrm{Coker}(f^*)$。(3) 我们将 f^* 的余像 定义为 f的余像，记作 $x \to \mathrm{Coim}(f^*)$。(4) 我们将 f^* 的像 定义为 f的像，记作 $\mathrm{Im}(f^*) \to y$。

如果 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，那么

(I) 若 f^* 满足 $\mathrm{Ker}(f^*) = 0$，我们称其为单射 。若 f^* 满足 $\mathrm{Coker}(f^*) = 0$，我们称其为满射 。(II) 如果 f^* 是单射，那么 x 是 y 的一个子对象 ，我们用记号 $x \subset y$ 表示这一点。此外，我们用 y/x 表示对象

$$\mathrm{Coker}(x \to y).$$

(III) 若 f^* 是满射，则称 y 为 x的商对象。

回顾一下，在范畴 $\mathscr{C}$ 中，态射 $u : A \to B$ 若满足函数

$$\mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(C,B),\quad v \mapsto u \circ v$$

对所有 $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，它都是单射。对于反态射 u^*，由于 $1^* u v_1 = 1^* u v_2 \Rightarrow u v_1 = u v_2$，我们仍有 $u^* v_1 = u^* v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$。满态射的情形类似。

定义 4.19. 设 $\mathscr{C}$是一个分解范畴，且 $f^*\colon x \to y$是 $\mathscr{C}$中的一个反态射。若函数

$$\mathrm{Hom}(z,x) \to An(z,y), \quad v \mapsto f^* \circ v$$

对所有 $z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 都是单射。我们称 f^* 为反满同态，如果函数

$$\mathrm{Hom}(y,z) \to An(x,z), \quad v \mapsto v \circ f^*$$

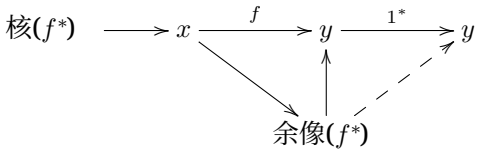
对所有 $z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 都是单射。

接下来，我们给出一些关于反态射的基本结果，这些结果表明，在预加性范畴和阿贝尔范畴中，反态射继承了态射的一些性质（见 [8], 引理 12.5.4 和引理 12.3.12）。

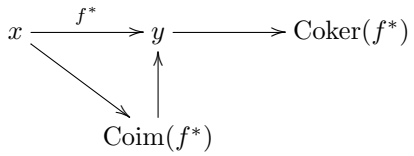
引理 4.20. 设 $f^*\colon x \to y$ 是预加性分解范畴中的一个反态射。若核、余核、余像和像均存在，则 f^* 可唯一地分解为以下序列：

$$x \to \mathrm{Coim}(f^*) \to \mathrm{Im}(f^*) \to y.$$

证明。 $\mathrm{Ker}(f^*) \to x \xrightarrow{f^*} y$ 的复合为零，因此存在一个典范映射 $\mathrm{Coim}(f^*) \to y$。



复合 $x \xrightarrow{f^*} y \to$ 余核(f^*) 为零，并且我们有如下分解：



由于 $x \to$ 余像(f^*) 是满射，复合 余像$(f^*) \to y \to$ 余核(f^*) 为零。因此，余像$(f^*) \to y$经由像$(f^*) \to y$分解，从而得到所需的映射。□

引理 4.21. 设 $f^*\colon x \to y$是阿贝尔分解范畴 $\mathscr{C}$中的一个反态射。那么

(1) f^*是单射，当且仅当 f^*是反单态射。(2) f^*是满射，当且仅当 f^*是反满同态。

证明。 注意，$\mathrm{Ker}(f^*)$ 是一个对象，它表示将对象 $z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 映射到集合 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(z,x) \to An(z,y))$ 的函子。事实上，对于 $z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，以下映射的复合

$$\mathrm{Hom}(z, \mathrm{Ker}(f^*)) \to \mathrm{Hom}(z,x) \to \mathrm{Hom}(z,y) \to An(z,y)$$

为零。并且我们有 $\mathrm{Hom}(z, \mathrm{Ker}(f^*)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(z,x) \to An(z,y))$.

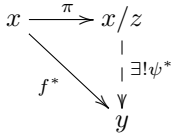
那么，$\mathrm{Ker}(f^*) = 0$ 当且仅当对于所有 $z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，函数 $\mathrm{Hom}(z,x) \to An(z,y)$ 都是单射；这又当且仅当 f^* 是反单态射。另一种情形类似。□

接下来，我们将在阿贝尔分解范畴的情形下证明反同态定理、反分解定理和第二反同构定理。

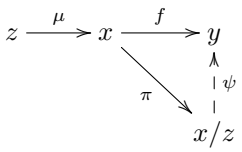
定理 4.22 （广义反同态定理）。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 $f^*\colon x \to y$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个反态射。那么，我们有一个反同构 $x/\mathrm{Ker}(f^*) \cong \mathrm{Im}(f^*)$。特别地，若 f^* 是单射，则 $x \cong \mathrm{Im}(f^*)$。若 f^* 是满射，则 $x/\mathrm{Ker}(f^*) \cong y$。

证明。 根据定理 4.17，我们有一个典范反同构 $\mathrm{Coim}(f^*) \cong$ 像(f^*)，它实际上就是反同构 $x/$核$(f^*) \cong$ 像(f^*)。□

定理 4.23 (广义反因子分解定理)。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 $f^*\colon x \to y$是 $\mathscr{C}$中的一个反态射。若 $\mu\colon z \to x$是一个单态射，满足 $f\mu = 0$，则存在唯一的反态射 $\psi^* : x/z \to y$，使得下图交换（π是典范映射）：



证明。 首先，我们考虑态射 $f\colon x \to y$ 的分解。复合 $z \to x \to y$ 为零，因此存在一个典范映射 $\psi : x/z \to y$，使得该三角形交换（注意， π 是 μ 的余核）：



接下来的计算给出了所需结果

$$1^* \circ f = 1^* \circ \psi \circ \pi$$
$$f^* = \psi^* \circ \pi.$$

□

定理 4.24 （广义第二反同构定理）。 设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔分解范畴，且 A、B、$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 满足 $C \subset B \subset A$。则存在唯一的反同构

$$(A/C)/(B/C) \cong A/B.$$

证明。 由于 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔范畴，我们有唯一的同构 $(A/C)/(B/C) \cong A/B$。由命题 4.13 和推论 4.14, 可得所需的唯一反同构。□

固定一个分解范畴 $\mathscr{C}$。接下来，我们定义反态射的 $*$-复合如下:

$$f^* * g^* := f^* \circ g^* \circ 1^*,$$

当 $f \in An(x,\ y)$ $g \in An(y,\ z)$ 对于 $x,\ y,\ z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 时。容易看出， $*$-复合是良定义的，且两个反态射的 $*$-复合也是反态射。我们有以下命题，它们推广了我们在**群**中的结果。

命题 4.25。 反态射的 $*$-复合是结合的。

证明。 设 $f^*,\ g^*,\ h^*$ 是 $\mathscr{C}$ 中的三个反态射。当复合有意义时，我们有

$$(f^* * g^*) * h^* = (f^* \circ g^* \circ 1^*) \circ h^* \circ 1^* = f^* \circ g^* \circ h^*$$

and

$$f^* * (g^* * h^*) = f^* \circ (g^* \circ h^* \circ 1^*) \circ 1^* = f^* \circ g^* \circ h^*.$$

因此 $(f^* * g^*) * h^* = f^* * (g^* * h^*)$。 □

命题 4.26。 若 f^* 是反同构，且 f^{-1*} 是其反逆，则 $f^* * f^{-1*} = f^{-1*} * f^* = 1^*$。

证明。 根据定义，我们有

$$f^* * f^{-1*} = (f^* \circ f^{-1*}) \circ 1^* = 1 \circ 1^* = 1^*,$$

and

$$f^{-1*} * f^* = (f^{-1*} \circ f^*) \circ 1^* = 1 \circ 1^* = 1^*.$$

□

命题 4.27. 若 f^* 是反同态，则 $f^* * 1^* = 1^* * f^* = f^*$。

证明. 根据定义，我们有

$$f^* * 1^* = (f^* \circ 1^*) \circ 1^* = f^*,$$

and

$$1^* * f^* = (1^* \circ f^*) \circ 1^* = f^*.$$

□

借助 $*$-复合，我们可以由反态射构造一个新的范畴 $\mathscr{C}^{An}$，如下所示:

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{An}) := \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{An}}(x,y) := An(x,y),$$

and

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{An}}(x,y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{An}}(y,z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{An}}(x,z), \quad (f^*, g^*) \mapsto f^* * g^*.$$

即，复合定义为 $*$-复合。

定理 4.28. 若 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔分解范畴，则上述定义给出一个阿贝尔范畴 $\mathscr{C}^{An}$。

这里我们只证明一个特殊情形，证明将在下文给出。

引理 4.29. 若 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔分解范畴，则上述定义给出一个预加性范畴 $\mathscr{C}^{An}$。

证明。 命题 4.25、4.26 和 4.27 表明， $\mathscr{C}^{An}$ 是一个范畴。

对于任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{An})$， $An(x,y)$ 是一个阿贝尔群，这由命题 4.7 得出。接下来，我们证明复合是双线性的。设 f^*, g^*, h^* 是 $\mathscr{C}^{An}$ 中的反态射。当复合有意义时，我们有

$$\begin{aligned} h^* * (f+g)^* &= h^* \circ (f+g)^* \circ 1^* \\ &= h^* \circ (f+g) \\ &= h^* \circ f + h^* \circ g \\ &= h^* * f^* + h^* * g^*, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (f+g)^* * h^* &= (f+g)^* \circ h^* \circ 1^* \\ &= (f+g) \circ h^* \\ &= f \circ h^* + g \circ h^* \\ &= f^* * h^* + g^* * h^*. \end{aligned}$$

因此， $\mathscr{C}^{An}$ 是一个预加性范畴。 □

我们想要阐明 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^{An}$ 之间的关系，因此需要定义 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^{An}$ 之间的函子。

首先，我们可以定义一个函子

$$F^{An} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{An}$$

它将 $\mathscr{C}$ 的每个对象映射到其自身，并将每个态射 f 对应到相应的反态射 f^*。

并且我们可以定义一个函子

$$G^{An} : \mathscr{C}^{An} \to \mathscr{C}$$

它将 $\mathscr{C}^{An}$ 的每个对象映射到同一个对象，并将每个反态射 f^* 对应到相应的态射 f。

定理 4.30。 范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}^{An}$ 等价，即 $\mathscr{C} \cong \mathscr{C}^{An}$。

证明。 显然， $\mathscr{C}^{An}$ 中的每个对象 x 都与 $F^{An}(x)$ 同构。由命题 4.7 可知， F^{An} 是全忠实的。因此， F^{An} 是一个范畴等价。□

定理 *4.28* 的证明。 由定理 4.30 可知，若 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔范畴，则范畴等价意味着 $\mathscr{C}^{An}$ 也是一个阿贝尔范畴。□

定义 4.31. 考虑上述情形，如此构造的范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 称为与 $\mathscr{C}$ 相关联的反范畴。如果分解范畴 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔的，如此构造的范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 称为与 $\mathscr{C}$ 相关联的阿贝尔反范畴。

如果分解范畴 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔的，那么利用 $*$-复合，我们可以定义一个类似于 Hom(–, –) 的双函子An(–, –)，如下所示：

(1) 对任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$， $An(x, y)$ 是从 x 到 y 的反态射群。(2) 若 $y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 且 f^*：$x \to y$ 是 $\mathscr{C}$ 中的反态射，则 $An(f^*, z)$ 定义为 by

$$An(f^*, z) : An(y, z) \to An(x, z), \quad g^* \mapsto g^* * f^*.$$

类似地，我们定义 $An(z, f^*)$ 如下：

$$An(z, f^*) : An(z, x) \to An(z, y), \quad g^* \mapsto f^* * g^*.$$

定理 4.32. $An(–, –)$ 是一个从阿贝尔关联反范畴 $\mathscr{C}^{An}$ 到阿贝尔群范畴 $\boldsymbol{Ab}$ 的双函子。它对第一个变量是反变的，对第二个变量是协变的。

证明。 由命题 4.7、引理 4.29 及上述定义可得。 □

定理 4.33。 函子 $An(–, –)$ 与 $\mathrm{Hom}(–, –)$ 同构。

证明。 利用命题 4.7，很容易验证。 □

既然分解范畴会诱导出一个范畴，自然会想到能否从给定的范畴得到一个分解范畴。不过，我们尤其好奇如何通过两个等价范畴生成一个分解范畴。过程如下：

构造 4.34。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，且 $\mathscr{D}$ 是与 $\mathscr{C}$ 等价的范畴，使得 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$。若满足以下条件：

(1) 对每组三元对象 A、B、$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，存在复合律

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C), \quad (f', g') \mapsto f' \odot g'$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, C), \quad (f', g) \mapsto f' \odot g$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, C), \quad (f, g') \mapsto f \odot g'$$

(2) 对于任意的 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 以及恒等态射 $1'_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, A)$，对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B)$，都有 $f \odot 1'_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}'}(A, B)$。对于任意 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, A)$，都有$1'_A \odot f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}'}(B, A)$。

(3) 上述定义的复合是结合的。

于是我们得到一个分解范畴 $\mathscr{C} = (\overline{\mathscr{C}}, \Sigma) = (\mathscr{C}, \mathscr{D})$，其中 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \overline{\mathrm{Ob}}(\mathscr{C})$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$，并且 $An(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B)$。

定义 4.35。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴。上文构造的分解范畴 $\mathscr{C}$ 称为与 相关联的分解范畴。上述两个等价范畴组成的偶对 $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ 称为相关联分解范畴的生成元。

因此，一个分解范畴会导出两个等价范畴，而一个范畴与一个等价范畴则会导出一个分解范畴。然而，由于一个范畴可能对应不同的分解范畴，为避免歧义，我们必须对分解范畴施加以下公理。

公理 4.36. 每个范畴都可以赋予唯一的分解结构，使其成为一个分解范畴。

换言之，考虑构造 4.37 中的情形。如果 $\mathscr{D}'$ 是另一个与 $\mathscr{C}$等价且 $\mathrm{Ob}(\mathscr{D}') = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 的范畴，那么我们有 $(\mathscr{C}, \mathscr{D}) = (\mathscr{C}, \mathscr{D}') = \mathscr{C}$。

此外，我们可以通过两个等价的预加性范畴生成一个预加性分解范畴。过程如下：

构造 4.37. 设 $\mathscr{C}$ 是一个预加性范畴， $\mathscr{D}$ 是一个与 $\mathscr{C}$ 等价的范畴，使得 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$。若满足以下条件：

(1) 对每一组三个对象 A、B、$C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，都存在双线性的复合律

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C),\quad (f',g')\mapsto f'\circ g'$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,C),\quad (f',g)\mapsto f'\circ g$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,C),\quad (f,g')\mapsto f\circ g'$$

(2) 对任意 $A, B \in Ob(\mathscr{C})$ 以及恒等态射 $1'_A \in Hom_{\mathscr{D}}(A, A)$，对于任意态射 $f \in Hom_{\mathscr{D}}(A, B)$，都有 $f \circ 1'_A \in Hom_{\mathscr{D}}(A, B)$。并且对于任意 $g \in Hom_{\mathscr{D}}(B, A)$，都有$1'_A \circ f \in Hom_{\mathscr{D}}(B, A)$。

(3) 上述定义的复合是结合的。

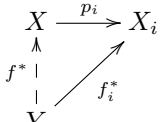
于是我们得到一个预加性分解范畴 $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \Sigma)$ $\overline{=}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$，其中 $\underline{Ob(\mathscr{C})} = Ob(\mathscr{C}), \overline{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$，且 $An(A, B) = Hom_{\mathscr{D}}(A, B)$。

定义 4.38. 设 $\mathscr{C}$ 是一个预加性范畴。上文构造的预加性分解范畴 $\mathscr{C}$ 称为与 $\mathscr{C}$相关联的预加性分解范畴。上述两个等价预加性范畴构成的偶 $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ 称为相关联的预加性分解范畴的生成元。

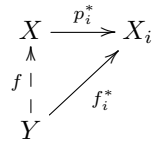
若 $\mathscr{C}$ 是一个具有积的分解范畴，我们希望研究 $\mathscr{C}$中的积。我们将证明分解范畴中积的泛性质的两个反类比（参见 [6], 第二章，第 5 节）。这类性质称为积的反泛性质 。

命题 4.39 （反泛性质）。

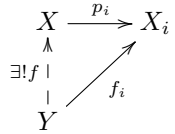
(1) 设$(X_i)_{i\in I}$ 是由集合 I 索引的 $\mathscr{C}$ 的一个对象族，且 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是 X_i 的积，其投影为 p_i：$X \to X_i$。那么，对于任意对象 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 以及 $\mathscr{C}$ 中的反态射 f_i^*： $Y \to X_i$，存在唯一的反态射 f^*： $Y \to X$，使得 $f_i^* = p_i \circ f^*$，即下图交换：



(2) 设 $(X_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中由集合 I 索引的对象族，且 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是 X_i 的积，其反投影为 p_i^*：$X \to X_i$ $(p_i^* = p_i \circ 1^*)$。那么，对于任意对象 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 以及 $\mathscr{C}$ 中的反态射 f_i^*: $Y \to X_i$，都存在唯一的态射 f: $Y \to X$，使得$f_i^* = p_i^* \circ f$，即下图交换：



Proof. 积的泛性质给出以下交换图：



也就是说，对于 $i \in I$，我们有 $f_i = p_i f$。

那么，以下计算给出了我们所需的结果：

$$f_i \circ 1^* = p_i \circ f \circ 1^*$$
$$f_i^* = p_i \circ f^*,$$

and

$$1^* \circ f_i = 1^* \circ p_i \circ f$$
$$f_i^* = p_i^* \circ f.$$

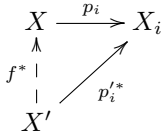
□

定义 4.40。 设 $(X_i)_{i\in I}$ 是由集合 I 索引的 $\mathscr{C}$ 的对象族，并设 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 是 X_i 的积，其投影为 $p_i : X \to X_i$。那么， X 的相应反积 是有序对 $(X; p_i^*)$，其反投影为 $p_i^* = p_i \circ 1^*$，并满足上述命题 4.39-(2) 中所述的反泛性质。

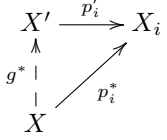
接下来，我们将利用上述建立的反泛性质，证明 [6], 第二章定理 5.1 的两个反类比。

定理 4.41. 若 $(X; p_i)$ 和 $(X'; p_i')$ 都是族 $(X_i)_{i\in I}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的积，则存在唯一的反同构 $g^* : X \xrightarrow{\sim} X'$，使得 $p_i^* = p_i' \circ g^*$。

证明。 命题 4.39-(2) 中描述的反泛性质给出以下交换图：



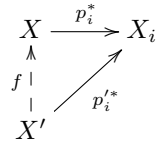
即 $p_i'^* = p_i \circ f^*$；并且



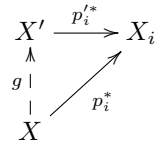
即 $p_i^* = p_i' \circ g^*$。于是我们有 $p_i'^* = p_i'^* \circ g^* \circ f^*$ 和 $p_i^* = p_i^* \circ f^* \circ g^*$，这意味着 $g^* \circ f^* = 1$和 $f^* \circ g^* = 1$。因此， g^* 是所需的唯一反同构。□

定理 4.42。 若$(X;\ p_i^*)$与$(X';\ p_i'^*)$都是 $\mathscr{C}$ 中族$(X_i)_{i\in I}$的反积，则存在唯一的同构 $g:\ X \xrightarrow{\sim} X'$，使得 $p_i^* = p_i'^* \circ g$。

证明。 命题 4.39-(1) 中所述的反泛性质给出以下交换图：



即 $p_i'^* = p_i^* \circ f$；以及



也就是说 $p_i^* = p_i'^* \circ g$。那么我们有 $p_i'^* = p_i'^* \circ g \circ f$ 和 $p_i^* = p_i^* \circ f \circ g$，这意味着 $g \circ f = 1$ 和$f \circ g = 1$。因此 g 是所需的唯一同构。□

5. Factorable Functors

接下来，我们希望阐明两个分解范畴之间的关系。这促使我们定义分解范畴之间的函子。

引理 *5.1.* 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 为分解范畴，且 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 为底层范畴之间的函子。那么对于任意 $x, y \in Ob(\mathscr{C})$，集合映射 $Hom_{\mathscr{C}}(x, y) \to Hom_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ 诱导出集合映射 $An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。此外，若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 为预加性分解范畴，且 F 是底层预加性范畴之间的加性函子，则群同态 $Hom_{\mathscr{C}}(x, y) \to Hom_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$ 诱导出群同态 $An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。

证明. 我们 只需证明第二个陈述。命题 4.7 给出如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x,\ y) & \xrightarrow{\quad\geq\quad} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Fx,\ Fy) \\ \| & & \| \\ An_{\mathscr{C}}(x, y) & & An_{\mathscr{D}}(Fx,\ Fy) \end{array}$$

那么，这个复合就是我们所需的同态。 □

定义 5.2。 设 $(\mathscr{C}, \Sigma_1)$ 和 $(\mathscr{D}, \Sigma_2)$ 是分解范畴。两个分解范畴 $(\mathscr{C}, \Sigma_1)$ 和 $(\mathscr{D}, \Sigma_2)$ 之间的可分解函子，记作 $F: (\mathscr{C}, \Sigma_1) \to (\mathscr{D}, \Sigma_2)$，由以下数据给出：

(1) 一个函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，定义在底层范畴之间，称为该可分解函子的底层函子。(2) 对于每一对对象 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，由引理 5.1 给出的诱导集合映射 $\varphi_{x,y}: An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。

假设这些数据满足以下条件：

(I) 给定一个反态射 $f^* \in An_{\mathscr{C}}(x, y)$，有 $F(f^*) = \varphi_{x,y}(f^*) \in An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。(II) 给定 $\mathscr{C}$ 中的态射 f, g，当复合有意义时，有

$$F(f^*g^*) = F(f^*)F(g^*),\ F(f^*g) = F(f^*)F(g),\ \text{and}\ F(fg^*) = F(f)F(g^*).$$

定义 5.3。 设 $(\mathscr{C}, \Sigma_1)$ 和 $(\mathscr{D}, \Sigma_2)$ 是预加性分解范畴。两个分解范畴 $(\mathscr{C}, \Sigma_1)$ 和 $(\mathscr{D}, \Sigma_2)$ 之间的一个加性可分解函-子，记作 $F: (\mathscr{C}, \Sigma_1) \to (\mathscr{D}, \Sigma_2)$，由以下数据给出：

(1) 底层阿贝尔范畴之间的一个加性函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，称为该可分解函子的底层加性函子 。
(2) 对每一对对象 $x, y \in \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，由引理 5.1 给出的诱导群同态 $\varphi_{x,y}: An_{\mathscr{C}}(x, y) \to An_{\mathscr{D}}(Fx, Fy)$。

假设这些数据满足定义 5.2 中的条件 (I) 和 (II)。

备注 5.4. 注意，上述条件 (I) 实际上是多余的。我们提及它仅仅是为了明确该定义。为方便起见，我们直接用底层函子的记号来表示可分解函子。

上述定义直接给出以下命题。

命题 5.5. 设 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是带积的分解范畴之间的一个可分解函子。那么 F 保持 $\mathscr{C}$ 的对象族的反积。

证明. 根据可分解函子的定义，容易验证。 □

由于我们有由小范畴和函子构成的范畴 $\mathbf{Cat}$，这促使我们定义小分解范畴的范畴。

定义 5.6. 小小分解范畴 是指其底层阿贝尔范畴为小范畴的分解范畴。

由此可以构造小分解范畴的范畴，记为**Fa**。**Fa** 的对象是小分解范畴，而**Fa** 中的态射是可分解函子。

我们可以定义一个从小分解范畴组成的范畴 **Fa** 到小范畴组成的范畴 **Cat**的函子：

$$\mathbf{FCA} : \mathbf{Fa} \to \mathbf{Cat}$$

它将每个分解范畴关联到底层范畴：$(\mathscr{C}, \Sigma) \mapsto \mathscr{C}$，并遗忘其分解结构。对于分解范畴之间的每个可分解函子 $F: (\mathscr{C}, \Sigma_1) \to (\mathscr{D}, \Sigma_2)$，它将其关联到底层范畴之间的底层函子 $F^\circ : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，并舍弃其可分解性质。

定义 5.7。上文定义的函子$\mathbf{FCA} : \mathbf{Fa} \to \mathbf{Cat}$ 称为遗忘分解结构函子。

此外，我们还可以定义一个从小阿贝尔范畴组成的范畴**Cat** 到小分解范畴组成的范畴**Fa** 的函子：

$$\mathbf{CAF} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Fa}$$

它将每个范畴关联到与之对应的分解范畴：$\mathscr{C} \mapsto \widetilde{\mathscr{C}} = (\mathscr{C}, \Sigma)$，即为其赋予分解结构。对于范畴之间的每个函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，它将其关联到对应分解范畴之间的一个可分解函子 $\widetilde{F}: \widetilde{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{D}}$。可分解函子 $\widetilde{F}: \widetilde{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{D}}$ 定义如下。

设 $(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ 和 $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ 分别是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 的生成元。注意，范畴等价给出了一个诱导函子 $F': \mathscr{C}' \to \mathscr{D}'$。可分解函子 $\widetilde{F}$ 是分解范畴 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{D}}$ 之间满足以下条件的任意可分解函子：

(1) 底层函子由函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 给出。(2) 对任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，我们给定集合映射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}'}(Fx, Fy)$，该映射由诱导函子 $F': \mathscr{C}' \to \mathscr{D}'$ 导出。

容易看出，这样的可分解函子 $\widetilde{F}$ 是唯一的，且与生成元的选择无关。

定义 5.8. 上文定义的函子 $\mathbf{CAF} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Fa}$ 称为分解函子。

此外，定理 4.16 表明，我们可以定义一个从小分解范畴组成的范畴 **Fa** 到小范畴组成的范畴 **Cat** 的函子：

$$\mathbf{Fa} \to \mathbf{Cat}$$

它将每个分解范畴 $\widetilde{\mathscr{C}}$ 映射到其关联范畴 $\mathscr{C}$。对于每个可分解函子 $\widetilde{F}: \widetilde{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{D}}$，它将其映射为关联范畴之间的函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$。可以按如下方式构造函子 F：

(1) $FA := \widetilde{F}A$ 对于每个 $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}})$。

(2) 若 $f: A \to B$ 是 $\mathscr{C}$中的任意态射，则令 $Ff := \widetilde{F}f \in \mathrm{Hom}(FA, FB)$。若 $g^*: A \to B$ 是 $\widetilde{\mathscr{C}}$中的任意反态射，则令 $Fg := \widetilde{F}g^* \in \mathrm{Hom}(FA, FB)$。

D定义 5.9。上文定义的函子 $\mathbf{Fa} \to \mathbf{Cat}$ 称为范畴化函子 r.

回忆一下，给定一个环 R，我们有自由函子 $Fr : \mathbf{集合} \to \mathbf{Mod}_R$，它将每个集合 S 与以 S 为基的自由 R-模对应起来。我们还有底层函子，也称为遗忘函子 $U : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{集合}$，它将每个 R-模与其底层集合对应起来。此外，Fr 是 U的左伴随。换言之，对于 $S \in \mathrm{Ob}(\mathbf{集合})$ 和 $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_R)$，我们有一个函子性双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(Fr(S), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, U(A)).$$

这启发我们认为，分解函子 **CAF** 可能是遗忘可分解函子 **FCA**的左伴随。然而，以下定理将表明，**CAF** 既是**FCA**的左伴随，也是其右伴随。

引理 *5.10.* 设 $\mathscr{C} \in$ *Ob(Fa)* 且 $\mathscr{D} \in$ *Ob(Cat)*。那么我们有 *CAF(FCA(*$\mathscr{C}$*))* $= \mathscr{C}$ *and FCA(CAF(*$\mathscr{D}$*))* $= \mathscr{D}$。此外，若 f 是 *Fa* 中的态射，则我们有 *CAF(FCA(f))* $= f$；若 g 是 *Cat* 中的态射，则我们有 *FCA(CAF(g))* $= g$。

证明。 第一个等式由公理 4.36 得出，其余显而易见。 □

定理 5.11。 遗忘可分解函子$\boldsymbol{FCA}$ 是分解函子$\boldsymbol{CAF}$的左伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat}}(\boldsymbol{FCA}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{CAF}(\mathscr{D})).$$

证明。 我们定义一个函数

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{FCA}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathscr{C}, \mathbf{CAF}(\mathscr{D})),\ f \mapsto \mathbf{CAF}(f) \circ g$$

其中 $g\colon \mathscr{C} \to$ **CAF(FCA(**$\mathscr{C}$**))** 是 **Fa** 中的恒等态射。然后我们定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathscr{C}, \mathbf{CAF}(\mathscr{D})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{FCA}(\mathscr{C}), \mathscr{D}),\ f' \mapsto g' \circ \mathbf{FCA}(f')$$

其中 g' **:FCA(CAF(**$\mathscr{D}$**))** $\to \mathscr{D}$ 是 **Cat** 中的恒等态射。随后可以验证，我们定义了一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{FCA}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathscr{C}, \mathbf{CAF}(\mathscr{D})).$$

最后，若**FCA(**B**)** $\xrightarrow{f} A \xrightarrow{g_1} A'$ 是**Cat** 中的态射，且 $B' \xrightarrow{h} B$ 是**Fa**中的态射，那么我们有

$$\begin{aligned}
&\xi_{A',B'}(g_1 \circ f \circ \mathbf{FCA}(h)) = \mathbf{CAF}(g_1 \circ f \circ \mathbf{FCA}(h)) \circ g = \mathbf{CAF}(g_1) \circ \mathbf{CAF}(f) \circ h \circ g,\\
&\mathbf{CAF}(g_1) \circ \xi_{A,B}(f) \circ h = \mathbf{CAF}(g_1) \circ \mathbf{CAF}(f) \circ g \circ h,\\
&\xi_{A',B'}(g_1 \circ f \circ \mathbf{FCA}(h)) = \mathbf{CAF}(g_1) \circ \xi_{A,B}(f) \circ h.
\end{aligned}$$

因此，双射 $\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}}$ 关于 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$都是自然的。 □

定理 5.12. 分解函子$\boldsymbol{CAF}$ 是遗忘可分解函子$\boldsymbol{FCA}$的左伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa}}(\boldsymbol{CAF}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA}(\mathscr{D})).$$

证明。 我们定义一个函数

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathbf{CAF}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{C}, \mathbf{FCA}(\mathscr{D})),\quad f \mapsto \mathbf{FCA}(f),$$

其逆是函数

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{C}, \mathbf{FCA}(\mathscr{D})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathbf{CAF}(\mathscr{C}), \mathscr{D}),\quad g \mapsto \mathbf{CAF}(g).$$

因此，我们得到一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fa}}(\mathbf{CAF}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{C}, \mathbf{FCA}(\mathscr{D})).$$

如果 **CAF(**B**)** $\xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'$ 是**Fa** 中的态射，且 $B' \xrightarrow{h} B$ 是**Cat**中的态射，那么我们有

$$\xi_{A',B'}(g \circ f \circ \mathbf{CAF}(h)) = \mathbf{FCA}(g \circ f \circ \mathbf{CAF}(h)) = \mathbf{FCA}(g) \circ \mathbf{FCA}(f) \circ h,$$

and

$$\mathbf{FCA}(g) \circ \xi_{A,B}(f) \circ h = \mathbf{FCA}(g) \circ \mathbf{FCA}(f) \circ h,$$

这表明

$$\xi_{A',B'}(g_1 \circ f \circ \mathbf{CAF}(h)) = \mathbf{FCA}(g) \circ \xi_{A,B}(f) \circ h.$$

因此，双射 $\xi_{\mathscr{C},\ \mathscr{D}}$ 对 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$均是自然的。 □

接下来，我们想研究**Fa**的子范畴。我们用**Fa-Pa** 表示**Fa** 的子范畴，其对象是小预加性分解范畴，态射是加性可分解函子。我们用**Cat-Pa** 表示**Cat** 中由小预加性范畴和加性函子构成的子范畴。

我们可以定义一个从小预加性分解范畴组成的范畴**Fa-Pa** 到小预加性范畴组成的范畴 **Cat-Pa** 的函子:

$$\textbf{FCA-Pa}: \ \textbf{Fa-Pa} \ \to \textbf{Cat-Pa}$$

它将每个预加性分解范畴关联到其底层预加性范畴: $(\mathscr{C}, \Sigma) \ \mapsto \ \mathscr{C}$，并遗忘其分解结构。对于分解范畴之间的每个加性可分解函子F: $(\mathscr{C}, \Sigma_1) \ \to (\mathscr{D}, \Sigma_2)$，它将其关联到底层预加性范畴之间的底层加性函子$F^{\circ}$: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$，并舍弃其可分解性质。

定义 5.13. 上文定义的函子 **FCA-Pa** :**Fa-Pa** $\to$ **Cat-Pa** 称为遗忘型预加性因子函子。

此外，我们还可以定义一个从小预加性范畴组成的范畴**Cat-Pa** 到小预加性分解范畴组成的范畴 **Fa** 的函子:

$$\textbf{CAF-Pa}: \textbf{Cat-Pa} \ \to \textbf{Fa-Pa}$$

它将每个预加性范畴映射到与之关联的预加性分解范畴: $\mathscr{C} \mapsto \mathscr{C} = (\mathscr{C}, \ \Sigma)$，即为其赋予分解结构。对于范畴间的每个加性函子 F: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$，它都关联一个定义在相应预加性分解范畴之间的加性可分解函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$。加性可分解函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 定义如下。

设 $(\mathscr{C}, \ \mathscr{C}')$ 和 $(\mathscr{D}, \ \mathscr{D}')$ 分别是 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 的生成元。注意，范畴等价给出了一个诱导的加性函子 F': $\mathscr{C}' \to \mathscr{D}'$。加性可分解函子 F 是预加性分解范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 之间任意一个满足以下条件的加性可分解函子:

(1) 底层加性函子由加性函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 给出。(2) 对任意 $x, \ y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，给定群同态 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(x, \ y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}'}(Fx, \ Fy)$，该同态由诱导的加性函子 F': $\mathscr{C}' \to \mathscr{D}'$ 所诱导。

容易看出，这样的加性可分解函子 F 是唯一的，且与生成元的选择无关。

定义 5.14. 上面定义的函子 **CAF-Pa** :**Cat-Pa** $\to$ **Fa-Pa** 称为分解预加性函子。

此外，定理 4.16 表明，我们可以定义一个从小预加性分解范畴组成的范畴 **Fa-Pa** 到小范畴组成的范畴 **Cat** 的函子:

$$\textbf{Fa-Pa} \ \to \textbf{Cat}$$

它将每个预加性分解范畴 $\mathscr{C}$ 映射到其关联范畴 $\mathscr{C}$。对于每个可分解加性函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，它都映射为关联范畴之间的一个函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$。可以按如下方式构造函子 F:

(1) $FA := FA$ 对每个 $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$。

(2) 若 $f: A \to B$ 是 $\mathscr{C}$中的任意态射，则令 $Ff := Ff \in \mathrm{Hom}(FA, FB)$。

若 $g^*: A \to B$ 是 $\mathscr{C}$中的任意反态射，则令 $Fg := Fg^* \in \mathrm{Hom}(FA, FB)$。

定义 5.15. 上文定义的函子 **Fa-Pa** $\to$**Cat** 称为范畴化预加性函子。

我们还可以证明，分解预加性函子 **CAF-Pa** 既是遗忘型预加性因子函子 **FCA-Pa**的左伴随，也是其右伴随。证明与定理 5.11 和 5.12 的证明几乎相同。

定理 5.16. 遗忘型预加性因子函子 $\boldsymbol{FCA\text{-}Pa}$ 是分解预加性函子 $\boldsymbol{CAF\text{-}Pa}$的左伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Pa})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Pa})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Pa}}(\boldsymbol{FCA\text{-}Pa}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Pa}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{CAF\text{-}Pa}(\mathscr{D})).$$

定理 5.17。 分解预加性函子$\boldsymbol{CAF\text{-}Pa}$ 是遗忘型预加性因子函子$\boldsymbol{FCA\text{-}Pa}$的左伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Pa})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Pa})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Pa}}(\boldsymbol{CAF\text{-}Pa}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Pa}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA\text{-}Pa}(\mathscr{D})).$$

事实上，若我们考虑由小阿贝尔分解范畴和可分解加性函子构成的 Fa 的子范畴**Fa-Ab** ，则可以用类似的方法推导出相同的结果。令**Cat-Ab** 为由小阿贝尔范畴和加性函子构成的**Cat** 的子范畴。我们用**CAF-Ab** 表示**CAF-Pa** 在**Cat-Ab**上的限制，并用**FCA-Ab** 表示**FCA-Pa** 在**Fa-Ab**上的限制。于是有以下定理:

定理 5.18。 函子$\boldsymbol{FCA\text{-}Ab}$ 是函子$\boldsymbol{CAF\text{-}Ab}$的左伴随。换言之，对于$\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Ab})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Ab})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Ab}}(\boldsymbol{FCA\text{-}Ab}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Ab}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{CAF\text{-}Ab}(\mathscr{D})).$$

定理 5.19。 函子 $\boldsymbol{CAF\text{-}Ab}$ 是函子 $\boldsymbol{FCA\text{-}Ab}$的左伴随。换言之，对于 $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Cat\text{-}Ab})$ 和 $\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Fa\text{-}Ab})$，存在一个函子性双射

$$\xi_{\mathscr{C},\mathscr{D}} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Fa\text{-}Ab}}(\boldsymbol{CAF\text{-}Ab}(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Cat\text{-}Ab}}(\mathscr{C}, \boldsymbol{FCA\text{-}Ab}(\mathscr{D})).$$

References

[1] Dr. Dale T. B., *Anti-Homomorphism in Rings*, 国际综合研究、教育与科学方法期刊 (IJARESM)，ISSN：2455-6211，第 9 卷，第 1 期，2021 年 1 月。[2] Chandrasekhara Rao, K. 和 G.Gopalakrishnamoorthy, *Anti-Homomorphisms in Groups*，《数学与计算机科学研究所杂志》（2006、2009、2010）。[3] K. Chandrasekhara Rao 和 Swaminathan Venkataraman, *Anti-homomorphisms in near-rings*，《数学与计算机科学研究所期刊·数学系列》第 21 卷，2008 年 1 月。[4] Pursell, Lyle E., *Anti-Isomorphisms vs. Isomorphisms*，《数学杂志》第 44 卷第 2 期，美国数学协会，1971 年，第 102–103 页， https://doi.org/10.2307/2688925。[5] Pierre Antoine Grillet, *Abstract Algebra*，第 2 版，施普林格出版社纽约分社，2007 年。[6] P.J. Hilton 和 Urs Stammbach, *A course in homological algebra*，第 2 版，施普林格出版社纽约分社，1997 年。[7] Ofer Gabber 和 Lorenzo Ramero, *Foundations For Almost Ring Theory*，第 7.5 版，2019 年。[8] Stack Project 作者, *Stack Project* https://stacks.math.columbia.edu/，2021 年。[9] Bjorn Poonen, *Why all rings should have a 1*，2014 年 4 月 1 日，arXiv:1404.0135v1。