arXiv:2303.08725v1 [cs.DM] 15 Mar 2023

在序列上诱导广义度量的矩阵

Eloi Araujo[a,*], F´abio V. Martinez[a], Carlos H. A. Higa[a], Jos´e Soares[b]

[a]计算机学院，南马托格罗索联邦大学，巴西[b]计算机科学系，数学与统计研究所˜，圣保罗大学，巴西

摘要

序列比较是捕捉两个或多个符号序列之间相似性与差异的一项基础任务，在计算生物学等领域有着无数应用。比对是比较序列的一种方式，其中给定的评分函数决定了它们之间的相似程度。许多评分函数由评分矩阵得到。然而，并非所有评分矩阵都会诱导出作为距离的评分函数，因为评分函数未必是度量。本文为评分矩阵在加权编辑距离中诱导出度量各项性质，建立了充要条件。对于一类诱导出归一化编辑距离的评分矩阵，我们还刻画了诱导出归一化编辑距离的各类评分矩阵。此外，我们定义了一种扩展编辑距离，它考虑一组编辑操作，这些操作可将一个序列转换为另一个序列，无论是否存在通常用于表示这些操作的对应比对，并给出一种准则，以找出权重最小的编辑操作序列。同样地，我们确定了针对度量各项性质诱导出扩展编辑距离的评分矩阵类别。

关键词：评分矩阵、评分函数、度量、比对

*通讯作者。电子邮箱：francisco.araujo@ufms.br (Eloi Araujo), fabio.martinez@ufms.br (F´abioV. Martinez), carlos.aguena@ufms.br (Carlos H.A. Higa), jose@ime.usp.br (Jos´eSoares)

提交至《离散应用数学》的预印本 *2023*年*3*月*16*日

1. 引言

序列比较是计算机科学中的一个经典问题，并应用于计算生物学、文本处理和模式识别等多个领域。评分函数用于衡量两个序列之间的相似程度，可以通过将一个序列转换为另一个序列的编辑操作来定义。典型的编辑操作包括插入、删除和符号替换。

一种用于比较给定的两个序列的简单评分函数 s 和 t 是莱文斯坦距离（Levenshtein，1965年），也称为编辑距离，其定义为将 s 转换为 t所需的最少编辑操作次数。由此可知，编辑距离是量化两个字符串差异的一种方法，因此被应用于许多可用字符串表示数据的场景。例如，在（Barton 等人，2015年）中，编辑距离被用于一项与基因组组装相关的应用。作者指出，在比对中加入对插入空位数量的限制所带来的灵活性，能够增强传统的基于评分矩阵的序列比对方案。

有几种值得一提的编辑距离变体。当 s 中的每个符号必须恰好编辑一次时，通常可以通过计算加权编辑距离来比较 s 和 t，也就是说，通过一系列加权编辑操作将 s 转换为 t 所需的最小权重。例如，拼写纠正系统就使用了这种距离（Chaurasiya 等人，2016年）。另一种函数是归一化编辑距离（Marzal 和 Vidal，1993年），它在计算两个字符串之间的距离时会考虑它们的长度。该函数的结果是将 s 转换为 t 所需的一组编辑操作的最小平均权重。归一化编辑距离的应用包括从街景图像中读取文本（Sun 等人，2019年）和软件验证。在后者中，系统的运行过程用词语表示；通常会分析满足给定规范的词语集合与被检验系统生成的词语集合之间的关系（Fisman 等人，2022年）。Yujian 和 Bo（2007年）提出的广义编辑距离是一种度量，是字符串长度的简单函数；它曾应用于一项手写数字识别研究，结果表明，它通常能得出与其他一些归一化编辑距离相似的结果。另一种变体是上下文归一化编辑距离，其中每项编辑操作的代价都除以该操作所作用的字符串长度。

它由de la Higuera 和 Mic´o (2008年）提出，他们指出，这种变体适用于分类。

考虑加权编辑距离，任何将 s 转换为 t的编辑操作集合，只要满足 s 中的每个符号必须且只能编辑一次，就可以用比对表示。请看以下比对：

$$\begin{bmatrix} \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{-} & \mathtt{a} & \mathtt{-} \\ \mathtt{a} & \mathtt{-} & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{a} \end{bmatrix}.$$

它表示将 $s = \mathtt{aaba}$ 转换为 $t = \mathtt{aabba}$ 的过程：将第一个和第三个符号替换为 a，将最后一个符号替换为 b，删除第二个符号，并在 s中最后一个符号之前和之后分别插入一个 b 和一个 a 。比对一直是比较两个或多个序列的标准方法，在计算生物学中有着 myriad 种应用（Needleman 和 Wunsch，1970年；Smith 和 Waterman，1981年；Lipman 和 Pearson，1985年；Altschul 等，1990年；Lipman 等，1989年；Chenna 等，2003年；Notredame 等，2000年；Karplus 等，1998年；Araujo 等，2021年）。

设 Σ 为一个字母表，$\Sigma\text{-} = \Sigma \cup \{\text{-}\}$，其中 - 是一个不属于 Σ 的符号，表示插入和删除操作。评分矩阵 γ针对 Σ，其行和列以 Σ- 的元素为索引，并表示加权编辑操作。我们将 γ 中第 a 行、第 b 列的元素记为 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$。若 $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$ 是将符号 a 替换为 b 的权重，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$ 是删除符号 a 的权重，$\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$ 是插入符号 b 的权重，而 $\gamma_{\text{-}\to\text{-}}$ 未定义。请注意，当对于每一对符号 a 和 b，$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 0$ 对 $\mathtt{a} = \mathtt{b}$ 成立且在其他情况下为 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 1$ 时，莱文斯坦距离就是一种加权编辑距离。

将 Σ^* 记为 上所有有限序列构成的集合。评分矩阵可以诱导出许多基于编辑操作的不同评分函数。Pearson(2013) 介绍了如何选择具有实际意义的评分矩阵，以便在生物信息学中估算距离和相似度。

对于矩阵 γ，有 opt$_\gamma$：$\Sigma^* \times \Sigma^* \to \mathbb{R}$ 表示由 γ 诱导的一般评分函数，使得 opt$_\gamma$(s, t) 是将序列 s 转换为序列 t 的编辑操作的最小得分。如果 opt$_\gamma$ 满足自反性、非负性、正性、对称性和三角不等式公理，则评分函数 opt$_\gamma$ 是序列上的度量；我们称 γ诱导了序列上的 opt$_\gamma$-度量。如果 opt$_\gamma$ 满足性质 p，则称 γ 诱导了序列上的 opt$_\gamma$-p 。

序列 s 和 t之间的加权编辑距离记为 b y

optAγ。请注意，并非所有评分矩阵都能导出距离意义上的评分函数，因为评分函数不一定是度量。 Sell-ers(1974年) 给出了加权编辑距离成为度量的充分条件 Σ^*，即，证明了评分矩阵 γ 导出一个γ-序列上的度量。Araujo 和 Soares (2006) 给出了评分矩阵 γ 导出作为度量的加权编辑距离的充要条件 Σ^*。例如，评分矩阵

γ	a	b	c	-
a	0	1	3	1
b	1	0	1	1
c	4	1	0	1
-	1	1	1	-

诱导加权编辑距离，尽管 $\gamma_{a\to c} \neq \gamma_{c\to a}$、 $\gamma_{a\to c} \not\leq \gamma_{a\to -} + \gamma_{-\to c}$，以及 $\gamma_{c\to a} \not\leq \gamma_{c\to -} + \gamma_{-\to a}$。此外，通过放宽定义度量空间的公理，可以用许多方式推广度量的概念，从而产生不同的广义度量空间，例如拟度量、半度量等。在本文中，我们扩展了 Araujo 和 Soares (2006) 的研究，建立了评分矩阵 γ 诱导 optAγ-p 的必要充分条件，适用于序列上的度量的每条 p 公理。

Marzal 和 Vidal（1993）提出了另一种基于编辑操作并由评分矩阵 γ 诱导的评分函数，称为归一化编辑距离，记作 optNγ。给定序列 s 和 t，若认为 s 中的每个符号都必须恰好编辑一次，则 optNγ(s, t) 是将 s 转换为 t所需的一组编辑操作的最小平均权重。同样，并非所有评分矩阵 γ 都能诱导 optNγ-度量，而 Araujo 和 Soares（2006）刻画了诱导归一化编辑距离的评分矩阵类别。在本文中，我们还刻画了对于某些广义度量空间 p，在序列上诱导 optNγ-p 的各类评分矩阵。最近，Fisman 等人（2022）证明，当所有编辑操作的代价相同时，(Marzal 和 Vidal，1993) 提出的归一化编辑距离是一种度量。鉴于上述研究成果，我们强调，本文的内容更为一般，因为它涵盖了 Fisman 等人（2022）所研究的情形。

除了上述贡献之外，我们还定义了第三种基于评分矩阵 γ所诱导的编辑操作的评分函数，称为扩展编辑距离，记作 optEγ。此评分函数考虑了一组将一个序列 s 转换为

另一个序列 t的编辑操作，且不限制对 s中的每个符号执行编辑操作的次数；即，可以对 s 中的一个符号进行任意多次编辑。对于度量的每条公理 p，我们刻画了诱导 optEγ-p 的各类评分矩阵。

综上，本文的主要贡献如下：

- 我们扩展了Araujo和Soares（2006年的研究，建立了评分矩阵诱导 γ optAγ-p 序列上的度量的每条公理 p 所需的充要条件；
- 我们刻画了诱导某些广义度量空间 p中序列上的optNγ-p 的各类评分矩阵；并且
- 我们定义了一种基于评分矩阵 γ诱导的编辑操作的评分函数，称为扩展编辑距离，记作optEγ；并刻画了诱导度量每条公理 p 的optEγ-p 的各类评分矩阵。

本文结构安排如下。第2 节简要介绍基本概念，并刻画能够使目标评分函数——加权编辑距离、归一化编辑距离和扩展编辑距离——具有度量性质的矩阵类别。第3、4和5节给出这些距离的主要结果。第6 节作总结。

2. 预备知识

2.1. 序列、比对与评分函数

字母表是由符号构成的有限非空集合。字母表 Σ 上的序列是由 Σ中的符号组成的有限有序列表，Σ 上所有序列的集合记作 Σ^*。序列 $s \in \Sigma^*$ 记作$s = s(1)s(2)\cdots s(n)$，其中 $s(i) \in \Sigma$是 s的第 i个符号，$n = |s|$是 s的长度。我们用 ε 表示不含任何符号的序列，也称为空序列。如果 s 和 t 是 Σ上的序列，那么 st 是一个表示 s 与 t连接的序列。 s 的 n 个副本连接而成的序列长度为 $n|s|$，记作 s^n。

设 Σ- $= \Sigma \cup \{$-$\}$，其中 - $\notin \Sigma$。符号 - 是一个空格，表示插入或删除。序列 $s, t \in \Sigma^*$ 的比对是由序列 $[s', t']$ 构成的有序对，这两条序列通过在 s 和 t 中插入空格得到，满足 $|s'| = |t'|$，并且不存在 j 使得 $s'(j) = t'(j) =$ -。比对可以看作一个

编辑操作序列：当 s中的每个符号都必须恰好编辑一次时，该序列将 s 转换为 t 。我们称符号对 $[s'(j)\ t'(j)]$在 $[s', t']$的第 j 列中对齐。我们还称 $|[s', t']| = |s'| = |t'|$为比对 $[s', t']$的长度。我们用 $\mathcal{A}_{s,t}$表示 s, t的所有比对构成的集合。比对 $[s', t']$ 可以通过将 s' 置于 t' 上方来表示，如下所示

$$\begin{bmatrix} \texttt{a} & \texttt{c} & \texttt{-} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{-} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{-} \\ \texttt{c} & \texttt{-} & \texttt{a} & \texttt{-} & \texttt{a} & \texttt{c} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{c} & \texttt{b} \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{a} & \texttt{c} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{b} \\ \texttt{c} & \texttt{a} & \texttt{a} & \texttt{c} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{-} & \texttt{-} \end{bmatrix}$$

其中表示了序列 accbbbb、 caaccb 的两种不同比对：左侧的比对为 [ac-cb-bbb- c-a-ac--cb] ，右侧的比对为[----accbbbb、 caaccb-----] 。

给定一个评分矩阵 γ，我们为每个比对 $[s', t']$定义函数 $v\mathrm{A}_\gamma$ 和 $v\mathrm{N}_\gamma$ ：若 $s = t = \varepsilon$，则 $v\mathrm{A}_\gamma[s', t'] = v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] = 0$；否则，

$$v\mathrm{A}_\gamma[s', t'] = \sum_{j=1}^{|[s',t']|} \gamma_{s'(j)\to t'(j)} \quad \text{and} \quad v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] = \frac{\sum_{j=1}^{|[s',t']|} \gamma_{s'(j)\to t'(j)}}{|[s', t']|}\,.$$

我们称 $v\mathrm{A}_\gamma[A]$ 为比对 A的得分，称 $v\mathrm{N}_\gamma[A]$ 为其归一化得分。

序列 s、 t 的扩展比对表示为 $[c_1, \ldots, c_n]$，其中每个 c_j 都是一个有限序列，包含 $m_j > 0$ 个符号，属于 Σ-；至少有一个符号不同于“-”，并且没有两个连续符号等于“-”；且$[c_1(1)\ \ldots c_n(1)\ c_1(m_1)\ \ldots c_n(m_n)]$ 是 s、 t的一个比对。为简便起见，在上下文明确时，我们用“比对”代替“扩展比对”。我们称 c_j为第 j个列，称 $n = |[c_1, \ldots, c_n]|$ 为比对 $[c_1, \ldots, c_n]$的长度。

因此，每个序列 c_j 都用一列表示，并从上到下书写。例如， $A = [\texttt{a}, \texttt{abcd}, \texttt{b-}, \texttt{-d}, \texttt{ca}, \texttt{-dabc}, \texttt{-abc}, \texttt{dab}]$是 aabcd， addaccb 的一个扩展比对，可以表示为

$$A = \begin{bmatrix} & \texttt{a} & & & & & \texttt{-} & \texttt{-} & \\ & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{-} & \texttt{c} & & \texttt{d} & & \texttt{d} \\ \texttt{a} & \texttt{c} & \texttt{-} & \texttt{d} & \texttt{a} & & \texttt{a} & \texttt{a} & \\ & \texttt{d} & & & & & \texttt{b} & \texttt{b} & \texttt{a} \\ & & & & & & \texttt{c} & & \texttt{b} \end{bmatrix}.$$

注意，由于 $[c_1(1)\ \ldots c_n(1)\ c_1(m_1)\ \ldots c_n(m_n)]$ 是 s, t 的一个比对，因此对于每个 j，我们都有 $c_j(1) \neq \texttt{-}$ 或 $c_j(m_j) \neq \texttt{-}$。

c_j 的权重 由 $v\mathrm{E}_\gamma[c_j] = \sum_{i=1}^{m_j-1} \gamma_{c_j(i)\to c_j(i+1)}$ 给出，而扩展比对 $A = [c_1, \ldots, c_n]$ 的得分为

$$v\mathrm{E}_\gamma[A] = \sum_j v\mathrm{E}_\gamma[c_j]\,.$$

考虑上述比对 $A = [\mathtt{a}, \mathtt{abcd}, \mathtt{b\text{-}}, \mathtt{\text{-}d}, \mathtt{ca}, \mathtt{\text{-}dabc}, \mathtt{\text{-}abc}, \mathtt{dab}]$，并且若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 0$，当 $\mathtt{a} = \mathtt{b}$ 时；若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 1$，当 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$ 时，其得分为

$$\begin{aligned} v\mathrm{E}_\gamma[A] &= \sum_j v\mathrm{E}_\gamma[c_j] \\ &= v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{a}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{abcd}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{b\text{-}}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{\text{-}d}] + \\ &\quad v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{ca}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{\text{-}dabc}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{\text{-}abc}] + v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{dab}] \\ &= (0) + (1+1+1) + (1) + (1) + \\ &\quad (1) + (1+1+1+1) + (1+1+1) + (1+1) = 15\,. \end{aligned}$$

我们用 $\mathcal{E}_{s,\,t}$ 表示 s，t 的所有扩展比对构成的集合。

我们还定义函数 optAγ，optNγ 和 optEγ 如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{optA}_\gamma(s,t) &= \min_{A\in\mathcal{A}_{s,t}} v\mathrm{A}_\gamma[A]\,, \\ \mathrm{optN}_\gamma(s,t) &= \min_{A\in\mathcal{A}_{s,t}} v\mathrm{N}_\gamma[A]\,, \\ \mathrm{optE}_\gamma(s,t) &= \min_{A\in\mathcal{E}_{s,t}} v\mathrm{E}_\gamma[A]\,. \end{aligned}$$

如果 A 是一个比对，且 $v\mathrm{A}_\gamma[A] = \mathrm{optA}\gamma(s,\ t)$ 或 $v\mathrm{N}_\gamma[A] = \mathrm{optN}\gamma(s,\ t)$，我们就分别称 A 为 γ 的 *A*-最优 或 *N*-最优 比对。类似地，如果 A 是一个扩展比对，且 $v\mathrm{E}_\gamma[A] = \mathrm{optE}\gamma(s,\ t)$，我们就称 A 为 γ 的 *E*-最优 比对。

2.2. 评分矩阵的加权有向图

我们可以将评分矩阵表示为加权有向图。因此，评分矩阵 γ 对应的加权有向图为

$$D(\gamma) = (\Sigma_{\text{-}}, (\Sigma_{\text{-}} \times \Sigma_{\text{-}}) \setminus \{(\text{-},\text{-})\}, \gamma)\,,$$

其中弧 $\mathtt{a}\to\mathtt{b}$ 的权重为 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$。从顶点 $\mathtt{a}_0$ 到 $\mathtt{a}_n$ 的 $D(\gamma)$ 中的一条游走 是一个序列 $W = \mathtt{a}_0,\ \mathtt{a}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathtt{a}_n, \mathtt{a}_i \in \Sigma_{\text{-}}$，满足 $\mathtt{a}_i = \text{-}$ 蕴含 $\mathtt{a}_{i-1} \neq \text{-}$，其中

对每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 均成立，其权重为 $w(W) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{\mathtt{a}_{i-1} \to \mathtt{a}_i}$。若游走 W 满足 $\mathtt{a}_0 = \mathtt{a}_n$，则也称其为圈，此时我们可以假设 $\mathtt{a}_0 = \mathtt{a}_n \neq$ -。若 $w(W)$ 是从 $\mathtt{a}_0$ 到 $\mathtt{a}_n$的任意游走的最小权重，则称 W 是从 $\mathtt{a}_0$ 到 $\mathtt{a}_n$的一条最优游走。从 $\mathtt{a}_0$ 到 $\mathtt{a}_n$的最优游走的权重记为 $d_\gamma(\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_n)$；当上下文中 γ明确时，也简记为 $d(\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_n)$。

2.3. 度量函数的性质

对于给定的集合 S，如果函数 $f\colon S \times S \to \mathbb{R}$ 满足以下性质，则称其为 S上的度量：对每个 $x, y, z \in S$:

(i) $f(x, x) = 0$*(*自反性*)*, *(ii)* $f(x, y) \geq 0$*(*非负性*)*, *(iii)* $f(x, y) > 0$ 当且仅当 $x \neq y$*(*正性*)*, *(iv)* $f(x, y) = f(y, x)$ *(*对称性*)*, 以及 *(v)* $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$ *(*三角不等式*)*。

注意，(ii)是(i)和(iii)的直接推论。此外，当上下文已明确集合 S 时，我们只需称 f 为度量。

为了得到比度量更一般的函数，我们可以放宽上述性质。例如，对于给定的集合 S，如果 f 满足 前度量 的条件，即 $f(x, x) = 0$且 $f(x, y) \geq 0$对每个 $x, y \in S$(Arkhangel'skiĭ 和 Pontryagin, 1990)。

下表展示了以下函数的性质：预度量（Pr）、半度量（S）（Wilson, 1931年b）、半度量或伪拟度量（H）（Kim, 1968年）、伪度量（P）（Steen 和 Seebach, 1978年）、拟度量（Q）（Wilson, 1931年a）以及度量（M）（Steen 和 Seebach, 1978年）。图1展示了这些函数之间的关系。

性质 \ 函数	$\mathcal{P}r$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{M}$
$f(x, x) = 0,\ f(x, y) \geq 0$	yes	yes	yes	yes	yes	yes
$f(x, y) > 0$ 对于 $x \neq y$		yes			yes	yes
$f(x, y) = f(y, x)$		yes		yes		yes
$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$			yes	yes	yes	yes

如果函数 optAγ、optNγ 或 optEγ 具有性质 p，我们就说评分矩阵 γ 在序列上诱导optAγ-p、optNγ-p或optEγ-p 度量。

评分矩阵的一类标准类型是 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}}$，它具有以下性质。对于 a, b, c, $\in \Sigma$-,

(i) $\gamma_{\mathtt{a} \to \mathtt{b}} > 0$ if $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$, and $\gamma_{\mathtt{a} \to \mathtt{b}} = 0$ if $\mathtt{a} = \mathtt{b}$,

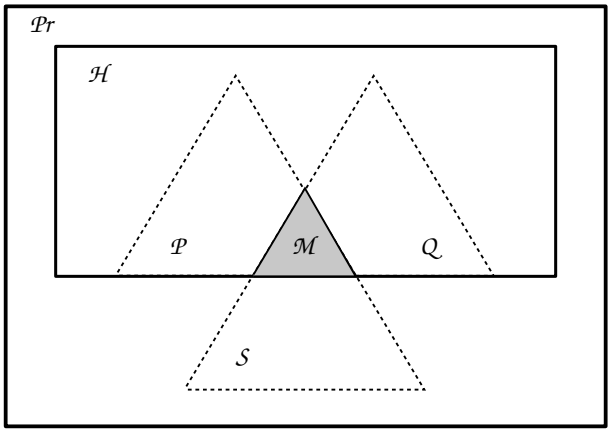


图1：函数之间的关系。阴影区域表示度量函数的集合，即所有集合的交集。

(*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，以及 (*iii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}$。

Sellers (1974年) 表明，$\mathbb{M}^{\mathrm{C}}$ 中的评分矩阵可诱导出序列上的 optAγ-度量。评分矩阵 $\mathbb{M}^{\mathrm{A}}$ 这一类矩阵满足：对于每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b}$，$\mathtt{c} \in \Sigma$,

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$，(*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ 若 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$, 且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 0$ 若 $\mathtt{a} = \mathtt{b}$，(*iii*) 若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，(*iv*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$, 以及 (*v*) $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，

并证明这些矩阵恰好包含所有能在序列上诱导 optAγ-度量的矩阵。此外，Marzal 和 Vidal (1993年) 提到，并非 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}}$ 中的每个矩阵都能在序列上诱导 optNγ-度量。例如，他们证明矩阵

γ	a	b	-
a	0	5	5
b	5	0	1
-	5	1	

属于 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}}$，但不满足 optN$_\gamma$-三角不等式，因为

$$\begin{aligned}\mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) &= \min\left\{v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix}\mathtt{a} & \mathtt{-}\\ \mathtt{-} & \mathtt{b}\end{bmatrix}, v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix}\mathtt{-} & \mathtt{a}\\ \mathtt{b} & \mathtt{-}\end{bmatrix}, v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix}\mathtt{a}\\ \mathtt{b}\end{bmatrix}\right\} = 3 = \frac{18}{6}\\ &> \frac{17}{6} = \frac{1}{2}+\frac{7}{3} = v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix}\mathtt{a} & \mathtt{-}\\ \mathtt{a} & \mathtt{b}\end{bmatrix} + v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix}\mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{-}\\ \mathtt{-} & \mathtt{-} & \mathtt{b}\end{bmatrix}\\ &\geq \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{ab}) + \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{ab},\mathtt{b})\,.\end{aligned}$$

Yujian 和 Bo (2007年) 指出，一个尚未解决的问题是评分矩阵 γ 是否诱导 optN$_\gamma$-度量。然而，我们证明， $\mathbb{M}^{\mathrm{N}}$ 中的矩阵γ会在序列上诱导 optN-度量。矩阵类 $\mathbb{M}^{\mathrm{N}}$ 满足以下条件

(*i*) $\mathbb{M}^{\mathrm{N}} \subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{A}}$，以及 (*ii*) 对每个 $\mathtt{a}$， $\mathtt{b} \in \Sigma$，$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} \leq 2\,\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}}$。

上述讨论表明 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}} \not\subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{N}}$，并且我们很容易验证评分矩阵 $\gamma_1 \in \mathbb{M}^{\mathrm{N}} \setminus \mathbb{M}^{\mathrm{C}}$ 和 $\gamma_2 \in \mathbb{M}^{\mathrm{N}} \cap \mathbb{M}^{\mathrm{C}}$，其中

γ_1	a	b	-
a	0	4	1
b	3	0	1
-	1	1	

and

γ_2	a	b	-
a	0	1	1
b	1	0	1
-	1	1	

这意味着 $\mathbb{M}^{\mathrm{N}} \not\subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{C}}$ 和 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}} \cap \mathbb{M}^{\mathrm{N}} \neq \emptyset$。

我们研究的第三类评分矩阵 γ 是 $\mathbb{M}^{\mathrm{E}}$:

(*i*) 对每个 $\mathtt{a} \in \Sigma$， $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$；(*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$， $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}}$ $\gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} > 0$ 对每个 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$, $\mathtt{a}$， $\mathtt{b} \in \Sigma$；以及 (*iii*) 对每个 $\mathtt{a}$, $\mathtt{b} \in \Sigma$, $d_\gamma(\mathtt{a},\ \mathtt{b}) = d_\gamma(\mathtt{b},\ \mathtt{a})$。

事实1. $\mathbb{M}^{\mathrm{A}} \subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{E}}$.

证明。设 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{A}}$。由此可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} = \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} > 0$, $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ 若 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$,$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$, $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$ 若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} + \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{b}}$, $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}}$，且对于 $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c} \in \Sigma$, $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} + \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$。

由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$, $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} = \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} > 0$，且若 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$，我们有 γ满足 $\mathbb{M}^{\mathrm{E}}$ 的性质（i）和（ii）。

设 $W = u_0, u_1, \ldots, u_n$ 是从 $\mathtt{a} = u_0$ 到 $\mathtt{b} = u_n$、位于$D(\gamma)$ 中的一条最优游走，且 $W_i = u_{i-1}, u_i$。对于每个$i = 1, \ldots, n$，我们根据以下情形构造一条从 u_i 到 u_{i-1} 的游走 W_i。

情形1： $u_{i-1} = \text{-}$ 或 $u_i = \text{-}$。令 $\overline{W}_i = u_i, \underline{u_{i-1}}$。由于 $\gamma_{u_i \to \text{-}} = \gamma_{\text{-} \to u_i}$ 且 $\gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} = \gamma_{\text{-} \to u_{i-1}}$，因此 $w(W_i) = \gamma_{u_i \to u_{i-1}} = \gamma_{u_{i-1} \to u_i} = w(W_i)$；

情形2： $u_{i-1} \neq$、$u_i \neq$和 $\gamma_{u_{i-1} \to u_i} < \gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} + \gamma_{\text{-} \to u_i}$。令 $\underline{W_i} = \overline{u}_i, u_{i-1}$。由于 $\gamma_{u_{i-1} \to u_i} < \gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} + \gamma_{\text{-} \to u_i}$，因此 $w(W_i) = \gamma_{u_i \to u_{i-1}} = \gamma_{u_{i-1} \to u_i} = w(W_i)$；

情形3： $u_{i-1} \neq$、$u_i \neq$和 $\gamma_{u_{i-1} \to u_i} = \gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} + \gamma_{\text{-} \to u_i}$。令 $W_i = u_i, \overline{\text{-}\, u}_{i-1}$。由于 $\gamma_{u_i \to \text{-}} = \gamma_{\text{-} \to u_i}$ 且 $\gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} = \gamma_{\text{-} \to u_{i-1}}$，因此 $w(W_i) = \gamma_{u_i \to \text{-}} + \gamma_{\text{-} \to u_{i-1}} = \gamma_{u_{i-1} \to \text{-}} + \gamma(\overline{\quad} \to u_i = \gamma_{u_{i-1} \to u_i} = w)$。

令 $\overline{W}$ 为由连接 W_n，W_{n-1}，$\ldots$，W_1 形成的游走。由上述观察可知

$$\begin{aligned} d(u_0, u_n) = w(W) &= \sum_{i=1}^{n} w(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w(\overline{W}_i) = w(\overline{W}) \geq d(u_n, u_0)\,. \end{aligned}$$

运用类似的推理，我们有 $d(u_n, u_0) \geq d(u_0, u_n)$。因此 $d(u_n, u_0) = d(u_0, u_n)$，这意味着 γ 满足 $\mathbb{M}^{\mathrm{E}}$ 的性质（iii）。

由于 γ 满足性质（i）、（ii）和（iii），因此有 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{C}}$。 □

根据定义和事实1 可知，$\mathbb{M}^{\mathrm{C}} \subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{A}} \subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{E}}$，$\mathbb{M}^{\mathrm{N}} \subseteq \mathbb{M}^{\mathrm{A}}$，$\mathbb{M}^{\mathrm{C}} \nsubseteq \mathbb{M}^{\mathrm{N}}$，$\mathbb{M}^{\mathrm{N}} \nsubseteq \mathbb{M}^{\mathrm{C}}$，以及 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}} \cap \mathbb{M}^{\mathrm{N}} \neq \emptyset$。参见图2。

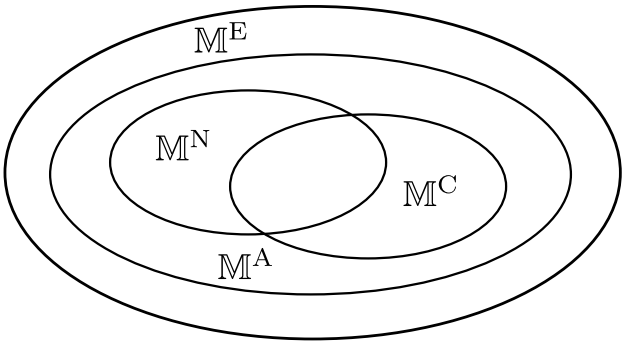


图2：类 $\mathbb{M}^{\mathrm{E}}$、$\mathbb{M}^{\mathrm{A}}$、$\mathbb{M}^{\mathrm{N}}$ 和 $\mathbb{M}^{\mathrm{C}}$ 之间的关系。

3. 比对距离

本节中，我们将描述对于度量的每条公理γ-p ，在序列上诱导 optA 的评分矩阵类别。我们通过一系列结果来阐述这一点，例如引理4、5、6、7和9，这些结果汇总于表1，并使我们能够刻画诱导第 2 节所述各类更一般度量函数的矩阵。此外，基于此，我们以一项重要结果作为本节的结尾；该结果先前已在第2 节中陈述，并由下式给出：

定理 2. 设 Σ 是一个字母表， γ 是一个评分矩阵。那么，当且仅当以下条件成立时，optAγ是 Σ^* 上的度量：

$(i)\ \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$, $(ii)\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ 当 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$ 且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 0$ 当 $\mathtt{a} = \mathtt{b}$ 时，(iii) 若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，$(iv)\ \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$，并且 $(v)\ \min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，

对每个 $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} \in \Sigma$。

如以下内容所示，我们需要一系列辅助结果，最终在本节末尾证明这一定理。

事实 3. 设 γ 是一个评分矩阵。若 $D(\gamma)$ 含有负环，则存在 $s \in \Sigma^*$ 使得 optA$\gamma(s, s) < 0$。

证明。 假设 $D(\gamma)$ 有一个圈 $C = \mathtt{a}_0, \ldots\ldots, \mathtt{a}_m, \mathtt{a}_i \in \Sigma$-，使得 $\mathtt{a}_0 = \mathtt{a}_m \neq$ -，$\mathtt{a}_i \neq \mathtt{a}_j$ 对每个 $i,\ j > 0$ 均成立，并且 $w(C) = -X < 0$。令 n 为一个非负整数，使得 $n > (\gamma_{\mathtt{a}_1\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}_1})/X$ 且 $s = (\mathtt{a}_0\mathtt{a}_1 \ldots \mathtt{a}_m)^n\mathtt{a}_0$。因此，

$$\mathrm{optA}_\gamma(s, s) \leq v\mathrm{A}_\gamma\left[\begin{array}{cc} \text{-} & \left(\begin{array}{ccccc} \mathtt{a}_0 & \mathtt{a}_1 & \ldots & \mathtt{a}_{m-1} & \mathtt{a}_m \\ \mathtt{a}_1 & \mathtt{a}_2 & \ldots & \mathtt{a}_m & \mathtt{a}_0 \end{array}\right)^n & \mathtt{a}_0 \\ \mathtt{a}_0 & & & & \text{-} \end{array}\right] < 0\,.$$

□

注意，对于每个 $\mathtt{a} \in \Sigma$，我们都有 $v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a},\text{-}] = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$、$v\mathrm{A}_\gamma[\text{-}\ \mathtt{a}] = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$。除此之外， $\mathtt{a}, \varepsilon$ 和 $\varepsilon, \mathtt{a}$ 的唯一比对分别是 $[\mathtt{a},\text{-}]$ 和 $[\text{-}\ \mathtt{a}]$。因此，我们有

$$\mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a}, \varepsilon) = v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a}, \text{-}] = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\,, \tag{1}$$
$$\mathrm{optA}_\gamma(\varepsilon, \mathtt{a}) = v\mathrm{A}_\gamma[\text{-}, \mathtt{a}] = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\,. \tag{2}$$

现在，对于每个 $\mathtt{a},\mathtt{b}\in\Sigma$，由于

$$\mathcal{A}_{(\mathtt{a},\mathtt{b})}=\left\{\begin{bmatrix}\mathtt{a}\\ \mathtt{b}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathtt{a} & \mathtt{-}\\ \mathtt{-} & \mathtt{b}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathtt{-} & \mathtt{a}\\ \mathtt{b} & \mathtt{-}\end{bmatrix}\right\},$$

$v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a},\mathtt{b}]=\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$，且 $v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a}\text{-},\ \text{-}\mathtt{b}]=v\mathrm{A}_\gamma[\text{-}\mathtt{a},\ \mathtt{b}\text{-}]=\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，我们有 t

$$\mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b})=\min\begin{cases}v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a},\mathtt{b}]=\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}\,,\\ v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a}\text{-},\text{-}\mathtt{b}]=\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}\,.\end{cases}\tag{3}$$

引理4. optA$\gamma(s,\ s)=0$ 对每个 $s\in\Sigma^*$，当且仅当

(*i*) $D(\gamma)$ 没有负环，且 (*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}}=0$ 或 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}=0$，对每个 $\mathtt{a}\in\Sigma$。

证明。假设 optA$\gamma(s,\ s)=0$ 对每个 $s\in\Sigma^*$。由事实 3可知 (*i*) 成立；由方程 (3) 可知 (*ii*) 也成立。

反过来，假设 (*i*) 和 (*ii*) 成立。令 $s=s(1)\cdots s(n)\in\Sigma^*$，并令 A 为 $s,\ s$ 的 A-最优比对。我们根据比对 A 定义加权有向多重图 H，如下

$$\begin{aligned}V(H)&=\Sigma_{\text{-}}\,,\\ E(H)&=\{k:[\mathtt{a},\mathtt{b}]\text{ is aligned in }k\text{-th column of }A\}\,,\\ w(\mathtt{a},\mathtt{b})&=\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}\text{ for each arc in }H.\end{aligned}$$

根据构造，$v\mathrm{A}_\gamma[A]=w(H)$。注意，$H$ 中每个顶点的入度和出度相同，这意味着 H 是一个欧拉图，因此 E 可以分解为弧不相交的环。对于该分解中的每个环，在 $D(\gamma)$中都存在一个权重相同的环。由于根据假设，$D(\gamma)$ 没有负环，因此 $w(H)\geq 0$。

因此，

$$\mathrm{optA}_\gamma(s,s)=v\mathrm{A}_\gamma[A]=w(H)\geq 0\,.\tag{4}$$

此外，我们能够构造如下比对 B。若 $\gamma_{s(i)\to s(i)}=0$，则比对符号 $s(i)\ s(i)$；否则，比对 $s(i)$，- 和 - $s(i)$。由于（*ii*）成立，因此 $v\mathrm{A}_\gamma[B]=0$。因此，

$$\mathrm{optA}_\gamma(s,s)\leq v\mathrm{A}_\gamma[B]=0\,.\tag{5}$$

利用表达式（4）和（5），由于该论证适用于任意$s\in\Sigma^*$，我们得出 optA$\gamma(s,\ s)=0$ 对每个 $s\in\Sigma^*$均成立。 □

引理 5. 对每个 $s,\ t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optA}_\gamma(s,\ t) \geq 0$ 成立，当且仅当对每个 $\mathtt{a},\ \mathtt{b} \in \Sigma,\ \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$。

证明。对每个 $s,t \in \Sigma^*$，考虑 $\mathrm{optA}_\gamma(s,t) \geq 0$。由等式 (1)、(2) 和 (3) 可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) \geq 0, \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} = \mathrm{optA}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{b}) \geq 0$，以及 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) \geq 0$。

反过来，对每个 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$，考虑 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$。令 A 为 s,t 的 A-最优比对。由于 γ 的若干项之和（按定义，这些项均非负）为 $v\mathrm{A}_\gamma[A]$，因此 $\mathrm{optA}_\gamma(s,t) = v\mathrm{A}_\gamma[A] \geq 0$。 □

引理 6. 对每个 $s \neq t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optA}_\gamma(s,t) > 0$ 当且仅当

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$，以及

(*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} > 0$，

对每个 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b} \in \Sigma$。

证明。首先考虑 $\mathrm{optA}_\gamma(s,\ t) > 0$ 对每个 $s \neq t \in \Sigma^*$成立。由于对于任意 $n \geq 0$，$[\mathtt{a}^{n+1}, \mathtt{a}^n\text{-}]$ 是 $(\mathtt{a}^{n+1},\ \mathtt{a}^n)$ 的一个比对，且根据假设，$\mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a}^{n+1},\ \mathtt{a}^n) > 0$，因此我们有

$$n\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} + \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = v\mathrm{A}_\gamma\begin{bmatrix} \mathtt{a}^n & \mathtt{a} \\ \mathtt{a}^n & \text{-} \end{bmatrix} \geq \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a}^{n+1}, \mathtt{a}^n) > 0\,.$$

由于上面的表达式对任意 n都成立，这意味着 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$。因此，(*i*) 成立。引理 5 证明的第一段中采用的类似论证表明，(*ii*) 也成立。

反过来，假设 (i) 和 (ii) 成立。令 $[s',t']$ 为 s、t、$s \neq t$ 的一个 A-最优比对。由于 $s \neq t$，存在 h 使得 $s'(h) \neq t'(h)$，由此根据 (ii) 可得 $\gamma_{s'(h)\to t'(h)} > 0$。根据 (i) 和 (ii)，对每个 $j \neq h$，$\gamma_{s'(j)\to t'(j)} \geq 0$ 成立，且根据假设，$\mathrm{optA}_\gamma(s,t) = v\mathrm{A}_\gamma[s',t']$。于是可得

$$\mathrm{optA}_\gamma(s,t) = v\mathrm{A}_\gamma[s',t'] = \gamma_{s'(h)\to t'(h)} + \sum_{j\neq h} \gamma_{s'(j)\to t'(j)} \geq \gamma_{s'(h)\to t'(h)} > 0\,.$$

□

引理 7. 对于每个 $s,\ t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optA}_\gamma(s,\ t) = \mathrm{optA}_\gamma(t,\ s)$ 当且仅当

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，并且 (*ii*) 若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，

对于每个 a， $\mathsf{b} \in \Sigma$。

证明。 注意，对于每个$\gamma(s,\ t)\ = \mathrm{optA}\gamma(t,\ s)$ 成立。由方程(1) 和 (2) 可得

$$\gamma_{\mathsf{a}\to\text{-}} = \mathrm{optA}_\gamma(\mathsf{a},\varepsilon) = \mathrm{optA}_\gamma(\varepsilon,\mathsf{a}) = \gamma_{\text{-}\to\mathsf{a}}\,.$$

因此，(i) 成立。

为了验证 (ii)，假设 $\gamma_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} < \gamma_{\mathsf{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathsf{b}}$。这意味着$v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{a},\mathsf{b}] = \gamma_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} < \gamma_{\mathsf{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathsf{b}} = v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{a}\text{-},\text{-}\mathsf{b}] = v\mathrm{A}_\gamma[\text{-}\mathsf{a},\mathsf{b}\text{-}]$. 因此，由 (3) 可得 $\mathrm{optA}\gamma(\mathsf{a},\mathsf{b})\ = v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{a},\mathsf{b}]$。此外，由于 $\mathrm{optA}\gamma(\mathsf{b},\mathsf{a})\ = \mathrm{optA}\gamma(\mathsf{a},\mathsf{b})$，且根据 (i)，$\gamma_{\mathsf{a}\to\text{-}}\ = \gamma_{\text{-}\to\mathsf{a}}$ 和 $\gamma_{\mathsf{b}\to\text{-}}\ = \gamma_{\text{-}\to\mathsf{b}}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{optA}_\gamma(\mathsf{b},\mathsf{a}) = \mathrm{optA}_\gamma(\mathsf{a},\mathsf{b}) = v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{a},\mathsf{b}] &= \gamma_{\mathsf{a}\to\mathsf{b}} \\ &< \gamma_{\mathsf{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathsf{b}} = \gamma_{\mathsf{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathsf{a}} = v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{b}\text{-},\text{-}\mathsf{a}] = v\mathrm{A}_\gamma[\text{-}\mathsf{b},\mathsf{a}\text{-}]\,,\end{aligned} \tag{6}$$

这意味着既不是 $[\mathsf{b}\text{-},\ \text{-}\mathsf{a}]$ 也不是 $[\text{-}\mathsf{b},\ \mathsf{a}\text{-}]$ 是 b，a 的 A-最优比对。由 (3) 可得

$$\mathrm{optA}_\gamma(\mathsf{b},\mathsf{a}) = v\mathrm{A}_\gamma[\mathsf{b},\mathsf{a}] = \gamma_{\mathsf{b}\to\mathsf{a}}\,. \tag{7}$$

由方程（6）和（7），可得（ii）也成立。

反过来，设（i）和（ii）成立，并假设 $[s',t']$ 是 s，t 的最大长度 A-最优比对。如果 $s'(h)$ 或 $t'(h)$ 为 -，则由（i）可得 $\gamma_{s'(h)\to t'(h)}\ = \gamma_{t'(h)\to s'(h)}$。若 $s'(h)\ \ t'(h)\ \in \Sigma$，则根据所选的比对 $[s',t']$，有

$$\begin{aligned}\gamma_{s'(h)\to t'(h)} + \sum_{j\neq h}\gamma_{s'(h)\to t'(h)} &= v\mathrm{A}_\gamma[s',t'] \\ &< v\mathrm{A}_\gamma\begin{bmatrix} s'(1\ldots j-1) & s'(j) & \text{-} & s'(j+1\ldots|(s',t')|) \\ t'(1\ldots j-1) & \text{-} & t'(j) & t'(j+1\ldots|(s',t')|)\end{bmatrix} \\ &= \gamma_{s'(h)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to t'(h)} + \sum_{j\neq h}\gamma_{s'(h)\to t'(h)}\,.\end{aligned}$$

由此可得 $\gamma_{s'(j)\to t'(j)}\ < \gamma_{s'(j)\to\text{-}}\ + \gamma_{\text{-}\to t'(j)}$，根据 (ii) 可推出$\gamma_{s'(i)\to t'(i)}\ = \gamma_{t'(i)\to s'(i)}$。因此，无论符号 $s'(i)$ 和 $t'(i)$ 为何，对于每个 i，都有$\gamma_{s'(i)\to t'(i)}\ = \gamma_{t'(i)\to s'(i)}$，这意味着 $v\mathrm{A}_\gamma[s',t'] = v\mathrm{A}_\gamma[t',s']$。由于 $[s',t']$ 是 s 的 A-最优比对，t 而 $[t',s']$ 是t的比对，s，因此

$$\mathrm{optA}_\gamma(s,t) = v\mathrm{A}_\gamma[s',t'] = v\mathrm{A}_\gamma[t',s'] \geq \mathrm{optA}_\gamma(t,s)\,.$$

使用相同的论证，我们可以证明 optAγ(t, s) $\geq$ optAγ(s, t)，由此可以得出 optAγ(s, t) $=$ optAγ(t, s)。 □

P命题 8. 设 γ 是一个评分矩阵， Q 是一个整数， s， t， $u \in \Sigma^*$。若

(i) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$， ($ii$) $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$， ($iii$) $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$， 且 ($iv$) $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \geq Q$，

对于每个 a， b， c $\in \Sigma$，那么，对于 s， t 的每个比对 A 以及 t， u 的每个比对 B，都存在 s， u 的一个比对 C 和一个整数 $k \geq 0$，使得

$$v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] \geq v\mathrm{A}_\gamma[C] + kQ\,, \quad |A| \leq |C| + k\,, \quad \text{and} \quad |B| \leq |C| + k\,.$$

证明。假设 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 均成立。设 A， B 分别是 s， t 和 t， u 的比对。定义

$\mathcal{C}_1 = \{h :$ [s(h), -] 在 $A\}$ 中比对，$\mathcal{C}_2 = \{k :$ [- u(k)] 在 $B\}$ 中比对，$\mathcal{C}_3 = \{j :$ [- t(j)] 在 A 中比对，且 [t(j), -] 在 $B\}$ 中比对，$\mathcal{C}_4 = \{(h, j) :$ [s(h) t(j)] 在 A 中比对，且 [t(j), -] 在 $B\}$ 中比对，$\mathcal{C}_5 = \{(j, k) :$ [- t(j)] 在 A 中比对，且 [t(j) u(k)] 在 $B\}$ 中比对，$\mathcal{C}_6 = \{(h, j, k) :$ [s h t j] 在 A [t j u k] 在 $B\}$ 中比对，且 $\gamma_{s(h)\to u(k)} \leq \gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}$，$\mathcal{C}_7 = \{(h, j, k) :$ [s h t j] 在 A [t j u k] 在 $B\}$ 中比对，且 $\gamma_{s(h)\to u(k)} > \gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}$.

因此，

$$\begin{aligned} v\mathrm{A}_\gamma[A] = &\sum_{h\in\mathcal{C}_1} \gamma_{s(h)\to\text{-}} + \sum_{j\in\mathcal{C}_3} \gamma_{\text{-}\to t(j)} + \sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \gamma_{s(h)\to t(j)} + \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \gamma_{\text{-}\to t(j)} \\ &+ \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \gamma_{s(h)\to t(j)} + \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \gamma_{s(h)\to t(j)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} v\mathrm{A}_\gamma[B] = &\sum_{k\in\mathcal{C}_2} \gamma_{\text{-}\to u(k)} + \sum_{j\in\mathcal{C}_3} \gamma_{t(j)\to\text{-}} + \sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \gamma_{t(j)\to\text{-}} + \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \gamma_{t(j)\to u(k)} \\ &+ \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \gamma_{t(j)\to u(k)} + \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \gamma_{t(j)\to u(k)}\,, \end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] = \\
&\sum_{h\in\mathcal{C}_1} \gamma_{s(h)\to\text{-}} + \sum_{k\in\mathcal{C}_2} \gamma_{\text{-}\to u(k)} + \sum_{j\in\mathcal{C}_3} \left(\gamma_{\text{-}\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to\text{-}}\right) + \\
&\sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to\text{-}}\right) + \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \left(\gamma_{\text{-}\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) + \\
&\sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) + \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) .
\end{aligned}
$$

定义比对 $C$of s,u，使得若 $(h,j,k) \in \mathcal{C}_6$，则其比对[$s$($h$) u(k)]，并且对于每个剩余的 s(h) 和 u(k)，其比对 [s(h),-] and[- u(k)]。因此，

$$
\begin{aligned}
v\mathrm{A}_\gamma[C] = &\sum_{h\in\mathcal{C}_1} \gamma_{s(h)\to\text{-}} + \sum_{k\in\mathcal{C}_2} \gamma_{\text{-}\to u(k)} + \sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \gamma_{s(h)\to\text{-}} + \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \gamma_{\text{-}\to u(k)} \\
&+ \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \gamma_{s(h)\to u(k)} + \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \left(\gamma_{s(h)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to u(k)}\right) .
\end{aligned}
$$

若 $j \in \mathcal{C}_3$，那么，由于 (iv) 成立，我们有

$$
\sum_{j\in\mathcal{C}_3} \left(\gamma_{t(j)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to t(j)}\right) \geq \sum_{j\in\mathcal{C}_3} Q = |\mathcal{C}_3|\, Q\,. \tag{8}
$$

由 (i)、(ii) 以及 $\mathcal{C}_6$ 的定义，我们分别得到

$$
\sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to\text{-}}\right) \geq \sum_{(h,j)\in\mathcal{C}_4} \gamma_{s(h)\to\text{-}}\,. \tag{9}
$$

$$
\sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \left(\gamma_{\text{-}\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) \geq \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}_5} \gamma_{\text{-}\to u(k)}\,. \tag{10}
$$

$$
\sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) \geq \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_6} \gamma_{s(h)\to u(k)}\,. \tag{11}
$$

假设 $(h,j,k) \in \mathcal{C}_7$。那么，根据 $\mathcal{C}_7$ 的定义，我们知道 $\gamma_{s(h)\to u(k)} > \gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}$。由 ($iii$) 可得 $\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)} \geq \gamma_{s(h)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to u(k)}$。因此，

$$
\sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \left(\gamma_{s(h)\to t(j)} + \gamma_{t(j)\to u(k)}\right) \geq \sum_{(h,j,k)\in\mathcal{C}_7} \left(\gamma_{s(h)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to u(k)}\right) . \tag{12}
$$

由方程 (8)、(9)、(10)、(11) 和 (12)，我们得到

$$v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] \geq v\mathrm{A}_\gamma[C] + |\mathcal{C}_3|\, Q\,.$$

因此，要完成证明，只需证明 $|A| \leq |C| + |\mathcal{C}_3|$ and$|B| \leq |C| + |\mathcal{C}_3|$。由于

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_i |\mathcal{C}_i| - |\mathcal{C}_2| \leq \sum_i |\mathcal{C}_i|\,,\\
|B| &= \sum_i |\mathcal{C}_i| - |\mathcal{C}_1| \leq \sum_i |\mathcal{C}_i|\,,\\
|C| &= \sum_i |\mathcal{C}_i| - |\mathcal{C}_3| + |\mathcal{C}_7| \geq \sum_i |\mathcal{C}_i| - |\mathcal{C}_3|\,,
\end{aligned}$$

我们有 $|A| \leq \sum_i |\mathcal{C}_i| \leq |C| + |\mathcal{C}_3|$ and $|B| \leq \sum_i |\mathcal{C}_i| \leq |C| + |\mathcal{C}_3|$。 □

引理 9. optA$\gamma(s,u) \leq$ optA$\gamma(s,t)$ + optA$\gamma(t,u)$ 对每个 $s,t,u \in \Sigma^*$ 当且仅当

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$，(*ii*) $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，(*iii*) $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，以及 (*iv*) $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \geq 0$，

对每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b}$，$\mathtt{c} \in \Sigma$。

证明。设 optA$\gamma(s,\ u) \leq$optA$\gamma(s,\ t)$+optA$\gamma(t,\ u)$ 对每个 $s,\ t,\ u \in \Sigma^*$。由方程（1）、（2）和（3）可得

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) &\leq \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) + \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{b},\text{-})\\
&\leq v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a},\mathtt{b}] + v\mathrm{A}_\gamma[\text{-},\mathtt{b}] = \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}\,,\\
\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = \mathrm{optA}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{a}) &\leq \mathrm{optA}_\gamma(\text{-},\mathtt{b}) + \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{b},\mathtt{a})\\
&\leq v\mathrm{A}_\gamma[\text{-},\mathtt{b}] + v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{b},\mathtt{a}] = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}\,,\\
\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} &= \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{c})\\
&\leq \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) + \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{b},\mathtt{c}) \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}\,.
\end{aligned}$$

因此，(*i*)、(*ii*)、(*iii*) 均成立。

如果 $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} = 0$，(*iv*) 成立。于是设 $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \neq 0$。令

$$n > \frac{\mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{c}) - (\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}})}{\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}$$

为正整数。由于 $[\mathtt{a}\text{-}^n,\ \text{-}\mathtt{b}^n]$ 和 $[\mathtt{b}^n\text{-},\ \text{-}^n\mathtt{c}]$ 分别是 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b}^n$和 $\mathtt{b}^n$，$\mathtt{c}$ 的比对，因此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{c}) &\le \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}^n) + \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{b}^n,\mathtt{c})\\ &\le v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a}\text{-}^n,\text{-}\mathtt{b}^n] + v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{b}^n\text{-},\text{-}^n\mathtt{c}]\\ &= \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + n\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + n\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\,,\end{aligned}$$

因此，根据 n 的选择，我们有 $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} > 0$，这意味着（$iv$）也成立。

反过来，假设（i）、（ii）、（iii）和（iv）均成立。令 A和B 分别为 s、t 和 t、u的 A-最优比对。由命题 8 可知，存在一个整数 k 以及 s、u 的一个比对 C，使得

$$v\mathrm{A}_\gamma[C] \le v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] + 0\,k = v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B]\,.$$

因此，由于 A 和 B 是 s、t 和 t、u的 A-最优比对，而C 是 s、u的一个比对，可得

$$\mathrm{optA}_\gamma(s,u) \le v\mathrm{A}_\gamma[C] \le v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] = \mathrm{optA}_\gamma(s,t) + \mathrm{optA}_\gamma(t,u)\,.$$

□

表1 总结了能够诱导 optA γ -γ-p的评分矩阵 p 的结果，其中该性质可用于刻画序列上的度量的每条公理。最后，我们可以证明本节的主要结果。

证明。（定理2的）

假设 optAγ 是一个度量。因此，表1中的所有条件均成立。由 (e) 和 (f)，可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$，因此 (i) 成立。由于 (i) 成立，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \neq 0$，由 (b) 可推出 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$；此外，由 (e) 可得，若 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$；因此 (ii) 成立。由 (g)、(h) 和 (j)，可知 (iii)、(iv) 和 (v) 也成立。因此，若 optAγ是一个度量，则条件 (i) 至 (v) 均成立。

反过来，假设条件（i）至（v）成立。为了证明这些是使 optAγ 成为度量的充分条件，我们检查表 1 中的所有条件是否都满足。根据（i）和（ii），条件 (a) 至 (f) 以及条件 (k) 均满足。由于（iii）、（iv）和（v）成立，因此 (g)、(h) 和 (j) 也成立。于是，只需证明表 1 中的条件 (i) 成立即可。

	$\mathcal{P}r$	$\mathcal{SH}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{M}$
(a) $D(\gamma)$ 没有负圈	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(b) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$ 或 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = 0$		⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(c) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}},\ \ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$		⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(d) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$			⋆		⋆	⋆	
(e) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$ 且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ 如果 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$			⋆		⋆	⋆	
(f) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$			⋆		⋆	⋆	
(g) 如果 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$ 那么 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$			⋆		⋆	⋆	
(h) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$	⋆		⋆		⋆	⋆	
(i) $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$			⋆		⋆	⋆	
(j) $\min\left\{ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\ \text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}} \right\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$			⋆		⋆	⋆	
(k) $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \geq 0$			⋆		⋆	⋆	

表1：评分矩阵 γ 在序列上诱导 optAγ-p 的充要条件。除度量（M）外，这些性质也用于定义广义度量空间，例如前度量（Pr）、半度量（S）、半度量（H）、伪度量（P）和拟度量（Q）。对于每个 a、b、c $\in \Sigma$，结果均根据第2节中给出的定义以及引理4、5、6、7和9得出。

假设 $\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} \geq \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}} + \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}}$。由于 (k) 成立，因此

$$\gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}} + \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$$

证明至此完成。接着，假设 $\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} < \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}} + \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}}$。由 (iii) 可得 $\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} = \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$，结合 (i) 和 (iv) 可推出

$$\gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{a}} = \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{-}} = \gamma_{\mathtt{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}\,.$$

因此，若条件 (i) 至 (v) 成立，则表 1 中的所有条件均满足，这意味着 optA_γ 是序列上的度量。 □

4. 归一化编辑距离

本节将介绍在满足度量的每条公理 p 时，使 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$在序列上构成 optN$\gamma$-$p$ 的评分矩阵类别，详见引理 11 、 13 、 20 和 24，并总结于表 2。这些结果使我们能够刻画出可导出第 2 节所述更一般度量函数的矩阵。因此，我们给出一项重要结果，该结果先前已在第 2 节中陈述如下:

定理 10. $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{N}}$。

与上一节一样，下面我们给出一系列辅助结果，最终得到定理 10的证明。

引理11. 设 γ 为评分矩阵。那么，$\mathrm{optA}_\gamma \in \mathscr{P}r$ 当且仅当 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$。

证明。 设 s, t 是 Σ^*中的序列。为了证明这一结果，我们证明 optA$\gamma(s,s) = 0$ 当且仅当 optN$\gamma(s,s) = 0$，并且对每个 $s,t \in \Sigma^*$，optA$\gamma(s,t) \geq 0$当且仅当 optN$\gamma(s,t) \geq 0$。

首先考虑 optA$\gamma(s,s) = 0$。若 $s = \varepsilon$，则有 optA$\gamma(s,s)$ =optN$\gamma(s,s) = 0$，证明完毕。接下来假设 $s \neq \varepsilon$。令 A 为 s, s 的一个 A-最优比对。由于 optA$\gamma(s,s) = 0$，我们有 $v\mathrm{A}_\gamma[A] = 0$；又由于 $s \neq \varepsilon$，我们有 $|A| > 0$。由此可得

$$\mathrm{optN}_\gamma(s,s) \leq v\mathrm{N}_\gamma[A] = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[A]}{|A|} = 0\,. \tag{13}$$

令 B 为 s, s 的一个 N-最优比对。由于 $s \neq \varepsilon$，我们有 $|B| > 0$；这意味着，由于 $\mathrm{optA}_\gamma(s, s) = 0$ 且 $v\mathrm{A}_\gamma[B] \geq \mathrm{optA}_\gamma(s, s)$，

$$\mathrm{optN}_\gamma(s, s) = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[B]}{|B|} \geq \frac{\mathrm{optA}_\gamma(s, s)}{|B|} = 0\,.$$

由方程（13）可得 $\mathrm{optN}_\gamma(s, s) = 0$ 因此，当 $s \neq \varepsilon$ 时，证明也就完成了。

利用类似的论证可以证明，$\mathrm{optN}_\gamma(s, s) = 0$ 意味着 $\mathrm{optA}_\gamma(s, s) = 0$，并且当且仅当 $\mathrm{optN}_\gamma(s, t) \geq 0$时，$\mathrm{optA}_\gamma(s, t) \geq 0$。 □

推论 12。设 γ 是一个评分矩阵，且 $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma_\circ$。那么，$\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$ 当且仅当以下条件成立：

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$ 或 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = 0$，

且 (*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$，

对每个 $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma_\circ$

证明。假设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r_\circ$。由引理 11 可得 $\mathrm{optA}_\gamma \in \mathcal{P}r$，根据表 1 第（b）行和第（c）行，这意味着条件（*i*）和（*ii*）成立。

反过来，假设条件（*i*）和（*ii*）成立。由此可知，表 1 中的（b）和（c）成立。由于（*ii*）成立，因此 $D(\gamma)$ 不含负环，这意味着表 1 中的（a）也成立。由此可得 $\mathrm{optA}_\gamma \in \mathcal{P}r$，根据引理 11 可推出 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r_\circ$ □

引理 13. 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r_\circ$。那么，对于任意 $s \neq t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}_\gamma(s, t) > 0$ 当且仅当 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$，对于任意 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b} \in \Sigma_\circ$

证明。设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r_\circ$。假设对于任意 $s \neq t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}_\gamma(s, t) > 0$。那么，

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} &= v\mathrm{N}_\gamma[\mathtt{a}, \text{-}] = \mathrm{optN}_\gamma[\mathtt{a}, \varepsilon] > 0\,,\\
\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} &= v\mathrm{N}_\gamma[\text{-}, \mathtt{a}] = \mathrm{optN}_\gamma(\varepsilon, \mathtt{a}) > 0\,,\\
\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} &= v\mathrm{N}_\gamma[\mathtt{a}, \mathtt{b}] \geq \mathrm{optN}_\gamma[\mathtt{a}, \mathtt{b}] > 0\,.
\end{aligned}$$

反之，假设 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ 对于任意 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b} \in \Sigma_\circ$。由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$，根据推论 12 可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$。由此可知

引理 6 使得 $\mathrm{optA}_\gamma(s,\ t)\ > 0$ 对于 $s \neq t \in \Sigma^*$。设 A 是 s 的一个 N-最优比对，t。由此可知

$$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) = v\mathrm{N}_\gamma[A] = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[A]}{|A|} \geq \frac{\mathrm{optA}_\gamma(s,t)}{|A|} > 0\,.$$

□

我们用 $\mathcal{Q}$ 表示 $\max_{\mathtt{a}\in\Sigma}\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\}$ 的值，用 $q \in \Sigma$ 表示 Σ 中满足 $\mathcal{Q} = \max\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\}$ 的符号。

命题 14. 设 $s,t \in \Sigma^*$。那么，$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \leq \mathcal{Q}$。

证明。注意，$[s\text{-}^{|t|},\text{-}^{|s|}t]$ 是 s,t 的一种比对。因此，

$$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \leq v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} s & \text{-}^{|t|} \\ \text{-}^{|s|} & t \end{bmatrix} \leq \frac{|s|\mathcal{Q}+|t|\mathcal{Q}}{|s|+|t|} = \mathcal{Q}\,.$$

□

命题 15. 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$、$\mathtt{a} \in \Sigma$，且 $s,t \in \Sigma^*$。那么，

(*i*) 若 $\mathcal{Q} = 0$，则 $\mathrm{optN}_\gamma(s,t) = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = 0$；

(*ii*) 若 $\mathcal{Q} \neq 0$，则 $\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q} > 0$ 且 $\gamma_{q\to q} = 0$。

证明。假设 $\mathcal{Q} = 0$。由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathrm{Pr}$，我们有 $\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \geq 0$；并且根据命题 14，我们有 $\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \leq \mathcal{Q} = 0$。由此可得 $\mathrm{optN}_\gamma(s,t) = 0$。由于这对每个 s，$t \in \Sigma^*$ 都成立，并且 $[\mathtt{a},\text{-}]$，$[\text{-}\ \mathtt{a}]$ 分别是 $\mathtt{a},\varepsilon$ 和 $\varepsilon,\mathtt{a}$ 的唯一比对，因此我们有

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} &= v\mathrm{A}_\gamma[\mathtt{a},\text{-}] = \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) = 0 \quad \text{and}\\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} &= v\mathrm{A}_\gamma[\text{-},\mathtt{a}] = \mathrm{optN}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{a}) = 0\,.\end{aligned}$$

假设 $\mathcal{Q} \neq 0$。由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$，我们有 $\min\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\} \geq 0$。由此可得 $\mathcal{Q} = \max\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\} \geq \min\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\} \geq 0$，并且根据假设 $\mathcal{Q} \neq 0$，我们有 $\max\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\} = \mathcal{Q} > 0$。由此可得

$$\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q} = \max\{\gamma_{q\to\text{-}},\gamma_{\text{-}\to q}\} + \min\{\gamma_{q\to\text{-}},\gamma_{\text{-}\to q}\} > 0\,,$$

这也意味着，根据推论 12，$\gamma_{q\to q} = 0$。 □

事实 16. 设 x, z, k, w 为实数。若 $k \geq 0$ 且 $w > 0$，则

$$\frac{kx + z}{k + w} \geq \min\left\{x, \frac{z}{w}\right\}.$$

命题 17. 令 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$ 且 $\mathcal{Q} \neq 0$。若

$$\gamma_{q\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to q} \quad \text{or} \quad \left(\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{q\to\text{-}} \text{ and } \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \leq \gamma_{\text{-}\to q} + \gamma_{q\to\mathtt{b}}\right),$$

对每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b} \in \Sigma$，则存在 n_0，使得对每个整数 $n \geq n_0$，我们有

$$\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a}, q^n\mathtt{b}) = \min\left\{\begin{array}{l} v\mathrm{N}_\gamma[q^n\mathtt{a}, q^n\mathtt{b}] = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}, \\ v\mathrm{N}_\gamma[q^n\mathtt{a}\text{-}, q^n\text{-}\mathtt{b}] = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2} \end{array}\right\}.$$

证明。令 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$ 且 $\mathcal{Q} \neq 0$，使得 $\gamma_{q\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to q}$ 或 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{q\to\text{-}}$ 以及 $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \leq \gamma_{\text{-}\to q} + \gamma_{q\to\mathtt{b}}$，对每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b} \in \Sigma$。定义，对每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b} \in \Sigma$，

$$n > \frac{\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}, \gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}, \gamma_{q\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}\}}{\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}}.$$

由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$ 且 $\mathcal{Q} \neq 0$，我们有 $\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q} > 0$ 且 $\gamma_{q\to q} = 0$根据命题 15，又由于 $\gamma_{q\to q} = 0$，我们有

$$v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^n & \mathtt{a} \\ q^n & \mathtt{b} \end{bmatrix} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1} \quad \text{and} \quad v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^n & \mathtt{a} & \text{-} \\ q^n & \text{-} & \mathtt{b} \end{bmatrix} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}.$$

因此，为了证明这个命题，我们需要证明

$$v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] \geq \min\left\{\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}, \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}\right\},$$

对于每种比对 $[s', t']$ of $q^n\mathtt{a}$，$q^n\mathtt{b}$。

令 k 表示 s'中符号 - 的数量。由此可知，t' 中符号 - 的数量也为 k and $|[s', t']| = k + n + 1$。我们考察四种情形，涵盖 $q^n\mathtt{a}$，$q^n\mathtt{b}$的所有可能比对。

情形1： $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ 在 $[s', t']$中进行比对。

在这种情形下，$k \geq 0$。由于 $\gamma_{q\to q} = 0$，我们有

$$\begin{aligned} v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] &= \frac{k(\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}) + \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{k + n + 1} \\ &\geq \min\left\{\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}, \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}\right\} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $k \geq 0$ 且 $n+1 > 0$，不等式（14）由事实 16 推出，而等式则由 n 的选取可得。

情形2： $[\mathtt{a},\text{-}]$ 和 $[\text{-}\ \mathtt{b}]$ 在 $[s', t']$中对齐。

在这种情况下， $k \geq 1$。由于 $\gamma_{q\to q} = 0$，我们有

$$\begin{aligned} v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] &= \frac{(k-1)(\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}) + \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{(k-1)+n+2} \\ &\geq \min\left\{\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}, \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}\right\} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}. \end{aligned}$$

不等式由以下条件得出： $k-1 \geq 0$和 $n+2 > 0$，根据事实 16 而最后一个等式则由 n的选择得出。

情形3： $[\mathtt{a}, q]$ 在 $[s', t']$ 中对齐。

在这种情况下， $k \geq 1$。此外，由于 $\gamma_{q\to q} = 0$，我们有

$$\begin{aligned} v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] &= \frac{(k-1)(\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}) + \gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}}{(k-1)+n+2} \\ &\geq \min\left\{\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q}, \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}}{n+2}\right\} \qquad (15) \\ &= \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}}{n+2}. \qquad (16) \end{aligned}$$

由于 $k-1 \geq 0$和 $n+2 > 0$，不等式 (15) 根据事实 16 得出，而等式 (16) 则由 n的选择得出。

假设 $\gamma_{q\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to q}$。那么， $\gamma_{q\to\text{-}}$ = 最小值$\{\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q}\} = \mathcal{Q}$。由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$，由推论 12 可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to q} \geq 0$。由等式 (16) 以及 $\mathcal{Q}$ 的定义可得

$$\begin{aligned} v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] &\geq \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}}{n+2} \geq \frac{0 + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \mathcal{Q}}{n+2} \\ &\geq \frac{\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}}{n+2} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}, \end{aligned}$$

且证明完毕。于是，假设 $\gamma_{q\to\text{-}} \neq \gamma_{\text{-}\to q}$。根据假设，这意味着 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{q\to\text{-}}$。由等式（16）可得

$$v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] \geq \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to q} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{q\to\text{-}}}{n+2} \geq \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}.$$

情形 4： $[q, \mathtt{b}]$ 在 $[s', t']$中比对。与情形3类似。

□

命题 18。 假设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$。 令 $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ 和 $s, t \in \Sigma^*$。 如果$[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ 在最大长度的 s, t 的 N-最优比对中比对，则

$$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}\,.$$

证明。 设 $[s', t']$ 是 s, t 的最大长度 N-最优比对，且j 是一个整数，使得 $s'(j) = \mathtt{a}$ 且 $t'(j) = \mathtt{b}$。 考虑 s, t的以下比对

$$A = \begin{bmatrix} s'(1) & \dots & s'(j-1) & \mathtt{a} & \text{-} & s'(j+1) & \dots & s'(|s'|) \\ t'(1) & \dots & t'(j-1) & \text{-} & \mathtt{b} & t'(j+1) & \dots & t'(|t'|) \end{bmatrix}.$$

由于 $[s', t']$ 是最大长度的 N-最优比对，且 $||[s', t']|| \lhd |A|$，因此我们有

$$\begin{aligned} \frac{v\mathrm{A}_\gamma[s', t']}{||[s', t']||} = v\mathrm{N}_\gamma[s', t'] < v\mathrm{N}_\gamma[A] = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[A]}{|A|} \\ = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[s', t'] + \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} - \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{||[s', t']|| + 1}\,, \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{v\mathrm{A}_\gamma[s', t']}{||[s', t']||} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} - \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}\,.$$

由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$，因此我们有 $\mathrm{optN}\gamma(s, t) \geq 0$。 由此可得

$$0 \leq \mathrm{optN}_\gamma(s, t) = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[s', t']}{||[s', t']||} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} - \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}\,,$$

这意味着 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$。 □

事实 19。 设 $x, y \in \mathbb{R}$。 若 $x < y$，则存在一个整数 n_0，使得

$$\frac{x}{n+1} < \frac{y}{n+2}\,,$$

对于每个 $n > n_0$。

引理 20. 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$。 那么，对于每个$s, t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}\gamma(s, t) = \mathrm{optN}\gamma(t, s)$ 当且仅当

(i) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$, and

(*ii*) 若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$，
对每个 $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$。

证明。 根据推论 12，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}, \gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q} \geq 0$。

假设对每个 $s, t \in \Sigma^*$，都有 $\mathrm{optN}_\gamma(s, t) = \mathrm{optN}_\gamma(t, s)$。由于 $[\mathtt{a},\text{-}]$ 和 $[\text{-}\ \mathtt{a}]$ 分别是 $\mathtt{a}$，ε 和 ε，$\mathtt{a}$ 的唯一比对，并且根据假设，$\mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a}, \varepsilon) = \mathrm{optN}_\gamma(\varepsilon, \mathtt{a})$，因此我们有

$$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = v\mathrm{N}_\gamma[\mathtt{a},\text{-}] = \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) = \mathrm{optN}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{a}) = v\mathrm{N}_\gamma[\text{-},\mathtt{a}] = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\,,$$

这意味着 (i) 成立。为了证明 (ii)，我们考虑两种可能性：$\mathcal{Q} = 0$ 和 $\mathcal{Q} \neq 0$。如果 $\mathcal{Q} = 0$，由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$ 且 $\mathcal{Q} \geq \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0 = 0 + 0 = \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \geq \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，此时 (ii) 显然成立。因此，假设 $\mathcal{Q} \neq 0$，并设 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$。取足够大的 n，使其同时满足命题 17（因为 $\gamma_{q\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to q}$）和事实 19。由此可得

$$\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a}, q^n\mathtt{b}) = \min\left\{\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}, \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2}\right\} = \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1} < \frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{n+2} \quad \text{and}$$
$$\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b}, q^n\mathtt{a}) = \min\left\{\frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}}{n+1}, \frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}}{n+2}\right\}.$$

由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，$\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，且 $\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a}, q^n\mathtt{b}) = \mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b}, q^n\mathtt{a})$，我们可知 $(\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}})/(n+2)$ 不是 $\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b}, q^n\mathtt{a})$ 的一个取值，这意味着 $\mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b}, q^n\mathtt{a}) = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}/(n+1)$。因此，

$$\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1} = \mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a}, q^n\mathtt{b}) = \mathrm{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b}, q^n\mathtt{a}) = \frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}}{n+1}\,,$$

从而 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$。

反过来，假设 (i) 和 (ii) 成立。令 $[s', t']$ 为 s、t 的最大长度 N-最优比对。若 $s'(j) = \text{-}$ 或 $t'(j) = \text{-}$，则由 (i) 可得 $\gamma_{s'(j)\to t'(j)} = \gamma_{t'(j)\to s'(j)}$。若 $s'(j) \neq \text{-}$ 且 $t'(j) \neq \text{-}$，则由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathrm{Pr}$，由命题 18 可得 $\gamma_{s'(j)\to t'(j)} < \gamma_{s'(j)\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to t'(j)}$，由此根据 (ii) 可推出 $\gamma_{s'(j)\to t'(j)} = \gamma_{t'(j)\to s'(j)}$。利用这些观察，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{optN}_\gamma(s,t) = v\mathrm{N}_\gamma[s',t'] &= \frac{\sum_j \gamma_{s'(j)\to t'(j)}}{|(s',t')|} \\ &= \frac{\sum_j \gamma_{t'(j)\to s'(j)}}{|(t',s')|} = v\mathrm{N}_\gamma[t',s'] \geq \mathrm{optN}_\gamma(t,s)\,.\end{aligned}$$

同理，我们有 $\mathrm{optN}_\gamma(s,\ t) \le \mathrm{optN}_\gamma(t,\ s)$，从而可以得出 $\mathrm{optN}_\gamma(s,\ t) = \mathrm{optN}_\gamma(t,\ s)$。 □

命题 21. 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$。若对于所有 $s,t,u \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \le \mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t)$，则

$$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \le \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} \qquad \text{and} \qquad \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \le \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}\,,$$

对于所有 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$。

证明。假设对于所有 $s,t,u \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \le \mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t)$。由于 $[\mathtt{a},\text{-}]$ 是 $\mathtt{a},\varepsilon$ 的唯一比对，我们有 $\mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$；又由于 $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$ 和 $[\mathtt{b},\text{-}]$ 是 $\mathtt{a},\mathtt{b}$ 与 $\mathtt{b},\varepsilon$ 的比对，因此

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) &\le \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) + \mathrm{optN}_\gamma(\mathtt{b},\varepsilon)\\ &\le v\mathrm{N}_\gamma[\mathtt{a},\mathtt{b}] + v\mathrm{N}_\gamma[\mathtt{b},\text{-}]\\ &= \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}\,.\end{aligned}$$

利用类似的论证，我们也证明了 $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \le \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$。 □

命题 22. 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$。若对于每个 $s,t,u \in \Sigma^*$，$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \le \mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t)$，则

$$\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}, \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} \le \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}\,,$$

对每个 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$。

证明。假设对所有 $s,t,u \in \Sigma^*$，都有 $\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \le \mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t)$。

由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathcal{P}r$，若 $\mathcal{Q} = 0$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} = 0$ 根据推论 12，因此命题得证。于是，假设 $\mathcal{Q} \neq 0$。也就是说，$\mathcal{Q} > 0$ 根据推论 12。不失一般性，假设$\gamma_{q\to\text{-}} = \mathcal{Q}$。

假设存在 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$，使得 $\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} > \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则由反证法可知。这意味着 $\mathcal{Q} > \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$。令 k 为一个正整数，使得

$$k > \frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{\mathcal{Q} - (\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}})}\,.$$

由于 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{P}r$，我们有 $\gamma_{q\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to q} \geq 0$，由此可知，由于$\gamma_{q\to\text{-}}$ $= \mathcal{Q} > 0$，因此 $\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to q} > 0$，进而可知 $\gamma_{q\to q} = 0$ 根据推论12。于是，

$$\mathrm{optN}_\gamma(q^k, q^k\mathtt{b}) \leq v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^k & \text{-} \\ q^k & \mathtt{b} \end{bmatrix} = \frac{\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1}, \tag{17}$$

$$\mathrm{optN}_\gamma(q^k\mathtt{b}, \mathtt{b}) \leq v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^k & \mathtt{b} & \text{-} \\ \text{-}^k & \text{-} & \mathtt{b} \end{bmatrix} = \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + (\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}})}{k+2}. \tag{18}$$

在 $q^k, \mathtt{b}$ 的任意比对中，$[q, \mathtt{b}]$ 或 $[\text{-}\ \mathtt{b}]$ 会参与比对。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{optN}_\gamma(q^k, \mathtt{b}) &= \min\left\{v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^{k-1} & q \\ \text{-}^{k-1} & \mathtt{b} \end{bmatrix}, v\mathrm{N}_\gamma\begin{bmatrix} q^k & \text{-} \\ \text{-}^k & \mathtt{b} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{(k-1)\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{q\to\mathtt{b}}}{k}, \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1}\right\}.\end{aligned}$$

假设 $\mathrm{optN}\gamma(q^k, \mathtt{b}) = ((k-1)\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{q\to\mathtt{b}})/k$。由此可得

$$\frac{(k-1)\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{q\to\mathtt{b}}}{k} \leq \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1}.$$

我们有 $\gamma_{q\to\text{-}} \leq \gamma_{q\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$ 根据命题 21，这意味着，由于$k > 0$,

$$\frac{k\gamma_{q\to\text{-}} - \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}}{k} \leq \frac{(k-1)\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{q\to\mathtt{b}}}{k}.$$

由此可得

$$\frac{k\gamma_{q\to\text{-}} - \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}}{k} \leq \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1},$$

并且，由于 $k > 0$，有 $k(\gamma_{q\to\text{-}} - (\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}})) \leq \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$ 这意味着，由于$\mathcal{Q} = \gamma_{q\to\text{-}}$ $> \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，有 $k \leq \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}/(\mathcal{Q} - (\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}))$，这与 k 的选择矛盾，因为 $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} \geq 0$。因此，我们假设

$$\mathrm{optN}_\gamma(q^k, \mathtt{b}) = \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1}. \tag{19}$$

由于 $\mathrm{optN}\gamma(q^k, \mathtt{b}) \leq \mathrm{optN}\gamma(q^k, q^k\mathtt{b}) + \mathrm{optN}\gamma(q^k\mathtt{b}, \mathtt{b})$，由方程（17）、（18）和（19）可得

$$\begin{aligned}\frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1} = \mathrm{optN}_\gamma(q^k, \mathtt{b}) &\leq \mathrm{optN}_\gamma(q^k, q^k\mathtt{b}) + \mathrm{optN}_\gamma(q^k\mathtt{b}, \mathtt{b}) \\ &\leq \frac{\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{k+1} + \frac{k\gamma_{q\to\text{-}} + (\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}})}{k+2},\end{aligned}$$

这意味着，由于 $k>0$ 以及 $\mathcal{Q}=\gamma_{q\to\text{-}}>\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，有

$$k\leq\frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}}{\mathcal{Q}-(\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}})},$$

再次与对 k 的选择矛盾。因此，对于每个 $\mathtt{a},\ \mathtt{b}\in\Sigma$，$\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\}\leq\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$。 □

命题 23. 设 $\text{optN}_\gamma\in\mathcal{P}r$。如果对于每个 $s,\ t,\ u\in\Sigma^*$，$\text{optN}\gamma(s,\ t)\leq\text{optN}\gamma(s,\ u)+\text{optN}\gamma(u,\ t)$，那么

$$\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}},\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\}\leq\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}+\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}},$$

对于每个 $\mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c}\in\Sigma$。

证明。由于 $\text{optN}_\gamma\in\mathcal{P}r$，由推论 12 可知 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}},\ \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}\geq0$ 对每个 $\mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c}\in\Sigma$。

如果 $\mathcal{Q}=0$，由命题 15可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}=\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}=0$ 对每个 $\mathtt{a}\in\Sigma$，因为 $\text{optN}_\gamma\in\mathcal{P}r$。由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}},\ \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}},\ \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}\geq0$ 对每个 $\mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c}\in\Sigma$，因此 $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}},\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\}=0\leq\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}+\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，命题得证。因此，假设 $\mathcal{Q}\neq0$。

假设对于每个 $s,t,u\in\Sigma^*$，都有 $\text{optN}\gamma(s,t)\leq\text{optN}\gamma(s,u)+\text{optN}\gamma(u,t)$。根据命题 21，对于每个 $\mathtt{a},\mathtt{c}\in\Sigma$，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\leq\gamma_{\mathtt{a}\to q}+\gamma_{q\to\text{-}}$ 和 $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\leq\gamma_{\text{-}\to q}+\gamma_{q\to\mathtt{c}}$。令 n_0 为满足命题 17 和事实 19 的整数。那么，对于 $n\geq n_0$，可得

$$\begin{aligned}\min\left\{\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}}{n+1},\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}}{n+2}\right\}&=\text{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a},q^n\mathtt{c})\\&\leq\text{optN}_\gamma(q^n\mathtt{a},q^n\mathtt{b})+\text{optN}_\gamma(q^n\mathtt{b},q^n\mathtt{c})\\&\leq\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}+\frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}}{n+1}.\end{aligned}$$

这意味着，如果 $\text{optN}\gamma(q^n\mathtt{a},\ q^n\mathtt{c})=\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}/(n+1)$，那么 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}\leq\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}+\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，命题得证。接下来，假设

$$\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}}{n+2}=\min\left\{\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}}{n+1},\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}}{n+2}\right\}\leq\frac{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}}{n+1}+\frac{\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}}{n+1}.$$

由事实 19 的逆否命题可知，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}+\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\leq\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}+\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$，因为 n 足够大，命题得证。

□

引理 24。 设 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{Pr}$。 那么，对每个 $s,t,u \in \Sigma^*$， $\mathrm{optN}\gamma(s,t) \leq \mathrm{optN}\gamma(s,u) + \mathrm{optN}\gamma(u,t)$ 当且仅当

$(i)\ \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$， $(ii)\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} \leq \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$， $(iii)\ \min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$， 以及 $(iv)\ \max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}\ \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} \leq \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，

对于每个 $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c} \in \Sigma$。

证明。假设对于所有 s、 t、 $u \in \Sigma^*$， $\mathrm{optN}\gamma(s,t) \leq \mathrm{optN}\gamma(s,u) + \mathrm{optN}\gamma(u,t)$。由命题 21、22 和 23 可知，条件 (i) 至 (iv) 成立。

反过来，假设条件 (i) 至 (iv) 成立。设 $s,t,u \in \Sigma^*$和 A,B 分别是 s,u和 u,t的 N-最优比对。由命题 8 可知，存在一个 C 比对 s,t 以及一个整数$k \geq 0$ 使得

$$v\mathrm{A}_\gamma[A] + v\mathrm{A}_\gamma[B] \geq v\mathrm{A}_\gamma[C] + k\mathcal{Q}\,, \quad |A| \leq |C| + k\,, \quad \text{and} \quad |B| \leq |C| + k\,.$$

由 $\mathrm{optN}_\gamma \in \mathscr{Pr}$ 可得 $v\mathrm{A}_\gamma[A],\ v\mathrm{A}_\gamma[B] \geq 0$。因此

$$\mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t) = \frac{v\mathrm{A}_\gamma[A]}{|A|} + \frac{v\mathrm{A}_\gamma[B]}{|B|} \geq \frac{v\mathrm{A}_\gamma[C] + k\mathcal{Q}}{|C| + k}\,.$$

由于 $|C| > 0$ 且 $k \geq 0$，由事实 16 可知

$$\frac{v\mathrm{A}_\gamma[C] + k\mathcal{Q}}{|C| + k} \geq \min\left\{\mathcal{Q}, \frac{v\mathrm{A}_\gamma[C]}{|C|} = v\mathrm{N}_\gamma[C]\right\}\,,$$

$\mathcal{Q} \geq \mathrm{optN}\gamma(s,\ t)$ 根据命题 14，且 $v\mathrm{N}_\gamma[C] \geq \mathrm{optN}\gamma(s,\ t)$。因此，

$$\mathrm{optN}_\gamma(s,t) \leq \mathrm{optN}_\gamma(s,u) + \mathrm{optN}_\gamma(u,t)\,.$$

□

最后，利用本节给出的结果，我们可以证明以下突出显示的定理。

证明。（定理10的）

假设 $\text{optN}_\gamma \in \text{M}$。因此，对于每个 s、t、$u \in \Sigma^*$，有 $\text{optN}\gamma(s,s) = 0$；若 $s \neq t$，则 $\text{optN}\gamma(s,t) > 0$；$\text{optN}\gamma(s,t) = \text{optN}\gamma(t,s)$；并且 $\text{optN}\gamma(s,u) \leq \text{optN}\gamma(s,t) + \text{optN}\gamma(t,u)$。

设 $\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c} \in \Sigma$, $\mathtt{a} \neq \mathtt{b} \neq \mathtt{c}$。由于 $\text{optN}\gamma(s,s) = 0$ 且 $\text{optN}\gamma(s,t) > 0$，我们有 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$。由于当 $s \neq t$ 时，$\text{optN}\gamma(s,t) > 0$，且 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，根据引理 13，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$ $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$。由于 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，根据推论 12可得 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$ 或 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = 0$，并且由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$ $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} = 0$。由于对每个 $s,t \in \Sigma^*$，$\text{optN}\gamma(s,t) = \text{optN}\gamma(t,s)$，且 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，根据引理 20，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$；若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$。由于 $\text{optN}\gamma(s,u) \leq \text{optN}\gamma(s,t) + \text{optN}\gamma(t,u)$，且 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，根据引理 24，我们有 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$，且 $\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$。

根据上述观察可知，如果 $\gamma \in \mathbb{M}^{\text{N}}$，那么 $\gamma \in \mathbb{M}^{\text{A}}$。此外，由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，$\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$ 且 $\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$ $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} \leq \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$ 根据引理 24，可得

$$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}, \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} \leq \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = 2\,\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}\,.$$

反过来，假设 $\gamma \in \mathbb{M}^{\text{N}}$。根据 $\mathbb{M}^{\text{N}}$ 的定义，可得$\gamma \in \mathbb{M}^{\text{A}}$ 且对于每个 $\mathtt{a}$，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq 2\,\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$，$\mathtt{b} \in \Sigma$。由于 $\gamma \in \mathbb{M}^{\text{A}}$，可得 $\text{optA}_\gamma \in \text{M} \subseteq \text{Pr}$ 且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$；若 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$；若 $\mathtt{a} = \mathtt{b}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = 0$；若 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，则 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$；$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$；对于每个 $\mathtt{a}$，$\mathtt{b}$，$\mathtt{c} \in \Sigma$，$\min\{\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{c}}\} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}}$。为了证明 $\text{optN}_\gamma \in \text{M}$，我们将证明：对于每个 s，t，$u \in \Sigma^*$，$\text{optN}\gamma(s,s) = 0$，对于 $s \neq t$，$\text{optN}\gamma(s,t) > 0$，$\text{optN}\gamma(s,t) = \text{optN}\gamma(t,s)$，以及 $\text{optN}\gamma(s,u) \leq \text{optN}\gamma(s,t) + \text{optN}\gamma(t,u)$。

由于 $\text{optA}_\gamma \in \text{Pr}$，根据引理11可得 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，因此 $\text{optN}\gamma(s,s) = 0$。由于 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} > 0$，并且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$ if $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$，因此根据引理 13 可得 $\text{optN}\gamma(s,t) > 0$ for $s \neq t$。由于 $\text{optN}_\gamma \in \text{Pr}$，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，并且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}$ if $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} < \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，根据引理 20 可得 $\text{optN}\gamma(s,t) = \text{optN}\gamma(t,s)$。

由于 $\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} < \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，可得 $\gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} = \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}}$，而 $\gamma \in \mathbb{M}^{\text{A}}$。由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$，$\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，并且 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}}$，可得

$$\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}} = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}} + \gamma_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}}\,.$$

由于 $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}$ 且 $\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}$，由假设可得

$$\max\{\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}, \gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}\} = \gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} \leq 2\,\gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} = \gamma_{\mathtt{b}\to\text{-}} + \gamma_{\text{-}\to\mathtt{b}}\,.$$

由于 $\gamma_{a\to -} \le \gamma_{a\to b}+\gamma_{b\to -}$，$\gamma_{-\to a} \le \gamma_{-\to b}+\gamma_{b\to a}$，$\min\{\gamma_{a\to c},\gamma_{a\to -}+\gamma_{-\to c}\} \le \gamma_{a\to b}+\gamma_{b\to c}$，且 $\max\{\gamma_{a\to -}\ \gamma_{-\to a}\} \le \gamma_{b\to -}+\gamma_{-\to b}$，根据引理 24，我们有 optN$\gamma(s,u)$ $\le$optN$\gamma(s,t)$ + optN$\gamma(t,u)$。 □

表2概述了评分矩阵的性质 γ，适用于度量空间和其他一些广义度量空间。

		Pr	*S*	*H*	*P*	*Q*	*M*
(a)	optAγ 是一个前度量	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(b)	$\gamma_{a\to -}\ \gamma_{-\to a} > 0$ 且 $\gamma_{a\to b} > 0$ 如果 $a \neq b$		⋆			⋆	⋆
(c)	$\gamma_{a\to -} = \gamma_{-\to a}$		⋆		⋆		⋆
(d)	如果 $\gamma_{a\to b} < \gamma_{a\to -}+\gamma_{-\to b}$ 那么 $\gamma_{a\to b} = \gamma_{b\to a}$		⋆		⋆		⋆
(e)	$\gamma_{a\to -} \le \gamma_{a\to b}+\gamma_{b\to -}$			⋆	⋆	⋆	⋆
(f)	$\gamma_{-\to a} \le \gamma_{-\to b}+\gamma_{b\to a}$			⋆	⋆	⋆	⋆
(g)	$\left\{ \begin{matrix} \text{最小值} & \gamma_{a\to c} \\ & \gamma_{a\to -}+\gamma_{-\to c} \end{matrix} \right\} \le \gamma_{a\to b}+\gamma_{b\to c}$			⋆	⋆	⋆	⋆
(h)	最大值$\{\gamma_{a\to -}\ \gamma_{-\to a}\} \le \gamma_{b\to -}+\gamma_{-\to b}$			⋆	⋆	⋆	⋆

表2：评分矩阵满足哪些必要且充分的条件，才能在 optN γ 下诱导γ-p，并在 optN$_\gamma \in$ $\mathcal{P}r$条件下诱导序列上的度量。与表1一样，这些性质也用于定义度量（$\mathcal{M}$）和广义度量空间，例如前度量($\mathcal{P}r$)、半度量($\mathcal{S}$)、半度量($\mathcal{H}$)、伪度量($\mathcal{P}$) 和拟度量($\mathcal{Q}$)。结果基于第2 节给出的定义以及第4节中的引理得出。

5. 两个序列的扩展比对

本节将介绍针对每条度量公理，在序列上诱导 optEγ-p 的评分矩阵类别 p。引理 27–31 确立了这些性质，这些性质总结于表 3，并使我们能够刻画诱导前文所述各类更一般度量函数的矩阵

第 2 节。最后，我们给出以下此前在第 2 节中陈述的重要结果：

定理 25. optE$_\gamma \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{E}}$。

为证明这一结果，我们沿用前几节的方法，并给出一些中间结果如下。

事实26. 每个由表示将一个序列变换为其自身的编辑操作的弧所构成的带权有向多重图都是欧拉图。

引理 27. 设 $s \in \Sigma^*$ 和 γ 为评分矩阵。则，optE$\gamma(s, s) = 0$ 当且仅当 $D(\gamma)$ 没有负环。

证明。假设 optE$\gamma(s, s) = 0$，并用反证法，设 $D(\gamma)$ 存在一个圈$W = x_0, \ldots, x_m$，其权重为 $x_m \neq$，且 $w(W) = -X < 0$。令 n 为一个整数，使得 $\gamma_{s(1)\to x_0} + \gamma_{x_0\to s}(1) - nX < 0$。因此，$A = [c, s(2)\ s(3) \ldots, s(|s|)]$，其中列 $c = s(1)x_0(x_1, \ldots x_m)^n s(1)$ 也是 s、s 的一个扩展比对，并且 vE$_\gamma[A] < 0 =$ optE$\gamma(s, s)$，这与假设矛盾。由此可知，$D(\gamma)$ 没有负环。

另一方面，现在假设 $D(\gamma)$ 没有负环。由于vE$_\gamma[s(1)\ s(2)\ldots\ldots, s(|s|)] = 0$，因此 optE$\gamma(s, s) \leq 0$。

令 A 为 s、s 的一个 E-最优比对。根据事实 26，考虑将 s 变换为其自身的编辑操作所得到的多重图H 是欧拉图，这意味着 H 可以分解为若干圈，其中每个圈也是 $D(\gamma$中的一个圈。由于 $D(\gamma)$没有负环，因此 optE$\gamma(s, s) = v$E$_\gamma[A] \geq 0$。

因此，由于 optE$\gamma(s, s) \leq 0$ 且 optE$\gamma(s, s) \geq 0$，我们有：若$D(\gamma)$没有负环，则 optE$\gamma(s, s) = 0$。 □

引理 28。 设 s，$t \in \Sigma^*$。那么，当且仅当$\gamma_{\mathtt{a}\to}$- γ-$\to\mathtt{a}$，$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$ 对每个 a，b $\in \Sigma$都成立时，optE$\gamma(s, t) \geq 0$。

证明。假设对于每个 $s, t \in \Sigma^*$ 和 a, b $\in \Sigma$，optE$\gamma(s, t) \geq 0$。那么，$\gamma_{\mathtt{a}\to}$- $= v$E$_\gamma$[a,-] $\geq$ optEγ(a, ε) ≥ 0。类似地，γ-$\to\mathtt{a}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$。

反过来，假设对于每个 a, b $\in \Sigma$，$\gamma_{\mathtt{a}\to}$- γ-$\to\mathtt{a}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \geq 0$。因此，任何将 s 转换为 t 的编辑操作序列的权重之和都非负。因此，optE$\gamma(s, t) \geq 0$。 □

引理 29. 设 $s \neq t \in \Sigma^*$。那么，optE$\gamma(s, t) > 0$ 当且仅当

(*i*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$，且
(*ii*) $\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}}$ $\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$，
对于每个 $\mathtt{a} \neq \mathtt{b} \in \Sigma$。

证明。 假设 $\mathrm{optE}_\gamma(s,t) > 0$。 那么，$\gamma_{\mathtt{a}\to\text{-}} = v\mathrm{E}_\gamma[\mathtt{a},\text{-}] \geq \mathrm{optA}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) > 0$。同理，$\gamma_{\text{-}\to\mathtt{a}}, \gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} > 0$。此外，由引理 28 可知$\gamma_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \geq 0$。

反过来，假设 (*i*) 和 (*ii*) 成立。由于将 s 转换为 t 的每个编辑操作的权重都非负，并且因为 $s \neq t$，至少存在一个权重为正的编辑操作，因此，任何将 s 转换为 t 的编辑操作序列的权重之和都为正。因此，$\mathrm{optE}_\gamma(s,t) > 0$。 □

引理 30。 设 γ 为一个评分矩阵。那么，对于每个 $s,t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optE}_\gamma(s,t) = \mathrm{optE}_\gamma(t,s)$ 当且仅当 $d_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) = d_\gamma(\mathtt{b},\mathtt{a})$，并且对于每个$\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$，$d_\gamma(\mathtt{a},\text{-}) = d_\gamma(\text{-}\ \mathtt{a})$。

证明。令 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$。假设对于每个 $s,t \in \Sigma^*$，$\mathrm{optE}_\gamma(s,t) = \mathrm{optE}_\gamma(t,s)$。 $\mathtt{a}$, ε 的任何扩展比对都必须只有一列。令 $[c]$ 为 $\mathtt{a},\varepsilon$的一个 E-最优比对。那么， c 是从 $\mathtt{a}$ 到 - in$D(\gamma)$ 的最小权重游走。因此， $d(\mathtt{a},\text{-}) = v\mathrm{E}_\gamma[c] = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon)$。类似地，$\mathrm{optE}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{a}) = d(\text{-}\ \mathtt{a})$。因此，

$$d(\mathtt{a},\text{-}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\varepsilon) = \mathrm{optE}_\gamma(\varepsilon,\mathtt{a}) = d(\text{-},\mathtt{a})\,.$$

$\mathtt{a},\mathtt{b}$ 的 E-最优比对有一列或两列。如果它只有一列 c，则如上一段所述，我们有 $d(\mathtt{a},\mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b})$。如果 $\mathtt{a},\mathtt{b}$ 的 E-最优比对有两列c_1, c_2，且 c 是从 $\mathtt{a}$ 到 $\mathtt{b}$的最小权重游走，那么根据比对的最优性，我们有

$$\mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) = v\mathrm{E}_\gamma[c_1,c_2] \leq v\mathrm{E}_\gamma[c] = d(\mathtt{a},\mathtt{b})\,.$$

在 E-最优比对 $[c_1,c_2]$ 中，有一列（记作 c_1）以 - 结尾，而 c_2 以 - 开头。因此，将这两列拼接起来，我们得到一个扩展比对 $[c' = c_1(1)(= \mathtt{a}) \cdots c_1(m_1-1)\text{-}c_2(2) \cdots c_2(m_2)(= \mathtt{b})]$。该比对只有一列满足 $v\mathrm{E}_\gamma[c_1,c_2] = v\mathrm{E}_\gamma[c']$。由于 c' 是从 $\mathtt{a}$ 到 $\mathtt{b}$ 的游走，因此

$$d(\mathtt{a},\mathtt{b}) \leq v\mathrm{E}_\gamma[c'] = v\mathrm{E}_\gamma[c_1,c_2] = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b})\,.$$

因此， $d(\mathtt{a},\ \mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\ \mathtt{b})$ 在这种情况下也成立。类似地， $d(\mathtt{b},\ \mathtt{a}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{b},\ \mathtt{a})$，由此我们可以得出结论；因为 $\mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\ \mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{b},\ \mathtt{a})$，所以

$$d(\mathtt{a},\mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{a},\mathtt{b}) = \mathrm{optE}_\gamma(\mathtt{b},\mathtt{a})\,.$$

现在假设对每个 $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma^*$-， $d(\mathtt{a},\mathtt{b}) = d(\mathtt{b},\mathtt{a})$。令 $[c_1,\ldots,c_n]$为 s,t的一个E-最优比对。显然， $[c'_1,\ldots,c'_n]$ 使得每个 c'_i 都是从 $c_i(m_i)$ 到 $c_i(1)$ 的最小权重游走的集合，是 t,s 的一个比对，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{optE}_\gamma(s,t) &= \sum_i v\mathrm{E}_\gamma[c_i] = \sum_i d(c_i(1),c_i(m_i))\\ &= \sum_i d(c_i(m_i),c_i(1)) = v\mathrm{E}_\gamma[c'_1,\ldots,c'_n]\\ &\le \mathrm{optE}_\gamma(t,s)\,.\end{aligned}$$

用类似的推理可得，$\mathrm{optE}_\gamma(t,s) \le \mathrm{optE}_\gamma(s,t)$，由此可以得出结论：$\mathrm{optE}_\gamma(s,t) = \mathrm{optE}_\gamma(t,s)$。 □

引理 31. $\mathrm{optE}_\gamma(s,u) \le \mathrm{optE}_\gamma(s,t) + \mathrm{optE}_\gamma(t,u)$ 对任意 $s,t,u \in \Sigma^*$ 均成立。

证明。 设 $[c^{st}_1,\ldots,c^{st}_{n_{st}}]$ 和 $[c^{tu}_1,\ldots,c^{tu}_{n_{tu}}]$ 分别是 s,t和 t,u的 E-最优比对。考虑数的集合 $I = \{i_1,\ldots,i_{|t|}\}$ 和$J = \{j_1,\ldots,j_{|t|}\}$，使得
$i_1 < i_2 < \ldots < i_{|t|}$、 $j_1 < j_2 < \cdots < j_{|t|}$，且$t(k) = c^{st}_{i_k}(m_{i_k}) = c^{tu}_{j_k}(1)$。

设 A 是 s,u 的比对，其列按以下规则定义：对于每个 $k \notin I$，列 c^{st}_k 是 A 的一列；对于每个 $k \notin J$， c^{tu}_k 是 A 的一列；并定义列

$$c^{st}_{i_k}(1)\ c^{st}_{i_k}(2)\ \cdots\ c^{st}_{i_k}(m_{i_k}-1)\ t(k)\ c^{tu}_{j_k}(2)\ c^{tu}_{j_k}(3)\ \cdots\ c^{tu}_{j_k}(m_{j_k})\,,$$

若对于每个 $k = 1,\ldots,|t|$， $c^{st}_{i_k}(1) \ne$- 或 $c^{tu}_{j_k}(m_{j_k}) \ne$-。

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{optE}_\gamma(s,u) &\le v\mathrm{E}_\gamma[A] \le v\mathrm{E}_\gamma[c^{st}_1,\ldots,c^{st}_{n_{st}}] + v\mathrm{E}_\gamma[c^{tu}_1,\ldots,c^{tu}_{n_{tu}}]\\ &= \mathrm{optE}_\gamma(s,t) + \mathrm{optE}_\gamma(t,u)\,.\end{aligned}$$

□

现在我们可以给出本节主要结果的证明。

证明。(定理 25的)

首先假设 optE$_\gamma \in$ M。于是，对于任意 s、$t \in \Sigma^*$、$s \neq t$，我们有 optE$\gamma(s,s) = 0$、optE$\gamma(s,t) > 0$，且 optE$\gamma(s,t) =$ optE$\gamma(t,s)$。根据引理 29，我们有 $\gamma_{a\to a} \geq 0$ 以及 $\gamma_{a\to b},\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to a} > 0$，对每个 a $\neq$b $\in \Sigma$ 都成立，因为 optE$\gamma(s,t) > 0$。根据引理 30，对于每个 a, b $\in \Sigma$，我们有 d(a, b) $= d$(b, a)，且d(a, -) $= d$(- a)，因为 optE$\gamma(s,t) =$ optE$\gamma(t,s)$。由此可得 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{E}}$。

反过来，假设 $\gamma \in \mathbb{M}^{\mathrm{E}}$。那么，对每个 a $\neq$ b, a, b $\in \Sigma$, $\gamma_{a\to a} \geq 0$, $\gamma_{a\to b}$, $\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to a} > 0$,d(a, b) $= d$(b, a)，且 d(a, -) $= d$(- a)。由于对每个 a $\neq$ b, a, b $\in \Sigma$, $\gamma_{a\to a} \geq 0$, $\gamma_{a\to b},\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to a} > 0$，因此 $D(\gamma)$ 不含负环。由引理 27 可知，对每个 $s \in \Sigma^*$, optE$\gamma(s,s) = 0$。由于 $\gamma_{a\to a} \geq 0$, $\gamma_{a\to b},\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to a} > 0$，由引理 29 可知，对每个 $s,t \in \Sigma^*$, $s \neq t$, optE$\gamma(s,t) > 0$。由于对每个 a $\neq$ b, a, b $\in \Sigma$, d(a, b) $= d$(b, a)，且 d(a, -) $= d$(- a)，由引理 30 可知，对每个 s, $t \in \Sigma^*$, optE$\gamma(s,t) =$ optE$\gamma(t,s)$。由引理 31 可知，optE$\gamma(s,u) \leq$ optE$\gamma(s,t) +$ optE$\gamma(t,u)$。因此，optE$_\gamma \in$ M。 □

		Pr	*S*	*H*	*P*	*Q*	*M*
(a)	$D(\gamma)$没有负环	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(b)	$\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to b}$, $\gamma_{a\to b} \geq 0$	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
(c)	$\gamma_{a\to a} \geq 0$		⋆			⋆	⋆
(d)	$\gamma_{a\to}$- $\gamma_{\to a} > 0$ 和 $\gamma_{a\to b} > 0$ 如果 a $\neq$ b		⋆			⋆	⋆
(e)	d_γ(a, b) $= d_\gamma$(b, a) 对每个 a, b $\in \Sigma$-		⋆		⋆		⋆

表3：评分矩阵诱导序列上的 optE 所需的充分必要条件 γ 诱导 optEγ-p 于序列上，其中 p 代表度量的各项公理。这些性质用于定义度量空间（$\mathcal{M}$），并推广了前度量（前度量($\mathcal{P}r$)、半度量($\mathcal{S}$)、半度量($\mathcal{H}$)、伪度量($\mathcal{P}$)和拟度量($\mathcal{Q}$)。结果基于第2 节所述的定义以及本节中的引理得出。

6. 结论

本文确立了评分矩阵使加权编辑距离具备度量各项性质的充要条件。对于一类能诱导出归一化编辑距离的评分矩阵子集，我们还刻画了前度量、半度量、半度量、伪度量、拟度量和度量这些广义度量空间。此外，我们定义了扩展比对距离，它考虑将一个序列转换为另一个序列的一组编辑操作，而不论是否存在相应的标准比对来表示该转换，并描述了一种用于寻找权重最小的编辑操作序列的判据。与加权编辑距离类似，我们确定了能为扩展比对距离诱导出度量各项性质的评分矩阵类别。

参考文献

Altschul, S.F., Gish, W., Miller, W., Myers, E.W., Lipman, D.J., 1990年。基本局部比对搜索工具。《分子生物学杂志》215，403–410。Araujo, E., Rozante, L.C., Rubert, D.P., Martinez, F.V., 2021年。归一化多序列比对算法，载于：Ahn, H.K., Sadakane, K.（编），第32届国际算法与计算研讨会（ISAAC 2021）论文集，Schloss Dagstuhl – Leibniz- Zentru m f¨ur Informatik，德国达格施图尔。第40:1–40:16页。Araujo, E., Soares, J., 2006年。诱导序列度量的评分矩阵，载于：Correa, J.R., Hevia, A., Kiwi, M.A.（编），拉丁美洲理论计算机科学研讨会（LATIN 2006）论文集，施普林格。第68–79页。Arkhangel'skiˇı, A.V., Pontryagin, L.S., 1990年。《一般拓扑学I：基本概念与构造、维数理论》。施普林格出版社，柏林。Barton, C., Flouri, T., Iliopoulos, C.S., Pissis, S.P., 2015年。具有有界空位数的全局和局部序列比对。《理论计算机科学》582，1–16。Chaurasiya, R.K., Londhe, N.D., Ghosh, S., 2016年。一种新颖的基于加权编辑距离的拼写纠正方法，可提高基于天城文的P300拼写器系统的可靠性。《IEEE Access》4，8184–8198。

Chenna, R., Sugawara, H., Koike, T., Lopez, R., Gibson, T.J., Higgins, D.G., Thompson, J.D., 2003年。使用Clustal系列程序进行多序列比对。《核酸研究》31，3497–3500。Fisman, D., Grogin, J., Margalit, O., Weiss, G., 2022年。统一操作代价下的归一化编辑距离是一种度量。arXiv预印本 arXiv:2201.06115。de la Higuera, C., Mic´o, L., 2008年。一种上下文归一化编辑距离，载于：2008年IEEE第24届数据工程国际会议研讨会，IEEE。第354–361页。Karplus, K., Barrett, C., Hughey, R., 1998年。用于检测远缘蛋白质同源性的隐马尔可夫模型。《生物信息学》14，846–856。Kim, Y., 1968年。伪拟度量空间。《日本学士院纪要》A辑，数学科学44，1009–1012。Levenshtein, V.I., 1965年。能够纠正删除、插入和逆转的二进制编码。《苏联物理学文献汇编》10，707–710。Lipman, D.J., Altschul, S.F., Kececioglu, J.D., 1989年。一种用于多序列比对的工具。《美国国家科学院院刊》86，4412–4415。Lipman, D.J., Pearson, W.R., 1985年。快速、灵敏的蛋白质相似性搜索。《科学》227，1435–1441。Marzal, A., Vidal, E., 1993年。归一化编辑距离的计算及其应用。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》15，926–932。Needleman, S.B., Wunsch, C.D., 1970年。一种适用于搜索两种蛋白质氨基酸序列相似性的一般方法。《分子生物学杂志》48，443–453。Notredame, C., Higgins, D.G., Heringa, J., 2000年。T-Coffee：一种快速、准确进行多序列比对的新方法。《分子生物学杂志》302，205–217。Pearson, W.R., 2013年。选择合适的相似性评分矩阵。《生物信息学当前方案》43，3.5.1–3.5.9。

Sellers, P.H., 1974年. 关于进化距离的理论与计算. SIAM应用数学杂志 26, 787–793. Smith, T.F., Waterman, M.S., 1981年. 分子共有子序列的识别. 分子生物学杂志 147, 195–197. Steen, L.A., Seebach, J.A., 1978年. 拓扑学中的反例. 第2版，施普林格出版社. Sun, Y., Ni, Z., Chng, C.K., Liu, Y., Luo, C., Ng, C.C., Hanu, J., Ding, E., Liu, J., Karatzas, D., Chan, C.S., Jin, L., 2019年. ICDAR 2019年大规模街景文本部分标注竞赛-RRC-LSVT, 载于：2019年国际文档分析与识别会议 (ICDAR)，IEEE. 第1557–1562页. Wilson, W., 1931 年 a. 关于拟度量空间 .《美国数学杂志》 43, 675–684. Wilson, W., 1931年b. 关于半度量空间.《美国数学杂志》53, 361–373. Yujian, L., Bo, L., 2007年. 一种归一化莱文斯坦距离度量. IEEE模式分析与机器智能汇刊 29, 1091–1095.