arXiv:2303.08710v1 [cs.CE] 15 Mar 2023

# 兼顾微观与宏观尺度屈曲的梯度晶格结构双尺度优化

Daniel H¨ubner[1*]、Fabian Wein[1] 和 Michael Stingl[1]

[1]应用数学、连续优化，埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，考尔街11号，埃尔朗根，91058，德国。

*通讯作者。电子邮箱：daniel.huebner@fau.de；贡献作者：fabian.wein@fau.de；michael.stingl@fau.de；

**摘要**

近年来，随着先进制造技术的发展，人们对具有精细结构的构件的兴趣日益增长。与仅包含粗略特征的零件相比，含有梯度晶格单元的零件可呈现出有趣的力学、热学和声学性能。其中一项改进是提高构件的整体抗屈曲能力。然而，细薄特征容易发生局部屈曲。通常，为了优化零件并使其具有良好的整体与局部稳定性，需要在高分辨率有限元网格上进行计算开销巨大的分析。直到最近，相关研究仍只关注整体或局部屈曲行为之一。我们采用基于弹性性能和局部屈曲行为渐近均匀化的双尺度优化，以减少全尺度分析的计算开销。为此，我们提出一种针对参数化梯度晶格结构的局部与整体屈曲协同优化方法。该方法基于均匀化屈曲载荷因子的最坏情况模型，可作为防止纯局部屈曲的保护措施。该方法无法检测同时存在于两个尺度上的交叉模态。我们通过数值算例以及对去均匀化设计的验证来支持该理论，展示了所提方法的能力，并讨论了最坏情况模型的优势与局限。

**关键词：**结构优化、失稳、屈曲、双尺度、胞状材料

## 1 引言

增材制造的持续发展，使具有精细细节的结构日益受到关注。尤其是均匀和梯度晶格结构，已应用于许多领域，例如热管理、能量吸收、降噪、生物医学工程等（Rahman 等人，2022年）。晶格填充也被认为有望提高构件的整体抗屈曲能力（Clausen 等人，2016年）。然而，精细特征容易发生局部屈曲（Ferrari 和 Sigmund，2019年）。

双尺度优化（Wu 等人，2021年）可用于设计这类结构，无需在单一设置中解析完整设计的所有精细细节。这种方法的构想始于Bendsøe 和 Kikuchi（1988年）的研究，他们将设计过程划分为两个尺度：描述整体部件的宏观尺度，以及展现精细细节的微观尺度。Bendsøe 和 Kikuchi 通过渐近均匀化（Allaire 等人，1997年）连接了这两个尺度。这项技术能够在宏观尺度上近似得到微结构的材料属性，

这些属性随后可用于宏观本构方程。通过选用参数化微观结构，Bendsøe 和 Kikuchi 得以有效地解耦这两个尺度：在进行任何优化过程之前，先从参数空间中选取一个离散子集，并对由这组参数得到的每种微结构进行均匀化。随后，将所得属性插值到连续参数空间中，插值得到的材料模型之后可重复用于求解各种优化问题。这种技术会引入插值误差，但与即时均匀化相比，所需的计算开销更小。所谓即时均匀化，是指在迭代优化过程中，每次更新设计时，都对离散化设计域中的每个有限元进行均匀化。此外，在预处理中可以相当直接地控制插值误差。

尽管已有大量文献探讨基于梁模型、考虑结构屈曲行为的优化设计（Ferrari 和 Sigmund (2019) 及其中的参考文献），但关于连续体模型的研究却相对较少。早期问题主要围绕在单轴压缩载荷作用下，为固定长度和重量的柱寻找最优横截面展开（Clausen 1851;Keller1960; Tadjbakhsh 和 Keller 1962;Huang 和 Sheu 1968; Khot 等 1976）。Neves 等(1995) 首次基于上述 Bendsøe 和 Kikuchi 方法开展了针对屈曲的拓扑优化。然而，他们在线性屈曲分析中遇到了各种障碍；线性屈曲分析被表述为一个特征值问题（Bendsøe 和 Sigmund（2003））。这些问题包括低密度区域中的局部化模态，以及接近最终设计时出现的特征值聚集（Seyranian 等 1994）。为缓解人工低密度模态带来的问题，人们提出了一些方法，例如，对刚度矩阵和几何刚度矩阵采用不同的插值方案（Pedersen 2000;Bendsøe 和 Sigmund（2003）），或者基于上一次迭代对特征值进行平移，并根据人工模态对总应变能的贡献来识别它们（Gao 和 Ma 2015）。此外，还有一些避免低密度区域的方法，例如对伪密度进行滤波和投影 (Larsen 等 2018）、在目标函数中惩罚中间值（Allaire 和 Francfort 1993; Allaire 和 Kohn 1993），或采用单元移除策略（Behrou 等 2021; Dalklint 等 2020;Giele 等 2021）。通过强制特征值之间保持间隔，可以防止特征值聚集（Bendsøe 和 Sigmund（2003））。然而，为了获得良好的收敛性，仍可能需要计算大量特征值（Bruyneel 等 2008），因此必须使用高效的特征值问题求解器（Dunning 等 2016; Ferrari 和 Sigmund 2020）。尽管如此，针对屈曲的拓扑优化目前仍然是一项具有挑战性的问题。

近年来，在设计微结构时也采用了稳定性要求（Neves 等人 2002b，a；Thomsen 等，2018；Ander- sen 等人 2022），尽管周期性微结构的屈曲模型已被研究数十年。屈曲载荷因子的均匀化理论已相当成熟（Neves 等人 2002b；Thomsen 等，2018），但在这一领域仍存在若干挑战。屈曲模态的范围很广，既包括波长短于微结构特征尺寸的高频模态，也包括跨越微结构多个周期的模态。尤其是后者，可以通过 Floquet-Bloch 理论来捕捉（Neves，2019）。

对于去均匀化设计，有限胞元尺寸引起的尺度效应以及微结构梯度变化导致的效应都可能出现（Thomsen 等，2018）。尤其是后者可能导致结构边界处出现非期望屈曲模态。

上述研究仅考察了结构在单一尺度上的屈曲行为，要么是宏观尺度，要么是微观尺度。尽管人们仍在持续“竞相打造极其刚硬且坚固的架构材料”（Andersen等，2021），但迄今为止，这些设计材料似乎尚未用于具有稳定性要求的构件优化。

本文提出一种双尺度拓扑优化方法，分别在两个尺度上考虑屈曲，但忽略跨越两个尺度的交叉模态。假设尺度分离，我们利用均匀化理论，对微观尺度上的周期性晶格的弹性行为和屈曲稳定性进行尺度扩展。在宏观尺度上，我们

针对局部屈曲和整体屈曲，寻求最佳的晶格分级。我们以晶格孔隙率作为参数，为选定的一组孔隙率预先计算均匀化属性，并通过分段三次插值，在连续参数空间上建立模型。随后，我们在以局部晶格孔隙率为设计变量的宏观优化问题中使用该模型。因此，我们的方法可归类为一种多尺度密度优化方法，其单胞基于微结构孔隙率进行参数化（Wu 等人（2021）中的 V/A 类）。

我们的贡献是一种将上尺度后的微观屈曲信息纳入优化的新方法。我们根据宏观局部应力，通过最坏情况模型获得微观尺度上的屈曲响应，从而对纯微观屈曲形成保护。为降低计算开销，最坏情况是通过将宏观局部应力降至其幅值来实现的。代价是对微结构预测临界载荷时会产生低估。

Wang 等人Wang 等人（2021）的近期研究与我们的方法相近。然而，他们根据晶格杆件的长细比推导局部应力约束，而我们直接使用上尺度后的微观屈曲信息。我们的方法具有这样的优势：基本上可以处理任意微结构，包括无法唯一定义长细比的微结构。

Christensen 等人的工作与我们的研究相似（2022），但存在一些关键差异：他们假设微结构具有各向同性屈曲行为，而我们的方法适用于任意微结构。他们还将 Willam-Warnke 破坏准则拟合到均匀化数据上，这会引入局部屈曲因子的近似误差。相比之下，我们基于均匀化数据构建最坏情况模型，这同样会带来近似误差；不过，若采用完整插值模型而非最坏情况模型，就可以使这一误差可以忽略不计（见第4.1节中的备注1）。此外，Christensen 等人（2022）采用二项插值方案，根据相对孔隙率对屈曲强度进行插值，而我们使用精度更高的分段三次插值。另一方面，我们的方法仅适用于对晶格密度设有下限的尺寸优化问题，且该下限在整个设计域内均适用，而Christensen 等人（2022）的一项重要贡献是提出了利用辅助设计场在设计中允许存在空区域，同时仍能维持晶格密度下限的方法。

本文将分析范围限制在线弹性和线性化屈曲上，不过该方法的总体思路可以扩展到非线性状态。为简化符号，本文还仅讨论二维情形。然而，将我们的方法扩展到三维十分直接。我们强调，该方法适用于任意参数化微结构。作为示例，我们选用由等边三角形构成、以孔隙率为参数的晶格。增加计算开销后，也可以采用更复杂的几何形状和参数化方式，而无需改变该方法的总体思路。

本文其余部分的结构安排如下：第2 节回顾线弹性和线性化屈曲分析的状态方程。第3 节简要介绍弹性模量和屈曲载荷因子渐近均匀化的主要公式。第4节介绍示例微结构及其参数化，并讨论尺度提升过程中的重要方面。我们通过对等边三角形进行圆角处理来设计晶格单胞，展示微观尺度上的有限元收敛，并获得晶格的均匀化属性。第4.1节提出一种新方法，借助所建议的均匀化屈曲载荷因子最坏情况模型，将尺度提升后的属性纳入宏观尺度。第4.2 节说明如何在离散参数空间上预先计算均匀化属性，并应用插值方案以获得连续参数空间上的取值。第5 节概述三个不同的双尺度优化问题，分别考虑宏观尺度、微观尺度以及两个尺度上的屈曲（不含交叉模态）。相关数值算例见第6 节，其中还包括一项预研究，以帮助更好地理解优化设计。第7.1 节对去均匀化设计进行数值验证，并辅以尺度分离研究。第7.2 节通过

两个数值算例深入考察最坏情况误差。最后，第8节总结全文。

## 2 线弹性与屈曲分析

本节简要回顾 Thomsen 等人（2018）给出的线弹性和屈曲分析状态方程的代数形式。对于弱形式的连续表述，感兴趣的读者可参阅Neves （2019）。我们假设线弹性条件和线性分岔屈曲条件。这意味着屈曲前位移、应力和应变随施加载荷线性变化，而表示稳定性的载荷因子在线性分岔特征值问题中呈线性出现。线性屈曲分析包含两个步骤：首先，求解线弹性状态方程，得到结构在给定载荷下的位移。然后，求解特征值问题，其中特征值对应分岔点，特征向量则解释为挠度屈曲模态。

本文中，我们始终对张量采用 Voigt 记号，并假设满足平面应力条件。

考虑一个物体 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 及其有限元离散 $\Omega_\triangle = \bigcup_{e=1}^{\mathrm{M}} \Omega_e$，由 M 个有限元组成。于是，$\Omega$ 的线弹性状态方程$_\triangle$可写为（Zienkiewicz 等， 2005）：

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

其中， $\boldsymbol{u}$为待求的位移向量，$\boldsymbol{\rho} \in (0, \ 1]^{\mathrm{M}}$ 为伪密度场， $\boldsymbol{f}$ 为施加载荷向量（参考载荷）。刚度矩阵表示为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho}) = \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N_{ip}}} c_{e,k} \boldsymbol{B}_{e,k}^{\top} \boldsymbol{E}(\rho_e) \boldsymbol{B}_{e,k} \tag{2}$$

其中组装算子表示为 $\bigwedge$，积分点数量为 $\mathrm{N_{ip}}$。 $\boldsymbol{E}(\rho_e)$ 是弹性张量，它取决于单元 $e$ 中的伪密度。$\boldsymbol{B}_{e,\,k}$ 是单元 $e$ 在第 $k$ 个积分点处的应变-位移矩阵，其中包含有限元单元形函数的导数。因子

$$c_{e,k} = \det(\boldsymbol{J}_e) w_{e,k} \tag{3}$$

包含单元 $e$ 的雅可比行列式 $\det(\boldsymbol{J}_e)$，以及，$k$ 与该单元第 $k$ 个积分点相关的积分权重 $w_e$。

屈曲方程可表示为特征值问题:

$$(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho}) - \Lambda \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\rho}))) \boldsymbol{\phi} = 0, \tag{4}$$

并求解特征值 $\Lambda_\ell$ 与特征向量 $\boldsymbol{\phi}_\ell$， $\ell \leq \mathrm{M}$ 对。（4）中的特征值也称为载荷因子。发生屈曲时的临界载荷，可通过将参考载荷 $\boldsymbol{f}$ 乘以绝对值最小的特征值求得，该特征值也称为临界载荷因子或屈曲荷载因子（BLF）。若临界载荷因子小于或等于 1，则结构发生屈曲；否则，结构在所施加的参考载荷作用下保持稳定。（Nˇemec 等, 2016）中（4）的应力刚度矩阵（或几何刚度矩阵）表示为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\rho})) = \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N_{ip}}} c_{e,k} \tilde{\boldsymbol{B}}_{e,i,k} (\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{u}_e(\boldsymbol{\rho})))_{i,j} \tilde{\boldsymbol{B}}_{e,j,k}, \tag{5}$$

其中默认对 $i$ 和 $j$ 求和。同样，$c_{e,\,k}$ 包含单元$e$的雅可比行列式以及第 $k$个积分点处的积分权重。单元 $e$ 中的积分应力通过数值方法计算为

$$\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{u}_e(\boldsymbol{\rho})) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N_{ip}}} c_{e,k} \boldsymbol{E}(\rho_e) \boldsymbol{B}_{e,k} \boldsymbol{u}_e(\boldsymbol{\rho}), \tag{6}$$

and

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_{e,i,k} = \frac{\partial \boldsymbol{N}_e}{\partial x_i}(x^k) \tag{7}$$

是在积分点处计算的形函数矩阵的导数 $x^k$。通常，式（4）的解按载荷因子绝对值排序，其中$\Lambda_1$ 为最小值，特征向量则进行$\boldsymbol{G}$归一化，即:

$$\boldsymbol{\phi}^{\top} \boldsymbol{G} \boldsymbol{\phi} = 1. \tag{8}$$

在单尺度拓扑优化中，式（6）可能导致低密度区域出现人工屈曲模态（Neves 等，1995）。然而，在我们的方法中，宏观伪密度表示局部相对晶格体积。因此，低密度区域代表较薄的晶格，这些区域中的模态并非人工模态，而是符合晶格的屈曲特性。

根据 Rodrigues 等人(1995)，代数重数为 1 的特征值相对于密度 $\rho_e$ 的灵敏度为

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho_e} = \left[ \boldsymbol{\phi}^\top \left( \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e} - \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \rho_e} \right) \boldsymbol{\phi} - \Lambda \boldsymbol{w}^\top \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e} \boldsymbol{u} \right]. \tag{9}$$

这里，$\boldsymbol{w}$ 是通过求解方程得到的伴随状态

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\phi}^\top \nabla_u \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\rho}))\, \boldsymbol{\phi}. \tag{10}$$

对于重数大于 1 的特征值，载荷因子函数的导数严格来说并不存在。尽管如此，仍可利用（9）计算次微分中的一个元素（Rodrigues 等人，1995）。或者，也可以采用针对多重特征值的推导（Seyranian 等人，1994）。

注意，$\boldsymbol{G}$ 通常不是正定的，因此有时将特征值问题（4）重新表述为

$$\left(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\rho})) - \tfrac{1}{\Lambda} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})\right) \boldsymbol{\phi} = 0, \tag{11}$$

这样可能更有益，因为对于 $\boldsymbol{\rho} > 0$，$\boldsymbol{K}$ 始终是正定的。

# 3 渐近均匀化

为了获得晶格结构在宏观尺度上的力学性能，我们进行渐近均匀化。这里简要回顾二维情形下的均匀化公式，相关内容可见于Thomsen 等人(2018。请注意，我们并未在微观尺度上进行拓扑优化，而是研究给定的周期性晶格结构。因此，只有固体材料区域存在有限元网格。

这可以防止伪模态，这类模态通常会在拓扑优化过程中出现在低密度区域（Neves 等，1995）。不过，由于有限元离散化，我们可能会得到人工模态。这些模态通常高度局部化，可以通过设置节点数量的最小阈值来过滤；至少要有一定数量的节点表现出挠度，例如，有限元网格中所有节点的 5%。

由于我们并未在微观尺度上进行拓扑优化，且只关心获得给定微结构的临界载荷因子，因此此处不需要灵敏度，故Neves 等人(2002a所述的特征值聚集问题并不存在。

## 3.1 线弹性

我们选取一个代表性体积单元（RVE）$Y$，并将其离散为 m 个有限元$Y_e$，即 $Y = \bigcup_{e=1}^{\mathrm{m}} Y_e$。我们使用三个测试场 $\boldsymbol{f}^j$，在微观尺度上求解$Y$-周期场 $\boldsymbol{\chi}^j$ 的平衡方程：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\chi}^j = \boldsymbol{f}^j, \qquad j = 1, 2, 3 \tag{12}$$

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}^j$ 为

$$\boldsymbol{K} = \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{m}} \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{ip}}} c_{e,k} \boldsymbol{B}_{e,k}^\top \boldsymbol{E}^0 \boldsymbol{B}_{e,k} \tag{13}$$

and

$$\boldsymbol{f}^j = \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{m}} \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{ip}}} c_{e,k} \boldsymbol{B}_{e,k}^\top \boldsymbol{E}^0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^j. \tag{14}$$

$\mathrm{n_{ip}}$ 为积分点的数量，$\boldsymbol{E}^0$ 为基体材料的弹性张量，$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^j$ 为单位应变场，且 $\tilde{\epsilon}_i^j = \delta_{ij}$。我们注意到，通过假设 $Y$相对两侧的解取相同值，可实现 $Y$-周期性。微结构的均匀化本构张量 $\boldsymbol{E}^H$ 随后可表示为

$$\boldsymbol{E}_{i,j}^H = \frac{1}{|Y|} \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{m}} \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{ip}}} c_{e,k} \left(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \boldsymbol{B}_{e,k} \boldsymbol{\chi}_e^i\right)^\top \boldsymbol{E}^0 \left(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^j - \boldsymbol{B}_{e,k} \boldsymbol{\chi}_e^j\right). \tag{15}$$

## 3.2 屈曲

微观尺度上的屈曲平衡方程与宏观情形一样，是一个特征值问题（参见（4））并求解

特征值对 $\lambda_\ell$ 及其对应的特征向量$\boldsymbol{\varphi}_\ell$， $\ell \leq m$:

$$(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\chi}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}))\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{16}$$

与宏观情况一样，绝对值最小的特征值表示屈曲载荷因子。 $\boldsymbol{G}$ 是微观初始应力刚度矩阵（参见（5））

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\chi}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \bigwedge_{e=1}^{\mathrm{m}} \sum_{k=1}^{\mathrm{n_{ip}}} c_{e,k} \tilde{\boldsymbol{B}}_{e,i,k}^{\top} (\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\chi}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}))_{i,j} \tilde{\boldsymbol{B}}_{e,j,k} \tag{17}$$

with

$$\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\chi}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \boldsymbol{E}^0 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{X}_e)\, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}). \tag{18}$$

微观初始应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 描述了宏观应变 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ 在单胞 $Y$中的分布。需要指出的是，（18）已考虑应力放大（参见Ferrer 等人(2021)）。宏观应变由宏观本构方程的解给出:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = (\boldsymbol{E}^H)^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{19}$$

而 $\boldsymbol{X}_e = [\boldsymbol{\chi}_e^1\ \boldsymbol{\chi}_e^2\ \boldsymbol{\chi}_e^3]$ 包含（12）的解。宏观应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 通过（1）和（6）获得。晶格几何的参数化以及屈曲分析的线性特性使我们能够预先计算均匀化属性。因此，在优化过程中可以避免求解均匀化问题（参见第 4.2节）。

我们想强调的是，（4）和（16）中的屈曲分析分别得出纯全局模态和纯局部模态。特别是，未能检测到跨越两个尺度、且定义为 Neves (2019）文中方程（40）的解的交叉模态。

# 4 微结构参数化与升尺度模型

在以下章节中，我们将介绍如何将微观屈曲载荷因子纳入宏观尺度优化问题。我们以一种示例性晶格结构为例进行说明；不过，我们再次强调，

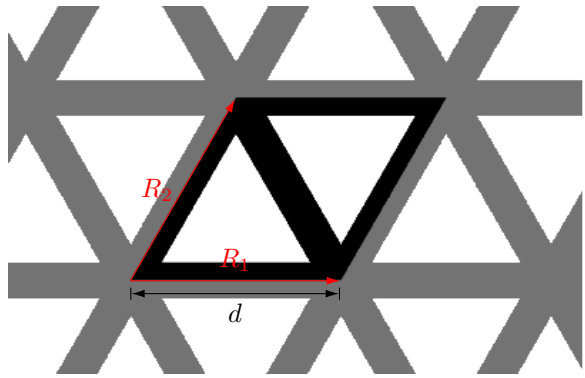


**图 1** 等边三角晶格结构的基本设计，并突出显示单胞。晶格几何由原始晶格矢量 $R_1$ 和 $R_2$给出。增强版本见图 8。

该方法可应用于任意基元胞拓扑。我们首先展示一种获取晶格均匀化载荷因子的方法。

我们选取的示例晶格由边长为 $d$ 的等边三角形构成，作为微结构的基本设计。因此，原始晶格矢量为 $\boldsymbol{R_1} = (1,0)^\top$和 $\boldsymbol{R_2} = (1/2, \sqrt{(3)}/2)^\top$ (见图 1)。文献指出，这种设计具有良好的宏观屈曲强度（Clausen 等人，2016年）。为了得到周期性单胞，我们取其中两个三角形，它们共同构成一个平行四边形，并包含其较短的对角线（见图 1）。我们用一个参数 $\rho$ 对单胞进行参数化，该参数描述相对体积，或者说一减去孔隙率。采用这种参数化后，第 3 节中的均匀化步骤可表示为两个映射:

$$E^H : (0,1] \to \mathbb{S}^3, \qquad \rho \mapsto E^H(\rho), \tag{20}$$

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \times (0,1] \to \mathbb{R}, \quad (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \mapsto \lambda(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \tag{21}$$

(20) 为每个相对体积 $\rho$ 分配一个对称正定的均匀化弹性张量，该张量由 (15) 计算得到；而 (21) 则将宏观应力和相对体积映射为相应的均匀化屈曲载荷因子 $\lambda(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho)$，该因子通过求解 (16) 得到。

材料参数选用杨氏模量 10 Pa，泊松比 0.3。

接下来，我们介绍对尺度提升过程至关重要的三个方面：晶格杆件的节点设计、微观层面有限元网格的分辨率，以及

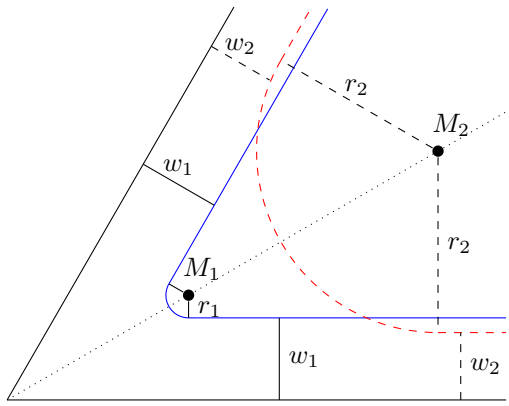


**图 2** 为避免应力集中，晶格拐角采用圆弧倒圆，圆弧由给定半径定义。图中展示了半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的两种构型所形成的晶格边界。通过几何计算，根据半径确定圆弧中点 $M$ 和晶格杆宽度 $w$，从而使晶格的相对体积分数保持不变。

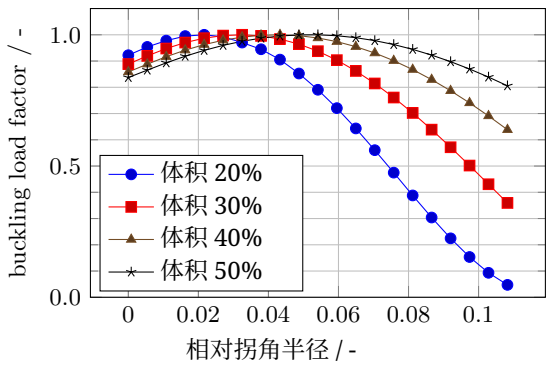


**图 3** $\bar{\sigma}$的归一化均质化屈曲载荷因子 $=(-1,\ 0,\ 0)$，以及不同相对体积下该因子随圆角半径变化的情况。半径以单胞的边长 $d$ 为基准给出。

代表性体积单元中的单胞数量。需要指出的是，若采用 Floquet-Bloch 方法并对布里渊区进行足够精细的离散化，后一方面便会自动得到考虑。

## 圆角

晶格杆件交汇处带尖角的单胞设计会导致这些角部出现局部应力集中。为避免这一问题，我们用半径为 $r$ 的圆弧将角部圆滑处理，同时保持结构总体积不变（图 2）。带圆角单胞的晶格见图 8。

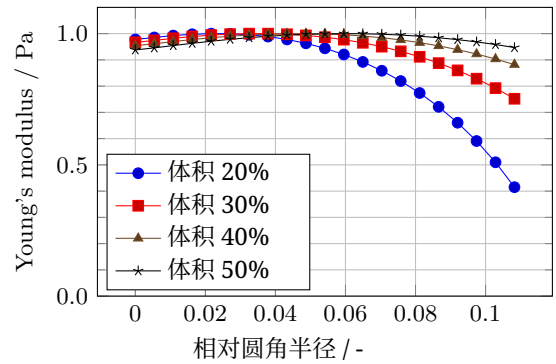


**图 4** 不同相对体积下，均匀化杨氏模量随圆角半径的变化关系。半径以单胞边长 $d$ 为基准给出。

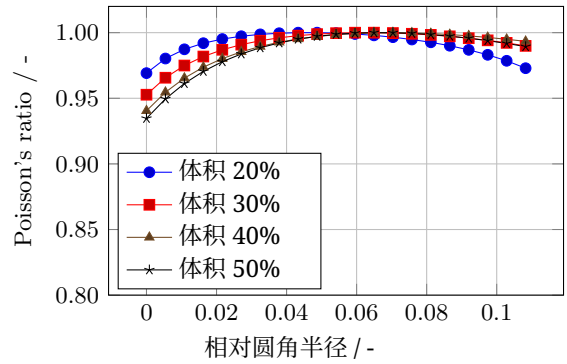


**图 5** 不同相对体积下，均匀化泊松比随圆角半径的变化。半径以单胞的边长为基准给出 $d$。

结果表明，圆弧参数化半径的选择对泊松比的影响很小（图5）。杨氏模量主要在晶格相对体积较小时受到影响（图4）；体积较小时，由于体积守恒，较大的半径会使晶格杆件变得非常纤细（参见图2），导致晶格刚度降低。如图3所示，均匀化屈曲载荷因子受到的影响更为显著。半径较小时，抗屈曲能力会随半径增大而提高，因为这样可以避免应力集中、改善晶格杆件的支撑条件，并减小其相对长宽比。半径较大时，杆件会变得更纤细，长宽比增大，载荷因子则降低。对于不同体积，最小屈曲载荷因子的最大值对应的半径各不相同。图中数据

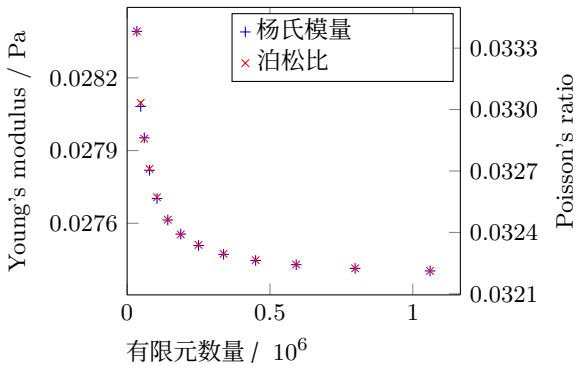


**图 6** 相对体积为 30% 的代表性体积单元在不同有限元离散下的均匀化杨氏模量和泊松比。

表明，采用随体积变化的圆角半径进行圆角处理，可获得良好的抗屈曲能力。需要指出的是，我们仅研究了沿 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = (-1, 0, \mathbf{0})$ 方向的单轴加载；对于其他应力状态，最佳半径可能会有所不同。为简化处理，我们决定在后续计算中采用恒定半径 $r = 0.05d$ 。

## 微观尺度上的有限元收敛

我们采用具有二阶形函数的三角形对微结构进行离散化。图 6和7展示了均匀化过程中（即微观尺度上）有限元数量的收敛性研究。观察到收敛曲线在接近一百万个单元时已相当平坦，同时考虑到我们希望在预处理中将有限元误差控制在较小范围内，因此后续所有均匀化过程均采用一种离散化方案：当密度为 $\rho$ =0.5 时，每个代表性体积单元约有一百万个有限元。对于密度较低的几何形状，采用的单元数量略少。采用这一有限元数量时，通常可在标准工作站上于几分钟内完成一次分析。

### 代表性体积单元尺寸的选择

渐近均匀化只能检测高频模态，即波长小于代表性体积单元尺寸的模态。然而，屈曲模态

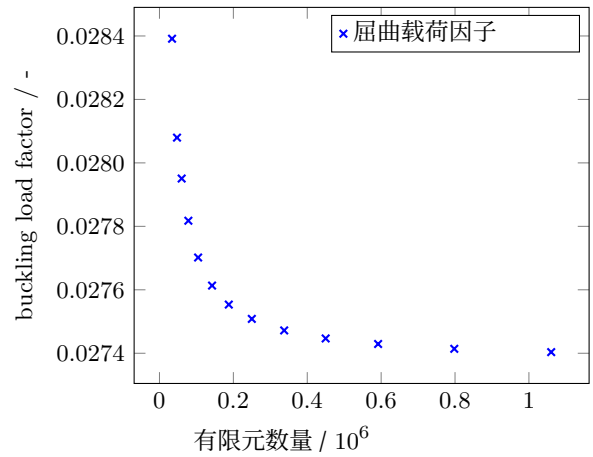


**图 7** 相对体积为 30% 的代表性体积单元采用不同有限元离散时的均匀化屈曲载荷因子。

可能跨越多个胞元。为了在均质晶格结构中也识别这些模态，我们在代表性体积单元中纳入多个单胞。也就是说，微结构被视为$_{\kappa}^{Y}$ 周期性，其中 $\kappa^2$ 是代表性体积单元内的单胞数。包含不同数量单胞的代表性体积单元见图 8。需要指出的是，具有给定数量 $\kappa$ 个胞元重复的代表性体积单元中的所有模态，也可以通过由 $\ell\kappa \times \ell\kappa$ 个单胞组成的代表性体积单元找到，其中 $\ell$ 为整数，例如， $2 \times 2$ 代表性体积单元中的所有模态也会出现在 $4 \times 4$ 或 $6 \times 6$ 代表性体积单元的分析中。依照类似的推理，沿 $_{n_1}^{\kappa}$ 方向具有周期性$\boldsymbol{R_1}$ 且沿 $_{n_2}^{\kappa}$ 方向具有周期性 $\boldsymbol{R_2}$ 的模态，在 $n_1$时， $n_2 \in \mathbb{N}$可通过一个 $\kappa \times \kappa$ 代表性体积单元捕捉。请注意，实践中存在一个自然下限；该值由底层有限元离散的分辨率决定。

我们观察到，尤其是仅含一个单胞的代表性体积单元，会产生相当高的均匀化载荷因子。这是因为由于代表性体积单元的周期性，杆件的连接处在转动方面受到约束。在含有多个单胞的代表性体积单元中，以及第7.1节对去均匀化设计进行分析时，晶格结构的连接处可以自由转动（见图24）。

由于我们关注晶格的最小载荷因子，也就是临界载荷因子，因此我们选取相对于单胞重复数的最小载荷因子：

$$\lambda(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) = \min_{\kappa \in \mathbb{N}} \lambda_{\kappa}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \tag{22}$$

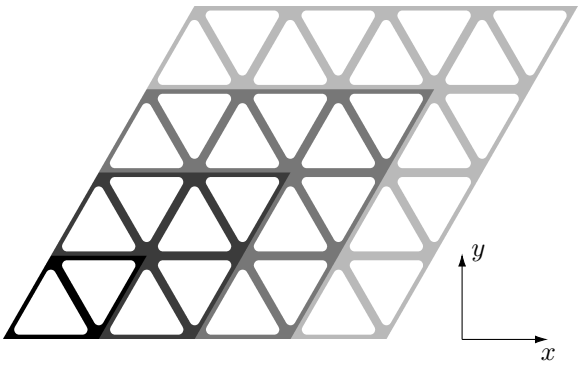


**图 8** 包含 1x1、2x2、3x3 和 4x4 个单胞的不同代表性体积单元，以及用于均匀化的坐标系。

在实际中，我们无法针对 $\kappa \in \mathbb{N}$ 个单胞重复数进行均匀化，而必须采用 $\kappa \leq \mathrm{K}$，并为单胞重复数选择一个适当的上限 K。需要强调的是，对于给定的单胞布局，若不对几乎所有可能的选择进行测试，通常无法确定最优的 $\kappa \in \{1, 2, \ldots, K\}$；即使应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 固定，最优值也可能随体积分数 $\rho$ 的不同而变化。

我们想指出，在代表性体积单元内重复单胞的所述方法，与采用特殊的布里渊区离散化应用 Floquet-Bloch 理论类似（见图 9）。在 Floquet-Bloch 理论中，模态的周期性条件 $\boldsymbol{\phi}$ 表示为

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R_j}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y}) e^{i\boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{R_j}}, \qquad j = 1, 2, \tag{23}$$

其中 $i$ 表示虚数单位，$\boldsymbol{k}$ 表示波矢，而 $\boldsymbol{y}$ 表示晶格单胞内的一个位置（Thomsen 等，2018）。实际中，无需针对所有 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2$求解带有边界条件（23）的单胞问题，而是选取若干个位于所谓不可约布里渊区（IBZ）边界上的 $\boldsymbol{k}$ 向量。这相当于对 IBZ 进行离散化。

现在，一个具有 $\frac{\kappa}{n_1}, \frac{\kappa}{n_2}$ 周期性且满足 $n_1, n_2 \leq \kappa$ 的模态对应于一个波矢，该波矢满足以下方程组

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1}^\top \\ \boldsymbol{R_2}^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\kappa} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

这样，我们便可以将对应于模态的所有波矢绘制到 Floquet-Bloch 图中，这些模态由我们的 $\kappa \times \kappa$ 代表性体积单元（RVE）$\kappa$（从 1 到 $K$）所涵盖，并在图中标出 IBZ 的轮廓。对 $K = 7$进行上述操作，可得图 9所示的结果。

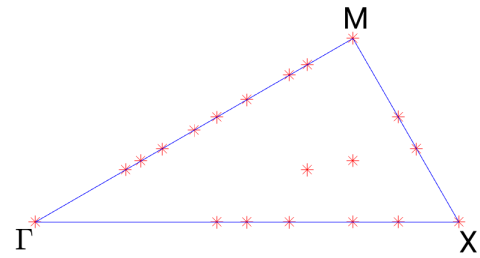


**图 9** 布里渊区中的波矢（见 Thomsen 等人 (2018)），对应于在代表性体积单元中进行 1 至 7 次单胞重复的均匀化。只需求解 7 个单胞问题，即可捕获与图中标记波矢对应的所有模态。

需要强调的是，下一节 4.1中介绍的最坏情况模型与用于求得均匀化屈曲载荷因子的方法无关。

## 4.1 最坏情况模型

本小节介绍我们提出的一种新方法，用于在宏观尺度上纳入微观屈曲载荷因子。我们强调，该方法不仅适用于本文所示例的晶格，也适用于任意参数化微结构。

由于线性化屈曲分析（（16）至（19）），均匀化载荷因子与宏观应力呈线性关系：

$$\lambda(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) = \frac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|} \min_{\kappa \in \mathbb{N}} \lambda_\kappa \left( \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|}, \rho \right) \tag{25}$$

也就是说，可以在宏观单位应力（采用某个给定范数）下进行均匀化，之后再将均匀化载荷因子除以 $\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|$。因此，只需考察单位球面 $S^2$ 上的应力，而不必考察整个三维应力空间（$\sigma_{xx}$,$\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}$）。我们定义

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda} : S^2 \times (0, 1] \to \mathbb{R}, \\ &\bar{\lambda}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) = \min_{\kappa \in \mathbb{N}} \lambda_\kappa(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho), \end{aligned} \tag{26}$$

它为每个单位应力赋予一个均匀化屈曲载荷因子，并结合相对体积。

我们使用球坐标系来表征 $S^2$ 上的单位应力：天顶参考方向（z轴）是从原点穿过双轴压应力 $\boldsymbol{\sigma} = (-1, -1, 0)$ 的轴，且

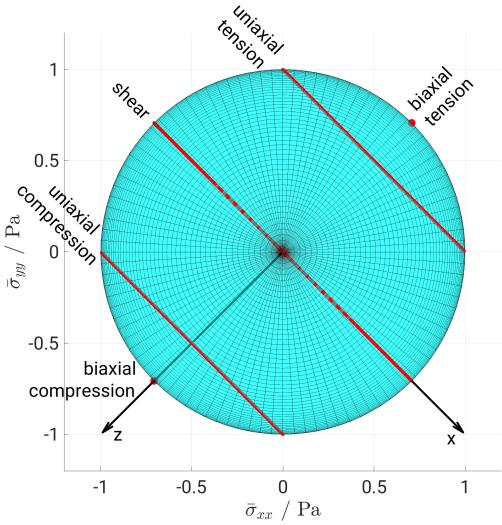


**图 10** 单位应力在单位球面上的表示（$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{xy}$ 平面外轴）。特殊应力类型在球面上呈现为圆（单轴/剪切应力）或单个点（双轴应力）。单位应力采用球坐标参数化，以天顶参考方向 $z$ 和方位参考方向 $x$为基准。

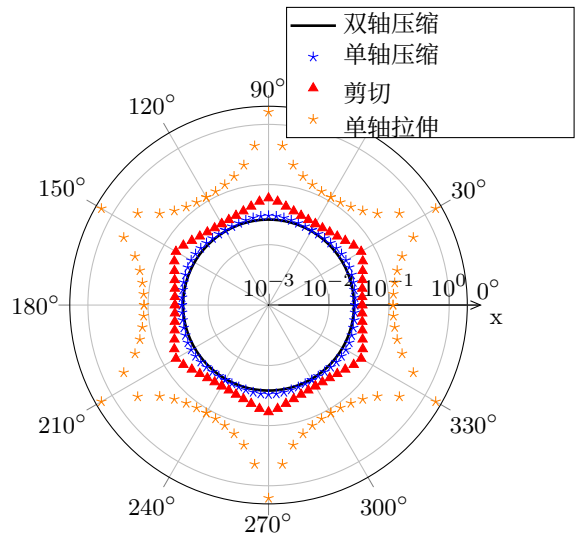


**图 11** 代表性体积单元的均匀化屈曲载荷系数，其中包含 3x3 个单胞重复数，相对体积为 30%。请注意径向轴采用对数刻度。图中所示角度为球坐标参考系中的方位角（见图 10），对应于应力绕代表性体积单元旋转的角度。单胞的对称性反映在载荷系数中。

方位参考方向（x轴）是从原点穿过 $\boldsymbol{\sigma} = (1, -1, 0)$ 的轴（图 10）。在该坐标系中，双轴压缩和拉伸应力对应南北极，而所有纯剪切应力都位于赤道上。倾角（若将其视为地理坐标中的纬度，则称为纬度）表征应力类型：旋转不变的双轴压缩和拉伸应力对应两极，而其他特殊类型，例如单轴应力和剪切应力，则在单位球面上形成纬线圆。方位角（经度）描述所施加的宏观应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 相对于代表性体积单元的旋转情况。更多说明请参阅在线资源1中的视频。

常见文献对$\sigma_{xx}$应力空间作了进一步简化。在假设屈曲行为具有各向同性的前提下，只研究不含剪切分量但$\sigma_{xx}$比值变化的双轴加载，或针对所研究的微结构，采用具有所有可能载荷方向的单轴加载（Bluhm等（2020））。相比之下，我们针对整个单位应力面 $S^2$计算屈曲屈服面。因此，我们的方法适用于具有各向同性或各向异性屈曲特性的任意参数化微结构。

图中展示了相对体积为 30%、晶格单胞重复数为三的代表性体积单元在单轴压缩、双轴压缩和剪切应力下的均匀化载荷因子。11。我们可以清楚地看到，晶格单胞的对称性体现在载荷因子中。单轴加载工况的形状与Bluhm 等人(2020) 的结果非常吻合。

接下来，我们将所有数据整合到最坏情况模型中。评估了不同晶格单胞重复数 $\kappa \in \mathbb{N}$ 以及单位应力球 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in S^2$ 上所有应力的均匀化载荷因子后，也就是说，针对所有应力类型和方向，我们选取考虑所有单位应力和晶格单胞重复数时最小的屈曲载荷因子：

$$\lambda_{wc} : (0, 1] \to \mathbb{R},$$
$$\lambda_{wc}(\rho) = \min_{\substack{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in S^2, \\ \kappa \in \mathbb{N}}} \lambda_\kappa(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \tag{27}$$

该最坏情况模型仅取决于局部体积分数，不再取决于局部应力类型或方向。我们注意到，在实际应用中，单位

球面是离散化的，且单胞重复数有上限。因此，最坏情况仅是针对离散化分辨率和最大单胞重复数而言的最坏情况。然而，我们发现，对于所研究的示例晶格单胞，均匀化屈曲载荷因子关于应力变量具有很高的规则性。

如果通过 Floquet-Bloch 理论（Neves等, 2002a）而非采用不同的单胞重复数来获得均匀化载荷因子，那么（27）将包含对所有可能波矢的最小化 $k$ 这些波矢位于布里渊区 $\mathcal{B}$ 内，而不是采用单胞重复数：

$$\lambda_{wc}(\rho) = \min_{\substack{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in S^2, \\ \boldsymbol{k} \in \mathcal{B}}} \bar{\lambda}_{\boldsymbol{k}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \tag{28}$$

## 4.2 微观与宏观尺度的解耦

单胞的参数化使微观与宏观尺度能够有效解耦（Bendsøe 和 Kikuchi（1988年））。也就是说，我们对参数空间进行离散化（$(0,1]$ 针对相对体积），并预先计算所得参数集的均匀化属性（弹性张量，见（15），以及微观屈曲载荷因子，见（16））（另见第6节）。随后，在宏观尺度上优化结构时，我们对这些预先计算的属性应用插值模型。换言之，我们将映射 $E^H$ （20）和 $\lambda$ （21）替换为

$$E^I : (0,1] \to \mathbb{S}^3, \qquad \rho \mapsto E^I(\rho), \tag{29}$$

$$\lambda^I : \mathbb{R}^3 \times (0,1] \to \mathbb{R}, \quad (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \mapsto \lambda^I(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho), \tag{30}$$

其中， $E^I$ 和 $\lambda^I$ 分别是 $E^H$ 和λ的近似值。

为构造 $\lambda^I$，我们针对密度变量对由（27）得到的最坏情况载荷因子进行插值：

$$\lambda^I_{wc} : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad \rho \mapsto \lambda^I_{wc}(\rho) \tag{31}$$

我们通过将与宏观应力相关的最不利微观屈曲载荷因子除以该应力的范数（见（ $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$25））， 得到

$$\lambda^I : \mathbb{R}^3 \times (0,1] \to \mathbb{R}, \quad (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \rho) \mapsto \tfrac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|} \lambda^I_{wc}(\rho) \tag{32}$$

对于基于梯度的优化，我们需要一个可微的插值模型。遵循Bendsøe 和 Kikuchi(1988年) 的方法，我们采用分段插值策略。具体而言，对于均匀化弹性张量（29）和屈曲载荷因子（31），我们均采用分段三次Hermite插值（Birkhoff等（1968））。该方案得到的近似连续可微，由给定数据点之间唯一确定的三次多项式构成，并且在这些数据点处精确。然而，也可以采用其他插值方案，例如使用切线函数或 RAMP（材料性质有理近似，Stolpe 和 Svanberg(2001)）函数，但其缺点是精度较低，尤其是在孔隙率值较高时。

采用分段 Hermite 方法， $E^I$ 通过分别对弹性张量的各个系数进行插值来构造。通过有限差分近似均匀化弹性张量和均匀化屈曲载荷因子关于 $\rho$ 的一阶导数。对于均匀化载荷因子，在相对体积较高时会出现数值问题。在这些相对体积下，单胞具有很强的抗屈曲能力，但迭代特征值问题求解器（ARPACK，3.7.0版（Lehoucq 等（1998））） 会产生由单个有限元的屈曲所引起的伪模态。因此，我们仅对相对体积低于 60% 的数据点进行插值。在此样本空间的边界处，无法进行二阶中心有限差分，因此在两个最外侧子区间中仅使用二次多项式，即 $[0, 0.05]$ 和 $[0.55, 0.6]$。对于高于所选 60% 阈值的相对体积，我们使用子区间 $[0.55, 0.6]$对应的二次函数进行外推。不过需要指出的是，在第6 节所示的优化设计中，只有在密度显著低于 60% 时才会发生微屈曲。均匀化微观屈曲载荷因子的插值最坏情况模型 $\lambda^I_{wc}$ 见图12。所提出的插值方案可得到足够光滑的函数，以便进行基于梯度的优化。

近似微观屈曲载荷因子 $\lambda^I$ 的误差由若干单独误差构成：在微观层面通过有限元离散求解均匀化问题所引入的误差，以及由.....产生的误差

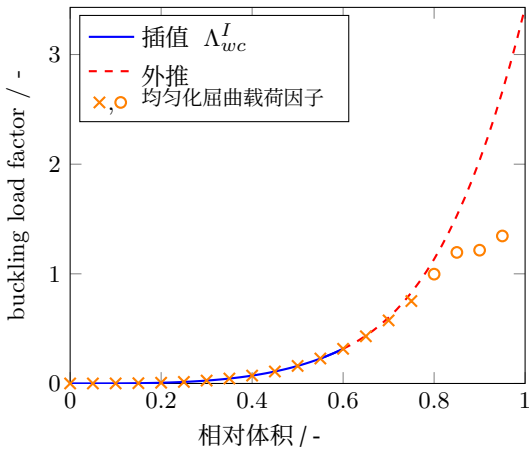


**图12** 均匀化最坏情况屈曲载荷因子及其插值曲线。相对体积较高时会出现数值问题（以 o 标记）。因此，仅对不超过 0.6 的数值进行插值，并对更高数值应用二次外推。

限制为最坏情况所引入的误差，以及由插值产生的误差。通过在微观尺度上使用更精细的有限元网格和更精细的插值网格，可以轻松控制离散化误差和插值误差。因此，最坏情况误差最为重要。我们将在第7.2节讨论数值示例时再回到这一点。

*Remark 1* 如果将最坏情况模型（27）和单变量插值（31）替换为在组合应力与密度空间 $S^2 \times$ 中对 $(0, 1]$ 进行离散化和三变量插值，则可以避免最坏情况误差。

在基于梯度的优化中，可连续微分的插值方案至关重要。对于这种无最坏情况方法，可采用分段三次 Hermite插值（Birkhoff等（1968））或基于三次B样条的稀疏网格插值（Valentin等人 2020）。在三维情形下应用无最坏情况方法时，由于维数灾难，宜采用可微稀疏网格方法；这是因为此时应力有六个独立分量，需要五个参数来表示单位应力，因此插值必须在六维空间中进行。

# 5 尺寸优化

本节将建立双尺度尺寸优化问题，并将在第6节。与通常关注实体/空洞设计的拓扑优化不同，我们将局部晶格体积分数设定在 10% 至 100% 之间变化。这相当于对晶格杆件的宽度进行缩放。

我们希望得到能够抵抗给定载荷的结构，同时满足刚度和屈曲强度方面的要求。为在双尺度方法中最大化屈曲强度，我们必须同时考虑均匀化整体构件的屈曲和微结构的屈曲。这会形成一个多目标优化问题。对于由 M 个有限元离散而成的宏观域，就机械柔度$c$、宏观载荷因子 $\Lambda_\ell$，$\ell = 1, \ldots, L$ 以及微观屈曲载荷因子 $\lambda^I_e$，$e = 1, \ldots,$ M 而言，可将其表述为：

$$\max_{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} g\left(-c, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{\mathrm{L}}, \lambda^I_1, \ldots, \lambda^I_{\mathrm{M}}\right)(\boldsymbol{\rho}). \tag{33}$$

宏观载荷因子是由（4）的解给出的，并通过插值最坏情况模型（ $\lambda^I_e$ 为每个单元$e$ 预测微观屈曲载荷因子（32）。设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 表示均匀化晶格的局部体积分数。借助均匀化公式，可以将其映射为（周期性）微结构的力学性能，例如弹性张量（15）和屈曲载荷因子（32），后者使用（16）。$g$ 是一个聚合函数，而 $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ 是可行集

$$\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} = \left\{ \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{\mathrm{M}} : \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \sum_{e=1}^{\mathrm{M}} \rho_e \leq V \right\}. \tag{34}$$

我们将前几个 $\ll$ M 个宏观载荷因子纳入目标函数，以处理潜在的模态切换和多重特征值。请注意，最小化柔顺度等同于最大化其负值。我们采用 33 中的多目标问题，并使用 $\epsilon$-约束法（Mavrotas 2009）。为此，通过求解以下问题可获得帕累托前沿上的一个点：

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \tilde{g}\left(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{\mathrm{L}}, \lambda^I_1, \ldots, \lambda^I_{\mathrm{M}}\right)(\boldsymbol{\rho}), \\ &s.t.\ c(\boldsymbol{\rho}) = c_0, \end{aligned} \tag{35}$$

其中，柔度值固定为 $c_0$。

我们希望最大化最小载荷因子，以获得良好的屈曲强度，因此选择 $\tilde{g}$ 为最小值函数。为消除后者的非光滑特性，我们采用Bendsøe 和 Sigmund (2003所建议的该问题的界限公式，最终得到以下优化问题：

$$\max_{s\in\mathbb{R},\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} \quad s, \tag{36}$$

$$s.t.\ \Lambda_\ell(\boldsymbol{\rho}) \geq s, \qquad \ell = 1,\dots,\mathrm{L} \tag{37}$$

$$\lambda_e^I(\boldsymbol{\rho}) \geq s, \qquad e = 1,\dots,\mathrm{M} \tag{38}$$

$$c(\boldsymbol{\rho}) = c_0, \tag{39}$$

在数值实验中，采用界限公式且 $L$取值足够大时，我们没有遇到多重特征值或特征值聚集的问题。另一种选择是考虑其他公式，例如通过 Kreisselmeier 和 Steinhauser(1980)得到的平滑最小值。

在第6.2节中，我们考察该问题的三种变体：

A）我们忽略（38），即在柔顺度约束下最大化宏观尺度上的屈曲，但在优化过程中不考虑微观尺度上的屈曲。B）我们去掉（37），即仅在柔顺度约束下优化微观尺度上的屈曲，而不考虑宏观屈曲。C）我们研究给定的原问题，即在给定柔顺度的情况下，同时最大化两个尺度上的屈曲。

我们为每种情况计算帕累托最优集的一个表示，其中包含 51 个帕累托优化解。为此，我们首先计算纯柔顺度最小化问题的解

$$c^* = \arg\min_{\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} c(\boldsymbol{\rho})。 \tag{40}$$

然后我们求解 A)- C)，不含柔顺度约束（39），并评估所得设计的柔度值$c_A$，$c_B$ 和 $c_C$，以获得帕累托集上的极点。随后，我们将区间 $[c^*, c_A]$, $[c^*, c_B]$ 和 $[c^*, c_C]$等距离散，例如对于 A)

$$c_0^j = c^* + j\,(c_A - c^*)/50, \quad j = 0,\dots,50. \tag{41}$$

帕累托最优集的表示随后由满足柔顺度约束 $c(\boldsymbol{\rho}) = c_0^j$ 的 39中的 A) -C) 的解给出。

# 6 数值算例

本节展示第5节所述双尺度尺寸优化问题的数值实验结果。我们首先进行预研究，以更好地理解后续的优化设计。随后将研究多目标优化问题的解。

为构建最坏情况模型，我们必须在施加宏观应力的条件下进行屈曲均匀化。为此，我们在球坐标系中离散单位应力球（见第4.1节）。我们将方位角离散化，该角度描述施加应力绕代表性体积单元旋转的情况，共分为 5° 步。利用单胞的对称性，只需研究从 0° 到 30° 度的区间。对于描述应力类型的倾角，我们在区间 $[0°, 180°)$ 内取 11.25° 步。我们以 0.05 为步长离散相对体积，并针对四、五、六和七个单胞重复数求解均匀化问题。由包含两个和三个单胞的代表性体积单元得到的模态，也可在具有六个单胞重复数的代表性体积单元中检测到。同样，1x1 代表性体积单元的模态也涵盖在其他所有代表性体积单元中（见第4节）。因此，对于每个选定的相对体积，共有 448 个单胞问题，总计 9408 个。请注意，这些模拟彼此独立，可以并行运行。我们将微观区域离散为每个代表性体积单元约一百万个有限元。如第 4节所述，材料属性为杨氏模量 10Pa、泊松比 0.3。需要指出的是，选择该杨氏模量是为了改善数值表现，尤其是在微观尺度上求解相关特征值问题时。相反，结果不受这一选择的影响。

特征值问题由 ARPACK 版本3.7.0（Lehoucq等（1998））求解。为求解优化问题，我们采用 SNOPT 版本 7.2.8（Gill 等人 2005），该软件采用序列二次规划法。

现在，考虑图 13左侧所示的情形。一个矩形设计域受到

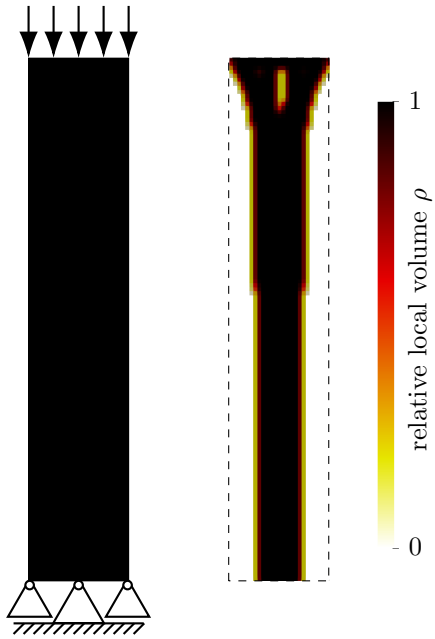


**图 13** 左：包含载荷和支承的宏观设计设置。右：设计域（虚线）中的标准柔顺性问题解（40）。

顶部压力载荷的作用。底部施加滚动边界条件，即底边所有节点在水平方向的自由度均被固定。为防止刚体运动，底边中心节点在垂直方向的自由度也被固定。这对应于固定/自由边界条件下的细长柱欧拉情况，其屈曲载荷为

$$f_{\text{crit}} = \frac{\pi^2}{4L^2} EI, \tag{42}$$

其中 $L$为柱的长度， $E$ 为弹性模量， $I$ 为平面截面二次矩。设计域的长宽比为 1 : 5。2，并将其划分为 $25 \times 130$ 个双线性四边形单元（$\mathcal{Q}_4$），这对于此类单元而言是足够的分辨率（另请参见（Ferrari 和 Sigmund， 2019年，图 1））。图 13展示了采用 SIMP（带惩罚的固体各向同性材料）材料模型、物理设计下界为 $1e{-}9$的机械柔度最小化优化设计。

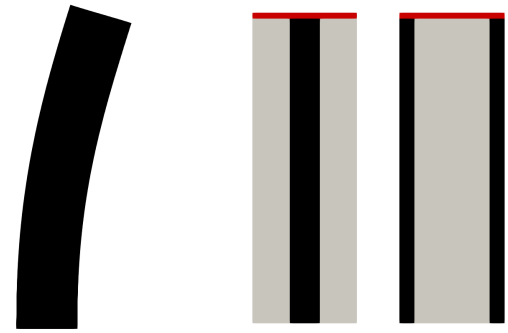

**图 14** 左：实心柱的屈曲模态。中：由弱（灰色）材料构成、并以实心（黑色）材料加固的内骨骼构型柱。右：外骨架构型。力通过顶部的刚性板（红色）施加。

## 6.1 预研究：内骨骼与外骨架

在考察优化问题的结果之前，我们先进行一项研究，以便更好地理解后续的优化设计。首先，考虑 $\rho = 1$ 在 $\Omega$ 上的情况，即处处为实心材料（图 14，左）。假设处于平面应力条件下，宽度和虚拟深度均为 1m，长度为 5。2 m，且 $E = 10$ Pa，根据（ $f_{\text{crit}} = 0.076$）可得 42N。这与我们的数值结果 $f_{\text{crit}} = 0.074$N 吻合良好。接下来，我们将该实心柱与两种重量相同的结构进行比较：弱材料（$\rho = 0.4$），并分别采用宽度为 0$\rho = 1$的实心加固件。5m，置于中间（内骨骼，图 14，中），或采用实心加固件，在两侧包夹弱材料，宽度为 0。25m（外骨架，图 14，右）。力通过一块实心板施加于顶部边界，该板的弹性模量是实心材料的 100 倍。由于重量保持不变，这两种结构的宽度都大于第一种结构（其宽度为 1。75m）。它们的临界载荷分别为 0。065N 和 0。22N。由于惯性矩较大，外骨架的宏观屈曲刚度优于内骨骼。因此，我们预计，针对宏观屈曲进行优化的设计将呈现类似外骨架的结构。

## 6.2 优化

接下来，我们研究第 5 节所述的三个不同的多目标优化问题。简要说明一下，我们没有遇到

以下示例中均未出现特征值切换问题。材料模型采用第 4.1 节中的插值函数，并使用半径为 Borrvall 和 Petersson（2001） 的密度滤波器，对。6 倍有限元单元边长的范围进行滤波，以实现正则化。我们选择 $\rho_{\min} = 10\%$ 以获得易于实现的晶格结构，并施加全局体积约束，使其占设计区域面积的 $V = 50\%$。

### A）纯宏观载荷因子优化

忽略微观尺度上的屈曲，我们对宏观载荷因子进行最大化（37）。不同柔顺度约束下的载荷因子见图15。作为参照，我们列出了采用幂律的拓扑优化结果（$\rho^3$）和 $\rho_{\min} = 0.001$。部分设计见图16。设计 $A_1$ 是通过不考虑屈曲的柔顺度最小化得到的。在最大化屈曲载荷因子的同时放宽柔顺度约束，宏观载荷因子仅有小幅提升，最高可达15%。这是因为设计 $A_1$本身已具有较好的宏观抗屈曲能力，因为它形成了外骨架。只有在设计域上部，为了支撑受载边缘，才对此结构进行了调整，采用了典型的分支结构。随着柔顺度增大，出现了受约束的斜杆（$A_2$-$A_4$），已知这类斜杆可以提高宏观屈曲稳定性（Bendsøe 和 Sig mund（2003））。所有设计的设计下界 $\rho_{\min} = 10\%$ 均处于激活状态，见图15。由此我们得出结论：如果选择更低的 $\rho_{\min}$，载荷因子可能会更大，即可以获得更好的结构。另一方面，当 $\rho_{\min}$极低时，该问题将不再是尺寸优化问题，而会变成拓扑优化问题，因此需要特殊处理（例如，参见Christensen 等人(2022)）。

### B）纯微观载荷因子优化

在第二个优化问题中，我们忽略宏观屈曲，转而在柔顺度约束下最大化所有有限元中最小的微观载荷因子（38）。

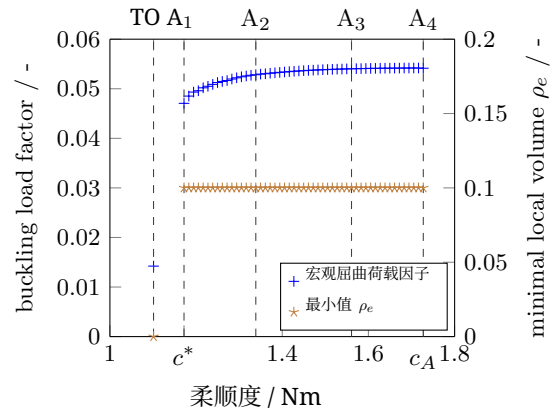


**图 15**仅考虑宏观屈曲，同时满足柔顺度约束和全局体积约束时的优化函数值。作为参考，我们纳入了纯柔顺度最小化的拓扑优化结果（TO），其柔顺度为 $\rho_{\min} = 0.001$，柔顺度为 1。10 Nm，载荷因子为 0。014。图中展示了选定的设计，见图 16。

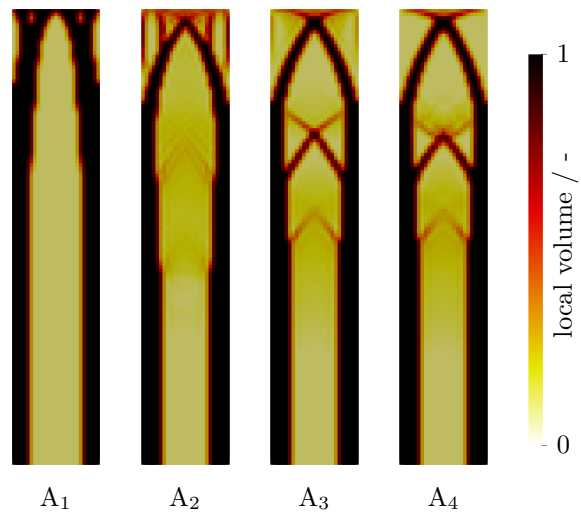


**图16** 图 15中的标记数据所对应的优化设计。从左到右，柔顺度约束逐渐放宽，宏观屈曲刚度随之提高，并出现起加固作用的斜向结构。

微观屈曲载荷因子由我们的最坏情况模型近似计算（32）。图17显示，放宽柔顺度约束后，载荷因子显著提高。不含柔顺度约束的问题的最优解（设计 $B_5$）是完全均匀的设计（见图18）。设计 $B_5$ 在给定边界条件下呈现均匀应力，因此微观载荷因子也均匀。由此可见，柔顺度约束放宽得越多，优化设计就越均匀

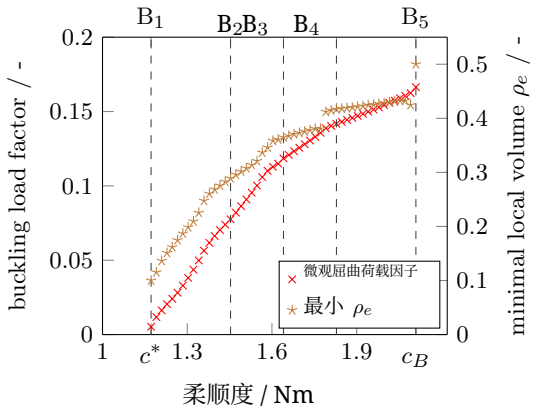


**图 17**仅考虑微观屈曲，并受柔顺度约束和全局体积约束时的优化函数值。优化设计显示出逐渐增大的最小局部体积（另见图 18），从而具有更好的局部抗屈曲能力。

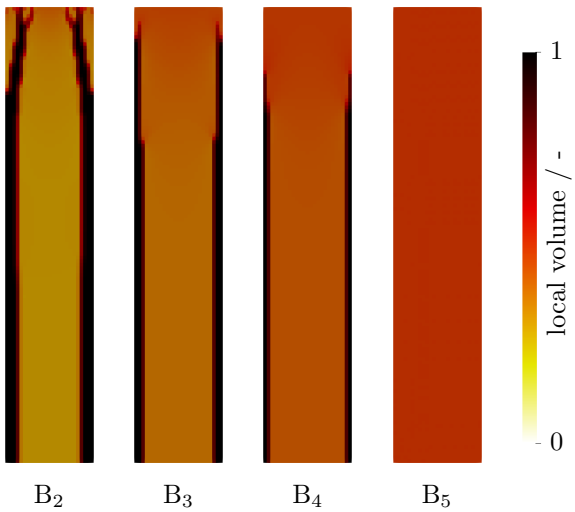


**图 18** 图 17 中标记数据对应的优化设计。设计 $B_1$ 等于图 16 中的 A。$B_5$ 是在没有柔顺度约束的情况下对微观屈曲进行纯最大化，所得结果为均匀设计。

。首先，设计 $B_1$=$A_1$ 顶部的分支结构被高密度晶格取代（$B_2$,$B_3$），随后承载骨架消失（$B_4$,$B_5$）。图17 中的最小体积跃变可以通过设计变化和设计域的离散化来解释。例如，从 $B_3$ 到 $B_4$，时，左右边缘的实体部分各变薄了一个有限元单元，导致整个结构中的应力分布发生变化。

### C）纯宏观与微观载荷因子的同步优化

宏观和微观屈曲载荷因子的同步优化（36）-（39）所得数值如图19所示。作为参考，图中还给出了采用 $\rho = 0.001$ 的拓扑优化（TO）结果。为了获得刚度较高（柔顺度较低）的设计，需要采用较厚的实体结构。留给晶格部分的材料较少，因此局部体积较小，最小微观屈曲载荷因子也较低。因此，只有（38）和（39）处于激活状态，而（37）保持非激活状态。对于限制较少（更宽松）的柔顺度边界，所需的实体材料较少，材料会重新分配到晶格区域（$C_2$）。因此，微观屈曲载荷因子可以提高。当其达到宏观屈曲载荷因子的数值时，（37）变为激活状态（$C_3$）。因此，若进一步仅提高微观屈曲载荷因子，即像 B 中那样朝均匀设计方向调整，并不能改善目标函数，因为松弛变量的数值将由宏观载荷因子决定。基于此，微观和宏观屈曲载荷因子同步提高：前者通过增加设计域上部的晶格密度来提高，后者则通过加固外骨架来提高（$C_4$,$C_5$）。

图中局部最小体积的下降19 对于更宽松的柔顺度而言似乎有悖直觉。图中20可以看到，由于离散化，实体部分出现了阶梯结构，例如见 $C_5$。由此得到的局部应力场允许个别有限元采用略低的体积，同时保持微观屈曲载荷因子不变。

## 7 去均匀化与验证

本节将进行两项不同的比较：首先，将预测的屈曲行为与去均匀化设计的高分辨率数值分析结果进行比较。其次，使用精确的微观载荷因子评估来验证最坏情况模型。

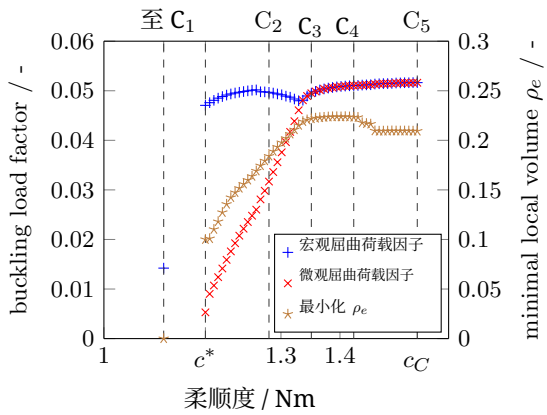


**图19** 纯宏观屈曲与纯微观屈曲的并发载荷因子最大化优化函数值，考虑柔顺度和体积约束（36）-（39）。柔顺度不超过1.33时，只有微观屈曲载荷因子起作用。柔顺度值更高时，宏观屈曲载荷因子占主导。图中展示了部分选定设计。20。

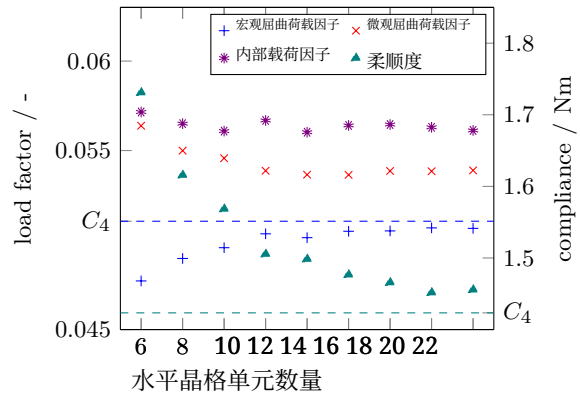


**图 21** 设计 C 的去均匀化$_4$ 随着晶格单元数量的增加。对于内部微观载荷因子，我们搜索了第一个在边界处没有挠度的屈曲模态。宏观屈曲载荷因子与我们的预测非常吻合；微观载荷因子和内部载荷因子优于最坏情况模型的预测（参见图 19）。

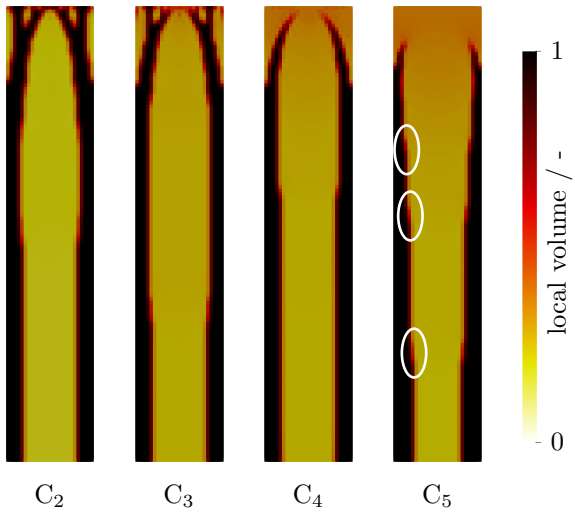


**图20** 图中标记数据对应的优化设计 19。设计C$_1$ 等于图16中的A$_1$ 。为提高微观屈曲承载能力，优化器降低了晶格孔隙率。与纯宏观屈曲优化不同，这里没有出现斜杆，因为晶格本身已具有良好的宏观屈曲承载能力。由于离散化，实体部分可见阶梯状边缘，如C$_5$ 中的白色椭圆所示。

## 7.1 去均匀化设计的性能

优化结果去均匀化所需的晶格单元数量与宏观模型的有限元分辨率相互独立地选取（参见图 13）。为实现这一点，我们按如下方式进行流程如下：首先，对优化后的密度场 $\rho$ 进行插值，并确定晶格单元的数量。然后，在每个晶格单元中心处对该场进行评估，以确定相应晶格杆件的宽度。请注意，我们的去均匀化过程保持体积不变，即所有去均匀化设计的体积均为设计域面积的 $V = 50\%$。去均匀化设计如图 22 和 23 所示。

### 单元尺寸的影响

我们比较了设计 C 的不同单元尺寸下的去均匀化结果$_4$ ，见图 20。我们考察了不同的屈曲载荷因子：一个对应于宏观屈曲模态，即整个结构的挠曲（低频）；另一个对应于微观模态，即晶格的挠曲（高频）。正如预期，晶格胞元数量越多，预测的宏观屈曲载荷因子越接近实际值（见图21）。微观屈曲载荷因子源于边界处的模态（图23）。均匀化理论忽略了边界效应，因此无法很好地近似这些模态。因此，我们还搜索与内部模态相关的最小载荷因子，即不表现出结构边界处挠曲的模态（参见图 23）。为避免微结构在结构边界处发生屈曲，可以采用涂层策略，例如

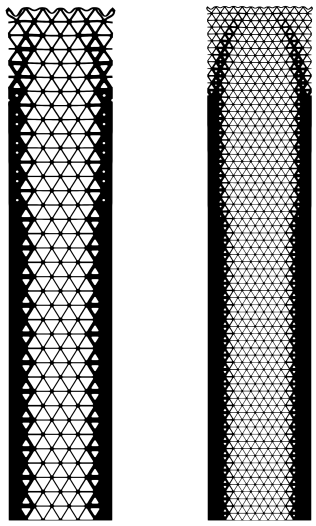

**图 22** 设计 $C_4$ 的去均匀化结果，其中水平方向有 6 个（左）和 12 个（右）胞元，并显示了屈曲前的位移。施加压力载荷的顶面上的水平支杆出现下垂，且胞元数量越多，下垂越小。

由 Christensen 等人 (2022提出的策略。

在所考虑的示例中，单元尺寸对该内部载荷因子几乎没有影响。其他示例的情况可能有所不同。内部微观屈曲模态的放大图见图 24。

如图21所示，随着单元尺寸减小，柔顺度趋于降低。与 20 个晶格单元相比，22 个晶格单元时观察到的柔顺度增加，可能是由离散化效应造成的。图22显示，施加压力载荷后产生的位移呈波浪状，顶面上的水平晶格杆件在其对角支撑之间下垂。胞元越多，这些杆件的支撑效果越好，因此柔顺度越低。

## 均匀化设计与去均匀化设计的比较

接下来，我们比较均匀化设计 $C_4$ 与其去均匀化对应设计（水平向包含 20 个胞元）。对于该设计，尺度分离明显，均匀化误差也很小。宏观载荷因子确定为 0.0507，与.....相差不到

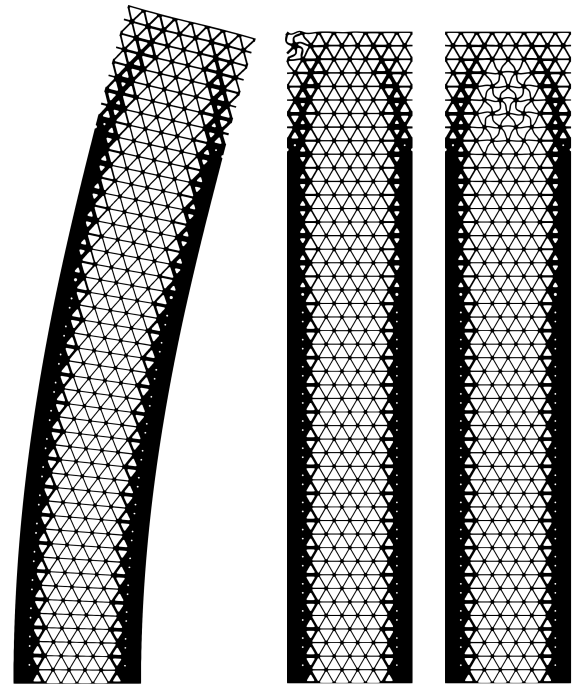

**图 23** 设计 C 的不同屈曲模态$_4$ 去均匀化设计，包含八个晶格单元（参见图 21）。左：第一宏观模态。中：第一微观模态。右：第一内部模态。

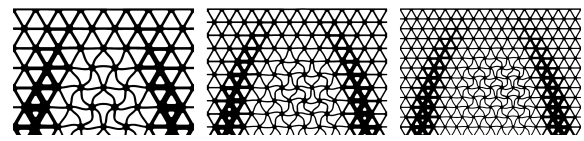

**图24** 设计 C 的第一内部屈曲模态局部放大图$_4$去均匀化设计分别包含 8 个（左）、12 个（中）和 16 个（右）晶格单元（参见图 21）。

与优化后的均匀化设计中预测的宏观载荷因子 0.0511 相差不到 1%。去均匀化设计的内部微观载荷因子为 0.0563，与预测值 0.0511 之间存在 10% 的差距。这是意料之中的，因为预测的微观载荷因子基于我们的最坏情况模型，该模型假设了最坏的应力类型和方向（见第4.1节）。请注意，预测的微观屈曲载荷因子小于微观屈曲载荷因子，因此在此示例中，我们的最坏情况模型可作为防止纯微观屈曲的保护措施。当然，这种观察通常仅在以下范围内成立：

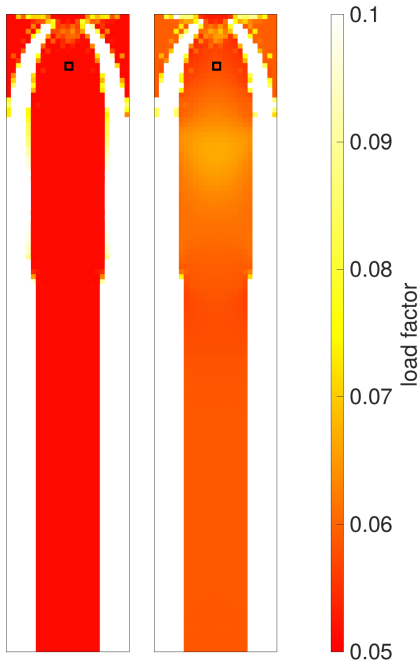


**图 25** 左：最坏情况模型预测的微观屈曲载荷因子。右：事后均匀化微观屈曲载荷因子的可视化结果。载荷因子以 0.1 为阈值。上部区域中标记的有限元大致对应于图 24 中模态的中心。该单元事后均匀化的屈曲载荷因子比预测值高 13%，与去均匀化设计的差异小于 3%。

尚存的离散化和插值误差，以及均匀化引入的误差。

## 7.2 最坏情况模型的影响

接下来，我们研究最坏情况模型预测的载荷因子与去均匀化设计所得到的内部载荷因子之间的差距。对于设计 C 的晶格区域内所有有限元$_4$, , 我们通过计算 (26) 进行后验均匀化。我们提取局部相对体积，并创建具有$\kappa \in \{4,5,6,7\}$ 个单胞重复数的代表性体积单元。然后，我们对每个 $\kappa$ 进行屈曲载荷因子的均匀化（第 3 节），其中采用根据优化设计、使用 (18) 和 (19) 得到的“真实”宏观应力，并取关于 $\kappa$的最小值。所得微观载荷因子如图 25 所示。所有经过验证的有限元中，预测载荷因子与后验载荷因子的平均相对差异为 18%，标准差为 0.079。

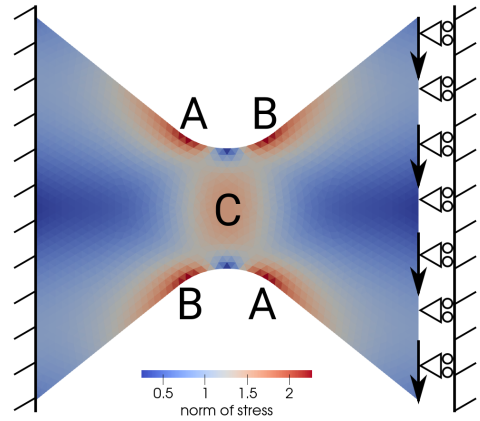


**图 26** 剪切应力示例的设置，由孔隙率为 50% 的均匀化晶格组成。颜色表示所得机械应力的范数。区域 C 受剪切作用，区域 A 受单轴拉伸作用，区域 B 受单轴压缩应力作用。

图 25 中标出的单元与去均匀化设计中内部微观模态的中心相对应。对于该单元，后验均匀化屈曲载荷因子为 0.0578，与去均匀化设计的内部微观载荷因子相差不到 3%。这一较小的差异表明，均匀化是预测微观屈曲行为的有效工具。

所提及单元的事后均匀化屈曲载荷因子比最坏情况模型预测值高 13%。这可由图11 解释。所选有限元的宏观应力取自宏观分析，呈单轴状态且沿竖直方向作用。因此，事后载荷因子对应于单轴曲线上 $90^\circ$ 处的值，该值比双轴值高 15%。

### 包含拉伸、压缩和剪切应力的示例

在前面考虑的示例中，我们主要观察到单轴压缩应力。接下来，我们想考察一个同时存在压缩、拉伸和剪切应力的示例。为此，请考虑图中所示的设置。26：领结形区域的左边缘在两个自由度上均被固定。右边缘的水平方向运动受到限制，并受到一个向下的拉力。我们模拟局部相对体积恒定的均匀化晶格的行为，即

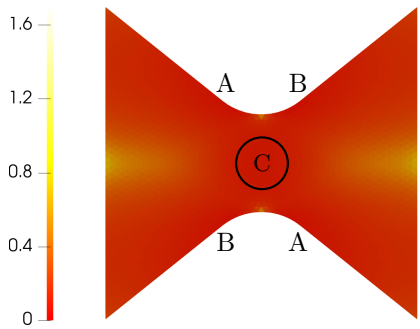


**图 27** 通过最坏情况模型获得的微观屈曲载荷因子。

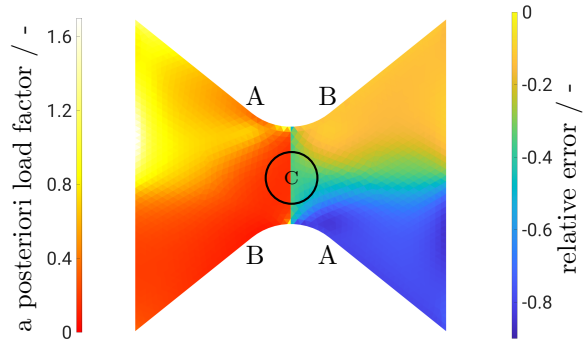


**图 28** 左：利用“真实”宏观应力进行后验均匀化得到的微观屈曲载荷因子。右：最坏情况模型预测的载荷因子与后验载荷因子之间的相对差异。中心区域 C 承受纯剪切应力，其预测载荷因子比后验均匀化所得的载荷因子小 50%。

$\rho_e = 0.5$ 对于所有 $e = 1, \ldots, \mathrm{M}$。这会使区域中心（标记为 C）产生纯剪切应力，使标记为 A 的区域产生单轴拉伸应力，并使标记为 B 的区域产生单轴压缩应力。

在图27 中可以看到，通过最坏情况模型得到的微观屈曲载荷因子在区域 A 和 B 中取最小值，这些区域的应力最高。这凸显了最坏情况方法的一个缺陷：该模型无法区分拉伸应力和压缩应力。这是因为模型基于对所有单位应力取最小值，且仅取决于局部体积分数和局部应力大小，而与应力类型或方向无关（参见（27））。对于我们的示例晶格，压缩应力对应的计算载荷因子始终小于拉伸应力对应的载荷因子（另见（Christensen 等，2022，图 3）对此观察结果的验证），因此在存在拉伸应力的区域，该模型总会低估屈曲载荷因子。这会导致这些位置的晶格体积分数高于防止局部屈曲实际所需的值。由于晶格尺寸因此被过度增大，去均匀化设计中相应位置并未观察到微观屈曲，尽管最坏情况模型预测这些位置会发生微观屈曲。

与上一个示例一样，我们采用图中仿真设计所得到的“真实”宏观应力进行后验均匀化。26。图28显示，在压应力区域（B）中，预测误差相当小；但在拉伸应力区域（A）中，最坏情况模型明显低估了实际载荷因子。以标记区域 C 中的一个有限元为例，预测的屈曲载荷因子为 0。100，而均匀化值为 0。154。因此，该单元的实际屈曲强度比最坏情况模型预测的高出 50%。图29可以解释这一现象。在 $45°$处，受检单元中起作用的剪切应力所对应的载荷因子，比双轴应力所对应的载荷因子高出约 50%；而我们的最坏情况模型正是基于双轴应力建立的。这一解释也为最坏情况模型提供了简单的先验误差估计：如果已知应力类型，那么误差上限就是该特定应力类型曲线上最大载荷因子与双轴应力对应的载荷因子之差。

在最后这个示例中，我们展示了一种均匀设计，其非均匀微观屈曲载荷因子。在同时优化宏观和微观屈曲时（参见第 5 节中的问题 C），由于结构的宏观屈曲载荷因子相对较高，只有微观约束处于激活状态。仅针对微观屈曲进行优化（问题 B），会得到非均匀晶格，其微观屈曲载荷因子均匀。对于这一优化设计，在存在剪切应力的区域中，预测的最坏情况与事后屈曲载荷因子之间也出现了类似的偏差。

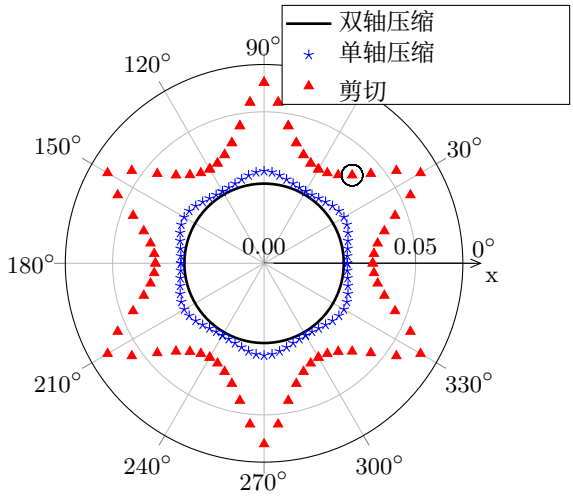


**图 29** 对于具有 3x3 个单胞重复数且相对体积为 30% 的代表性体积单元，其均匀化屈曲载荷因子（参见图 11）。在我们示例的区域 C（图 26）中，剪切应力以 45° 的角度作用。该应力状态下的屈曲载荷因子（以圆圈标记）比双轴压应力下的屈曲载荷因子大约高 50%。

我们回顾一下，我们的最坏情况模型可作为防止纯微观屈曲的保护措施。对微观屈曲载荷因子的低估可能过于严重，从而导致晶格杆件尺寸过大。可通过采用其他插值模型（例如，在三维参数空间（ $C^1$、$\rho$、$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$）$|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\in S^2}$中进行 -插值）替代最坏情况方法来解决这一问题。不过，这会增加最坏情况模型的计算开销；此外，正如第 1 节 4.1 中的注释 1 所述，如果将所提方法用于三维结构，由于参数空间的维数会更高，就需要复杂的插值方案。

# 8 结论

我们提出了一种采用渐近均匀化方法、同时考虑两个尺度上屈曲的晶格结构双尺度优化方法。基于对所选晶格结构的参数化，我们获得了均匀化弹性性质和屈曲性质。我们针对均匀化屈曲载荷因子构建了一个最坏情况模型（第4.1节）。弹性特征和屈曲特征分别通过独立的连续可微插值模型进行尺度上推。我们给出了优化的数值算例，分别仅考虑宏观屈曲或微观屈曲，以及同时优化两者。

我们证明了，用于获得均匀化属性的方法等价于 Floquet-Bloch 理论中对布里渊区的一种特殊离散化。我们表明，圆角处理会对晶格的屈曲强度产生显著影响，因为它能够避免应力集中。

我们将最坏情况模型预测的优化设计性能与其去均匀化对应结果进行了比较。柔顺度和宏观屈曲的预测效果很好；预测的微观屈曲载荷因子则较为保守。我们解释了可能出现低估的原因，以及如何通过用整个参数空间内的插值取代最坏情况模型来避免这种情况。后验均匀化结果与去均匀化结果相当吻合。这表明，均匀化是对晶格结构屈曲行为进行尺度拓展的可行工具。

尽管本文仅讨论二维情形，但将其扩展到三维十分直接。未来的研究可以探讨在优化问题中结合晶格、实体和空隙设计，同时考虑制造约束。

**致谢**。 本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）资助——项目编号 61375930——SFB 814“增材制造”TP C02。

# 声明

利益冲突 代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

结果复现 本文所述方法的数值实现基于开源有限元软件包，并对其进行了扩展*openCFS* (促进软件 openCFS 的协会¨促进软件 openCFS）。本文所示的数值算例可按照一般的*openCFS* 说明进行复现。其测试套件中提供了有关如何进行均匀化和屈曲分析的示例。有限元网格由*Coreform Cubit 2022.4* (CoreformLLC）生成。用于后处理的其他脚本以及

均匀化数据可向作者索取。

## 参考文献


Allaire G, FrancfortG（1993）一种用于拓扑和形状优化的数值算法。载于：《结构拓扑设计》。施普林格，第 239–248 页

Allaire G, Kohn RV（1993）二维空间中两相复合材料弹性能的显式最优界。《应用数学季刊》51(4)：675–699

Allaire G, Bonnetier E, Francfort G, 等（1997）通过均匀化方法进行形状优化。《数值数学》76(1)：27–68。https://doi.org/10.1007/s002110050253

Andersen MN, Wang F, Sigmund O（2021）关于争夺极高刚度和强度结构化材料的竞争。《Materials & Design》198：109,356。https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109356

Andersen MN, Wang Y, Wang F, 等（2022）任意载荷下结构化材料的屈曲和屈服强度估算。《国际固体与结构杂志》，第 111842 页。https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111842

BehrouR, LotfiR, CarstensenJV,等.(2021) 重新探讨基于密度的结构拓扑优化中的单元移除，并通过海维赛德投影重新引入单元。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 380:113,799. https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113799

Bendsøe MP, Kikuchi N (1988年) 运用均匀化方法生成结构设计中的最优拓扑。《计算方法与应用力学和工程》71(2):197–224。https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2

Bendsøe MP, Sigmund O (2003) 拓扑优化：理论、方法与应用。施普林格科学与商业媒体，柏林、海德堡、纽约

Birkhoff G、Schultz MH、Varga RS（1968）用于一个和两个变量的分段 Hermite 插值及其在偏微分方程中的应用。《数值数学》11(3)：232–256。Bluhm GL、Sigmund O、Wang F 等（2020）有限体积分数下二维超弹性晶格的非线性压缩稳定性。《固体力学与物理学杂志》137：103,851。Borrvall T、Petersson J（2001）采用正则化中间密度控制的拓扑优化。《计算机辅助应用力学与工程》190(37-38)：4911–4928。
h
t
t
p
s://
doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00356-XBruyneel M、Colson B、Remouchamps A（2008）关于屈曲优化中若干收敛问题的讨论。《结构与多学科优化》35(2)：181–186。
h
t
tps://doi.org/10.1007/s00158-007-0129-zChristensen CF、Wang F、Sigmund O（2022）考虑局部和整体屈曲响应的多尺度拓扑优化。arXiv 预印本 arXiv:221011477。Clausen A、Aage N、Sig mund O（2016）利用增材制造填充结构进行拓扑优化，以提高屈曲载荷。《工程》2(2)：250–257。https://doi.org/10.1016/J.ENG.2016.02.006¨Clausen T（1851）关于建筑柱的形状¨。圣彼得堡物理数学科学院公报´9：369–380。Coreform LLC，犹他州奥勒姆。Coreform Cubit。
h
t
t
ps://c
oreform.com/products/coreform-cubit/Dalklint A、Wallin M、Tortorelli DA（2020）有限应变超弹性结构的特征频率约束拓扑优化。《结构与多学科优化》61(6)：2577–2594。https://doi.org/10.1007/s00158-020-02557-9
Dunning PD、Ovtchinnikov E、Scott J 等（2016）使用高效且稳健的特征值求解器处理多个线性屈曲约束的水平集拓扑优化。《国际

数值方法工程期刊》107(12)：1029–1053。
https://doi.org/10.1002/nme.5203

Ferrari F, Sigmund O（2019）重新探讨带屈曲约束的拓扑优化。《结构与多学科优化》59(5)：1401–1415。
https://doi.org/10.1007/s00158-019-02253-3

Ferrari F, Sigmund O（2020）以线性分析的成本求解大规模带屈曲约束的拓扑优化问题。《计算机辅助应用力学与工程》363：112,911。
https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112911

Ferrer A、Geoffroy-Donders P、Allaire G（2021）晶格结构的应力最小化。第一部分：微结构设计。《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑》379(2201)：20200,109。
https://doi.org/10.1098/rsta.2020.0109

Gao X, Ma H (2015) 屈曲约束下连续结构的拓扑优化。《计算机与结构》157:142– 152.
h
ttps://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.020

Giele R, Groen J, Aage N, 等 (2021) 关于避免变厚度薄板及基于均匀化的拓扑优化中出现低刚度区域的方法。《结构与多学科优化》64(1):39–52

Gill PE, Murray W, Saunders MA (2005) Snopt：一种用于大规模约束优化的序列二次规划算法。
SIAMreview 47(1):99–131.
https://doi.org/10.1137/S0036144504446096

Huang N, Sheu CY (1968) 薄壁截面弹性柱的最优设计。《应用力学杂志》35(2):285–288.https://doi.org/10.1115/1.3601193

Keller JB (1960) 最强柱的形状。《理性力学与分析档案》5(1):275–285。
https://doi.org/10.1007/BF00252909

Khot N, Venkayya V, Berke L (1976) 带稳定性约束的最优结构设计。《国际数值方法与工程》10(5):1097–1114。
https://doi.org/10.1002/nme.1620100510Kreissel
meier G, Steinhauser R (1980) 通过优化向量性能指标进行系统化控制设计。载于：控制系统计算机辅助设计。爱思唯尔，页113–117

Larsen S, Sigmund O, Groen J（2018）基于投影均匀化的拓扑优化实现最优桁架与框架设计。《结构与多学科优化》57(4)：1461–1474

Lehoucq RB, Sorensen DC, Yang C（1998年）ARPACK 用户指南：采用隐式重启 Arnoldi 方法求解大规模特征值问题。SIAM，费城

Mavrotas G（2009）多目标数学规划问题中 $\varepsilon$-约束方法的有效实现。《应用数学与计算》213(2)：455–465。
https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.03.037

N˘emec I, Trcala M, ˘Sev˘c´ık I 等（2016）几何刚度矩阵计算的新公式。《应用数学与物理学杂志》4(4)：733–748。
https://doi.org/10.4236/jamp.2016.44084

Neves M, Rodrigues H, Guedes J (1995)结构屈曲载荷准则的广义拓扑设计。《结构优化》10(2):71–78。
https://doi.org/10.1007/BF01743533

Neves MM (2019)利用符号计算推导具有周期性微结构的固体的线弹性屈曲理论。《国际计算方法工程科学与力学杂志》20(6):523–539

Neves MM、Sigmund O、Bendsøe M（2002a）具有屈曲判据的周期性微结构拓扑优化。维也纳工业大学

Neves MM、Sigmund O、Bendsøe MP（2002b）通过惩罚高度局部化的屈曲模态，对周期性微结构进行拓扑优化。《工程数值方法期刊》54(6)：809–834。https://doi.org/10.1002/nme.449

Pedersen NL（2000）利用拓扑优化最大化特征值。Structural and multidisciplinary optimization20(1):2–11。https://doi.org/10.1007/s001580050130

Rahman O、Uddin KZ、Muthulingam J 等（2022）密度梯度胞元固体：力学、制造与应用。Advanced EngineeringMaterials 24(1):2100,646。https://doi.org/10.1002/adem.202100646

RodriguesHC、Guedes J、BendsøeMP（1995）基于非光滑特征值准则的结构最优设计的必要条件。《结构优化》9(1):52–56。https://doi.org/10.1007/BF01742645

Seyranian AP、Lund E、Olhoff N（1994）结构优化问题中的多重特征值。《结构优化》8(4):207–227。 https://doi.org/10.1007/BF01742705

Stolpe M, Svanberg K (2001) 一种用于最小柔顺度拓扑优化的替代插值方案。《结构与多学科优化》22(2):116–124. https://doi.org/10.1007/s001580100129

Tadjbakhsh I, Keller J (1962) 最强柱与特征值的等周不等式。Journal of Applied Mechanics 29(1):159–164.https://doi.org/10.1115/1.3636448

Thomsen CR, Wang F, Sigmund O (2018) 基于线性化分岔分析的二维周期材料屈曲强度拓扑优化。《计算机辅助应用力学与工程》339:115–136. https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.031

Valentin J, H¨ubner D, Stingl M 等（2020）基于稀疏网格上 B 样条的梯度型两尺度拓扑优化。SIAM Journal on Scientific Computing 42(4):B1092–B1114。https://doi.org/10.1137/19M128822X

支持协会¨软件 openCFS opencfs。https://opencfs.org/

Wang X, Zhu L, Sun L, et al. (2021) 满足屈服和屈曲约束的梯度圆角晶格结构优化。《材料与设计》206:109,746.https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109746

Wu J, Sigmund O, Groen JP (2021) 多尺度结构的拓扑优化：综述。《结构与多学科优化》63(3):1455–1480

Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2005) 有限元法：基础与基本原理。爱思唯尔，阿姆斯特丹等地。