arXiv:2303.08688v1 [math.CV] 15 Mar 2023

# 多解析 Besov 空间与膨胀逼近

Ali Abkar

伊玛目霍梅尼国际大学理学院纯数学系，伊朗加兹温 34149

Email: abkar@sci.ikiu.ac.ir

摘要：利用偏导数 $\partial_z f$ 和 $\partial_{\overline{z}} f$，我们在单位圆盘和上半平面上引入多解析函数的 Besov 空间。随后证明，多解析 Besov 空间中每个函数的膨胀都依范数收敛到该函数。这为利用多解析多项式对多解析 Besov 空间中的函数进行范数逼近开辟了道路。

关键词：平均逼近，膨胀，多解析函数，多解析 Besov 空间

2020年数学主题分类：30E10, 30H20, 46E15

## 1 引言

设 $\Omega$ 是复平面中的一个区域。函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 称为 $q-analytic$，其中 $q \in \mathbb{N}$，若 $f \in C^q(\Omega)$ 且

$$(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})^q f = \frac{1}{2^q}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)^q f = 0, \quad z = x + iy.$$

$q$-解析函数 $f$ 称为 $q$ 次多解析函数，简称多解析函数。众所周知，任意多解析函数 $f$ 都可写为（见 [4]）：

$$f(z) = h_0(z) + \overline{z}h_1(z) + \cdots + \overline{z}^{q-1}h_{q-1}(z), \tag{1}$$

其中 $h_k$、$0 \le k \le q-1$ 称为 $f$ 的解析分量。与解析函数相比，多解析函数的行为可能有所不同；例如，它们可能在一条曲线上为零，却不在整个区域内恒等于零（见 [3]）。

令 $L^p(\Omega\ dA)$ $0 < p < \infty$ 表示 $\Omega$ 上配备通常 $L^p$ 范数的可测函数空间；这里 $dA$ 是 $\Omega$ 上的面积测度。多解析 Bergman 空间 $\mathcal{A}^p_q(\Omega)$ 定义为 $\Omega$ 上属于 $L^p(\Omega)$ 的 $q$-解析函数 $f$ 所构成的空间。$f \in \mathcal{A}^p_q(\Omega)$ 的范数定义为

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(z)|^p dA(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

权函数是一个正的可积函数 $w:\Omega \to [0,\infty)$。如果 $f$ 属于加权多解析 Bergman 空间 $\mathcal{A}^p_{q,\ w}(\Omega)$，则称

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(z)|^p w(z)dA(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

有时我们简称该空间为（加权）多解析 Bergman 空间。

在本文中，$\Omega$ 或为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1\}$，或为上半平面 $\mathbb{C}^+$。我们先从单位圆盘开始。回顾一下，加权 Dirichlet 空间 $D^p_w$, $0 < p < \infty$由单位圆盘上满足下述条件的解析函数组成:

$$\|f\|^p_{D^p_w} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p w(z)dA(z)$$

有限。类似地，加权解析 Besov 空间 $B^p_w$ 由单位圆盘上满足下述积分条件的解析函数 $f$ 组成:

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2}|f'(z)|^p w(z)dA(z) < \infty.$$

接下来，我们使用偏微分算子 $\partial_z f$ 和 $\partial_{\overline{z}} f$ 来定义多解析 Besov 空间，而非使用 $f'(z)$。设 $f$ 为单位圆盘上的 $q$-解析函数，并回顾微分算子 ($z = x + iy$):

$$\partial_z f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \partial_{\overline{z}} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

对于权函数 $w$，若一个 $q$-解析函数 $f$ 属于加权多解析 Dirichlet 空间$\mathcal{D}^p_{q,\ w}$，则

$$\int_{\mathbb{D}} \Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z)dA(z) < \infty.$$

函数在 $\mathcal{D}^p_{q,w}$ 中的范数定义为

$$\|f\|_{\mathcal{D}^p_{q,w}} = \left(|f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} \Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z)dA(z)\right)^{1/p}.$$

When $p = 2$, $\mathcal{D}^2_{q,w}$ 是由多解析函数构成的希尔伯特空间，其内积 s

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}^2_{q,w}} = \langle f(0), \overline{g(0)}\rangle + \int_{\mathbb{D}} \Big[\partial_z f(z)\overline{\partial_z g(z)} + \partial_{\overline{z}} f(z)\overline{\partial_{\overline{z}} g(z)}\Big] w(z)dA(z).$$

类似地，我们将加权多解析 Besov 空间 $\mathcal{B}^p_{q,w}$ 定义为满足下列条件的 $q$-解析函数 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 上构成的空间:

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z)dA(z) < \infty.$$

函数在 $\mathcal{B}^p_{q,w}$ 中的范数由下式给出

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p_{q,w}} = \left(|f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z)dA(z)\right)^{1/p}.$$

当 $\Omega$ 为上半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 时，上半平面上的多解析 Besov 空间的定义略有不同；只需将 $f(0)$ 替换为 $f(i)$，并将 $dA(z)$ 替换为适当的高斯权函数（见 §3）。注意，当 $q = 1$ （这意味着 $f$是解析的）时，我们有 $\partial_z f(z) = f'(z)$，且 $\partial_{\overline{z}} f(z) = 0$，因此多解析 Besov 空间（分别为 Dirichlet 空间）退化为解析 Besov 空间（分别为解析 Dirichlet 空间）。因此，上述空间是经典 Dirichlet 空间和 Besov 空间的自然推广。我们有时将多解析 Besov 空间称为多解析 Besov 空间；同样，多解析 Dirichlet 空间也称为多解析 Dirichlet 空间。

在函数空间算子理论中，一个自然的问题是判断多项式在该空间中是否稠密。要回答这个问题，最重要的策略是考察膨胀是否收敛

$$f_r(z) = f(rz), \quad z \in \Omega, 0 < r < 1,$$

到 $f$。如果这一点成立，并且每个 $f_r$ 都可以用多项式逼近，那么问题就解决了。需要指出的是，对于具有径向权（仅依赖于 $|z|$ 的权）的加权空间，这个问题已相当为人熟知。本文考虑满足以下条件的非径向权 $w : \Omega \to (0, \infty)$:

存在常数 $C > 0$、非负整数 $k$，以及一个 $r_0 \in (0, 1)$，使得

$$r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \le C w(z), \quad |z| < r, r_0 \le r < 1. \tag{2}$$

在此条件下，我们证明，当 $r \to 1^-$ 时，膨胀 $f_r$ 在加权多解析 Besov 空间的范数下收敛到 $f$。此外，若我们假设权函数 $w$ 的选取方式使得多解析多项式（关于 $z$ 和 $\overline{z}$ 的多项式）包含于加权 Besov 空间中，并且每个 $f_r$ 都可以用多解析多项式逼近，那么我们便能够用形如以下形式的多项式逼近加权 Besov 空间中的每个 $f$

$$p_{k,m}(z, \overline{z}) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} z^i \overline{z}^j, \quad c_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

多解析函数理论在信号分析和 Gabor 框架中有应用。特别是，多解析函数希尔伯特空间被广泛用于建立物理和工程问题的模型。Haimi 和 Hedenmalm 最近研究了多解析函数的 Bergman 空间及其再生核的估计（[6], [7]）。关于整函数多解析 Fock 空间的详细介绍，可参见 L.D. Abreu 和 H.G. Feichtinger 撰写的综述文章 [3]。函数空间算子理论领域也对这一主题颇感兴趣（参见 [13], [14]）。

## 2 单位圆盘中的多解析 Besov 空间

我们首先讨论多解析 Dirichlet 空间中的逼近。

定理 2.1 设 $0 < p < \infty$ ，且权函数 $w$ 满足条件 (2)。那么，多解析多项式在加权多解析 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}^p_{q,w}$中稠密。

证明。只需证明在 $\mathcal{D}^p_{q,w}$ 的范数中 $f_r \to f$ 。为此，只需使用以下半范数（常数项在逼近中不起作用）：

$$\|f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}} = \int_{\mathbb{D}} \left[ |\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p \right] w(z) dA(z).$$

我们还注意到

$$\|f_r - f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}} = \int_{\mathbb{D}} |\partial_z f_r(z) - \partial_z f(z)|^p w(z) dA(z) + \int_{\mathbb{D}} |\partial_{\overline{z}} f_r(z) - \partial_{\overline{z}} f(z)|^p w(z) dA(z). \tag{3}$$

容易看出

$$\partial_z f_r(z) = r\partial_z f(rz), \quad \partial_{\overline{z}} f_r(z) = r\partial_{\overline{z}} f(rz).$$

作变量替换（将 $z$ 替换为 $z/r$），并利用权函数的假设，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |\partial_z f_r(z)|^p w(z) dA(z) &= r^{p-k-2} \int_{r\mathbb{D}} |\partial_z f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) dA(z) \\ &\leq C r^{p-k-2} \int_{r\mathbb{D}} |\partial_z f(z)|^p w(z) dA(z).\end{aligned}$$

因此，我们可以应用控制收敛定理，得到

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} |\partial_z f_r(z)|^p w(z) dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} |\partial_z f(z)|^p w(z) dA(z).$$

这意味着

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} |\partial_z f_r(z) - \partial_z f(z)|^p w(z) dA(z) = 0,$$

wh这意味着（3）中的第一项趋于零。类似地，我们可以验证 t

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} |\partial_{\overline{z}} f_r(z) - \partial_{\overline{z}} f(z)|^p w(z) dA(z) = 0,$$

由此可得

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}} = 0.$$

□

现在我们证明多解析 Besov 空间的一个类似结论。

定理 2.2 设 $2 \leq p < \infty$，且权函数 $w$ 满足条件 (2)。那么，多解析多项式在加权多解析 Besov 空间 $\mathcal{B}^p_{q,\ w}$ 中稠密。

证明。与前一个定理一样，只需验证对每个 $f \in \mathcal{B}^p_{q,\ w}$，我们都有

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_z f_r(z)|^p w(z) dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_z f(z)|^p w(z) dA(z), \tag{4}$$

and

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_{\overline{z}} f_r(z)|^p w(z) dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p w(z) dA(z). \tag{5}$$

为此，我们采用

$$\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}} = \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} \Big[ |\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p \Big] w(z) dA(z).$$

因此，通过变量替换可得

$$\begin{aligned}\|\partial_z f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}} &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_z f_r(z)|^p w(z) dA(z) \\ &= r^{p-k-2} \int_{r\mathbb{D}} \left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2} |\partial_z f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) dA(z).\end{aligned}$$

但是函数

$$r \mapsto \left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2}$$

在 $r$ 时随 $p \geq 2$递增。现在，我们对最后一个积分应用单调收敛定理，然后再运用控制收敛定理，得到

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_z f_r(z)|^p w(z) dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\partial_z f(z)|^p w(z) dA(z),$$

这证明了 (4)。(5) 的证明类似。 □

## 3 上半平面中的多解析 Besov 空间

为了了解如何定义上半平面中的多解析 Besov 空间，我们先回顾上半平面上解析 Bergman 空间的定义。若解析函数$f$ 在 $\mathbb{C}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}$ 上满足：$\mathrm{Im}(z) = y > 0\}$，则它属于 Bergman 空间，当且仅当

$$\int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p \,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) < \infty, \quad \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0.$$

在文献中，通常会在 $\beta = 0$ 时遇到这个定义（见 [5]）。因此，自然地，我们将上半平面的加权多解析 Bergman 空间记为 $\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)$，并将其定义为满足以下条件的 $\mathbb{C}^+$ 上的 $q$-解析函数所构成的空间：

$$\|f\|^p_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p w(z) \,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) < \infty.$$

这表明，加权 Dirichlet 空间和解析函数的加权 Besov 空间应分别赋予以下范数：

$$\|f\|^p_{D^p_{\mathbb{C}^+,w}} = |f(i)|^p + \int_{\mathbb{C}^+} |f'(z)|^p w(z) \,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z),$$

and

$$\|f\|^p_{B^p_{\mathbb{C}^+,w}} = |f(i)|^p + \int_{\mathbb{C}^+} |f'(z)|^p w(z) \,\mathrm{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{-\beta|z|^2} dA(z).$$

这一定义的优点在于，与单位圆盘的情形一样，当 $p = 2$ 时，Besov 空间退化为 Dirichlet 空间。类比上述情形，我们现在将多解析函数的加权 Besov 空间定义为满足以下条件的 $q$-解析函数空间： $\mathbb{C}^+$

$$\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{\mathbb{C}^+,w}} = |f(i)|^p + \int_{\mathbb{C}^+} \Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z) \,\mathrm{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{-\beta|z|^2} dA(z)$$

是有限的。根据我们的定义，当 $p = 2$ 时，我们得到上半平面上的多解析函数 Dirichlet 空间，即满足以下条件的上半平面上的多解析函数

$$\|f\|^p_{\mathcal{D}^p_{\mathbb{C}^+,w}} = |f(i)|^p + \int_{\mathbb{C}^+} \Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z) \,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) < \infty.$$

定理 3.1 设 $0 < p < \infty$，且 $w$ 满足条件 (2)。那么对于每个 $f \in \mathcal{D}^p_{q,\ w}(\mathbb{C}^+)$，膨胀 $f_r$ 在范数意义下收敛于 $f$。

证明。关于逼近，只需考察以下半范数 :

$$\|f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = \int_{\mathbb{C}^+} \left[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\right] w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z).$$

我们还注意到

$$\begin{aligned}\|f_r - f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} &= \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z) - \partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) \\ &\quad + \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_{\overline{z}} f_r(z) - \partial_{\overline{z}} f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z). \qquad (6)\end{aligned}$$

进行变量替换，并利用

$$\partial_z f_r(z) = r\partial_z f(rz),$$

可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) \\ &\qquad = r^{p-(k+\alpha+2)} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \mathrm{Im}(z)^\alpha e^{\frac{-\beta|z|^2}{r^2}} dA(z) \\ &\qquad \le C r^{p-(k+\alpha+2)} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{\frac{-\beta|z|^2}{r^2}} dA(z)\end{aligned}$$

因此，可以应用控制收敛定理，得到

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) \le \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z).$$

这意味着 (6) 右端的第一项趋于零:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z) - \partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) = 0.$$

类似地，可以证明（6）右端的第二项趋于零，由此得到

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = 0.$$

□

对于 Bergman 空间，这个问题更容易解决。

推论 3.2 设 $0 < p < \infty$，且 $w$ 满足条件（2）。那么对于每个函数$f \in \mathcal{A}^p_{q,\ w}(\mathbb{C}^+)$，膨胀 $f_r$ 在范数意义下收敛于 $f$。

证明。回顾 $\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)$ 中范数的定义，我们只需注意到

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} &= \int_{\mathbb{C}^+} |f(rz)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) \\ &= \frac{1}{r^{\alpha+k+2}} \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \mathrm{Im}(z)^\alpha e^{\frac{-\beta|z|^2}{r^2}} dA(z) \\ &= \frac{1}{r^{\alpha+k+2}} \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} e^{\beta|z|^2(1-r^{-2})} dA(z).\end{aligned}$$

回顾一下，对于 $r_0 < r < 1$，我们有

$$e^{\beta|z|^2(1-r^{-2})} \le 1,$$

因此

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} &= \frac{1}{r^{\alpha+k+2}} \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} e^{\beta|z|^2(1-r^{-2})} dA(z) \\ &\le \frac{C}{r^{\alpha+k+2}} \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p w(z) \operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) < \infty.\end{aligned}$$

这意味着可以应用控制收敛定理；于是

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r\|^p_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = \int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^p w(z) \operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2} dA(z) = \|f\|^p_{\mathcal{A}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)},$$

最后 $f_r \to f$ 属于 $\mathcal{A}^p_{q,\,w}(\mathbb{C}^+)$。 □

现在我们陈述关于 $\mathbb{C}^+$ 上多解析 Besov 空间的一个类似逼近定理。

定理 3.3 设 $2 \le p < \infty$，且 $w$ 满足条件 (2)。那么，对于每个 $f \in \mathcal{B}^p_{q,\,w}(\mathbb{C}^+)$，膨胀 $f_r$ 在范数意义下收敛到 $f$。

证明。设 $f \in \mathcal{B}^p_{q,\,w}(\mathbb{C}^+)$，并设 $d\mu(z) = w(z)\operatorname{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{-\beta|z|^2} dA(z)$。我们回顾一下

$$\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = \int_{\mathbb{C}^+} \left[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\right] d\mu(z).$$

因此，通过变量替换，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z)|^p d\mu(z) &= \frac{r^p}{r^{k+\alpha+p}} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \operatorname{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{\frac{-\beta|z|^2}{r^2}} dA(z) \\ &\le \frac{C}{r^{k+\alpha}} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p d\mu(z).\end{aligned}$$

现在，我们应用控制收敛定理，得到

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z)|^p d\mu(z) \le \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f(z)|^p d\mu(z).$$

最后一个不等式表明

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_z f_r(z) - \partial_z f(z)|^p w(z) \operatorname{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{-\beta|z|^2} dA(z) = 0.$$

证明

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{C}^+} |\partial_{\overline{z}} f_r(z) - \partial_{\overline{z}} f(z)|^p w(z) \operatorname{Im}(z)^{\alpha+p-2} e^{-\beta|z|^2} dA(z) = 0$$

类似。这些等式表明

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)} = 0.$$

□

例3.4（a）设 $\beta$ 为正数， $n$ 为正整数。那么 $w$（$z$） $= e^{-\beta|z|^n}$满足条件（2）。事实上，对每个 $0 < r < 1$，我们都有

$$w\left(\frac{z}{r}\right) = e^{\frac{-\beta|z|^n}{r^n}} \leq e^{-\beta|z|^n} = w(z).$$

(b). 考虑非径向权

$$w(z) = e^{-\beta|\operatorname{Re}(z)|^n} = e^{-\beta|x|^n}.$$

同样，我们有 $w(z/r) \leq w(z)$。
(c). 在某些情况下，函数 $r \mapsto w(z/r)$ 可能不满足条件 (??)，但可能存在某个正整数 $k$ ，使得函数 $r \mapsto r^k w(z/r)$ 满足所需条件。例如，若 $w(z)$ =exp($|z|$)，则

$$\frac{d}{dr} w\left(\frac{z}{r}\right) = -\frac{|z|}{r^2} \exp\left(\frac{|z|}{r}\right) < 0$$

而

$$\frac{d}{dr}\left[r w(\frac{z}{r})\right] = \left(1 - \frac{|z|}{r}\right) \exp\left(\frac{|z|}{r}\right) > 0, \quad |z| < r.$$

还需注意，由于 $r > 1/2$ ， $r^2 e^{|z|/r}$ 是递增的

$$\frac{d}{dr}(r^2 e^{|z|/r}) = 2re^{|z|/r} + r^2(\frac{-1}{r^2} e^{|z|/r}) = (2r-1)e^{|z|/r} > 0.$$

# 4 角向权

与径向权相反，我们假设权函数仅依赖于 $z$的辐角；也就是说， $w(re^{i\theta}) = w(\theta)$。我们称这类权为角向权。例如，

$$w(z) = w(re^{i\theta}) = (4\pi^2 - \theta^2)^\alpha, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,\ \alpha > 0,$$

它是单位圆盘上的一个角向权。文献似乎忽视了对角向权的研究。这里我们给出一些关于在这类加权空间中用多解析多项式进行逼近的结论。先固定以下记号。

定理4.1 设 $w$： $\mathbb{D} \to (0, \infty)$是满足以下条件的角向权

$$\int_0^{2\pi} w(\theta) d\theta < \infty.$$

那么， $q$-解析多项式在$\mathcal{B}^p_{q,w}$, $2 \leq p < \infty$中稠密。

证明。首先注意，对于 $z = re^{i\theta}$ ，我们有 $w(z) = w(z/r) = w(\theta)$，因此，根据范数定义忽略常数项可得

$$\begin{aligned}
\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}} &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} \Big[|\partial_z f_r(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f_r(z)|^p\Big] w(z) dA(z) \\
&= r^{p-2} \int_{r\mathbb{D}} \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right)^{p-2} \Big[|\partial_z f(z)|^p + |\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big] w(z) dA(z).
\end{aligned}$$

这意味着

$$\limsup_{r\to 1^-}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}}=\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}},$$

由此可得 $f_r\to f$ 在范数意义下成立。但在单位圆盘上，每个 $f_r$ 都可以用 $q$-解析多项式逼近（这是 (1) 的推论），因此结论成立。 □

现在考虑由一个径向权和一个角向权相乘得到的权函数。

定理 4.2 设 $w(se^{i\theta})=\omega(s)v(\theta)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的权函数，其中 $\omega$ 和 $v$ 满足

$$\int_0^1 s\omega(s)ds<\infty,\ \int_0^{2\pi}v(\theta)d\theta<\infty,$$

并且对某个整数 $k\geq 0$，有 $r^k\omega(s/r)\leq C\omega(s)$。那么， $q$-解析多项式在$\mathcal{B}^p_{q,w}$, $2\leq p<\infty$中稠密。

证明。再次可知

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}}&=\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{p-2}\Big[|\partial_z f_r(z)|^p+|\partial_{\overline{z}}f_r(z)|^p\Big]w(s)v(\theta)dA(z)\\&=r^{p-2-k}\int_{r\mathbb{D}}\left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p+|\partial_{\overline{z}}f(z)|^p\Big]r^k w(s/r)v(\theta)dA(z)\\&\leq Cr^{p-2-k}\int_{r\mathbb{D}}\left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p+|\partial_{\overline{z}}f(z)|^p\Big]w(s)v(\theta)dA(z).\end{aligned}$$

因此，可以应用控制收敛定理;

$$\limsup_{r\to 1^-}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}}=\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}},$$

由此即可得出结论。 □

上述两个定理也有上半平面的对应版本。

定理 4.3 设 $0<p<\infty$，并设 $w$ 是 $\mathbb{C}^+$ 上满足以下条件的角向权函数

$$\int_0^\pi w(\theta)d\theta<\infty.$$

那么，对每个 $f\in\mathcal{D}^p_{q,\,w}(\mathbb{C}^+)$，膨胀 $f_r$ 在范数意义下收敛到 $f$。

证明。注意到

$$\begin{aligned}\|f_r-f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)}&=\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f_r(z)-\partial_z f(z)|^p w(z)\operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z)\\&\quad+\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_{\overline{z}}f_r(z)-\partial_{\overline{z}}f(z)|^p w(z)\operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z).\end{aligned}\tag{7}$$

将 $z$ 替换为 $z/r$，并利用 $\partial_z f_r(z)=r\partial_z f(rz)$ 以及 $w(z)=w(z/r)$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f_r(z)|^p w(z)\operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z)\\&\qquad=r^{p-(\alpha+2)}\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f(z)|^p w\left(\frac{z}{r}\right)\operatorname{Im}(z)^\alpha e^{\frac{-\beta|z|^2}{r^2}}dA(z)\\&\qquad\leq r^{p-(\alpha+2)}\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f(z)|^p w(z)\operatorname{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z),\end{aligned}$$

因此，控制收敛定理适用，从而可以保证

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f_r(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z)=\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z).$$

这意味着 (7) 右侧的第一项趋于零:

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{C}^+}|\partial_z f_r(z)-\partial_z f(z)|^p w(z)\,\mathrm{Im}(z)^\alpha e^{-\beta|z|^2}dA(z)=0.$$

同理可证，(7) 右侧的第二项也趋于零，由此得到

$$\lim_{r\to 1^-}\|f_r-f\|^p_{\mathcal{D}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)}=0.$$

□

定理 4.4 设 $w(se^{i\theta})=\omega(s)v(\theta)$ 是 $\mathbb{C}^+$ 上的角向权函数，其中 $\omega$ 和 $v$ 满足

$$\int_0^1 s\omega(s)ds<\infty,\ \int_0^\pi v(\theta)d\theta<\infty,$$

且对某个整数 $k\geq 0$, $r^k\omega(s/r)\leq C\omega(s)$ 成立。那么对每个 $f\in\mathcal{B}^p_{q,\,w}(\mathbb{C}^+)$ $2\leq p<\infty$，膨胀 $f_r$ 在范数意义下收敛于 $f$。

证明。再次可知

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)}&=\int_{\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{p-2}\Big[|\partial_z f_r(z)|^p+|\partial_{\overline{z}} f_r(z)|^p\Big]w(s)v(\theta)dA(z)\\&=r^{p-2-k}\int_{r\mathbb{D}}\left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p+|\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big]r^k w(s/r)v(\theta)dA(z)\\&\leq Cr^{p-2-k}\int_{r\mathbb{D}}\left(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\right)^{p-2}\Big[|\partial_z f(z)|^p+|\partial_{\overline{z}} f(z)|^p\Big]w(s)v(\theta)dA(z).\end{aligned}$$

因此，控制收敛定理适用;

$$\limsup_{r\to 1^-}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)}\leq\|f\|^p_{\mathcal{B}^p_{q,w}(\mathbb{C}^+)},$$

由此可得该结果。 □

## 5 声明

伦理批准
不适用

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

作者贡献
不适用

资助：不适用

数据和材料的可获取性
本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

## 参考文献

[1] A. Abkar，《若干加权 Bergman 空间中多项式的范数逼近》，J. Funct. Anal. 191 (2002)，224–240[2] A. Abkar，《加权解析 Besov 空间和广义 Fock 空间中的逼近》，Complex Anal. Oper. Theory 16, 11 (2022).[3] L. D. Abreu, H. G. Feichtinger，《多解析函数空间》，《调和分析、复分析及其应用》，A. Vasil'ev（编），《数学趋势》，施普林格国际出版社，（2014）。[4] M. B. Balk，《多解析函数》，《数学研究》63，科学院出版社，柏林，（1991）。[5] P. Duren, E.A. Gallardo-Guti´errezz, A. Monres-Rodr´ıguez，《一则 Bergman 空间的 Paley-Wiener 定理及其在不变子空间中的应用》，J. London Math. Soc. 39 (2007)，459–466[6] A. Haimi, H. Hedenmalm，《多解析 Ginibre 系综》，J. Stat. Physics 153 (2013)，10–47[7] A. Haimi, H. Hedenmalm，《多解析 Bergman 核的渐近展开》，J. Funct. Anal. 267 (2014)，4667–4731[8] G. V. Kolossov，《关于二维弹性理论问题》，C. R. Acad. Sci. 146 (1908)，522–525[9] A. D. Koshelev，《关于圆盘中多解析函数希尔伯特空间的核函数》，Dokl. Akad. Nauk. SSSR [Soviet Math. Dokl.] **232** (1977)，277–279[10] S. N. Mergelyan，《关于解析函数系的完备性》，Amer. Math. Soc. Transl. 19 (1962)，109–136（Uspehi Mat. Nauk 8 (1953)，3–63）[11] N. I. Muskhelishvili，《数学弹性理论的一些基本问题》（俄文），科学出版社，莫斯科，（1968）。[12] A. K. Ramazanov，《关于多解析函数空间的结构》，Math. Notes 72 (2002)，692–704。[13] N. L. Vasilevski，《Bergman 空间和多重 Bergman 空间的结构》，Integr. Equat. Oper. Theory 33 (1999)，471-488。[14] N. L. Vasilevski，《多重 Fock 空间》，《微分算子及相关主题》，第 I 卷（敖德萨，1997），第 371–386 页，Oper. Theory Adv. Appl. 第 117 卷，Birkhauser，（2000）。