arXiv:2303.08703v1 [math.SP] 15 Mar 2023

关于具有PT对称周期矩阵系数的奇数阶微分算子

O.A. Veliev 机械工程系，多乌什大学，土耳其伊斯坦布尔电子邮箱:
oveliyev@dogus.edu.tr

摘要
本文研究由具有PT对称周期矩阵系数的奇数阶常微分表达式生成的微分算子的谱。

关键词：微分算子，PT对称系数，实谱。美国数学会数学主题分类：34L05，34L20。

本文考虑由微分表达式在空间 $L_2^m(-\infty,\infty)$中生成的微分算子 T 的谱 $\sigma(T)$

$$(i)^n y^{(n)}+(i)^{n-1}P_1y^{(n-1)}+(i)^{n-2}P_2y^{(n-2)}+...+P_ny, \tag{1}$$

其中 P_k 对于 $k=1,2,...,n$ 是矩阵，其元素为复值 PT 对称周期函数

$$p_{k,i,j}(x+1)=p_{k,i,j}(x),\ p_{k,i,j}(-x)=\overline{p_{k,i,j}(x)} \tag{2}$$

并且 $y=(y_1,y_2,...,y_m)^T$是一个向量值函数。这里， $L_2^m(a,b)$ 对于 $-\infty\le a<b\le\infty$是向量值函数 $f=(f_1,f_2,...,f_m)^T$构成的空间，其范数 $\|\cdot\|_{(a,b)}$ 和内积 $(\cdot,\cdot)_{(a,b)}$ 定义如下

$$\|f\|_{(a,b)}^2=\int_a^b|f(x)|^2dx,\ (f,g)_{(a,b)}=\int_a^b\langle f(x),g(x)\rangle dx,$$

其中 $|\cdot|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别是 $\mathbb{C}^m$. 中的范数和内积。我们证明，若 m 和 n 是奇数，则 $\mathbb{R}\subset\sigma(T)$。

值得注意的是，标量情形 $m=1$ 和 $n=2$已有大量相关论文，即关于薛定谔算子的研究（参见专著 [1, 第 4 章和 6] ，以及 [5, 第 3 章和 5] ，还有其中引用的论文）。然而，据我所知，只有论文 [6] 研究了具有 PT对称周期矩阵势的向量薛定谔算子，其中$n=2$。本文的主要结果涉及 n 和 m为奇数时的谱。此外，这一结果及本文采用的方法与那些论文中的结果和方法完全不同。因此，为避免偏离这篇短文的主旨，我们不在此讨论它们。

Fi首先，利用 (1) 和 (2)，我们证明关于该方程解的下列定理

$$(i)^n y^{(n)}+(i)^{n-1}P_1y^{(n-1)}+(i)^{n-2}P_2y^{(n-2)}+...+P_ny=\lambda y, \tag{3}$$

其中 n 和 m 是任意正整数。

定理 1（a）若 Ψ 是方程 (3) 的一个解，则由 $\Phi(x,\lambda) = \Psi(-x,\lambda)$ 定义的函数 Φ 是

$$(i)^n y^{(n)} + (i)^{n-1} P_1 y^{(n-1)} + (i)^{n-2} P_2 y^{(n-2)} + ... + P_n y = \overline{\lambda} y. \tag{4}$$

(b) 假设 λ 是一个实数。设 $S_+(\lambda)$ 和 $S_-(\lambda)$ 分别为方程 (3) 的解空间，它们对应于 $L_2^m(0,\infty)$ 和 $L_2^m(-\infty,0)$。则由 A 定义的映射 A: $f(x) \to f(-x)$ 是从 $S_+(\lambda)$ 到 $S_-(\lambda)$ 的反线性等距双射。

证明。(a) 若 $\Psi(x,\lambda)$ 是方程 (3) 的解，则等式

$$(i)^n \Psi^{(n)}(x) + (i)^{n-1} P_1(x) \Psi^{(n-1)}(x) + ... + P_n(x)\Psi(x) = \lambda \Psi(x)$$

对所有 $x \in (-\infty,\infty)$ 都成立。在此等式中将 x 替换为 $-x$，取共轭并利用 (2)，可得

$$(-i)^n \overline{\Psi^{(n)}(-x)} + (-i)^{n-1} P_1(x) \overline{\Psi^{(n-1)}(-x)} + ... + P_n(x)\overline{\Psi(-x)} = \overline{\lambda \Psi(-x)}.$$

另一方面，由 Φ 的定义可知 $\Phi^{(k)}(x) = (-1)^k \Psi^{(k)}(-x)$。因此，我们有

$$(i)^n \Phi^{(n)}(x) + (i)^{n-1} P_1(x) \Phi^{(n-1)}(x) + ... + P_n(x)\Phi(x) = \overline{\lambda}\Phi(x).$$

这意味着 Φ 是方程 (4) 的解。

(b) 若 λ 是一个实数，则由 (a) 可知，若 $\Psi(x,\lambda)$ 是方程 (3) 的解，则 $\Phi(x,\lambda)$ 也是方程 (3) 的解。此外，利用等式 $\Phi(x) = \Psi(-x)$ 并代入 $u = -x$，可得

$$\int_{-a}^{0} |\Phi(x)|^2 \, dx = \int_{-a}^{0} |\Psi(-x)|^2 \, dx = \int_{0}^{a} |\Psi(u)|^2 \, du \tag{5}$$

对任意 $0 < a < \infty.$，若 $\Psi \in S_+(\lambda)$，则利用 (5) 并令 a 趋于无穷大，可得$\Phi \in S_-(\lambda)$。因此，对于属于 $L_2^m(0,\infty)$ 的 (3) 的任意一个解，都存在属于 $L_2^m(-\infty,0)$ 的 (3) 的一个解Φ。同理可证，对于属于 $L_2^m(-\infty,0)$ 的 (3) 的任意一个解 Ψ，都存在属于 $L_2^m(0,\infty)$ 的 (3) 的一个解 Φ。此外，在这两种情况下，这些对应关系均由映射 $A.$ 给出。因此，映射 A 是从 $S_+(\lambda)$ 到 $S_-(\lambda)$ 的反线性等距双射。 ■

现在利用定理 1，我们考虑 $T.$ 的谱，以及 T 与由 $L_2^m[0,1]$ 中的拟周期边界条件定义的算子之间众所周知的联系和著名的弗洛凯理论。众所周知（例如参见 [2, 4]），T的谱 $\sigma(T)$ 是算子 T_t 的谱 $\sigma(T_t)$ 的并集，其中算子 T_t（$t \in [0,2\pi)$）由 $L_2^m[0,1]$ 中的 (1) 和边界条件生成

$$y^{(\nu)}(1) = e^{it} y^{(\nu)}(0), \ \nu = 0,1,...,(n-1). \tag{6}$$

Thus

$$\sigma(T) = \bigcup_{t\in[0,2\pi)} \sigma(T_t). \tag{7}$$

T_t 的谱由特征值组成，这些特征值是特征方程的根

$$\det(Y_j^{(\nu-1)}(1,\lambda) - e^{it} Y_j^{(\nu-1)}(0,\lambda))_{j,\nu=1}^n = 0 \tag{8}$$

（3）的根，其中 $Y_1(x,\lambda)$ $Y_2(x,\lambda)\ldots,Y_n(x,\lambda)$ 是矩阵方程的解

$$(i)^nY^{(n)}(x)+(i)^{n-1}P_1(x)Y^{(n-1)}(x)+...+P_n(x)Y=\lambda Y(x)$$

满足 $Y_{(j)\ k}(0,\lambda)=0_m$，其中 $j\neq k-1$ 且 $Y_{(k-1)\ k}(0,\lambda)=I_m$，其中 0_m 和 I_m 分别为 $m\times m$零矩阵和单位矩阵（见 [3, 第 3], 章和 [7]）。

现在，让我们回顾一下具有周期系数的微分方程中广为人知的弗洛凯理论。 n阶方程 (3) 可化为一阶方程

$$\mathbf{x}^{'}=A(x,\lambda)\mathbf{x} \tag{9}$$

令 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...\mathbf{x}_n)^T$，其中 $\mathbf{x}_1=y,\mathbf{x}_2=y^{'},...\mathbf{x}_n=y^{(n-1)}$, $A(x,\lambda)$ 是 $mn\times mn$矩阵，且 $A(x+1,\lambda)=A(x,\lambda)$。根据弗洛凯理论，(3) 的任意解都是具有以下形式的 (3) 的解的线性组合

$$e^{it_kx}(p_{0,k}(x)+xp_{1,k}(x)+...+x^{s_k}p_{s_k,k}(x)), \tag{10}$$

其中 $p_{0,\ k}(x)\,p_{1,\ k}(x)$ ... 是周期函数，e^{it_1}、e^{it_2}、$...e^{it_{nm}}$ 是 (3) 和 (9) 的乘子。这些乘子是特征方程的根

$$\det(X(1,\lambda)-e^{it}I)=0 \tag{11}$$

对于式 (9)，其中 $X(x,\lambda)$ 是矩阵方程 $X^{'}(x,\lambda)=A(x,\lambda)X(x,\lambda)$ 的一个解，满足初始条件 $X(0,\lambda)=I_{mn}$ （例如参见 [8, 第 2] 章）。利用式 (6)–(9) 可以很容易验证，式 (3) 和 (9) 的特征方程 (8) 和 (11) 相同，并且

$$\lambda\in\sigma(T)\Longleftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}:e^{it}\in M(\lambda)\Longleftrightarrow\exists\Psi\in S(\lambda):\Psi(x,\lambda)=e^{itx}p(x), \tag{12}$$

其中 $M(\lambda)$ 和 $S(\lambda)$ 分别是式 (3) 和 $p(x+1)=p(x)$ 的乘子集与解集。现在，利用这一点和定理 1，我们证明如下结论。

定理2（a） $\sigma(T)$ 的非实部分 $\sigma(T)\backslash\mathbb{R}$ 由关于实轴对称的曲线对组成。

（b）如果 n 和 m 是奇数，那么 $\mathbb{R}\subset\sigma(T)$。

证明。（a）由于 T 的谱由这些曲线的并集构成，因此只需证明：若 $\lambda\in\sigma(T)$，则 $\overline{\lambda}\in\sigma(T)$。若 $\lambda\in\sigma(T)$，则由式 (12)，方程 (3) 有一个形如 $e^{itx}p(x)$ 的解 $\Psi(x,\lambda)$，其中 $t\in\mathbb{R}$ 且 $p(x+1)=p(x)$。于是，由定理 1（a），$\Phi(x,\lambda)=\Psi(-x,\lambda)$ 是式 (4) 的一个解，且 $\Phi(x,\lambda)=e^{itx}p(-x)$。因此，由式 (12)，$\overline{\lambda}\in\sigma(T)$。

(b) 反设存在一个实数 λ，使得 $\lambda\notin\sigma(T)$。于是，由 (12) 可知，(3) 的所有乘子 e^{it_1}, e^{it_2}, ..., $e^{it_{nm}}$ 的绝对值均不等于 1，也就是说，$t_k\neq\overline{t_k}$ 对所有 $k=1,2,...,mn.$ 都成立。显然，如果 $\mathrm{Im}\ t_k>0$ 和 $\mathrm{Im}\,t_k<0.$，则解 (10) 分别属于$L_2^m(0,\infty)$ 和 $L_2^m(-\infty,0)$。因此，(3) 的所有解构成的集合 $S(\lambda)$ 为

$$S(\lambda)=\{y+z:y\in S_+(\lambda),\ z\in S_-(\lambda)\},$$

其中，$S_+(\lambda)$ 和 $S_-(\lambda)$ 在定理 1(b) 中定义，且 $S_+(\lambda)\cap S_-(\lambda)=\{0\}$. 这意味着 $\dim\ S(\lambda)=\dim\ S_+(\lambda)+\dim S_-(\lambda)$。另一方面，根据定理 1($b$)，$\dim S_+(\lambda)=\dim\ S_-(\lambda)$。因此，方程 (3) 的全体解空间的维数 nm 为 2 $\dim S_+(\lambda)$，这与 n 和 m 是奇数的假设相矛盾。■

参考文献

[1] F. Bagarello、J. P. Gazeau、F. H. Szafraniec 和 M. Znojil，《量子物理中的非自伴算子：数学方面》（John Wiley & Sons, Inc. 出版，2015年）。[2] D. C. McGarvey，$L_p(-\infty,\infty)$ 中具有周期系数的微分算子，《数学分析与应用杂志》，11（1965年），564-596。[3] M. A. Naimark，《线性微分算子》，第 1 部分（George G. Harrap，伦敦，1967年）。[4] F. S. Rofe-Beketov，具有周期系数的非自伴微分算子的谱。《苏联数学文献》4（1963年），1563-1564。[5] O. A. Veliev，具有周期势的非自伴 Schr¨odinger 算子（Springer Nature，瑞士，2021年）。[6] O. A. Veliev，关于具有周期 PT 对称矩阵势的 Schr¨odinger 算子，《数学物理杂志》62，103501（2021年）。[7] O. A. Veliev，具有周期矩阵系数的微分算子的谱展开的一致收敛，《边值问题》2008，628973（2008年）。[8] V. A. Yakubovich 和 V. M. Starzhinskii，《周期系数线性微分方程》（Wiley，纽约，1975年）。