arXiv:2303.08621v1 [math.GT] 15 Mar 2023

辛应用中的恰当子流形障碍

KEVIN SACKEL

Abstract. 设 X^N 是一个闭定向流形， $\alpha \in H^*(X;\mathbb{R})$ 是一个上同调类，而 $Z \in H_{N-k}(X)$ 是一个整系数同调类。我们提出如下问题：是否存在一个定向嵌入子流形 $Y^{N-k} \subset X$，其同调类为Z，且满足 $\alpha|_Y = 0 \in H^*(Y;\mathbb{R})$? 本文通过研究德拉姆复形的形式变形，给出一系列可计算的障碍，用以判断给定同调类中是否存在这样的“恰当”子流形。在最后一节中，我们运用这些障碍证明，以下辛流形不含非分离的恰当（更不用说接触型）超曲面：K¨ahler 流形、辛单有理流形以及 Kodaira–Thurston 流形。

1. Introduction

设 X^n 是一个维数为 n 的闭定向流形，并令 $\alpha \in H^r(X;\mathbb{R})$ 为一个固定的齐次次数为 r 的上同调类。[1] 本文余下部分中，记号 (X,α) 始终表示这样一对对象。类 α 提供了额外数据，用以选出称为恰当子流形的特殊类型子流形。

定义 1.1. 若嵌入的定向超曲面 $Y \subset (X,\alpha)$ 满足$\alpha|_Y = 0 \in H^r(Y;\mathbb{R})$，则称其为恰当的。

约定 1.2. 未注明系数时，同调和上同调均取整系数，即 $H_*(X) = H_*(X;\mathbb{Z})$ 且 $H^*(X) = H^*(X;\mathbb{Z})$。

约定 1.3. 此后，除非另行说明，我们始终假设所有子流形均已定向，因此 $[Y] \in H_*(X)$ 是一个定义良好的同调类。

本文主要关注以下问题。

问题 1.4. 对于给定的同调类 $Z \in H_{N-k}(X)$，何时存在（或不存在）一个表示 Z 的嵌入的正合子流形 $Y^{N-k} \subset (X,\alpha)$，即满足 $[Y] = Z$?

本文中，我们找到了一个障碍序列，用以判断是否存在代表给定同调类 Z 的嵌入的正合子流形。这些障碍源自对德拉姆复形的某个形式变形问题的研究。事实上，正合子流形会产生一种几何变形，而这又意味着所有形式代数障碍都必须消失。计算的代数部分是第3节的主题，我们现在讨论其中的结果。

[1] 令 α 为齐次次数并非必要；读者很容易验证，在本文的所有结果中，α 都可以分解为其齐次分量。

假设 k 是一个奇整数。取一个闭微分形式 $\omega \in \Omega^*(X)$，以及一个闭 k-形式 $\eta \in \Omega^k(X)$。对于 $0 \leq L \leq \infty$ （注意：包括 $L = \infty$ 的情形），我们可以问，是否存在一个微分形式序列$\omega_1, \ldots, \omega_L \in \Omega^*(X)$，使得令 $\omega_0 := \omega$ 后，有

$$d\omega_{\ell+1} = \eta \wedge \omega_\ell, \qquad \text{for all } 0 \leq \ell < L.$$

事实证明，这种序列的存在性仅取决于上同调类 $[\omega] \in H^*(X;\mathbb{R})$ 和 $[\eta] \in H^k(X;\mathbb{R})$，而非具体的微分形式$\omega$和 η。若存在这样的序列 $\omega_1, \ldots, \omega_L$，我们就称 $[\omega]$ 沿着 $[\eta]$ 是 L- 喷射可变形的。正如命题 3.9 所证明的那样，这一术语以及代表形式的无关性，可由该定义与另一种定义（定义 3.8）等价这一事实得到澄清。采用这一简便记法，我们的主定理如下。

定理 1.5. 设有一对 (X^N, α)，其中 X 是一个维数为 N 的闭定向流形，$\alpha \in H^r(X;\mathbb{R})$ 是一个上同调类。假设一个整系数同调类 $Z \in H_{N-k}(X)$ 由一个恰当子流形表示。滥用记号，令 $PD(Z) \in H^k(X;\mathbb{R})$ 表示在映射 $H^k(X) \to H^k(X;\mathbb{R})$ 下，(整系数)庞加莱对偶类 $PD(Z) \in H^k(X)$ 的像。

- 若 k 为奇数，则 α 在 $PD(Z)$方向上是 ∞-喷射可变形的。
- 若 r 为奇数，则 $PD(Z)$在 α方向上是 ∞-喷射可变形的。
- 无论 k和 r的奇偶性如何，我们都有 $PD(Z) \wedge \alpha = 0 \in H^{r+k}(X;\mathbb{R})$。

注记 1.6. 甚至并非每个同调类 $Z \in H_{N-k}(X)$都能由 X中的光滑子流形表示，即使不考虑 α的数据也是如此。同调类的可实现性研究称为斯廷罗德问题，最初由 Thom [14]研究。尽管一般的同调类未必可实现，Thom 证明，总存在某个非零常数 $c \in \mathbb{Z}$，使得 cZ 可由一个子流形实现。我们的障碍具有尺度不变性，也就是说，α 在 $PD(Z;\mathbb{R})$方向上是 L-喷射可变形的，当且仅当 α 在$cPD(Z;\mathbb{R}) = PD(cZ;\mathbb{R})$方向上是 L-喷射可变形的。（见命题 3.10。）因此，我们的障碍实际上阻止了 $c \neq 0$ 的每个倍数 cZ 拥有恰当代表；根据 Thom 的结果，这意味着我们的障碍超越了光滑可实现性。关于这一推理思路的应用，见命题 3.17。

理解 ∞-喷射可变形性的可计算性，对于定理 1.5 的实用性至关重要。作为一种近似，我们可以询问：给定的上同调类是否对所有有限的 L 都是 L-喷射可变形的？这可以看作一列有限的障碍，其中第一个（$L = 1$）恢复了条件 $PD(Z) \wedge \alpha = 0$，即使 k 和 r 都是偶数，该条件仍然成立。为此，我们很幸运：对于固定的 $\mu \in H^k(X;\mathbb{R})$，若 k 为奇数，则 $H^*(X;\mathbb{R})$ 中沿 μ 方向 L-喷射可变形的上同调类所构成的向量子空间，可以通过关于 L 的归纳过程明确计算；每一步都依赖于有限维线性代数计算。[2] 详情请见命题 3.11 及其后续讨论。因此，我们可以非常实用地运用定理 1.5：对每个有限的 L，归纳检查若 k 为奇数，α 是否沿 $PD(Z)$ 为 L-喷射可变形；或者反之，若 r 为奇数，则进行相应检查。

[2]遗憾的是，该计算关于 μ 是非线性的。

在最后一节，即第4节中，我们将介绍辛几何领域中的若干应用，尤其是 $k=1$ 的情形。如果 (X,ω) 是闭辛流形，那么 $[\omega]\neq 0\in H^2(X;\mathbb{R})$，因此，定理 1.5 第一条中出现的 $[\omega]$ 的 ∞-喷射可变形性，为某些同调类中恰当子流形的存在提供了非平凡的障碍。即使在 $k=1$ 的情形下，我们也能找出若干不含非分离恰当超曲面的辛流形：

- 维数为 ≥ 4 的 K¨ahler 流形（第一障碍，见推论 4.5）
- 辛单有理流形（第一障碍，见定理4.11）
- Kodaira–Thurston 流形（第二障碍，见定理4.12）

因此可推知，这些流形均不允许存在非分离接触型曲面。这是一类特殊的恰当超曲面，特别适用于伪全纯曲线理论，通常表现为辛场论中的颈拉伸论证（见 [4,6]）。第二个结论是 Wendl [16]，的工作的推论；他本人证明了辛单有理流形不允许存在非分离接触型超曲面（但未注意到恰当超曲面这一版本）。第一和第三个结果在文献中似乎都是全新的。

致谢。我最初对这一主题产生兴趣，源于与 Baptiste Chantraine 关于局部共形辛几何中李类的讨论。他对 Apostolov 和 Dloussky 的工作的解释 [2] 让我立即得出了定理 4.4 的结论，随后又促成了本文的写作。与 Rohil Prasad 的一次交谈，使本文的范围从单纯的辛几何拓展到本文所呈现的更一般情形。Dennis Sullivan 让我确信方程 $d\omega_{\ell+1}=\eta\wedge\omega_\ell$ 本身就很有趣，也进一步激励我完成本文。（关于有理同伦论的联系留待未来工作探讨。）Francesco Lin 一直给予关注和鼓励，而在恰当时机与 Mike Sullivan 和 Umut Varolgunes 的交谈则让我下定决心完成本文。感谢他们所有人的指引。

2. 精确性并非同调性的

在证明主要结果之前，我们先通过几个例子来初步了解问题 1.4。对于许多 (X,α) 和 Z 的情形，答案都很简单，也完全令人满意。回想一下，$\dim X=N$，$|\alpha|=r$ 和 $|Z|=N-k$。显然，出于次数方面的考虑，我们可以假设 $0\leq k\leq N$ 和 $0\leq r\leq N-k$。下面来看几个边界情形。

例 2.1. 如果 $\alpha=0$，那么每个子流形都是恰当的。相应地，请注意，定理 1.5 的所有障碍显然都消失了。

例 2.2. 类 $Z=0$ 总能由任意维数的嵌入恰当子流形表示，例如任意空子流形；或者不那么显然地，由任意小的平凡球面表示。因此，我们可以把注意力集中在 $Z\neq 0$ 的情形上。再次注意，定理 1.5 的障碍显然都消失了。

例 2.3。考虑情形 $r=N-k$。那么，连通子流形 Y^{N-k} 的恰当性仅取决于其同调类。也就是说，任何满足 $Y=[Z]$ 的 Y 都是

恰当，当且仅当

$$\langle \alpha, [Y] \rangle = 0,$$

其中，配对是同次数的同调类与上同调类之间的标准配对。与定理 1.5 对比，我们得到障碍

$$\alpha \wedge PD(Z) = PD(\langle \alpha, [Y] \rangle).$$

然而，当 k 或 r 为奇数时，∞-喷射可变形性似乎与这一几何推理无关。参见利用了这一点的命题 3.17。

离开这些例子后，问题就变得更加微妙，因为超曲面的恰当性不再仅由其同调类决定。下面是一个简单的例子。

例 2.4。假设 $\alpha \in H^0(X;\mathbb{R})$ 是 0 次齐次的。我们可以将α 视为 X 上的局部常值函数，由此 X 分解为

$$X = \alpha^{-1}(0) \sqcup (X \setminus \alpha^{-1}(0))$$

其中两个项分别是 X 的若干连通分支的并。子流形恰当，当且仅当它包含于 $\alpha^{-1}(0)$ 中。请注意，尽管这一恰当性条件相对直接，子流形的恰当性并非由其同调类决定。

从 $r = 0$ 出发的情形可推广为下文的命题 2.5。该命题告诉我们，给定子流形 $Y \subset X$ 的恰当性通常取决于其具体的嵌入，而不只取决于其同调类 $[Y] \in H_{N-k}(X)$。因此，问题 1.4 的答案并不简单。

命题 2.5. 对任意 $N \geq 3$、$1 \leq k \leq N-2$ 和 $1 \leq r \leq N-k-1$，存在一对 (X, α)，其中包含一个闭、连通、定向的 N-维流形 X 和一个上同调类 $\alpha \in H^r(X;\mathbb{R})$，以及一对 $(N-k)$ 维嵌入子流形 $Y_1, Y_2 \subset X$，使得 $[Y_1] = [Y_2] \in H_{N-k}(X)$，其中 Y_1 恰当，而 Y_2 不恰当。

证明。考虑带边流形 $C = (S^r \times D^{N-k-r+1}) \setminus D^{N-k+1}$，将其视为从 $W_1 = S^{N-k}$ 到 $W_2 = S^r \times S^{N-k-r}$的配边。我们可以取$C$的双倍，即

$$\mathbb{D}C := C \cup_{W_1 \sqcup W_2} C.$$

考虑 C 上生成上同调类 $\beta_{\mathbb{Z}} \in H^r(S^r \times \mathbb{D}^{N-k-r+1}) \cong \mathbb{Z}$的限制，并令 β 为其在实数系数下的像。由 Mayer–Vietoris 定理可知，我们得到一个类$\sim\beta \in H^r(\mathbb{D}C;\mathbb{R})$，它在 C的每个副本上的限制均为 β。最后，若 M^{k-1} 是闭定向流形，取 $X = M \times \mathbb{D}C$，并令 $\alpha \in H^r(M \times \mathbb{D}C;\mathbb{R})$ 为$\sim\beta$ 在投影下的拉回。令 $Y_j = M \times W_j$，结论便由 K¨unneth 定理得出。也就是说，由于 α 是拉回的，我们可以将 $\alpha|_{Y_j}$ 与

$$\beta|_{W_j} \in H^r(W_j;\mathbb{R}) \cong H^0(M;\mathbb{R}) \otimes H^r(W_j;\mathbb{R}) \overset{\text{Künneth}}{\cong} H^r(Y_j;\mathbb{R}).$$

显然，$\beta|_{W_1} = 0$ 而 $\beta|_{W_2} \neq 0$，因此结论得证。 □

注 2.6. 在命题 2.5 的证明中，尽管 Y_1 和 Y_2 同调，但它们不同伦这一点至关重要，因为如果 Y_1 和 Y_2 同伦，那么 Y_1 是恰当的，当且仅当 Y_2 是恰当的。

3. L-JET DEFORMABILITY

3.1. 动机与形式变形。本文的核心几何问题（问题 1.4）及其部分阻碍性答案（定理 1.5 ），与这样一种代数研究密切相关：当我们同时扭曲微分时，研究德拉姆复形中闭元的变形。[3] 本节讨论基本的代数框架；更一般的讨论见第 3.6 节。

定义 3.1. 给定一个闭 1-形式 $\eta \in \mathcal{Z}^1(X)$，可以构造 Lichnerowicz–德拉姆微分

$$d_\eta \colon \Omega^*(X) \to \Omega^{*+1}(X)$$

定义为 $d_\eta\omega := d\omega - \eta \wedge \omega$。

Lichnerowicz–德拉姆微分满足 $d_\eta^2 = 0$ （这恰恰是因为 $d\eta$ =0），因此在 $\Omega^*(X)$ 上给出一种新的“扭曲”余链复形结构。我们研究的基本代数问题如下：

问题 3.2. 假设 $\omega_0 \in \mathcal{Z}^*(X)$ 是一个闭微分形式（相对于 d）。是否存在一族闭微分形式 $\omega(t) \in \mathcal{Z}^*(X)$，满足 $\omega(0) = \omega_0$，使得 $d_{t\eta}\omega_t = 0$?

在无穷小层面，可以通过在 $t = 0$ 附近取泰勒级数来寻找障碍。也就是说，我们要寻找

$$\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j t^j$$

其常数项为 ω_0 ，与问题中指定的相同，使得

$$d_{t\eta}\omega(t) = 0.$$

逐次分离各次幂后，我们得到方程 $d\omega_{j+1} = \eta \wedge \omega_j$。换言之，我们得到引言中所说的 ∞-喷射可变形性概念。从代数角度看，我们所做的是构造形式的 Lichnerowicz–de Rham 复形

$$\mathcal{D}_\eta^\infty(X) := (\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\![t]\!], d_{t\eta})$$

其中

$$d_{t\eta}(\omega \otimes p(t)) := d\omega \otimes p(t) - (\eta \wedge \omega) \otimes tp(t).$$

现在假设 $\eta \in \mathcal{Z}^k(X)$ 是一个次数为 k 的闭微分形式。我们仍可尝试构造同样的形式复形。如果处理得过于天真，我们会注意到，若 k 为偶数，则

$$(d_{t\eta})^2\omega = t^2\eta \wedge \eta \wedge \omega$$

即使 $d\eta = 0$，它也不一定为 0。通过设定 $t^2 = 0$，便可在这种奇偶性下解决这一问题。事实上，考虑分次后，这种做法便自然而然地出现了。由于我们希望得到一个上链

[3]事实上，本研究最初源于一个愿望：理解 Apostolov 和 Dloussky 的工作 [2] 中，局部共形辛结构（LCS）在李类变形时的变形研究。该研究始于这样一个认识：同调类 Z 中的恰当超曲面会产生李类沿着 $PD(Z)$ 方向的变形。

复形，我们需要 $d_{t\eta}$ 的次数为 1，因此取 $|t| = 1 - k$。分次交换性的 Koszul 符号规则又意味着，如果 k 是奇数，则 $t^2 = 0$。

因此，我们得到形式 Lichnerowicz–de Rham 复形的以下二分结论：

$$\mathcal{D}_\eta^\infty(X) := \begin{cases} (\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\![t]\!], d_{t\eta}), & k \text{ odd} \\ (\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2), d_{t\eta}), & k \text{ even} \end{cases}$$

我们看到，对于 k 偶数，元素 $\omega(t)$ 可直接写作 $\omega_0 + t\omega_1$；当且仅当 $d\omega_1 = \eta \wedge \omega_0$ 时，它才是闭的，无需满足更高次数的 ω_j。正因如此，定理 1.5 的陈述附带了奇偶性条件。因此，在本节余下部分中，我们可以不失一般性地限制于 k 奇数。[4]

3.2. L-喷射近似。我们可以通过模去理想 (t^{L+1})，对形式 Lichnerowicz–de Rham 复形取 L-喷射近似。具体而言，若固定一个闭的k-形式 $\eta \in \mathcal{Z}^k(X)$ 和一个整数 $L \geq 0$，我们构造其 L-喷射近似

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\eta^L(X) &:= \mathcal{D}_\eta^\infty(X) \otimes_{\mathbb{R}} {\mathbb{R}[\![t]\!]}\big/_{(t^{L+1})} \\ &= \left(\Omega^*(X) \otimes {\mathbb{R}[\![t]\!]}\big/_{(t^{L+1})}, d_{t\eta}\right) \end{aligned}$$

其中，形式变量 t 的次数仍设为 $1-k$，而 $d_{t\eta}^L$ 表示应用$d_{t\eta}$ 但模去 t^{L+1}。显然，$d_{t\eta}^L$ 仍可如此定义，因为它保持理想 (t^{L+1})。$d_{t\eta}$ 是一个微分这一事实也可传递到 $d_{t\eta}^L$，即 $(d_{t\eta}^L)^2 = 0$。

例 3.3. 在 $L = 0$ 的情形下，我们有

$$\mathcal{D}_\eta^0(X) = (\Omega^*(X), d),$$

也就是说，德拉姆复形完全不存在形式变形。

值得注意的是，自然也应包含 $L = \infty$ 的情形，此时我们便得到复形 $\mathcal{D}_\eta^\infty(X)$。因此，今后在可能的情况下，我们都允许 $L = \infty$。

复形 $\mathcal{D}_\eta^L(X)$ 之间存在若干映射。我们首先将它们定义为分次线性映射，尽管它们实际上都与相应的微分相容，因而给出上链复形之间的映射；这一点将在命题 3.5 中阐述。我们考虑的映射分为以下三类：

1. 截断映射：对于每个 $0 \leq L_1 \leq L_2 \leq \infty$，我们都得到一个截断映射

$$\tau_\eta^{L_2, L_1} \colon \mathcal{D}_\eta^{L_2}(X) \to \mathcal{D}_\eta^{L_1}(X)$$

由商映射 $\mathbb{R}[\![t]\!]/(t^{L_2+1}) \to \mathbb{R}[\![t]\!]/(t^{L_1+1})$ 诱导。

2. 规范变换同构：如果 $\eta' = \eta + dg$ 是另一个同调的闭k-形式，且 g 是一个固定的 $(k-1)$-形式，那么我们得到一个规范变换映射

$$\Phi_{\eta;g}^L \colon \mathcal{D}_\eta^L(X) \to \mathcal{D}_{\eta'}^L(X)$$

[4]一切 我们写下的 g 对所有 k 都是合理的，只要记住在 k 的情况下，$t^2 = 0$ 也 .

由（形式上的）乘以.....给出

$$e^{tg} := \sum_{j=0}^{L} \frac{g^j}{j!} t^j \in C^\infty(X) \otimes \mathbb{R}[\![t]\!]/(t^{L+1}).$$

事实上，这些都是同构，其逆映射由乘以 e^{-tg} 给出，即映射$\Phi^L_{\eta';\ -g}$。

注 3.4. 即使 $\eta = \eta'$，我们也可以取 g 为一个非零闭（$k-1$）形式，而所得的自同构 $\Phi^L_{\eta;g}$ 并非恒等映射。

3. 尺度变换同构：如果 $c \in \mathbb{R}^*$，那么我们得到一个尺度变换映射

$$s^L_{\eta;c} \colon \mathcal{D}^L_\eta(X) \to \mathcal{D}^L_{c\eta}(X)$$

它将 $t \mapsto t/c$ 发送到，即

$$s^L_{\eta;c}\left(\sum_{j=0}^{L} \alpha_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{L} \frac{\alpha_j}{c^j} t^j.$$

事实上，这是一个同构，因为它的逆映射为 $s^L_{c\eta;1/c}$。

命题 3.5. 截断映射、规范变换同构和尺度变换同构都是上链复形之间的（零次）映射，并满足以下性质：

- 截断映射的余循环条件：
$$\tau^{L,L}_\eta = \mathrm{id}, \qquad \tau^{L_2,L_1}_\eta \circ \tau^{L_3,L_2}_\eta = \tau^{L_3,L_1}_\eta.$$
- 规范变换的余循环条件：
$$\Phi^L_{\eta;0} = \mathrm{id}, \qquad \Phi^L_{\eta;g_1+g_2} = \Phi^L_{\eta+dg_1;g_2} \circ \Phi^L_{\eta;g_1}$$
- 尺度变换的余循环条件：
$$s^L_{\eta;1} = \mathrm{id}, \qquad s^L_{c_1\eta;c_2} \circ s^L_{\eta;c_1} = s^L_{\eta;c_1c_2}.$$
- 截断与规范变换的交换性：
$$\tau^{L_2,L_1}_{\eta+dg} \circ \Phi^{L_2}_{\eta;g} = \Phi^{L_1}_{\eta;g} \circ \tau^{L_2,L_1}_\eta$$
- 截断与尺度变换的交换性：
$$\tau^{L_2,L_1}_{c\eta} \circ s^{L_2}_{\eta;c} = s^{L_1}_{\eta;c} \circ \tau^{L_2,L_1}_\eta$$
- 规范变换与尺度变换的交换性：
$$\Phi^L_{c\eta;cg} \circ s^L_{\eta;c} = s^L_{\eta+dg;c} \circ \Phi^L_{\eta;g}$$

证明大部分留作读者练习。下面证明规范变换是上链复形之间的映射；换言之，证明

$$d^L_{t(\eta+dg)} \circ \Phi^L_{\eta;g} = \Phi^L_{\eta;g} \circ d^L_{t\eta}.$$

我们来验证确实如此：

$$\begin{aligned} d^L_{t(\eta+dg)}\Phi^L_{\eta;g}\alpha &= d^L_{t(\eta+dg)}(e^{tg}\alpha) \\ &= d(e^{tg}\alpha) - t(\eta+dg)e^{tg}\alpha(\mathrm{mod}\ t^{L+1}) \\ &= e^{tg}\cdot tdg\wedge\alpha + e^{tg}d\alpha - t(\eta+dg)e^{tg}\alpha(\mathrm{mod}\ t^{L+1}) \\ &= e^{tg}(d\alpha - t\eta\wedge\alpha)(\mathrm{mod}\ t^{L+1}) \\ &= \Phi^L_{\eta;g}d^L_{t\eta}\alpha \end{aligned}$$

其他性质也很容易验证。 □

注 3.6. 为了定义规范变换和尺度变换同构，我们只需在 $L=\infty$ 的情形下定义它们。事实上，这些映射在 $\mathcal{D}^\infty_\eta(X)$ 上保留理想 (t^{L+1})，因此它们唯一地下降到每个 $\mathcal{D}^L_\eta(X)$，并且与截断映射相容。

上链复形的映射总是保留恰当元素。事实上，对于截断映射，我们记录如下一个有用的引理。

引理 3.7. 设 $\mathcal{B}^*(\mathcal{D}^L_\eta(X))$ 表示恰当元素。那么对于 $L_1\le L_2$，截断映射

$$\tau^{L_2,L_1}_\eta\colon \mathcal{B}^*(\mathcal{D}^{L_2}_\eta(X))\to\mathcal{B}^*(\mathcal{D}^{L_1}_\eta(X))$$

是满射的。

证明。假设 $\alpha = d^{L_1}_{t\eta}\beta\in\mathcal{B}^*(\mathcal{D}^{L_1}_\eta(X))$。由于 $\tau^{L_2,\ L_1}_{\ \eta}$ 在上链层面是满射，因此我们可以将 β 提升为某个 $\widetilde{\beta}\in\mathcal{D}^{L_2}_\eta(X)$，使得

$$\tau^{L_2,L_1}_\eta(\widetilde{\beta}) = \beta.$$

但由于 $\tau^{L_2,\ L_1}_{\ \eta}$ 是上链复形之间的映射，我们得到

$$\tau^{L_2,L_1}_\eta(d^{L_2}_{t\eta}\widetilde{\beta}) = d^{L_1}_{t\eta}\left(\tau^{L_2,L_1}_\eta(\widetilde{\beta})\right) = d^{L_1}_{t\eta}\beta = \alpha,$$

因此得证。 □

由于我们的映射全都是上链复形之间的映射，它们会诱导出上同调上的映射。对于作用于上链层面和上同调上的映射，我们将使用相同的记号，不过具体含义会由上下文明确。

在 $L=0$ 的情形下，因此如例 3.3 中所示，$\mathcal{D}^0_\eta(X)=(\Omega^*(X),d)$，规范变换同构 $\Phi^0_{\eta;g}$（视为 $(\Omega^*(X),d)$ 的自同构）就是恒等映射，与 η 和 g 无关。结合命题 3.5，我们看到对于每个 L、η 和 g，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathcal{D}^L_\eta(X)) & \xrightarrow{\tau^{L,0}_\eta} & H^*(\mathcal{D}^0_\eta(X)) & = & H^*(X;\mathbb{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi^L_{\eta;g}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^0_{\eta;g}} & & \| \\ H^*(\mathcal{D}^L_{\eta+dg}(X)) & \xrightarrow{\tau^{L,0}_{\eta+dg}} & H^*(\mathcal{D}^0_{\eta+dg}(X)) & = & H^*(X;\mathbb{R}) \end{array}$$

由于左侧垂直箭头是同构，因此 $\tau^{L,}{}_{\eta}{}^{0}$ 和 ${}_{\tau}{}^{L,}{}_{\eta+dg}^{0}$ 在 $H^*(X;\mathbb{R})$ 中作为子空间的像相同。我们将这个子空间记为

$$V^L_{[\eta]} := \mathrm{Im}(\tau^{L,0}_{\eta}\colon H^*(\mathcal{D}^L_\eta(X)) \to H^*(X;\mathbb{R})),$$

其中，按照记号的含义，我们现在已默认该子空间只取决于上同调类 $[\eta] \in H^k(X;\mathbb{R})$，而不取决于具体的代表闭1-形式 η。

定义 3.8. 设 $\alpha \in H^*(X;\mathbb{R})$ 和 $\mu \in H^k(X;\mathbb{R})$。若 α 满足 $\alpha \in V^L_\mu$，则称其沿 μ 为 L-喷射可变形的。

让我们展开这个定义，确认它与引言中的说法一致。

命题 3.9. 设 $\omega \in \Omega^r(X)$ 是一个闭微分 r-形式，且 $\eta \in \mathcal{Z}^k(X)$ 是闭微分 k-形式。那么，$[\omega]$ 沿 $[\eta]$ 为 L- 喷射可变形，当且仅当存在一个微分形式序列 $\omega_1, \ldots, \omega_L$，使得令 $\omega_0 = \omega$ 后，有

$$d\omega_{\ell+1} = \eta \wedge \omega_\ell \ for\ all\ 0 \le \ell < L$$

证明. 由 $d^L_{t\eta}$ 的公式可知，一个元素

$$\sum_{j=0}^{L} \omega_j t^j \in \mathcal{D}^L_\eta(X)$$

当且仅当对所有 $0 \le \ell < L$，$d\omega_0 = 0$ 和 $d\omega_{\ell+1} = \eta \wedge \omega_\ell$，它才是闭的，因此反向蕴含显而易见。对于正向蕴含，设 $[\omega] \in V^L_{[\eta]}$。那么存在某个闭元

$$\alpha := \sum_{j=0}^{L} \alpha_j t^j \in \mathcal{D}^L_\eta(X)$$

使得

$$[\omega] = [\tau^{L,0}_\eta(\alpha)] = [\alpha_0].$$

根据引理 3.7，我们有恰当形式 $\omega - \alpha_0$ 可写为

$$\omega - \alpha_0 = \tau^{L,0}_\eta(\beta)$$

对于某个恰当的 $\beta \in \mathcal{D}^L_\eta(X)$。因此，$\alpha + \beta$ 仍然是闭的，并且

$$\omega = \tau^{L,0}_\eta(\alpha + \beta)$$

是在上链层面成立，而不只是在上同调层面。$\alpha+\beta$的系数给出所需的序列 $\omega_0 = \omega$、ω_1、... ...、ω_L。□

我们再记下代数框架中的一个性质：向量空间 V^L_μ实际上只取决于 μ 的共形类，而非具体的上同调类。

命题 3.10. 对于 $c \neq 0$ a 非零常数以及 $\mu \in H^k(X;\mathbb{R})$,

$$V^L_\mu = V^L_{c\mu}.$$

换言之，上同调类 $\alpha \in H^*(X;\mathbb{R})$ 沿 μ 方向是 L-喷射可变形的，当且仅当它沿 $c\mu$ 方向是 L-喷射可变形的。

证明。沿用前面的相同推理，但将规范变换改为尺度变换，交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\mathcal{D}^L_\eta(X)) & \xrightarrow{\tau^{L,0}_\eta} & H^*(\mathcal{D}^0_\eta(X)) & \xrightarrow{\sim} & H^*(X;\mathbb{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle s^L_{\eta;c}} & & \downarrow{\scriptstyle s^0_{\eta;c}} & & \| \\ H^*(\mathcal{D}^L_{c\eta}(X)) & \xrightarrow{\tau^{L,0}_{c\eta}} & H^*(\mathcal{D}^0_{c\eta}(X)) & \xrightarrow{\sim} & H^*(X;\mathbb{R}) \end{array}$$

（其中 $[\eta] = \mu \in H^k(X;\mathbb{R})$）意味着

$$V^L_\mu = \mathrm{Im}(\tau^{L,0}_\eta) = \mathrm{Im}(\tau^{L,0}_{c\eta}) = V^L_{c\mu}.$$

□

3.3. L-喷射可变形性的可计算性。自然会想要理解每个 $L < \infty$ 对应的向量空间 $V^L_{[\eta]}$。我们首先指出，只需研究每个次数上的空间。也就是说，由于每个 $\tau^{L,}{}_{\eta}{}^{0}$都保持次数，因此有

$$V^L_{[\eta]} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \tau^{L,0}_\eta(H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} (V^L_{[\eta]} \cap H^r(X;\mathbb{R})).$$

因此，只需研究子空间

$$V^{L,r}_{[\eta]} := \tau^{L,0}_\eta(H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))) = V^L_{[\eta]} \cap H^r(X;\mathbb{R})$$

对每个 $r \geq 0$ 都成立。为了理解这些子空间，我们将为每个 $H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))$ 找到一个有限生成集，其在 $\tau^{L,}{}_{\eta}{}^{0}$ 下的像构成 $V^{L,}{}_{[\eta]}{}^{r}$ 的一个张成集。

命题 3.11. 对每个 $L < \infty$ 和 $r \geq 0$，我们有

$$\dim H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X)) \leq \sum_{j=0}^{L} \dim H^{r+j(k-1)}(X;\mathbb{R}).$$

证明。第一个不等式显然。对于每个 $0 < L < \infty$，令 $\Omega^*(X)[-L(k-1)]$表示通常的德拉姆复形，并对次数作平移，使得例如这个新复形的零次部分为 $\Omega^{L(k-1)}(X)$。映射

$$\Psi^L_\eta \colon \Omega^*(X)[-L(k-1)] \to \mathcal{D}^L_\eta(X)$$

定义为

$$\Psi^L_\eta(\omega) = \omega \cdot t^L \pmod{t^{L+1}}$$

是上链复形之间的映射，因为它保持次数并与微分相容：

$$\Psi^L_\eta(d\omega) = d\omega \cdot t^L = d^L_{t\eta}(\omega \cdot t^L) = d^L_{t\eta}(\Psi^L_\eta(\omega)).$$

此外，它构成上链复形的一个短正合列

$$0 \to \Omega^*(X)[-L(k-1)] \xrightarrow{\Psi^L_\eta} \mathcal{D}^L_\eta(X) \xrightarrow{\tau^{L,L-1}_\eta} D^{L-1}_\eta(X) \to 0.$$

因此，上同调的长正合列为

$$\cdots \to H^{r+L(k-1)}(X;\mathbb{R}) \to H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X)) \to H^r(\mathcal{D}^{L-1}_\eta(X)) \to \cdots$$

由此可得

$$\dim H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X)) \leq \dim H^{r+L(k-1)}(X;\mathbb{R}) + \dim H^r(\mathcal{D}^{L-1}_\eta(X)).$$

现在通过归纳法即可得出该结果，其中基例 $L=0$ 显然成立。 □

命题 3.11 的证明给出了一种算法，用于计算向量空间 $H^r(\mathcal{D}_\eta^L(X))$ 的张成集。因此，通过对 L 使用归纳法，我们可以在应用 $\tau^{L,\ \eta\ 0}$ 后得到 $V^{L,\ [\eta]\ r}$，如下所述。记

$$\mathcal{C}_\eta^{L,r}(X) := \mathrm{Im}(H^r(\mathcal{D}_\eta^{L+1}(X)) \xrightarrow{\tau_\eta^{L+1,L}} H^r(\mathcal{D}_\eta^L(X))),$$

这样，证明中考虑的长正合列可截断为如下形式的恰当序列

$$\cdots \to H^{r+(L+1)(k-1)}(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\Psi_\eta^{L+1}} H^r(\mathcal{D}_\eta^{L+1}(X)) \xrightarrow{\tau_\eta^{L+1,L}} \mathcal{C}_\eta^{L,r}(X) \to 0.$$

假设根据归纳法，我们已有一个有限生成集

$$\{[v_1],\dots,[v_M]\} \subset H^r(\mathcal{D}_\eta^L(X)),$$

其中每个 $v_\ell = \sum_{j=0}^{L} v_{j\ell} t^j \in \mathcal{D}_\eta^L(X)$ 都对应某个 $v_{j\ell} \in \Omega^r(X)$。

引理 3.12. 形式 $\eta \wedge \sum_{\ell=0}^{M} c_k v_{L\ell}$ 是恰当的，当且仅当 $\sum_{\ell=0}^{M} c_\ell [v_\ell] \in \mathcal{C}^{L,\ \eta\ r}(X)$。

证明。若楔积是恰当的，我们可以写成

$$\eta \wedge \sum_{\ell=0}^{M} c_\ell v_{L\ell} = d\alpha,$$

then

$$\sum_{\ell=0}^{M} c_\ell [v_\ell] = \left[\tau_\eta^{L+1,L} \left(\sum_{j=0}^{L} \left(\sum_{\ell=0}^{M} c_\ell v_{j\ell} \right) + \alpha \cdot t^{L+1} \right) \right] \in \mathcal{C}_\eta^{L,r}(X).$$

反过来，若 $\sum_{\ell=0}^{M(L)} c_\ell [v_\ell] \in \mathcal{C}^{L}{}_{,\eta}{}^{r}(X)$，那么在上链层面，我们有

$$\sum_{\ell=0}^{M} c_\ell v_\ell = \alpha + \tau_\eta^{L+1,L} \beta$$

其中 $\alpha \in \mathcal{D}_\eta^L(X)$ 是恰当的，$\beta \in \mathcal{D}_\eta^{L+1}(X)$ 是闭的，且 α 和 β 的次数为 r。由引理 3.7，α 本身是某个恰当元素在 $\tau^{L+1}{}_{,\eta}{}^{L}$ 下的像；因此，

$$\sum_{\ell=0}^{M} c_\ell v_\ell = \tau_\eta^{L+1,L}(\gamma),$$

其中 $\gamma \in \mathcal{D}_\eta^{L+1}(X)$ 是闭的（次数为 r），。写作 $\gamma = \sum_{j=0}^{L+1} \gamma_j t^j$，我们有 $\gamma_L = \sum_{k=0}^{M} c_\ell v_{L\ell}$。另一方面，由于 γ 是闭的，

$$d\gamma_{L+1} = \eta \wedge \gamma_L = \eta \wedge \sum_{k=0}^{M} c_\ell v_{L\ell}$$

是恰当的。 □

将张成集视为满射 $\mathbb{R}^M \twoheadrightarrow H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))$，引理给出了 $\mathbb{R}^M$ 中的元素使其像落入 $\mathcal{C}^{L,}{}_\eta{}^r$ 的充要线性条件，因此取 $\mathbb{R}^M$ 的这个子空间的一组基，便得到 $\mathcal{C}^{L,}{}_\eta{}^r$ 的张成集$[w_1], \ldots, [w_{M'}]$。对于每个 w_j，我们都可以选取一个提升 $[\widetilde{w}_j] \in H^r(\mathcal{D}^{L+1}_\eta(X)$。然后

$$H^r(\mathcal{D}^{L+1}_\eta(X) = \mathrm{Im}(\Psi^{L+1}_\eta) + \langle [\widetilde{w}_1], \ldots, [\widetilde{w}_{M'}] \rangle$$

其中，第一个加项显然有一个张成集，即取$H^r(X;\mathbb{R})$的一组基的像即可。因此，我们从 $H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))$的一个张成集出发，归纳地构造出了 $H^r(\mathcal{D}^{L+1}_\eta(X))$的一个张成集。

注 3.13. 一般而言，要为每个 $H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))$选取一组基会更加困难；这基本上要求我们弄清楚，对于每个 L， $H^{r+L(k-1)}(X;\mathbb{R})$中的哪些元素在 Ψ^L_η 下生成等价元素。除非处于相当受限的情形，否则这通常是一项困难的计算。

例 3.14. 让我们通过一个具体例子计算 $H^r(\mathcal{D}^L_\eta(X))$。考虑这个 4 维李群

$$G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R},$$

其中 $H_{\mathbb{R}}$ 是海森堡群

$$H_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

注意，要求 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 会得到一个李子群 $H_{\mathbb{Z}} \leq H_{\mathbb{R}}$。因此我们可以取商空间

$$X = G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}} = (H_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R})/(H_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}) = H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

由于它是一个闭幂零流形，Nomizu 的经典结果 [11] 指出，左不变形式子复形嵌入整个德拉姆微分分次代数是一个拟同构（即在上同调上构成同构）。这个子复形由切瓦利–埃伦伯格微分分次代数（$\Lambda^*\mathfrak{g}^*, d$）计算。具体而言，若 A, B, C, T与 $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_t$ 互为对偶（其中 ∂_t 张成 $\mathbb{R}$方向），那么该复形由以下关系生成

$$dA = dB = dT = 0, \qquad dC = AB.$$

（注意，为了方便，记号中省略了楔积，因此 AB实际上表示 $A \wedge B$，并将 A 和 B 视为左不变形式。）具体而言，将上同调写作闭形式模去恰当形式，我们有

$$\begin{aligned} H^0(X;\mathbb{R}) &= \mathrm{span}(1) \\ H^1(X;\mathbb{R}) &= \mathrm{span}(A, B, C, T)/\mathrm{span}(C) \\ H^2(X;\mathbb{R}) &= \mathrm{span}(AB, AC, AT, BC, BT)/\mathrm{span}(AB) \\ H^3(X;\mathbb{R}) &= \mathrm{span}(ABZ, ABT, ACT, BCT)/\mathrm{span}(ABT) \\ H^4(X;\mathbb{R}) &= \mathrm{span}(ABCT) \end{aligned}$$

处理完这些后，假设我们取类 $\eta = A$ （次数为 $k = 1$）和 $r = 2$，并计算向量空间 $H^2(\mathcal{D}^L_A(X))$。我们从平凡情形 $L = 0$ 开始：

$$H^2(\mathcal{D}^0_A(X)) = H^2(X;\mathbb{R}).$$

取 $H^2(X;\mathbb{R})$ 的一组基为形式 AC、AT、BC、BT，这样 $H^2(\mathcal{D}_A^0(X)$ 的一般元素可写为

$$[\omega_0] = [\alpha_0 AC + \beta_0 AT + \gamma_0 BC + \delta_0 BT].$$

我们看到

$$\eta \wedge \omega_0 = \gamma_0 ABC + \delta_0 ABT$$

当且仅当 $\gamma_0 = 0$ 时，它是恰当的，其原函数为 $\delta_0 CT$，即

$$d(\delta_0 CT) = \delta_0 ABT = \eta \wedge \omega_0.$$

由此我们得到

$$H^2(\mathcal{D}_A^1(X)) = \left\{ \begin{bmatrix} (\alpha_0 AC + \beta_0 AT + \delta_0 BT) \\ +(\delta_0 CT + \alpha_1 AC + \beta_1 AT + \gamma_1 BC + \delta_1 BT)t \end{bmatrix} \right\},$$

其中，第二个坐标中的项 $\alpha_1 AC + \beta_1 AT + \gamma_1 BC + \delta_1 BT$ 对应于 Ψ_A^1 的像。进一步展开，我们看到

$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega_1 &= A \cdot (\delta_0 CT + \alpha_1 AC + \beta_1 AT + \gamma_1 BC + \delta_1 BT) \\ &= \delta_0 ACT + \gamma_1 ABC + \delta_1 ABT. \end{aligned}$$

为了使其恰当，现在需要 $\delta_0 = \gamma_1 = 0$。我们发现

$$H^2(\mathcal{D}_A^2(X)) = \left\{ \begin{bmatrix} (\alpha_0 AC + \beta_0 AT) \\ +(\alpha_1 AC + \beta_1 AT + \delta_1 BT)t \\ +(\delta_1 CT + \alpha_2 AC + \beta_2 AT + \gamma_2 BC + \delta_2 BT)t^2 \end{bmatrix} \right\}.$$

继续下去，不难看出

$$H^2(\mathcal{D}_A^L(X)) = \left\{ \begin{bmatrix} (\alpha_0 AC + \beta_0 AT) \\ +(\alpha_1 AC + \beta_1 AT)t \\ +(\alpha_2 AC + \beta_2 AT)t^2 \\ \vdots \\ +(\alpha_{L-2} AC + \beta_{L-2} AT)t^{L-2} \\ +(\alpha_{L-1} AC + \beta_{L-1} AT + \delta_{L-1} BT)t^{L-1} \\ +(\delta_{L-1} CT + \alpha_L AC + \beta_L AT + \gamma_L BC + \delta_L BT)t^L \end{bmatrix} \right\}.$$

在 $L = \infty$ 的情形下，我们看到

$$H^r(\mathcal{D}_A^\infty(X)) = \left\{ \begin{bmatrix} (\alpha_0 AC + \beta_0 AT) \\ +(\alpha_1 AC + \beta_1 AT)t \\ +(\alpha_2 AC + \beta_2 AT)t^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}.$$

特别地，我们发现对于每个 $2 \le L \le \infty$,

$$V_A^{L,2}(X) = \operatorname{span}\langle [AC], [AT] \rangle,$$

而

$$V_A^{1,2}(X) = \operatorname{span}\langle [AC], [AT], [BT] \rangle.$$

例如，$[BT]$ 是1-喷射可变形的，但不是2-喷射可变形的。

值得指出的是，$H^r(\mathcal{D}_A^L(X))$ 的表达式是用张成集而非基来书写的。例如，注意到

$$\Psi_A^2([AC]) = [ACt^2] = [d_{tA}(-B + tC)] = 0,$$

因此 参数 α_2 在我们对 $H^2(\mathcal{D}_A^2(\Omega^*(X),\ d))$ 的表达式中是多余的 .

3.4. 主定理的证明。我们已经具备证明引言中的定理 1.5 所需的全部工具，它是本文的主要结果。

定理 1.5 的证明。给定 $Y \subset X$ 是一个恰当子流形，且余定向（根据引言中我们默认的假设，Y 是定向的），并代表类 $Z \in H_{N-k}(X)$。回想一下，例如在 Bott 和 Tu [3, 的《第 6] 节》中，$PD(Z)$ 可以由一个给出法丛 Thom 类的微分形式表示，即由一个紧支撑于 Y 的管状邻域 U 上的闭 k-形式 $\eta \in \mathcal{Z}^k(X)$ 表示。

取一个表示类 α 的闭 r-形式 $\omega \in \Omega^r(X)$。由于 Y 是恰当的，且领圈邻域 U 形变收缩到 Y，所以 $\omega|_U$ 在 U 上也恰当。选取一个原函数 $\theta \in \Omega^{r-1}(U)$，使得 $\omega|_U = d\theta$。由于 η 在 U 之外为零，我们得到一个光滑的 $(r+k-1)$-形式 β，它由将形式 $-\eta \wedge \theta$ 延拓为零得到。计算可得

$$\eta \wedge \omega = d\beta,$$

从而证明了定理陈述中的第三个条件：无论 k 和 r 的奇偶性如何，我们都有 $PD(Z) \wedge \alpha = 0 \in H^{r+k}(X; \mathbb{R})$。

现在假设 k 为奇数。我们恰好看到 $\eta \wedge \beta = 0$。换言之，无论奇偶性如何，$\omega + t\beta$ 都是 $\mathcal{D}^\infty_\eta(X)$ 的一个闭元。因此，$[\omega] \in V^\infty_{[\eta]} = V^\infty_{PD(Z)}$。

现在假设 r 为奇数。令 η_ℓ 表示形式 $\frac{1}{\ell!}\theta^\ell \wedge \eta$ 在 $\ell \geq 0$ 上的零延拓。例如，$\eta_0 = \eta$。我们看到，对于所有 $\ell \geq 0$，都有 $d\eta_{\ell+1} = \omega \wedge \eta_\ell$，因此 $\sum_{\ell=0}^\infty \eta_\ell t^\ell$ 是 $\mathcal{D}^\infty_\omega(X)$ 的一个闭元。因此，$[\eta] \in V^\infty_{[\omega]}$。□

我们记录以下推论，它只需考察第一个障碍（1-喷射可变形性）即可得到。

推论 3.15. 假设我们有一对 (X, α)，其中 X 是一个闭定向流形，而 $\alpha \in H^r(X; \mathbb{R})$ 是一个齐次次数为 r 的上同调类。若映射 $\Phi_\alpha\colon H^k(X; \mathbb{R}) \to H^{r+k}(X; \mathbb{R})$ 定义为

$$\Phi_\alpha(\mu) = \alpha \wedge \mu$$

是单射，则所有余维为 k 的恰当子流形在同调中都是挠元。特别地，对于 $k = 1$，不存在非分离恰当超曲面。

证明。由于假设 Φ_α 是单射，这意味着 $0 = PD(Z) \in H^k(X; \mathbb{R})$。这意味着在整数系数下，$PD(Z)$ 在 $H^k(X)$ 中是挠元，因此 Z 在 $H_{N-k}(X)$ 中是挠元。最后一个结论由以下事实得出：若 $k = 1$，则 $H^1(X) = H_{N-1}(X)$ 是非挠元，并且超曲面表示平凡类 $Z = 0$ 当且仅当它是分离的。□

3.5. 从 L-喷射可变形到 $(L+1)$-喷射可变形。一般而言，人们预计一个类具有 L-喷射可变形性，并不意味着它必然具有 $(L+1)$-喷射可变形性。对于 $L = 0$，这一点很明显：在任意方向上，每个类都是 0-喷射可变形的；但并非每个类在给定的非零方向上都是 1-喷射可变形的（甚至可能在任何非零方向上都不是，例如推论 3.15 的情形）。在例 3.14 中，我们

确实看到，类 $[BT]$ 在方向 $[A]$ 上是 1-喷射可变形的，但在方向 $[A]$ 上不是 2-喷射可变形的。

然而，在某些情况下，可以推导出更高阶的可变形性。其中一个原因纯粹与次数有关。

命题 3.16. 设 $\alpha \in H^r(X;\mathbb{R})$ 和 $\mu \in H^k(X;\mathbb{R})$，且 $k>1$ 为奇数。令

$$L_0 := \left\lceil \frac{N-r}{k-1} \right\rceil - 1.$$

那么以下条件等价：

- $\alpha \in V_\mu^\infty(X)$

每个 $L \geq L_0$ 的 • $\alpha \in V_\mu^L(X)$

- $\alpha \in V_\mu^{L_0}(X)$

证明。第一条显然蕴含第二条，而第二条蕴含第三条。为证明第三条蕴含第一条，假设我们已固定代表元$[\omega]=\alpha$和 $[\eta]=\mu$，因此存在某个序列 $\omega_0=\omega,\omega_1,\ldots,\omega_{L_0}$，满足对 $0\leq \ell < L_0$ 有 $d\omega_{\ell+1} = \eta\wedge\omega_\ell$。注意到，基于次数的原因，$|\omega_j| = r+j(k-1)$。由此可知，$\eta\wedge\omega_{L_0}$的次数为 $r+L_0(k-1)+k \geq N+1$；由于 X的维数为 N，因此它必然为0。因此，我们可以令 $\omega_j=0$ 对 $j>L_0$ 成立，从而得到一个实现∞-喷射可变形性的序列。□

在 $k=1$的情形下，因此没有任何先验的次数理由可以说明 L-喷射可变形性为何会蕴含 ($L+1$)-喷射可变形性。尽管如此，例 2.3 给出了一个有趣的例子，其中恰好发生了这一现象。

命题 3.17. 设 X^N 是一个维数为 N 的闭定向流形，并设 $\mu \in H^1(X;\mathbb{R})$ 和 $\alpha \in H^{N-1}(X;\mathbb{R})$ 满足

$$\alpha \in V_\mu^1(X)$$

（即 $\mu\wedge\alpha = 0 \in H^N(X;\mathbb{R})$）。若 μ 是一个有理类（即属于（自动为单射的）标量扩张映射 $H^1(X;\mathbb{Q}) \to H^1(X;\mathbb{R})$ 的像），则

$$\alpha \in V_\mu^\infty(X).$$

证明。存在某个有理数 $c\neq 0$ 和某个整系数同调类 $Z\in H_{N-1}(X)$，使得 $\mu = c\cdot PD(Z)$。在此次数下，每个这样的 Z 都由一个光滑超曲面表示。取一个这样的超曲面 Y。根据例 2.3 中的讨论，条件 $\mu\wedge\alpha = c\cdot PD(Z)\wedge\alpha = 0$ 等价于条件 Y 是恰当的。由定理 1.5 可知，α 在 $PD(Z)$ 的方向上是 ∞-喷射可变形的，而命题 3.10 的尺度不变性因此意味着 α 在 μ 的方向上是 ∞-喷射可变形的。□

注 3.18. 在 $k=1$ 的情形下，我们尚未解决这样一个问题：对于任意固定的流形 X，是否存在有限常数 $L_X<\infty$，使得对于每个类 $\mu\in H^k(X;\mathbb{R})$，$\alpha\in V_\mu^\infty(X)$ 当且仅当 $\alpha\in V_\mu^{L_X}(X) \in H^*(X;\mathbb{R})$。

3.6. 代数一般性。本节构建的代数框架适用范围相当广。设 $(\mathcal{A}^\bullet, d^{\mathcal{A}})$ 是域 $\mathbb{F}$ 上特征零的（上同调分次）微分分次代数，并且 $(\mathcal{M}^\bullet, d^{\mathcal{M}})$ 是一个 $(\mathcal{A}^\bullet, d^{\mathcal{A}})$-微分分次模。那么对于任意闭元 $\eta \in \mathcal{A}^k$，我们可以构造上链复形

$$\mathcal{D}_\eta^L(\mathcal{M}^\bullet, d^{\mathcal{M}}) := \left(\mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathbb{F}} {\mathbb{F}[\![t]\!]}\Big/_{t^{(L+1)}}, (d^{\mathcal{M}})^L_{t\eta}\right)$$

以同样的方式，并假定 $|t| = 1-k$，因此若 k 为偶数，则 $t^2 = 0$。与之前一样，我们也可以取 $L = \infty$。这些复形总是自然地成为微分分次代数 $\mathcal{D}_0^L(\mathcal{A}^\bullet, d^{\mathcal{A}})$ 上的微分分次模。仍然存在截断映射、规范变换同构和尺度变换同构，使得命题 3.5 自然推广到这一情形。因此，我们得到一个概念：沿着类 $[\eta] \in H^k(\mathcal{A}^\bullet, d^{\mathcal{A}})$ 的方向，对 $H^r(\mathcal{M}^\bullet, d^{\mathcal{M}})$ 中的类具有 L-喷射可变形性。

特别具有几何意义的情形是，$(\mathcal{A}^\bullet, d^{\mathcal{A}}) = (\Omega^*(X)\ d)$ 是通常的德拉姆复形（其底域为 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$），而 $(\mathcal{M}^\bullet, d^{\mathcal{M}}) = (\Omega^*(X;\ E)\ d_\nabla)$ 由向量丛 π 的截面的微分形式组成：$E \to X$ 其上带有平坦联络 ∇。例如，若 E 是平凡线丛，但 ∇ 的整体变换群非平凡，则会产生关于所谓“局部共形”（或更准确地说，“局部齐次缩放”）微分形式的问题。这包括局部共形辛几何的情形；参见 Apostolov–Dloussky 的上述研究 [2, 命题 4.2]，其中讨论了变形问题的一个特例。对于所有这类上同调类 $\alpha \in H^r(\Omega^*(X; E)\ d_\nabla)$，恰当子流形的概念显而易见，由此可得到定理 1.5 的一个类似结果，本文不再赘述。

4. Symplectic applications

回顾一下，辛流形 (X, ω) 是一个光滑流形 X，其上带有一个闭 2-形式 $\omega \in \mathcal{Z}^2(X)$，且该形式是非退化的，也就是说，内积 $\iota_\bullet\omega\colon TX \to T^*X$ 由 $v \mapsto \iota_v\omega$ 给出，并且是一个丛同构。等价地，X 具有偶数维数$N = 2n$，且 ω^n 处处不为零。

辛几何中一种特别有用的超曲面（尤其是在辛场论中的颈拉伸论证中，参见 [4, 6]）称为接触型超曲面。

定义 4.1. 若辛流形 $H^{2n-1} \subset (X^{2n}, \omega)$ 的一个超曲面满足以下两个性质，则称其为接触型：存在某个 $\alpha \in \Omega^1(H)$，使得：

- $d\alpha = \omega|_H$
- $\alpha \wedge d\alpha^{n-1}$ 处处不为零

根据第一条性质，显然任何接触型超曲面自动都是恰当的。在本节余下部分，我们将介绍三类不含非分离恰当超曲面的辛流形，因此也不含非分离接触型超曲面：K¨ahler 流形、辛单有理流形以及 Kodaira–Thurston 流形。

注 4.2. 众所周知，存在含有非分离接触型超曲面的闭辛流形，不过这类流形通常借助 h- 原理技术构造，因此往往只能得到存在性结果，而没有具体实例。主要构造归功于 Etnyre，Albers–Bramham–Wendl 的工作 [1, 例 1.3] 和 Wendl 的工作 [16, 第 1.3 节1]中对此作了概述。

注 4.3. 关于非分离接触型超曲面障碍的其他相关结果，见 Albers–Bramham–Wendl [1] 以及 Mukherjee [10]的研究。对于他们假设中出现的超曲面类型所受的几何限制是否会蕴含本文所述类型的非零障碍（从而为他们的结果提供另一种证明），我们暂不作结论。

4.1. K¨ahler 流形。回顾一下，K¨ahler 流形 (X, ω, J) 是由一个流形 X、一个辛形式 ω 以及一个可积复结构 J 构成的三元组，它们彼此相容，即：

- $\omega(v, Jv) > 0$ 对所有 $v \neq 0$均成立
- $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$

如果上同调类 $\alpha \in H^2(X;\mathbb{R})$ 可以实现为某个 K¨ahler 结构 (ω, J) 的上同调类 $[\omega]$，我们就称它为 K¨ahler 类。注意，由于 K¨ahler 流形兼具辛结构与复结构，因此其维数必为偶数，所以通常用 $N = 2n$ 表示维数。

K¨ahler 流形满足硬 Lefschetz 定理，该定理指出，对于任意 $k \leq n$，与 $[\omega]^{n-k}$ 的楔积给出一个同构

$$H^k(X;\mathbb{R}) \cong H^{2n-k}(X;\mathbb{R}).$$

特别地，对于任意 $\ell \leq n-k$，与 $[\omega]^\ell$ 的楔积作为映射$H^k(X;\mathbb{R}) \to H^{k+2\ell}(X;\mathbb{R})$是单射。由此得到以下定理。

定理 4.4. 假设 X^{2n} 是一个流形，且 $\alpha \in H^2(X;\mathbb{R})$ 是一个 K¨ahler 类。对于$k \leq n$ 和 $\ell \leq n-k$，任何余维为 k、关于α^ℓ 恰当的子流形，其同调 $H_{2n-k}(X)$ 中的同调类必为挠元。特别地，取 $k = 1$时，不存在关于 α^ℓ 恰当的非分离超曲面（对 $\ell \leq n-1$而言）。

证明。根据硬 Lefschetz 定理，与 α^ℓ 的楔积作为映射$H^j(X;\mathbb{R}) \to H^{j+2\ell}(X;\mathbb{R})$是单射，因此推论 3.15 适用。□

推论 4.5. 维数为 ≥ 4 的 K¨ahler 流形不含非分离恰当超曲面，尤其不含非分离接触型超曲面。

证明。对 $k = \ell = 1$ 应用定理 4.4。 □

4.2. 辛单有理流形。回顾一下，在辛流形上可以定义如下形式的格罗莫夫–维滕不变量

$$\mathrm{Gr}^{(X,\omega)}_{g,m,A} \in H_d(\overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times X^m;\mathbb{Q}),$$

其中 $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A \in H_2(X)$, $\mathcal{M}_{g,\,m}$ 是由 g 个带有 m 个标记点的稳定结点黎曼曲面构成的德利涅–芒福德模空间，而次数

d右侧的值由 g, m 和 A 决定。直观地说，格罗莫夫-威滕不变量是通过研究由 g 个带有 m 个标记点的伪全纯映射构成的（紧化）模空间来定义的，这些映射代表同调类 A （在 (X,ω) 上选取一般的相容的近复结构 J ）。伪全纯映射模空间的预期维数为 d （称为虚维数），并且该模空间带有一个显然的到 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\,m}\times X^m$ 的求值映射，因此，将该模空间的基本类推前，即得到所需的格罗莫夫–威滕不变量。

给定同调类 α_1、…、$\alpha_m\in H_*(X;\,\mathbb{Q})$ 和 $\beta\in H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,\,m})$，其总余维为 d，通过交积可得到 $H_0(\overline{\mathcal{M}}_{g,\,m}\times X^m;\,\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ 中的一个元素，其值记作如下，也称为格罗莫夫–威滕不变量，

$$\mathrm{Gr}_{g,m,A}^{(X,\omega)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta)\in\mathbb{Q},$$

直观地说，这些不变量计数的是从带有 m 个标记点的亏格为 g 的黎曼曲面出发的伪全纯映射数量，使得这 m 个标记点映到 α_j 的一般代表元上的点，并且相应模空间基本类的共形类推前到 β。（通常最容易考虑 β 本身就是 $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,\,m})$ 的基本类的情形。）

备注 4.6。要使这一点严谨，必须补充解析细节；对此有多种策略 [5, 7–9, 12, 13]。为使本文篇幅更短（且由于本文重点不在这些技术细节上），我们将假设（不再另行说明） $[\omega]\in H^2(X;\mathbb{R})$ 是一个整系数上同调类，以便采用 Cieliebak 和 Mohnke 的策略 [5]。我们只会在引理4.10的证明中用到这一策略；该证明交由 Wendl [16] 的相关工作处理，他采用了 Cieliebak–Mohnke 方法。

定义 4.7. 若辛流形 (X,ω) 存在某个 $m\geq 3$, $A\in H_2(X)$, $\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in H_*(X;\,\mathbb{Q})$ 和 $\beta\in H_*(\overline{\mathcal{M}}_{0,m};\,\mathbb{Q})$，使得

$$\mathrm{Gr}_{g,m,A}^{(X,\omega)}([pt],\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\beta)\neq 0\in\mathbb{Q}$$

其中 $[pt]\in H_0(X;\mathbb{Q})$ 是一个点的同调类。

Wendl [16]证明，此类流形不允许存在任何非分离的接触型超曲面。事实上，他证明了一个稍微更一般的结果，为此我们先引入一个定义。

定义 4.8. 若辛流形 $H^{2n-1}\subset(X^{2n},\omega)$ 中的超曲面存在一个相容的近复结构 J，使得$\xi:=TH\cap JTH\leq TH$在 H 上诱导出接触结构，即对于任意非零 1-形式$\alpha\in\Omega^1(H)$，若 $\ker\alpha=\xi$，则 $\alpha\wedge d\alpha^{n-1}$ 是体积形式，则称该超曲面为伪凸的。

定理 4.9（Wendl [16]）。如果 (X,ω) 是一个辛单连通的闭辛流形，那么不存在非分离伪凸超曲面。

我们可以通过将 Wendl 的定理推广到恰当超曲面来补充这一结论。关键引理基本上源自 Wendl 的工作。

引理4.10. 若（X^{2n}, ω）是辛单有理的，则由与 $[\omega]$的楔积给出的 $\Phi_\omega\colon\ H^1(X;\,\mathbb{R})\to H^3(X;\,\mathbb{R})$是单射。

证明。假设 $Z \neq 0 \in H_{2n-1}(X)$，从而 $PD(Z) \neq 0 \in H^1(X)$。Wendl在其论文的引理3.2] 中证明，可以找到一个映射 Φ: $S^1 \times S^2 \to (X, \omega)$，满足以下性质：

- $\Phi_*[S^1 \times \{*\}] \bullet Z \neq 0 \in H_0(X; \mathbb{Q})$
- Φ在每个纤维上的限制都是一个伪全纯（带节点）球面 $S^2 \to (X, \omega, J)$，其相对于某个相容的近复结构 J属于同调类 A （即出现在非零 Gromov–Witten 不变量中的同调类）。

第一点也可等价地表述为事实： $\Phi^*(PD(Z))|_{S^1\times\{*\}} \neq 0$。第二点表明 $\Phi^*([\omega])|_{\{*\}\times S^2} \neq 0$ （且其面积为 $\langle \omega, A\rangle$）。根据 K¨unneth 定理，我们有 $H^3(S^1\times S^2; \mathbb{R}) = H^1(S^1; \mathbb{R})\otimes H^2(S^2; \mathbb{R})$。特别地，元素 $\Phi^*(PD(Z) \wedge [\omega]) \in H^3(S^1 \times S^2; \mathbb{R})$与非零元素$\Phi^*(PD(Z))|_{S^1} \otimes \Phi^*([\omega])|_{S^2} \neq 0$对应。因此，

$$\langle PD(Z) \wedge [\omega], \Phi_*([S^1 \times S^2])\rangle \neq 0,$$

因此 $PD(Z) \wedge [\omega] \neq 0$。由此可知，对于整数类 Z， $\Phi_\omega(PD(Z)) \neq 0$。张量乘以 $\mathbb{R}$，我们得到 Φ_ω 的单射性。□

定理4.11. 若 (X, ω) 是一个辛单连通的闭辛流形，则不存在非分离精确超曲面。

证明。结合引理4.10和推论 3.15。 □

4.3. Kodaira–Thurston 流形。Kodaira–Thurston 流形是一个辛4维流形，最初由 Thurston [15]构造，目的是得到一个没有 K¨ahler 形式的辛流形。从光滑角度看，它就是例 3.14中的流形。相应的辛形式就是 $\omega = AC + BT$ （作为左不变形式），很容易验证它是非退化且闭的，因此其本身就是一个辛形式。现在我们能够证明所需的结果。

定理4.12。Kodaira–Thurston辛流形（$X, AC + BT$）不允许存在非分离的恰当超曲面。

证明。假设存在一个恰当超曲面，其庞加莱对偶为上同调类 $[\eta]$，形式为 $\eta = pA + qB + rT$。我们有

$$\eta \wedge \omega = pABT - qABC - rBCT$$

根据第一障碍，它必须是恰当的。这意味着 $q = r = 0$，因此 $\eta = pA$。在例 3.14 中，我们证明了

$$V_A^\infty = V_A^2 = \operatorname{span}([AC], [AT]) \leq H^2(X; \mathbb{R}).$$

我们看到 $[AC + BT] \notin V_A^\infty$。根据命题 3.10，事实上我们有

$$[AC + BT] \notin V_{pA}^\infty$$

对任意 $p \neq 0$。因此，我们得出任何恰当超曲面都必须属于平凡同调类，因而是分离的。□

References

[1] Peter Albers、Barney Bramham 和 Chris Wendl。《辛四维流形中的非分离接触超曲面》。Algebr. Geom. Topol., 10(2):697–737, 2010.[2] Vestislav Apostolov 和 Georges Dloussky。《局部共形辛复曲面的李类》。J. Symplectic Geom., 16(4):931–958, 2018.[3] Raoul Bott 和 Loring W. Tu。《代数拓扑中的微分形式》，Graduate Texts in Mathematics 第 82 卷。Springer-Verlag，纽约—柏林，1982.[4] F. Bourgeois、Y. Eliashberg、H. Hofer、K. Wysocki 和 E. Zehnder。《辛场论中的紧性结果》。Geom. Topol., 7:799–888, 2003.[5] Kai Cieliebak 和 Klaus Mohnke。《辛超曲面与格罗莫夫-威滕理论中的横截性》。J. Symplectic Geom., 5(3):281–356, 2007.[6] Y. Eliashberg、A. Givental 和 H. Hofer。《辛场论导论》。第 Special Volume 卷，第 II 部分，页 560–673。2000。GAFA 2000（特拉维夫，1999）。[7]Kenji Fukaya 和 Kaoru Ono。《阿诺德猜想与格罗莫夫-威滕不变量》。Topology, 38(5):933–1048, 1999.[8] H. Hofer、K. Wysocki 和 E. Zehnder。《多折叠理论的应用 I：格罗莫夫-威滕理论中的多折叠》。Mem. Amer. Math. Soc., 248(1179):v+218, 2017.[9] Jun Li 和 Gang Tian。《一般辛流形的虚拟模空间循环与格罗莫夫-威滕不变量》。载于《辛四维流形专题》（加利福尼亚州尔湾，1996），First Int. Press Lect. Ser., I，第 47–83 页。Int. Press，马萨诸塞州剑桥，1998.[10] Anubhav Mukherjee。《辛四维流形中三维流形嵌入札记》，2020.[11] Katsumi Nomizu。《幂零李群紧齐性空间的上同调》。Ann. of Math. (2), 59:531–538, 1954.[12] John Pardon。《关于伪全纯曲线模空间上虚拟基本循环的代数方法》。Geom. Topol., 20(2):779–1034, 2016.[13] Yongbin Ruan。《虚拟邻域与伪全纯曲线》。载于第六届 G ¨okova 几何—拓扑会议论文集，第 23 卷，第 161–231 页，1999.[14] Ren´e Thom。《可微流形的一些整体性质》。Comment. Math. Helv., 28:17–86, 1954.[15]W. P. Thurston。《辛流形的一些简单例子》。Proc. Amer. Math. Soc., 55(2):467–468, 1976.[16] Chris Wendl。《单连线辛流形中的接触超曲面总是分离的》。J. Lond. Math. Soc. (2), 89(3):832–852, 2014.

Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst,MA 01003

电子邮箱地址：k.sackel.math@gmail.com, ksackel@umass.edu