arXiv:2303.08726v1 [math.CO] 15 Mar 2023

极大 2-平面图中的边数*

Michael Hoffmann[1][0000−0001−5307−7106] 和
MeghanaM. Reddy[1][0000−0001−9185−1246]

瑞士苏黎世联邦理工学院计算机科学系,
hoffmann,meghana.mreddy@inf.ethz.ch

摘要。 如果一个图的局部交叉数为二，即可以在平面上绘制，使得每条边至多有两个交叉点，则称该图为 2-*planar* 。如果无法添加任何边而使所得图仍保持 2-平面，则称该图为 *maximal* 2-*planar* 。一个有 n 个顶点的 2-平面图至多有 $5n-10$ 条边，而某些（极大）2-平面图——称为 *optimal* 2-*planar*——达到了这一上界。然而，与极大平面图形成鲜明对比的是，极大 2-平面图的边数可能少于可能的最大边数。本文通过证明每个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大 2-平面图至少有 $2n$ 条边，确定了极大 2-平面图的最小边密度。我们还证明，这一界在相差一个加性常数的意义下是紧的。下界基于对该图若干特定绘制类别中度分布的分析。上界构造则通过借助计算机辅助，仔细探索可容许绘图的空间来验证。

关键词： k-平面图 · 局部交叉数 · 饱和图 · 超越平面图。

1 引言

极大平面图（又称（组合）三角剖分）是一类相当重要且经过深入研究的图，具有许多良好而实用的性质。首先，边数由顶点数唯一确定：每个有 $n \geq 3$ 个顶点的极大平面图都有 $3n-6$ 条边。自然会让人想知道，类似的结论是否也适用于各种近似平面图族；在过去十年间，这些图受到了相当多的关注；例如参见 [11,14]。

本文关注 k-平面图，具体而言是 $k=2$。这类图的局部交叉数至多为 k，也就是说，它们可以在 R^2 中绘图，使得每条边至多有 k 个交叉点。1-平面图这一类

* 两位作者均获得瑞士国家科学基金会资助，资助项目为 DACH 合作项目 *Arrangements and Drawings* （瑞士国家科学基金会项目 200021E-171681）。本文（不含附录）发表于第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）。

最初由 Ringel [20] 在平面图的顶点-面染色问题中引入。后来，Pach 和 T´oth [19] 利用 k-平面图的边数上界，推导出了交叉引理的一个改进版本。该引理根据简单图（没有环或多重边）的顶点数和边数，给出了其交叉数的下界。k-平面图这一类在边收缩下并不封闭；正如 Korzhik [16] 所证明的，即使对于 $k = 1$，也存在无穷多个极小非1平面图。

k-平面图在含有 n 个顶点时，其边数上限会随 k增加，但具体的依赖关系尚不明确。对于能够进行简单 k-平面绘图的图，Ackerman 和 Pach 以及 T´oth [1,19] 给出了通用上界 $O(\sqrt{k}n)$；也就是说，在这种绘图中，任意两条边至多有一个公共点。只有当 k 较小时，我们才有紧确界。含有 n 个顶点的 1-平面图至多有 $4n - 8$ 条边；正如 Bodendiek、Schumacher 和 Wagner [8]所证明的，有无穷多个最优 1-平面图能够达到这一上界。含有 n 个顶点的 2-平面图至多有 $5n - 10$ 条边；正如 Pach 和 T´oth [19]所证明的，有无穷多个最优 2-平面图能够达到这一上界。事实上，最优 1-平面图由 Suzuki [22] 给出了完整刻画，最优 2-平面图则由 Bekos、Kaufmann 和 Raftopoulou [6]给出了完整刻画。

关于极大 k-平面图的研究要少得多，也就是说，对于这类图，添加任意一条边都会使所得图不再是 k-平面图。与极大平面图和最优平面图重合的平面图不同，很容易找到并非最优的极大 k-平面图；一个显而易见的例子是完全图 K_5。事实上，对于 k-平面图而言，极大与最优之间的差距可能相当大，甚至——或许有悖直觉—— k-平面图的极大图 $k \geq 1$ 的边数可能少于顶点数相同的极大平面图。Hud´ak、Madaras 和 Suzuki [15]描述了一个极大 1-平面图的无限族，其边数仅为 $8n/3 + O(1) \approx 2.667n$ 。Brandenburg、Eppstein、Gleißner、Goodrich、Hanauer 和 Reislhuber [9]给出了一种改进的构造，其边数为 $45n/17 + O(1) \approx 2.647n$；他们还证明每个极大 1-平面图至少有 $28n/13 - O(1) \approx 2.153n$ 条边，从而确立了一个下界。后来，Bar´at 和 T´oth [4]将这个下界提高到了 $20n/9 \approx 2.22n$ 。

Auer、Brandenburg、Gleißner 和 Hanauer 研究了极大 2-平面图，并构造了一个无限族的极大 2-平面图，其具有 n个顶点和 $387n/147 + O(1) \approx 2.63n$ 条边。[1] 据我们所知，对于 $k \geq 2$，尚无关于极大 k-平面图边数的非平凡下界。

结果。 本文给出了极大 2-平面图最小边数的紧确界，误差至多为一个加法常数。

定理 1。 每个具有 $n \geq 5$ 个顶点的极大 2-平面图至少有 $2n$ 条边。

[1] 通过证明该图的 2-平面绘图唯一，来证明其极大性。然而，这篇简短的摘要中并未给出唯一性的明确证明。

定理 2。 存在一个常数 $c \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个具有 n 个顶点且至多有 $2n + c$ 条边的极大 2-平面图。

相关工作。 简单图绘制的极大性也得到了研究。设 $\mathcal{D}$ 为一类绘制。如果无法向 D 添加任何边，使所得绘制仍属于 $\mathcal{D}$，则称绘制 $D \in \mathcal{D}$ 是饱和的 。对于简单绘制这一类，Kynˇcl、Pach、Radoiˇci´c 和 T´oth [17] 证明，任何具有 n 个顶点的饱和绘制至少有 $1.5n$ 条边，并且存在边数不超过 $17.5n$ 的饱和绘制。Hajnal、Igamberdiev、Rote 和 Schulz [12]将上界改进为 $7n$ 。Chaplick、Klute、Parada、Rollin 和 Ueckerdt [10] 研究了 $k \geq 4$的饱和 k-平面绘制，并针对各种交叉限制类型，得到了关于 n的紧确线性界，其中常数取决于 k。对于 1-平面绘制这一类，Brandenburg、Eppstein、Gleißner、Goodrich、Hanauer 和 Reislhuber [9] 证明，存在边数不超过 $7n/3 + O(1) \approx 2.33n$ 的饱和绘制。在下界方面，Bar´at 和 T´oth [4] 给出的上述 $20n/9 \approx 2.22n$ 条边的界，实际上适用于饱和 1-平面绘制。对于 2-平面绘制这一类，Auer、Brandenburg、Gleißner 和 Hanauer [3]描述了边数不超过 $4n/3 + O(1) \approx 1.33n$ 的饱和绘制；Bar´at 和 T´oth [5] 则证明，任何具有 n 个顶点的饱和 2-平面绘制至少有 $n - 1$ 条边。

尽管总体思路相似，饱和绘制与极大抽象图有很大不同。要得到稀疏的饱和绘制，可以同时选择图及其绘制；而要得到稀疏的极大图，则只能选择图，并且需要掌握所有可能的绘制。适用于饱和绘制的通用下界也适用于极大图，而适用于极大图的存在性上界也适用于饱和绘制。但用这种方式得到的界通常远不够紧；例如，可将饱和 2-平面绘制的边数范围（ n 到 $4n/3$ ）与我们对极大 2-平面图给出的 $2n$ 条边的界作比较。

2 预备知识

图 $G = (V, E)$ 的绘制是一个映射 $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$，它将每个顶点 $v \in V$ 映射到点 $\gamma(v) \in \mathbb{R}^2$，并将每条边 $uv \in E$ 映射为一条简单（单射）曲线 $\gamma(uv)$，其端点为 $\gamma(u)$ 和 $\gamma(v)$，并满足以下条件：(1) γ 在 V 上是单射；(2) 对所有 $uv \in E$，均有 $\gamma(uv) \cap \gamma(V) = \{\gamma(u)\ \gamma(v)\}$；(3) 对每对满足 $e_0 \neq e_1$ 的 e_0、$e_1 \in E$，曲线 $\gamma(e_0)$ 和 $\gamma(e_1)$ 至多有有限个交点，且每个交点要么是公共端点，要么是适当的横截交叉（也就是说，这些曲线之间不存在接触点）。$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(G)$ 的连通分支就是 γ 的面。面 f 的边界记作 ∂f。

为避免记号繁杂，我们通常将顶点和边与其在给定绘图中的几何表示等同看待。如果每对边至多有一个公共点，则称该绘图为简单绘图。对于 $k \in \mathbb{N}$，如果每条边至多有 k 个交叉点，则称该绘图为 k-平面绘图。如果一个图存在 k-平面绘图，则称该图为 k-平面图。

如果无法向一个图添加任何边而使所得图仍为 k-平面，则称该图为极大 k-平面图。

为了分析一个 k-平面图，通常会分析它的某个 k-平面绘图。因此，如果可能，对该绘图施加额外限制是有益的。其中一种限制是考虑一个交叉点最少的 k-平面绘图，即在该图的所有 k-平面绘图中，使边交叉总数最少的绘图。对于较小的 k，这样的绘图总是简单的；对于 $k \geq 4$，一般情况下则并非如此 [21, 脚注 112]。

引理 3（Pach、Radoi˘ci´c、Tardos 和 T´oth [18, 引理 1.1]）。对于 $k \leq 3$，每个交叉点最少的 k-平面绘图都是简单的。

在图中，我们采用以下约定来表示边：无交叉边用绿色表示，单交叉边用紫色表示，双重交叉边用蓝色表示，而交叉点数量不确定的边用黑色表示。

连通性。接下来，我们汇总最大 k-平面图及其绘图的一些基本性质。其中一些或许是众所周知的，但为求完整起见，我们在附录 A 中给出（简单的）证明。（在 PDF 中，指向上方的蓝色三角形链接到正文中的陈述，指向下方的红色三角形链接到附录中的证明。）

引理 4。设 D 是最大 k-平面图 G 的一个交叉数最小的 k-平面绘图，且 u 和 v 是位于 D 中某个公共面上（即其边界上）的两个顶点。那么，uv 是 G 的一条边，并且它在 D 中无交叉。

引理 5。设 D 是一个有 n 个顶点的最大 k-平面图的交叉数最小的 k-平面绘图，其中 $k \leq 2 \leq n$。那么，每个顶点都与 D 中的一条无交叉边关联。

引理 6。对于 $k \leq 2$，每个有 $n \geq 3$ 个顶点的最大 k-平面图都是2-连通的。

3 下界

本节通过分析顶点度的分布，推导极大 2-平面图边密度的下界。由于我们的目标是得到 $2n$ 条边的下界，因此需要证明平均顶点度至少为四。随后即可根据握手引理得出密度下界。然而，极大 2-平面图中可能存在度小于四的顶点。根据引理 6，我们知道每个顶点的度至少为二。不过，图中可能存在度为二的顶点，即所谓的孤立顶点，也可能存在度为三的顶点。

为了将平均度的下界提高到四，我们采用一种收费方案：论证每个低度顶点，也就是每个度为

二或三的顶点，都会认领相邻高次顶点上的一定数量的半边，也就是度至少为五的顶点上的半边。认领互不重叠，即高次顶点上的每条半边至多被认领一次。我们使用半边一词，是因为认领的对象不是整条边，而是它与某个高次端点的关联。与另一端点的关联可能会由另一个顶点独立认领，也可能不会。对于一条边 uv，我们用 $\overrightarrow{uv}$ 表示其在 v 处对应的半边，用 $\overrightarrow{vu}$ 表示其在 u 处对应的半边。半边 $\overrightarrow{uv}$ 继承其所属边 uv 的性质，例如在特定绘图中是否有交叉。度为四的顶点具有特殊作用，因为它们既不是低度顶点，也不是高次顶点。不过，与孤立顶点相邻的度为四的顶点，按低度顶点处理。更确切地说，我们的收费方案如下：

(C1) 每个孤立顶点从其每个高阶邻点处认领两条半边。(C2) 每个三度顶点从某个高阶邻点处认领三条半边。(C3) 每个与孤立顶点相邻的四度顶点 h 从某个度为 ≥ 6 的邻点 v 处认领两条半边。此外，顶点 h 和 v 相邻，因此根据 (C1)，h 也从 v 处认领两条半边。若 $\deg(v) = 6$，则 v 恰好与一个孤立顶点相邻。(C4) 至多有一个顶点从五度顶点处认领（一条或多条）半边。

本节余下部分安排如下。首先，我们在第 3.1 节给出定理 1 的证明。然后，我们在第 3.2–3.5 节证明收费方案的有效性，并探讨低度顶点的一些有用性质。具体而言，我们将在下文定理 1 的证明中使用以下结论。

引理 7. 设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大 2-平面图，设 h 是一个孤立顶点，且 x、y 是 G中 h 的邻点。那么我们有 $\deg(x) \geq 4$，并且 $\deg(y) \geq 4$。

引理 8. 设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大 2-平面图。那么，G 中度为 i 的顶点至多与 $\lfloor i/3 \rfloor$ 个孤立顶点相邻。

3.1 定理1的证明

设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大 2-平面图，并设 m 表示 G中的边数。我们用 v_i 表示 G中度为 i 的顶点数。根据引理 6，我们知道 G 是 2-连通的，因此有 $v_0 = v_1 = 0$。于是，我们有

$$n = \sum_{i=2}^{n-1} v_i \text{ and by the handshaking lemma } 2m = \sum_{i=2}^{n-1} i \cdot v_i. \tag{1}$$

度为四或更高的顶点可以与孤立顶点相邻。令 $v_i^{\mathrm{h}j}$ 表示在 G中与 j 个孤立顶点相连的度为 i 的顶点数。由引理 8 可得

have

$$v_i = \sum_{j=0}^{\lfloor i/3 \rfloor} v_i^{\mathrm{h}j} \qquad \text{for all } i \geq 3. \tag{2}$$

由引理 7 可知，孤立顶点的两个邻点的度都至少为四。因此，对孤立顶点与其邻点之间的边进行双重计数，可得

$$2v_2 \leq v_4^{\mathrm{h}1} + v_5^{\mathrm{h}1} + v_6^{\mathrm{h}1} + 2v_6^{\mathrm{h}2} + v_7^{\mathrm{h}1} + 2v_7^{\mathrm{h}2} + 2v_8 + v_9^{\mathrm{h}1} + 2v_9^{\mathrm{h}2} + 3v_9^{\mathrm{h}3} + \sum_{i=10}^{n-1} \lfloor i/3 \rfloor v_i. \tag{3}$$

如果顶点 u 在顶点 v 处认领半边，我们就说 v 提供服务 u。根据 (C2)，每个三度顶点都会在一个高度顶点处认领三条半边。根据 (C3)，每个与孤立顶点相邻的四度顶点连同该孤立顶点，都会在一个高次顶点处认领四条半边。我们将这些认领的数量相加，并评估不同类型的高次顶点最多能为其中多少项提供服务。

一般而言，度为 $i \geq 5$ 的高次顶点最多能为 $\lfloor i/3 \rfloor$ 项此类认领提供服务。对于 $i \in \{5, 6, 7, 9\}$，我们会进行更细致的分析，并考虑相邻孤立顶点的数量。具体而言，根据 (C3) 和 (C4)，一个五度顶点最多为一个低度顶点提供服务，该低度顶点可以是孤立顶点，也可以是三度顶点。一个六度顶点可以为两个三度顶点提供服务，但前提是它不与孤立顶点相邻。如果一个六度顶点为一个四度顶点提供服务，根据 (C3)，它恰好与一个孤立顶点相邻。特别地，与两个孤立顶点相邻的六度顶点不会为任何三度或四度顶点提供服务。综上，我们得到以下不等式:

$$v_3 + v_4^{\mathrm{h}1} \leq v_5^{\mathrm{h}0} + 2v_6^{\mathrm{h}0} + v_6^{\mathrm{h}1} + 2v_7^{\mathrm{h}0} + 2v_7^{\mathrm{h}1} + v_7^{\mathrm{h}2} + 2v_8 + 3v_9^{\mathrm{h}0} + 2v_9^{\mathrm{h}1} + 2v_9^{\mathrm{h}2} + v_9^{\mathrm{h}3} + \sum_{i=10}^{n-1} \lfloor i/3 \rfloor v_i. \tag{4}$$

将 ((3) + (4))/2 与 (2) 结合可得

$$v_2 + \frac{1}{2}v_3 \leq \frac{1}{2}v_5 + v_6 + \frac{3}{2}v_7 + 2v_8 + 2v_9 + \sum_{i=10}^{n-1} \lfloor i/3 \rfloor v_i. \tag{5}$$

现在，利用这些等式和不等式，我们可以证明 $m - 2n \geq 0$，从而完成定理 1 的证明。我们从左边开始，使用 (1)。

$$\begin{aligned} m - 2n &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} i v_i - 2\sum_{i=2}^{n-1} v_i \;=\; \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i-4}{2} v_i \\ &= -v_2 - \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_5 + v_6 + \frac{3}{2}v_7 + 2v_8 + \frac{5}{2}v_9 + \sum_{i=10}^{n-1} \frac{i-4}{2} v_i \end{aligned}$$

根据 (5)，右侧非负，证毕。

3.2 容许绘制

到目前为止，我们一直研究抽象图 G。为了讨论我们的收费方案，我们还采用 G 的一个适当绘图。具体而言，我们考虑一个定义在 $n \geq 5$ 个顶点上的极大 2-平面图 G，以及 G 的一个交叉数最小的 2-平面绘图 D；在所有此类绘图中，该绘图的双重交叉边数量最少。我们将具有这些性质的绘图称为 G 的可容许绘图。根据引理 3，我们知道 D 是简单的。

3.3 孤立顶点与四度顶点

引理9。设 h 是一个孤立顶点，x、y 是其在 G 中的邻点。那么 x 与 y 在 G 中相邻，且三条边 xy、hx、hy 在 D 中均无交叉。

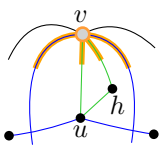
我们将边 xy 称为孤立顶点 h 的底边，它承载 h。

引理 10。 G 的每条边至多承载一个孤立顶点。

根据引理 7，孤立顶点的两个邻点的度都至少为 4。如果一个顶点的度恰好为 4，且与一个孤立顶点相邻，则称其为*T4-H* 型顶点。下面的引理刻画了这些顶点，并保证每个孤立顶点至少有一个高阶邻点。

引理 11。设 u 是一个 *T4-H* 型顶点，在 G 中的邻点为 h、v、w、x，其中 h 是一个孤立顶点，v 是 h 的第二个邻点。那么，在 D 中，uw 和 ux 都是双重交叉的；此外，$D \setminus h$ 中与 uv 相 *incident* 的两个面都是三角面，其边界由与 u 相 *incident* 的边的部分以及与 v 相 *incident* 的双重交叉边构成。进一步地，有 度$(v) \geq 6$；如果 度$(v) = 6$，则 h 是在 G 中与 v 相邻的唯一孤立顶点。

在我们的收费方案中，每个孤立顶点 h 在每个高阶邻点 v 处认领两条半边：半边 $\overrightarrow{hv}$ 和半边 $\overrightarrow{vh}$，其中 uv 表示承载 h 的边。每个 T4-H 型顶点 u 认领 v 处界定与 uv 在 D 中 incident 的三角面的两条双重交叉半边。



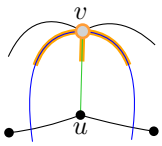
3.4 三度顶点

根据 G 中的邻域以及 D 中其关联边上的交叉点，我们区分出四种不同类型的三度顶点。考虑 G 中的一个三度顶点 u。根据引理 5，D 中每个顶点至少关联一条无交叉边。

T3-1：恰有一条无交叉边。与 u 关联的另外两条边均有交叉点。

引理 12。设 u 是 G 中的一个 *T3-1* 顶点，其邻点为 v、w、x，且边 uv 在 D 中无交叉。那么，D 中与 uv 相接的两个面都是三角形，其边界由与 u 相接的边（的一部分）以及与 v 相接的双重交叉边构成。此外，我们有 度(v) ≥ 5。

在我们的收费方案中，每个 T3-1 顶点 u 都会认领其相邻高次顶点 v 处的三条半边：无交叉半边 $\overrightarrow{uv}$，以及 v 处相邻的两条半边；根据引理 12，这两条半边都是双重交叉的。



T3-2：恰有两条无交叉边。与 u 相接的第三条边是交叉边。

引理 13。设 u 是 D 中的一个 *T3-2* 顶点，其邻点为 v、w、x，且 uv 在点 α 处被交叉。那么，D 中 α 是 uv 唯一的交叉点。此外，与 uv 交叉的边是双重交叉边，它与 w 或 x 相接，并且它在 w 或 x 与 α 之间的部分无交叉。

根据下面的引理，我们可以自由选择与 T3-2 顶点 uv 和 ux 相接的两条边中哪一条为单交叉边；见图 1（左图和中图）。

引理 14. 设 u 是 D 中的一个 *T3-2* 顶点，且 u 的邻点为 v、w、x，其中边 uv 被一条（双重交叉）边 wb（单）交叉。则存在 G 的一个可容许绘图 D'，使得 *(1)* 除边 wb 外，D' 与 D 完全相同；且 *(2)* 边 wb 在 D' 中与边 ux 相交。

引理 15. 设 u 是一个 *T3-2* 顶点，其邻点为 v、w、x，且边 uv 在 D 中被一条双重交叉边 wb 单交叉。则 度(w) ≥ 5，且最小值{度(v)，度(x)} ≥ 4。

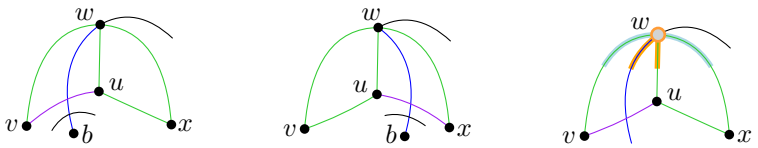


图 1. 引理 14 的示意图（左图和中图）；T3-2 顶点 u 声称拥有（橙色标记）和评估（浅蓝色标记）的半边（右图）。

半边 $\overrightarrow{wx}$ 对于顶点 u 是外围的，当且仅当 (1) u 是 w 和 x的公共邻点；(2) deg(w) ≥ 5；并且 (3) deg(x) ≥ 4。在我们的收费方案中，每个 T3-2 顶点 u 都会在相邻的高次顶点 w处认领三条半边：

半边 $\overrightarrow{uw}$、双重交叉半边 $\overrightarrow{bw}$，以及无交叉外围半边 $\overrightarrow{vw}$ 或 $\overrightarrow{xw}$中的一条；见图 1（右）。前两条与 u密切相关，而后两条半边的情况则更为复杂。最终，我们需要论证 u 可以独自认领两条外围半边中的至少一条。但目前我们说它评估 这两条半边。

T3-3：三条关联边均无交叉。 我们称这样的顶点为 T3-3 型。根据引理 4，可立即得出，每个 T3-3 顶点 u 与其邻点 N(u) 一起在 D 中诱导出一个平面 K_4 。我们进一步将 T3-3 顶点区分为两个子类型。

第一种子类型考虑到 D 中可能存在两个相邻的 T3-3 顶点。我们将这样的顶点对称为低效隐士。注意，根据引理 4，构成低效隐士的两个 T3-3 顶点 z，z' 在 $G \setminus \{z, z'\}$ 中具有相同的邻点。属于低效隐士的 T3-3 顶点称为*T3-3* 隐士。

引理 16。 设 z 是 D 中的一个 *T3-3* 顶点， z' 是 G 中 z 的一个邻点，且 度(z') ≤ 3。那么 z' 也是一个 *T3-3* 顶点；也就是说， z、 z' 在 D 中构成一个低效隐士。

引理 17. 设 z, z' 是 D 中的一个低效隐士，且 x, y 是它们在 G 中的（共同）邻点。那么 xy 是 D 中的一条无交叉边，并且 x 和 y 的度都至少为五。

特别地，引理 17 表明，每个 T3-3 孤点都恰好属于一个低效隐士。在我们的收费方案中，每个 T3-3 孤点会在其两个相邻的高度顶点之一处认领三条半边。更确切地说，设 z， z' 是一个低效隐士，且 x， y 是它在 G 中的邻点。那么，顶点 x， y， z， z' 诱导出 D 的一个平面 K_4 子图 Q 。顶点 z 在 x 处认领 Q 的三条半边，而 z' 在 y 处认领 Q 的三条半边。

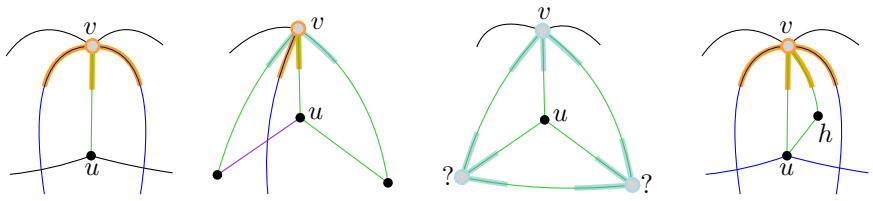
第二种子类型由那些不是 T3-3 孤点的 T3-3 顶点构成；我们称它们为*T3-3* 混合点。根据引理 16，T3-3 混合点的所有邻点的度都至少为四。

引理18. 设 u 是 D 中的一个 *T3-3* 混合点，其邻点为 v、 w、 x。那么 v、 w、 x 的度均至少为四。此外， v、 w、 x 中至少有一个顶点的度至少为六，或者 v、 w、 x 中至少有两个顶点的度至少为五。

令 Q 表示由 u、 v、 w、 x 在 D 中诱导的平面 K_4。在我们的收费方案中，T3-3 混合点 u 在其某个高阶邻点处认领 Q 的三条半边。也就是说，顶点 u 会评估其位于高阶邻点处的所有（至多六条）外围半边。

3.5 收费方案

本节将论证我们的收费方案是可行的，也就是说，低度顶点和 T4-H 顶点提出的所有认领都能由相邻的高阶顶点满足。图 2 总结了不同类型的顶点及其认领。



(a) T3-1 (b) T3-2 (c) T3-3 (d) T4-H

图 2. 一个度为 $u \in \{3,4\}$ 的顶点 u，以及一个与之相邻、在其处 u 认领半边的高次顶点 v。被认领的半边标为橙色。被评估的半边标为浅蓝色：T3-2 顶点认领两条浅蓝色外围边中的一条，而 T3-3 顶点则在其某个高次邻点处认领三条半边。

对于某些半边，很容易看出它们至多被认领一次；这些半边在图 2 中以橙色显示。特别是，显然，与认领它的顶点关联的半边至多被认领一次。我们还需要考虑孤立顶点的认领，这些认领在图中未显示（与 T4-H 型顶点相邻的孤立顶点除外）。

引理 19. 孤立顶点认领的每条半边都只被该孤立顶点认领。

下一个引理将证明我们针对 T3-1 和 T4-H 顶点的收费方案有效。

引理 20. 每条双重交叉半边至多被认领一次。

接下来需要讨论由 T3-2 和 T3-3 顶点对外围半边的认领。每个 T3-2 顶点评估两条外围半边，并需要认领其中一条；每个 T3-3 顶点评估三对半边，并需要认领其中一对。为了为这些顶点找到合适的认领分配，关键在于竞争同一组半边的顶点不能太多。幸运的是，我们可以证明情况并非如此。若边 G 对应的半边中至少有一条由低度顶点 u 评估，则称该低度顶点 u 评估了边 G。

引理 21. 每条边至多由两个顶点评估。

证明。 反设有三个类型为 T3-2 或 T3-3 的顶点 u_0，u_1，u_2，它们分别对应边 uv 的某条半边。于是边 uv 是无交叉的

在 D 中，且 u_0，u_1，u_2 都是 u 和 v 在 G 中的公共邻点。此外，我们可以假设 u_0，u_1，u_2 与 u，v 之间的所有边在 D 中均无交叉：对于 T3-3 顶点，所有关联边本来就无交叉；对于 T3-2 顶点，这由引理 14 可得。换言之，我们在 D 中有一个位于 u_0，u_1，u_2 与 u，v 之间的平面 $K_{2,3}$ 子图 B。令 ϕ_0，ϕ_1，ϕ_2 表示 B 的三个面，使得 $\partial\phi_i = uu_ivu_{i\oplus1}$，其中 $\oplus$ 表示模 3 加法。

考虑某个 $i \in \{0,1,2\}$。由于 $\deg(u_i) = 3$，恰有一个与 u_i 在 G中相邻的顶点 $x_i \notin \{u,v\}$。u_i 到 x_i 在 D 中的边恰好进入 ϕ_i 或 $\phi_{i\oplus2}$之一的内部。换句话说，对于 ϕ_i 或 $\phi_{i\oplus2}$之一，没有与 u_i 关联的边进入其内部。因此，$G^- := G \setminus \{u,v\}$ 是不连通的；特别是，顶点 u_0，u_1，u_2 至少被分成两个连通分支。不失一般性地假设，在 G^-中，u_0 与 u_1和 u_2 均分离，并令 C_0 表示包含 u_0的 G^- 的连通分支。令 D_0表示由 C_0 以及 C_0与 u，v之间的所有边所诱导的 D 的子图。注意，uu_0v 是沿着 D_0外面的无交叉路径。

我们将 D_0 从 D 中移除，并将其放回紧邻无交叉路径 uu_1v的位置，放在与 u_1 相邻且不被任何与 u_1相邻的边进入的面（ϕ_0 或 ϕ_1）中；示意见图 3。此外，如有必要，我们会相对于 u，v翻转 D_0，以确保在所得绘图 D'中，分别与 u 和 v相邻的两条无交叉路径 uu_1v 和 uu_0v 在边的循环次序中连续出现，从而形成一个四边形面 uu_1vu_0。绘图 D' 是 G的一个可容许绘图，我们可以在面 uu_1vu_0中添加一条无交叉边 u_0u_1，这与 G的极大性矛盾。因此，G中不存在这样的顶点三元组 u_0，u_1，u_2。

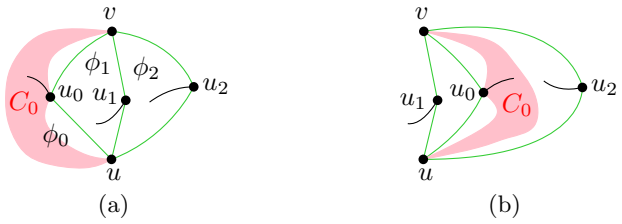


图 3. 当三个顶点 u_0，u_1，u_2 都声称拥有边 uv的一条半边时的重新绘制。

注意，引理 21 解决了 T3-3 孤点的认领问题，因为它们成对出现，且评估的是相同的半边。根据引理 21，没有其他顶点评估这些半边，因此，我们将每条半边分配给其一个端点的方案是可行的。接下来只需考虑 T3-2 顶点和 T3-3 混合点。我们先从 T3-2 顶点开始。考虑一条由低度顶点 u 评估的边或半边 e。如果存在另一个也评估 e 的低度顶点 $u' \neq u$，我们就称 e 是有争议的。不具有争议的边或半边称为无争议的。

引理 22. 所有 *T3-2* 顶点的认领都可以通过贪心方式解决。

证明。设 u 是 D 中的一个 T3-2 顶点，并用 $\overrightarrow{wv}$ 和 $\overrightarrow{xv}$ 表示 u 评估的半边。我们通过让 $u_1 := u$ 任意认领 $\overrightarrow{wv}$ 和 $\overrightarrow{xv}$ 之一，来启动一系列针对顶点 u_1、u_2、... 、u_k 的贪心选择；例如，让 u 认领 $\overrightarrow{wv}$（并撤回对 $\overrightarrow{xv}$ 的评估）。更一般地，在选择过程的第 i 步，我们有一个刚刚认领了其所评估的半边 $\overrightarrow{w_iv_i}$ 之一的顶点 u_i。根据引理 21，至多还有另一个顶点 u_{i+1} 也评估 $\overrightarrow{w_iv_i}$。如果不存在这样的顶点 u_{i+1}，那么我们就完成了，选择过程在此以 $i = k$ 结束。否则，我们分两种情况讨论。

情形 *1 (*u_{i+1} 是一个 *T3-2* 顶点*)*。那么，除了 $\overrightarrow{w_iv_i}$ 之外，u_{i+1} 还只评估另一条半边，将其记为 $\overrightarrow{x_{i+1}v_i}$。我们让 u_{i+1} 认领 $\overrightarrow{x_{i+1}v_i}$，然后继续下一步。

情况 *2 (*u_{i+1} 是一个 *T3-3* 混合点*)*。那么，u_{i+1} 也评估 $\overrightarrow{v_iw_i}$，现在对此没有争议；它还会评估位于 w_i 的第二条半边 $\overrightarrow{x_{i+1}w_i}$。我们让 u_{i+1} 同时认领 $\overrightarrow{v_iw_i}$ 和 $\overrightarrow{x_{i+1}w_i}$，然后继续下一步。

要证明选择过程的正确性，只需注意到每一步恰好有一条仍有争议的半边被认领，而评估这条半边的（唯一）顶点的认领会在下一步得到解决。特别地，过程结束时，所有仍被评估的边都未被认领。只要还存在另一个尚未认领所需两条半边之一的 T3-2 顶点 D，我们就从该处再次启动选择过程。因此，最终所有 T3-2 顶点的认领都会得到解决。

此时只剩下处理其余 T3-3 混合点的认领。与 T3-2 顶点相比，它们更棘手，因为它们要求在同一个高次顶点处认领两条半边。我们可以将注意力限制在一类 T3-3 混合点上，并称它们为棘手混合点，因为它们会评估由有争议的半边构成的有向 3-环。考虑一个 T3-3 混合点 u，设 v, w, x 是它在 G 中的邻点。若 u (1) 评估其邻点之间的全部六条半边，并且 (2) 半边 $\overrightarrow{vw}, \overrightarrow{wx}, \overrightarrow{xv}$ 全都有争议，或半边 $\overrightarrow{vx}, \overrightarrow{xw}, \overrightarrow{wv}$ 全都有争议（也可以两组都满足），则称其为棘手的。不棘手的 T3-3 混合点是容易处理的。

引理 23. 所有简单的 *T3-3* 混合体的认领均可在后处理步骤中解决。

证明。令 M 表示 D 中简单的 T3-3 混合点集合。我们不再考虑 M 及其对应的所有评估，并让所有其他（即棘手的）T3-3 混合点进行认领。关于先前的认领，我们不作任何假设，但每个顶点都满足：(1) 仅认领与一个顶点关联的边；(2) 仅认领自己评估过的边。所有棘手的 T3-3 混合点完成认领后，我们按照任意顺序，逐一处理来自 M 的顶点。下文中，术语 已评估 和（未）有争议 均指最初的状态，

即尚未进行任何认领之前。半边的当前状态描述为已认领 或未认领。

考虑一个顶点 $u \in M$。如果并非所有六条半边都由 u 评估，那么它的邻点并非全都是高度数顶点，此时 u 至多有一条外围边存在争议。因此，始终存在一对未被认领、可由 u 认领的半边。另一种情况下，令 H 表示由 u 评估的六条半边组成的集合。根据 (2)， H 中每条无争议的半边都未被认领。根据引理 21，每条边至多由两个顶点评估。因此，对于边 $vx,\ xw,\ wv$，除 u 之外，至多有一个顶点评估该边。这个其他顶点可能认领了相应的半边，但根据 (1)，对于每条边 $vx,\ xw,\ wv$，其对应的两条半边中至少有一条未被认领。

由于 u 是容易的， $\overrightarrow{vw},\ \overrightarrow{wx},\ \overrightarrow{xv}$ 中至少有一个无争议，且 $\overrightarrow{vx},\ \overrightarrow{xw},\ \overrightarrow{wv}$ 中至少有一个无争议。不失一般性，假设 $\overrightarrow{vw}$ 无争议。下面分三种情况讨论。

情形 *1*（$\overrightarrow{vx}$ 无争议）。至少 $\overrightarrow{xw}$ 或 $\overrightarrow{wx}$ 中有一个未被认领。因此，我们可以让 u 认领以下两对中的一对： $\overrightarrow{xw}$、 $\overrightarrow{vw}$ 或 $\overrightarrow{wx}$、 $\overrightarrow{vx}$。

情况 *2*（$\overrightarrow{xw}$ 无争议）。那么我们让 u 认领 $\overrightarrow{vw}, \overrightarrow{xw}$。

情形 *3*（$\overrightarrow{wv}$ 无争议）。如果 $\overrightarrow{xw}$ 或 $\overrightarrow{xv}$ 中有一个未被认领，那么我们让 u 连同边 vw 上与之匹配的半边一起认领它；根据假设，该边无争议。否则， $\overrightarrow{xw}$ 和 $\overrightarrow{xv}$ 都已被认领。那么 $\overrightarrow{wx}$ 和 $\overrightarrow{vx}$ 都未被认领，因此 u 可以放心地认领这两条半边。

接下来还需解决棘手的 T3-3 混合点的认领问题。请注意，棘手与简单的分类取决于其他 T3-3 混合点。例如，某个起初棘手的 T3-3 混合点，在移除另一个简单的 T3-3 混合点后，可能会变得简单。这里我们只需处理在迭代移除所有简单的 T3-3 混合点后仍然棘手的那些 T3-3 混合点。

引理 24. 所有棘手的 *T3-3* 混合点的认领都可以用贪心方式解决。

证明。 设 u 是一个棘手的 T3-3 混合点，其在 G 中的邻点为 v, w, x。由于每个棘手的 T3-3 混合点的三条外围边都受到其他棘手的 T3-3 混合点的争议，因此存在一个由棘手的 T3-3 混合点构成的圆周序列 $u = u_1, \dots, u_k$，其中 $k \geq 2$，这些混合点是 v 在 G 中的邻点，其连接边按此顺序环绕 v 出现在 D 中。根据 k 的奇偶性，我们分两种情况讨论。

情形 *1*（k 为偶数）。然后，我们让每个 u_i（ i 为奇数）认领其在 v处评估的两条半边。这解决了所有 u_i（ i 为奇数）的认领问题，并且我们现在认领所有 u_i（ i 为偶数）都是容易的。为此，考虑一个 u_i（ i为偶数）。它在 v 处评估的两条半边现在都已被认领；将这两条半边记为 $\overrightarrow{w_iv}$ 和 $\overrightarrow{x_iv}$。由此可知， $\overrightarrow{vw_i}$ 和 $\overrightarrow{vx_i}$ 都尚未被认领，而 u_i 是唯一仍在评估它们的顶点。由于 u_i 评估的半边中不再存在由有争议的半边构成的有向 3-环，因此顶点 u_i 是容易的。

情况 *2*（k 为奇数）。然后，我们让每个 u_i（ $i<k$ 为奇数）认领其在 v 处评估的两条半边。这解决了这些 u_i 的认领问题，并使所有 u_i（ $i<k-1$ 为偶数）都变得容易，与上文情形 1 相同。接下来还需讨论 u_{k-1}和 u_k。令 x_iv 表示由 u_i 和 u_{i+1}（对于 $1\leq i<k$）共同评估的边，并令 x_kv 表示由 u_k 和 u_1共同评估的边。由于 $\overrightarrow{x_kv}$ 已被 u_1认领，我们可以让 u_k 连同它一起认领 $\overrightarrow{vx_k}$ 和 $\overrightarrow{x_{k-1}x_k}$。这样一来，$u_{k-1}$ 就变得容易了，因为 $\overrightarrow{vx_{k-2}}$ 和 $\overrightarrow{vx_{k-1}}$ 现在都是无争议的。不过，我们仍需处理 u_k对 $\overrightarrow{x_{k-1}x_k}$ 提出的粗体认领。为此，我们采用与引理 22 的证明中相同的贪心选择过程，不同之处在于，这里我们从选择 $\overrightarrow{x_{k-1}x_k}$开始，因为它是唯一已被认领的有争议半边，而且在此过程中，我们只会遇到（棘手的）T3-3 混合点。

我们通过解决其认领或使其变得容易，至少消除两个棘手的 T3-3 混合点。因此，经过有限步之后，将不再有棘手的 T3-3 混合点。

现在，我们对收费方案的分析几乎完成了。不过，我们仍需证明关于性质 (C4) 中五度顶点的认领是正确的。原则上，一个五度顶点的两条半边可能由一个孤立顶点认领，而剩余三条半边由一个三度顶点认领。但我们可以证明这是不可能的。

引理 25. 至多有一个低度顶点会认领五度顶点处的半边。

4 上界：定理 2 的证明概要

本节介绍一种构造边数较少的极大 2-平面图族的方法，并对该图族进行完整描述。但受篇幅限制，我们仅对证明中较具挑战性的部分给出非常粗略的概述：证明这些图是极大2-平面图。附录 E 给出了本节的完整版本，包含所有证明。

这些图大致可以描述为编织圆柱网格。更确切地说，对于给定的 $k\in\mathbb{N}$，我们按如下方式构造一个含有 $10k+140$ 个顶点的图 G_k。

– 取 k 个 C_{10} 的副本，其中 C_{10} 是一个有 10 个顶点的圈，并将它们记为 $D_1,\dots,D_k$。对于 $i\in\{1,\dots,10\}$，将 D_i 的顶点记为 $v_0^i,\dots,v_9^i$，使得 D_i 的边为 $\{v_j^iv_{j\oplus1}^i:$ $0\leq j\leq 9\}$，其中 $\oplus$ 表示模 10 加法。– 对于每个 $i\in\{1,\dots,k-1\}$，用编织匹配连接 D_i 和 D_{i+1} 的顶点，具体如下。若 j 为偶数，则添加边 $v_j^iv_{j\oplus8}^{i+1}$ 到 G_k；若 j 为奇数，则添加边 $v_j^iv_{j\oplus2}^{i+1}$ 到 G_k。图 4（左）给出了示意图。– 对于 D_1 和 D_k 的每条边，我们都附加一个构件 $X\simeq K_9\setminus(K_2+K_2+P_3)$，以禁止这些边上发生交叉点。将 X 的顶点记为 $x_0,\dots,x_8$，使得 $\deg_X(x_0)=\deg_X(x_1)=8$，$\deg_X(x_8)=6$，且所有其他顶点的度均为 7。令 x_6,x_7 为 x_8 的非邻点。对于 D_1 的一条边 e

和 D_k，我们附加一个 X 的副本，使得 e 在该副本中对应于边 x_6x_7。由于 D_1 和 D_k 中总共有 20 条边，且每个 X 的副本会增加 7 个顶点，因此通过这些构件，总共向 G_k 增加了 $20 \cdot 7 = 140$ 个顶点。– 最后，对于所有 $0 \le j \le 9$ 和 $i \in \{1, k\}$，添加边 $v_j^i v_{j\oplus 2}^i$。

至此，图 G_k 的描述便告完成。注意，G_k 有 $10k + 140$ 个顶点和 $10k + 10($ $k - 1)$ 条 $+ 20 \cdot 31 + 2 \cdot 10 = 20k + 630$。因此，要渐近地证明定理 2，只需选取 $c \ge 630 - 2 \cdot 140 = 350$ 并证明 G_k 是极大 2-平面图。随后，通过一些局部小幅修改，我们便可得到对所有 n 值都成立的结论。

要证明 G_k 是 2-平面图，只需给出它的一个 2-平面绘图。这样的绘图可由图 4 推得：(1) 使用图 4（左）所示的绘图，将圈 D_1、.....、D_k 及其连接边嵌套绘制；(2) 使用图 4（右）所示的绘图，绘制所有附着在 D_1 和 D_k 的边上的 X 的副本；(3) 分别在 D_1 和 D_k 的内部与外部绘制 D_1 和 D_k 的顶点之间其余的边。

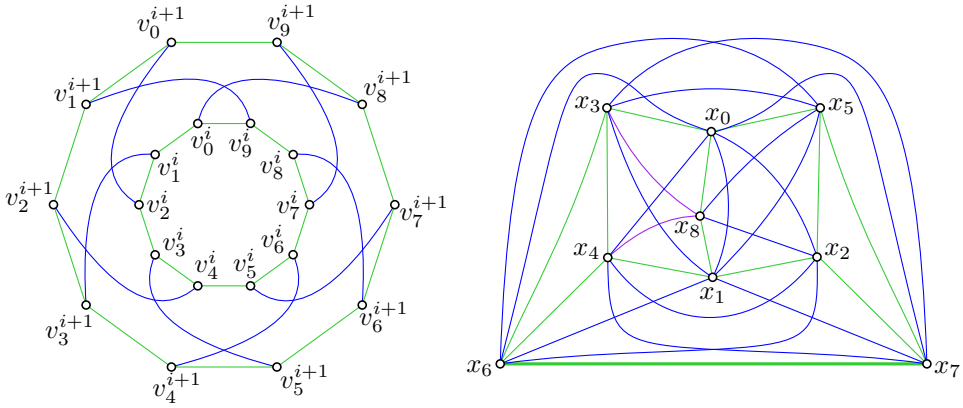


图 4. G_k中两个连续十圈之间的编织匹配，以蓝色显示（左）；附加到 G_k 的第一个和最后一个十圈的边上的构造图 X（右）。

不过，要证明 G_k 是极大2-平面图，则要困难得多。事实上，我们不知道有什么直接的方法可以证明这一点。相反，我们证明 G_k 本质上只有一种 2-平面绘图，即上文所述的绘图。随后，只需检查该绘图并观察到无法再添加任何边，即可得出极大性，因为每一对非邻接顶点都被双交叉边构成的圈隔开。

因此，我们还需要证明 G_k 有唯一的 2-平面绘图。我们采用了一种略显蛮力的方法来解决这个问题：借助计算机辅助，枚举 G_k的所有 2-平面绘制。不过，如何

做到这一点并不显而易见，因为：（1）一个图的（即使是 2-平面）绘图空间也可能极其庞大；（2）(G_k) 是一个无限族；（3）即使对于较小的 k，单个图 G_k 也相当庞大。

首先，构件图 X 的规模是一个较小的常数。因此，可以单独分析它，无需在分析 G_k时显式纳入这些构件。相反，我们将 D_1 和 D_k 的边视为不可交叉，以此计入这些构件的影响。这样一来，我们也避免了将附加的 X 副本放在相应圈的任一侧所产生的所有变化都计为不同的绘图。事实上，由于其自同构，构件 X 本身有几种形式上不同的 2-平面绘图。但在论证 G_k的极大性时，这些差异并不重要。不过，正是这些变化使得 G_k 的 2-平面绘图仅在本质上 唯一。

我们也忽略沿着 D_1 和 D_k的长度为二的边。将 G_i 的所得子图记为 G_i^- 。对于所有 $i \in \mathbb{N}$，我们迭代枚举 G_i^- 的 2-平面绘图，其中只有第一个圈 D_1 的边标记为不可交叉（而最后一个圈 D_i的边不标记为不可交叉）。所有绘图均用双连通边表（DCEL） [7, Chapter 2]表示。作为基例，我们采用 $G_1^- = D_1$的唯一平面绘图（在定向意义下唯一；不失一般性，选取逆时针定向）。对于计算得到的每个绘图 Γ，其中一个特定的由十个顶点组成的圈标记为 D，我们考虑所有可能的扩展方式：添加另一个由十个新标记顶点组成的圈，并按照构造 G_k 中的方式，将其与 D 通过编织匹配相连，如图 4（左）所示。

因此，在每次迭代中，我们都有一个部分绘图 Γ，以及一组尚待绘制的顶点和边 H。随后，我们穷尽探索 $\Gamma \cup H$ 的所有简单 2-平面绘图。我们采用的方法与 Angelini、Bekos、Kaufmann 和 Schneck [2] 用于完全图和完全二分图的方法类似。我们按某种顺序考虑待绘制的边，使得每当考虑一条边时，它至少有一个端点已经在绘图中。绘制一条边时，我们会遍历：（1）源顶点循环次序中的所有可能位置；对于每个位置，再考虑（2）以零个、一个或两个交叉点绘制该边的所有选项。每个选项都涉及遍历一个与源顶点关联的面，以及邻域中至多另外两个面。在每一步中，我们都会确保所构造的绘图仍然是 2-平面且简单的；如果无法添加一条边，或绘图已完成（即得到 G_i^- 的一个 2-平面绘图，其中 $i \in \mathbb{N}$），便进行回溯。

随后按照下文所述，对以这种方式得到的每个 $\Gamma \cup H$ 绘图进行测试。如果测试成功，则将该绘图作为 Γ的子项添加到待处理绘图列表中，并使 H 中的十圈在后续处理中充当 D 。

至于对绘图 Γ 的检验，我们只关心这样一种绘图：它最终能够在经过可能多次迭代后，以相同的方式扩展，加入一个不可交叉的十圈 D_k。具体而言， D_k 的所有顶点和边都必须位于 Γ 的同一个面内。因此，我们检验是否存在合适的

潜在最终面，能够放置 D_k 于 Γ 中（详情见附录 E）；若不存在，则不再考虑 Γ。我们还会遍历 Γ 的各个面，移除无关的面，以及那些离任何潜在最终面都太远、因而永远无法与未来迭代中加入的顶点和边发生关联的顶点。最后，我们通过将所得的缩减后的绘图与所有已发现的绘图进行比较，检查它是否已被发现（即检验是否存在保持圈 D 的同构）。若尚未发现，则将其加入有效绘图列表。

对于每个至少找到一个子绘图的绘图，我们还会检验是否存在一种类似的扩展，使得其中的圈 H 无交叉。只要这种扩展可行，我们就找到一个 G_i 的 2-平面绘图，其中 $i \in \mathbb{N}$。针对 G_i^- 的算法运行约 1.5 天，发现了 G_i^- 的 86 个简单 2-平面绘图。在这些绘图中，只有一个绘图的最后一个十圈无交叉：即上文所述的绘图（见图 4）。针对构件 X 的算法运行约 3 分钟，发现了 32 个简单 2-平面绘图，符合预期。完整源代码可在我们的代码库 [13] 中获取。

5 结论

我们得到了极大 2-平面图边数的紧确界，误差至多为一个加法常数。自然，我们会预期，这种方法也可以应用于其他近似平面图族，特别是极大 1-平面图和极大 3-平面图。直观地说，对于 k-平面图，随着 k 增大，挑战在于绘图结构会变得更加复杂；而随着 k 减小，我们则旨在得到更高的上界。

参考文献

1. Ackerman, E.：每条边至多有四个交叉点的拓扑图。《计算几何》**85**，101574（2019）。https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2019. 101574 2. Angelini, P., Bekos, M.A., Kaufmann, M., Schneck, T.：高效生成超越平面性图的不同拓扑表示。《图算法与应用》**24(4)**, 573–601（2020）。https://doi.org/10.7155/jgaa.00531，https://doi.org/10 00531 3 7155. /jgaa. . Auer, C., Brandenburg, F., Gleißner, A., Hanauer, K.：关于稀疏极大 2-平面图。载于：第20届国际图绘制研讨会论文集（GD 2012）。《计算机科学讲义》，第7704卷，第555–556页。施普林格（2012）。https://doi.org/10.1007/ 978 3 642 36763 2_50 10 1007 978 3 642 36763 2_50 - - - - , 4 https://doi.org/ . / - - - - . Barat, J., Toth, G.：关于极大-平面图密度的改进。《图论杂志》 **88** 1 101 109 2018 10 1002 22187 ( ), – 5 （）。https://doi.org/ . /jgt. . Barat, J., Toth, G.：边数较少的饱和-平面绘图。CoRR**abs/2110**12781 6**12781**2021 2110.( )，https://arxiv.org/abs/ . . Bekos, M.A., Kaufmann, M., Raftopoulou, C.N.：关于最优 2-平面图和 3-平面图。载于：第33届国际计算几何研讨会论文集（SoCG 2017）。LIPIcs，第77卷，第16:1–16:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik

（2017）。https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG.2017.16，https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SoCG.2017.16 7. de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.：《计算几何：算法与应用》。施普林格，德国柏林，第3版（2008）。https://doi.org/10 2 8 1007 978 3 540 77974 . / - - - - . Bodendiek, R., Schumacher, H., Wagner, K.：关于 G. Ringel 的一个六色问题的评述。《汉堡大学数学研讨会论文集》¨ **53**, 41 52 1983 10 1007 02941309 at 9 Hamburg –（）。https://doi.org/ . /BF . Brandenburg, F., Eppstein, D., Gleißner, A., Goodrich, M.T., Hanauer, K., Reislhuber, J.：关于极大 1-平面图的密度。载于：第20届国际图绘制研讨会论文集（GD 2012）。《计算机科学讲义》，第7704卷，第327–338页。施普林格（2012）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-36763-2_29，https://doi.org/ 10 1007 978 3 642 36763 2_29 . / - - - - . Chaplick, S., Klute, F., 10 Parada, I., Rollin, J., Ueckerdt, T.：边数最少的饱和k平面绘图。载于：第29届国际图绘制研讨会论文集（GD 2021）。《计算机科学讲义》，第12868卷，第3–17页。施普林格（2021）。https://doi.org/10. 1007 978 3 030 92931 2_1 10 1007 978 3 030 92931 2_1 / - - - - , 11 https://doi.org/ . / - - - - . Didimo, W., Liotta, G., Montecchiani, F.：超越平面性的图绘制综述。ACM计算调查**52**(1)，1–37（2020）。https://doi.org/10.1145/ 3301281 12. Hajnal, P., Igamberdiev, A., Rote, G., Schulz, A.：边数较少的饱和简单及2-简单拓扑图。《图算法与应用》**22**(1)，117–138（2018）。https://doi.org/10 00460 13 7155 00460，10 7155 2 . / jgaa. https://doi.org/ . /jgaa. . Hoffmann, M., Reddy, M.M.：极大-平面图的边数——代码库。https://github.com/meghanamreddy/ Sparse-maximal-2-planar-graphs 14. Hong, S.H., Tokuyama, T.（编）：《超越平面图》。施普林格，新加坡（ 2020 10 1007 978 981 15 6533 5 ）。https://doi.org/ . / - - - - . 15 Hudak, D.́, Madaras, T., Suzuki, Y.：关于极大 1-平面图的性质。Mathematicae讨论**32**，737–747（2012）。https://doi.org/10.7151/dmgt. 1639 16. Korzhik, V.P.：极小非1平面图。离散数学**308**(7)，1319–1327（ 2008 10 1016́ 2007 04 009́ ）。https://doi.org/ . /j.disc. . . 17 . Kynˇcl, J., Pach, J., Radoiˇsic, R., Toth, G.：饱和简单及 k- 简单拓扑图。《计算几何》**48**(4)，295–310（2015）。https://doi.org/10. 1016 2014 10 008́ /j.comgeo. . . . Pach, J., Radoiˇcic, R., Tardos, G., T18 ́oth, G.：通过在稀疏图中寻找更多交叉点来改进交叉引理。《离散计算几何》**36**(4)，527–552（ 2006 10 1007 00454 006 1264 9 ）。https://doi.org/ . /s - - - . 19 Pach, J., Toth, G.́：每条边交叉次数较少的图。《组合数学》**17**(3)，427–439（1997）。https://doi.org/10.1007/BF01215922，https://doi.org/ 10.1007/BF01215922 20. Ringel, G.：球面上的一个六色问题。《汉堡大学数学研讨会论文集》¨at Hamburg **29**，107–117（1965）。https: //doi.org/10 02996313 21 1007. /BF . Schaefer, M.：图交叉数及其变体：综述。《电子组合数学期刊》**20** （2013）。https://doi.org/10.37236/2713，版本7（2022年4月8日）22. Suzuki, Y.：能够对其他曲面进行三角剖分的最优1平面图。《离散数学》**310**(1)，6–11（2010）。https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.07.016

极大 k-平面图的基本性质

引理 26. 每个极大 k-平面图都是连通的。

证明。 反设极大 k-平面图 G 有两个连通分量 A，B。考虑 k的（彼此分离的）平面绘图 γ_A 和 B的平面绘图 γ_B，并选取一对顶点 $a \in A$ 和 $b \in B$。设 f_A 是与 a关联的 γ_A 的一个面，设 f_B 是与 b关联的 γ_B 的一个面。如有必要，调整绘图 γ_B，使 f_B 成为其外面，然后适当缩放 γ_B，将其置于 f_A内部。在所得的 $G[A \cup B]$ 绘图中，我们可以添加一条无交叉边 ab，这与 G的极大性矛盾。

引理 4. 设 D 是极大 k-平面图 G的交叉最少的 k-平面绘图，且 u 和 v 是位于 D中同一个面（的边界上）的两个顶点。那么， uv 是 G 的一条边，并且它在 D中无交叉。

证明。 可以在公共面内添加一条无交叉边 uv。因此，若 uv 不是 G的一条边，就与 G的极大性矛盾。若 uv 在 D中被交叉，则用无交叉的绘图替换原绘图。所得绘图 D' 的总交叉点数严格少于 D，而且在局部上， D' 中的每条边的交叉点数都不超过其在 D中的交叉点数。特别地，绘图 D' 是 k-平面绘图，这与 D的交叉数最小性矛盾。

引理 5。 设 D 是极大 k-平面图在 n 个顶点上的一个交叉数最小的 k-平面绘图，其中 $k \leq 2 \leq n$。那么，在 D中，每个顶点都关联一条无交叉边。

证明。 设 u 是 D的一个顶点。根据引理 26，至少有一条边 $e = uv$与 u 关联，且位于 D 中。若 e 在 D中无交叉，则引理的结论成立。

因此，假设 e 在 D 中被交叉。沿着 e 从 u 开始遍历时，第一个与之相交的边记为 $f = xy$，并将该交叉点记为 α；示意见图 5。由引理 3 可知， D 是简单的，因此顶点 x，y，u，v 两两不同。边 f 至多有两个交叉点，其中一个与 e 相交。不失一般性，假设 f 上的另一个交叉点（若存在）位于 x 和 α 之间。于是，边 f 在 α 和 y 之间无交叉。此外，根据 f 的定义，边 e 在 u 和 α 之间无交叉。因此，顶点 u 和 y 位于 D 的同一个面上。由引理 4 可知， D 中存在一条无交叉边 uy，证毕。

引理 6. 对于 $k \leq 2$，任何具有 $n \geq 3$ 个顶点的极大 k-平面图都是2-连通的。

证明。 反设 $G = (V, E)$ 是一个有割点 v 的极大 k-平面图。将 v 从 G 中移除，会把该图分成两个或更多个连通分支。将其中一个连通分支记为 A，并令 $B = V \setminus A$。那么 $H_0 = G[A \cup \{v\}]$ 和 $H_1 = G[B]$ 都是 k-平面图 G 的子图，因此也是 k-平面图。令 D_i 为 H_i 的交叉数最小的 k-平面绘图，

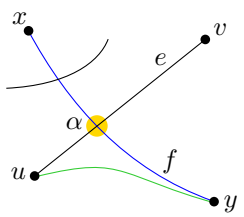


图 5. 引理 5 的证明：顶点 u 和 y 位于一个公共面上。

对于 $i \in \{0,1\}$。由引理 5 可知，对于所有 $i \in \{0,1\}$， D_i 中存在一条无交叉边 vu_i 。由于 H_0 和 H_1 边不相交，因此有 $u_0 \neq u_1$。

我们按如下方式构造 G 的 k-平面绘图。任意放置 v ，并为每个 H_i（其中 $i \in \{0,1\}$），指定一个与 v 相邻的专属开半平面。如有必要，调整 D_i ，使 vu_i 位于其外面，并连续变形 D_i ，使 v 成为一个极点（也就是说，存在一条经过 v 的直线 ℓ ，使 $D_i \setminus v$ 严格位于 ℓ 的一侧）。然后，将 D_i 的一个副本放入其指定的半平面内，使其与 v 相连，对所有 $i \in \{0,1\}$ 均如此。所得结果是 G 的一个 2-平面绘图 D'，其中 vu_0 和 vu_1 都是外面上的边。因此，我们可以添加一条无交叉边 u_0u_1 到 D'，这与 G 的极大性矛盾。

引理 27. 设 uv 和 e 是极大 *2*-平面图 G 的2-平面绘图 D 中的两条独立边，它们在点 χ 处交叉，使得 uv 的弧 $u\chi$ 在 D中无交叉。那么，对于 e 的至少一个端点 p ，弧 $p\chi$ 在 D 中无交叉，并且 p 通过 D中的一条无交叉边与 u 在 G 中相邻。

证明。 由于 e 在 D中至多有两个交叉点， $e \setminus \chi$的两条弧中至少有一条无交叉。设 p 是 e 的一个端点，使得 $p\chi$ 在 D中无交叉。那么 p和 u 出现在 D 中的一个公共面上，因此，根据引理 4，它们通过 D 中的一条无交叉边相邻。

引理 28. 设 uv 是一个交叉数最小的2-平面绘图 D 中的双重交叉边，该绘图对应一个2-平面图。将 uv 的交叉点记为 α 和 β ，使得从 u开始沿 uv 移动时， α 先于 β 出现。那么， u 和 β 不会出现在 D中的同一个公共面上。

证明。 反设 u 和 β 出现在 D的同一个面 f上。那么，我们可以从 u 开始重新绘制边 uv ，使其穿过 f 的内部到达 β ，然后从那里沿着其原有绘图继续延伸。这样至少可以消除一个交叉点（即 α处的 uv ），且不会引入任何交叉点。因此，所得绘图是同一张图的一个 2-平面绘图，其交叉点数严格少于 D，这与 D的交叉数最小性矛盾。

B 第3.3节的证明：孤立顶点

引理9。 设 h 是一个孤立顶点， x和 y 是它在 G中的邻点。那么 x 和 y在 G 中相邻，且三条边 xy、 hx、 hy在 D中均无交叉。

证明。 反设边 hy 在 D中与其他边交叉。沿着 hy 从 h开始遍历时，令 χ 为遇到的第一个交叉点，令 f 为与之交叉的边。根据引理 27， f 至少有一个端点在 G中与 h 相邻，将此端点记为 u。由于 D 是简单的，因此有 $u \neq y$，这意味着 $u = x$。

我们断言边 hx 没有交叉点。否则，可以沿着 f 从 x 到 χ，再沿着 hy 从 χ 到 h 来重新绘制该边；示意见图 6。这样重新绘制会减少交叉点的数量，这与 D 的交叉数最小性相矛盾。因此，边 hx 没有交叉点。但此时，可以重新绘制边 f，使其先沿着 hx 从 x 到 h，再沿着 hy 从 h 到 χ，最后沿着其原来的绘图。这种重新绘制消除了 f 和 hy 在 χ 处的交叉点，且没有引入任何交叉点，这与 D 的交叉数最小性相矛盾。因此，在 D 中，与 h 相接的两条边都没有交叉点。关于边 xy 的说法则由引理 4 得出。

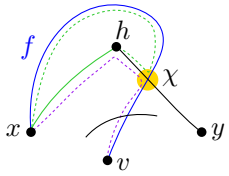


图6. 与孤立顶点 h 相接的边都没有交叉点。

引理 10. G 的每条边至多承载一个孤立顶点。

证明。 反设， G 中的一条边 xy 承载两个孤立顶点 h， h'。根据引理9，四条边 xh， yh， xh'， yh' 在 D中均为无交叉边。于是，在 D中，顶点 h' 可以放置在离 h任意近的位置，并且边 xh' 和 yh' 可以分别沿着边 xh 和 yh附近重新绘制，从而可以在 h 和 h'之间画出一条无交叉边。但这与 G的极大性矛盾。因此， G中不存在这样的边 xy 。

引理 7. 设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大2-平面图， h 是一个孤立顶点，且 x、 y 是 G中 h 的邻点。那么我们有 度(x) ≥ 4，且 度(y) ≥ 4。

证明。 根据引理9，边 hx， hy 和 xy 在 D 中没有交叉；如有必要，将边 xy 重新绘制，使其紧贴无交叉路径 xhy，于是我们可以假设 D 中有一个由圈 xyh 围成的三角面 ϕ 。令 $\psi \neq \phi$ 表示与 $h \in \partial\psi$ 相邻的另一个面；示意见图7（左）。由于 G 是极大 2-平面图且 deg(h) $= 2$， G 中没有其他（除 x， y， h 之外的）顶点位于 $\partial\psi$ 上：若存在这样的顶点，根据引理 4，它就会与 h 相邻。由于 G 至少有五个顶点，且根据引理 6 它是 2-连通的， x 和 y 都至少有一个位于 x， y， h 之外的邻点。反设 deg(x) $= 3$，并令 $e = xa$ 表示连接 x 与 $a \notin \{y, h\}$ 的边。

由于 $a \notin \partial\psi$，边 e 在 D 中有交叉。设沿着 e 从 x 开始行进时，第一条与其交叉的边为 f，并将此交叉点记为 χ。根据引理 27，f 的至少一个端点 q 在 G 中与 x 相邻，也就是说，我们有 $q \in \{a, y, h\}$。由于 D 是简单的，且 a 是与 f 交叉的边 e 的一个端点，因此我们有 $q \neq a$。由于 h 处的所有边在 D 中都没有交叉，而 f 有交叉，因此可得 $q \neq h$。所以，我们有 $q = y$。由于 f 中 y 与 χ 之间的部分没有交叉，我们可以按如下方式改变绘图：将 x，h 放在 y 附近，位于 f 与 e 中 χ 和 a 之间部分相接的一侧。三角形 xyh 可以无交叉地绘制，而边 e 可以沿着 f 绘制至 χ，然后继续沿其原有绘图延伸。这样，我们消除了 χ 处的交叉，且没有引入任何交叉，这与 D 的交叉数最小性矛盾。示意见图 7（右）。

因此，$\deg(x) \geq 4$，同理可得，$\deg(y) \geq 4$。



图 7. 孤立顶点 h 及其邻域（左）；重新绘制以得到矛盾（右）。

引理 8. 设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的极大2-平面图。那么，G 中度为 i 的顶点至多与 $\lfloor i/3 \rfloor$ 个孤立顶点相邻。

证明. 由引理 7 可知，孤立顶点的所有邻点的度至少为 4。因此，该结论对 $i \leq 3$成立。设 v 是一个与孤立顶点相邻的顶点，并令 $H_v \neq \emptyset$ 表示 G中与 v 相邻的孤立顶点集合。考虑 D中与 v 关联的边的循环次序 C_v。

我们可以假设，对于每个孤立顶点 $h \in H_v$，边 vh 在 C_v中的位置都与承载 h 的边相邻：只要某个孤立顶点 $h \in H_v$不满足这一条件，我们就将承载边重新绘制得足够靠近 D 中的路径。该路径由与 h关联的两条边构成，根据引理9，这两条边在 D 中无交叉。由引理 10 可知，每条边至多承载一个孤立顶点，因此在此过程中，每条边至多重新绘制一次。

因此，每个孤立顶点 $h \in H_v$ 对应一对在 C_v中相邻的无交叉边 vh, vx。注意，通过在边 vx的任一侧重新绘制无交叉路径 vhx，我们可以随意调整 vh, vx 的顺序。我们断言，vh, vx 在 C_v 中的两个邻点在 D中都被交叉。反设，不失一般性，边 vx, vh, vy在 C_v 中连续，且在 D中均无交叉。那么 h 和 y 出现在 D 的同一个公共面上，因此，根据引理 4，它们在 G 中相邻。由于 x, y, h是 G中 v两两不同的邻点，我们有 $\deg(h) \geq 3$，这与我们的假设矛盾，因为 h 是一个孤立顶点。因此，该断言成立；特别地，对应于孤立顶点的任意两对边

在 C_v 中至少被一条交叉边隔开。因此，总体而言，对于 H_v中的每个孤立顶点，我们至少有三条边与 v 关联，这就证明了该引理。

引理 11. 设 u 是 *T4-H* 型顶点，其邻点为 h、v、w、x，且位于 G 中，其中 h是一个孤立顶点，而 v 是 h的第二个邻点。那么，在 D中，uw 和 ux 都是双重交叉边；与 uv 关联的 $D \setminus h$ 的两个面都是三角形，其边界由与 u 关联的边（的一部分）以及与 v关联的双重交叉边构成。此外，我们有 度(v) ≥ 6；若 度(v) $= 6$，则 h 是 G中与 v 相邻的唯一孤立顶点。

证明。由引理9可知，D中有一个无交叉三角形 uvh 。如有必要，通过将边 uv 重新绘制在靠近路径 uhv 的位置，我们可以假设 uvh 围成 D的一个面。我们可以将 h 放在 uv 的任一侧，而不改变绘图中的其他任何内容，只改变三角面 uvh的定向。

我们断言，ux 和 uw 在 D中都被交叉。反设，例如，边 ux 在 D中无交叉。于是，我们放置 h ，使其在 u周围邻点的循环次序中位于 x 和 v 之间。此时，x和 h 位于同一个公共面上，根据引理 4，它们在 G中相邻，这与 h 是一个孤立顶点矛盾。由此证明了我们的断言：ux 和 uw在 D中都被交叉。

从 u出发沿 ux 行进时，第一个与 ux 交叉的边记为 ab ，并将该交叉点记为 α。我们有 $h \notin \{a, b\}$ ，因为与 h 关联的两条边在 D 中都无交叉，而边 ab 则有交叉。根据引理 27，ab 至少有一个端点通过 D中的一条无交叉边与 u 相邻；令 a 为这样的端点。由于 u 在 D 中通过无交叉边相邻的唯一顶点是 v 和 h ，且我们已知 $h \notin \{a, b\}$，因此可得 $a = v$。

接下来我们断言，vb 在 D中是双重交叉的。反设 vb 仅为单交叉。于是 u 和 b 出现在 D的同一个面上，因此根据引理 4，D中存在一条无交叉边 ub。D 中 u的无交叉邻点是 h 和 v，但我们知道 $b \notin \{h, v\}$，矛盾。这就证明了我们的断言：vb 在 D中是双重交叉的。将 vb上除 α以外的第二个交叉点记为 β。

将 D 中的无交叉路径 αuv 记为 P（第一段弧沿着边 xu），并将 D 中的无交叉闭合路径 $\alpha uv\alpha$ 记为 $P_\circ$（第一段弧沿着边 xu ，最后一段弧沿着边 vb）。将 h 放在 uv 的一侧，使其与 w位于 $P_\circ$ 的同一侧。换言之，将 h 放在 uv 的一侧，使得 v和 x 在 u的循环次序中相邻。于是 P 出现在 D的面 f 的边界上。

边 vb 和 ux 有两种可能的交叉方式：一种是 $P_\circ$将 b, x 与 w 分隔开；另一种是 b, w, x 全部位于 $P_\circ$的同一侧；图8对此作了示意。在前一种情况下，交叉点 β 出现在 ∂f上，同时还有 v，这与引理 28矛盾。因此，我们总是处于后一种情况，即 b, h, w, x 全部位于 $P_\circ$的同一侧。于是有 $P_\circ \subseteq \partial f$，实际上，我们断言 $P_\circ = \partial f$。为此，注意到根据 deg(u) 的假设以及 h, w, x相对于 $P_\circ$和 f的位置，任何位于 f 内部的顶点都不与 u连通。因此，如果有顶点位于 f内部，那么 v就是一个

G的割点，这与引理 6矛盾。因此，正如所断言的， $P_\circ = \partial f$，所以面 f 是一个三角形，正如引理陈述中所断言的。

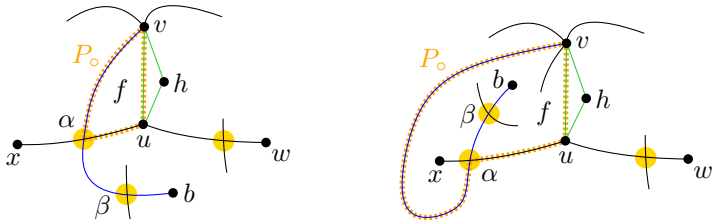


图 8. 引理 11 的证明：边 ux 和 vb 交叉的两种方式。

根据对称性（交换 x 和 w），在 D中存在一条双重交叉边 vc，它与 uw 在交叉点 γ 处相交，使得 $uv\gamma$ 在 $D \setminus h$中围成一个三角面。接下来，我们证明 uw 和 ux 在 D中都是双重交叉边。

反设 ux 或 uw中有一条边是单交叉边，不妨设为边 ux，且它在 D中是单交叉的。考虑边 vc，它在 γ处与 uw 相交；从 c开始沿 vc 行进时，令 pq 为第一条与 vc 相交的边，并将该交叉点记为 δ。由于 vc 在 D中是双重交叉的，因此有 $\delta \neq \gamma$。根据引理 27， pq 至少有一个端点通过 D中的一条无交叉边与 c 相邻，并且 pq 上此端点与 δ 之间的弧无交叉；令 p 为这样一个端点。我们分两种情况讨论，示意图见图 9。

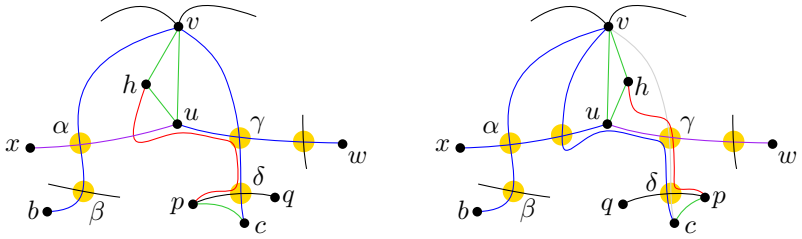


图 9。 引理 11 的证明。假设 ux 仅被单交叉，边 vc 和 pq 有两种可能的交叉方式。无论哪种方式，我们都可以添加一条新边（以红色显示），从而得出矛盾。

情形 *1*（有向边 pq 和 uw 从同一侧交叉 vc 于 D。）接着， $u\gamma\delta p$ 是一条无交叉路径，它沿着 D中某个面的边界延伸。我们将 h 放置在 D的三角面 $uv\alpha$ 内。然后，我们可以添加一条单交叉边 hp ：从 h出发，穿过 ux ，再沿着无交叉路径 $u\gamma\delta p$ 到达 p。只产生一个新的交叉点，位于新边 hp 与边 ux之间，而该边仅在 D中单交叉。因此，所得绘图是 2-平面的，这与 G的极大性矛盾。

情形 2（有向边 pq 和 uw 从不同侧交叉 vc 于 D）。我们将 h 放置在 D 的三角面 $vu\gamma$ 内。然后，我们重新绘制边 vc ，使其从 v 出发进入三角面 $uv\alpha$，接着穿过 ux ，再沿着无交叉路径 $u\gamma\delta$ 到达 δ，并从那里沿其原有绘图继续延伸。将所得绘图记为 D'。边 vc在 D 和 D'中均为双重交叉，边 ux 在 D 中为单交叉、在 D'中为双重交叉，而边 uw 在 D 中为双重交叉、在 D'中为单交叉。我们可以添加一条从 D' 到 hp 的新边：从 h出发，在 γ处穿过 uw ，沿着 D 中 vc的绘图继续到达 δ，然后沿着 pq 的无交叉弧 δp到达 p。新边 hp 为单交叉，uw 为双重交叉，因此所得绘图是 2-平面的，这与 G的极大性矛盾。

在这两种情况下都会导出矛盾。因此，正如引理陈述中所说， ux 和 uw在 D中均为双重交叉。

接下来只需证明关于 v 的度以及在 $\deg(v) = 6$ 时与 v 相邻的孤立顶点数量的陈述。

我们已经在 G 中找到了 v的四个邻点：顶点 h、 u、 b、 c。如果它们是 v 仅有的邻点，那么我们可以将 v 和 h 放在无交叉路径 $\alpha u\gamma$ 的另一侧，并相应地重新绘制边 vb 和 vc ，使它们分别不与 ux 和 uw交叉；示意见图 10（左）。所得的 G 绘图是 2-平面的，且交叉点少于 D，这就产生了矛盾。因此，$\deg(v) \geq 5$。将 v 在 G 中的第五个邻点（除 h、 u、 b、 c之外）记为 y。

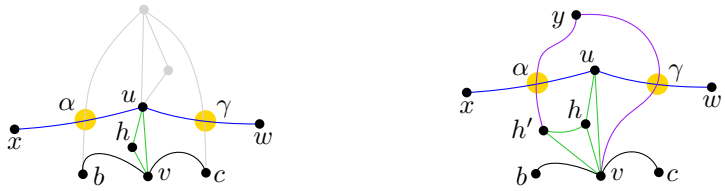


图 10. 用于导出矛盾的重新绘制：若 $\deg(v) = 4$ （左），以及若 $\deg(v) = 6$ 且 v 与两个孤立顶点相邻（右）。

反设 $\deg(v) = 5$。若 vy 无交叉，我们可以再次按照图 10（左）所示进行类似的重新绘制，并重新绘制边 vy ，使其在 α 或γ处与 ux 或 uw 交叉，从而得到 G 的一个 2-平面绘图，其交叉点数少于 D，这不可能。因此， vy 必定有交叉。沿着从 v出发遍历 vy 时，令 pq 为第一条与 vy 交叉的边，并将该交叉点记为 χ。根据引理 27， pq至少有一个端点满足条件；不失一般性，设 p满足条件，则弧 $p\chi$ 在 D 中无交叉，且 pv 是 D的一条无交叉边。由于在 D 中， v 沿无交叉边相连的邻点只有 h 和 u ，且与 h 关联的两条边均无交叉（而 pq 有交叉），可得 $p = u$，这意味着 $q \in \{w, x\}$。然而，从 u 出发遍历 ux 时， ux 的第一个交叉点是 $\alpha \neq \chi$处与 vb 的交叉；从 u 出发遍历 uw 时， uw 的第一个交叉点是

在 $\gamma \neq \chi$处与 vc 交叉。因此， uw 和 ux 均不包含无交叉弧 $u\chi$，矛盾。由此可得 $\deg(v) \geq 6$，正如引理陈述所述。

最后，反设 $\deg(v) = 6$，且 v 与 G 中的两个孤立顶点相邻。将与 v 相邻、不同于 h 的另一个孤立顶点记为 h'，并将承载 h' 的 G 的边记为 vy。然后，我们可以像之前一样进行类似的重新绘制：将 v 和 h 都放到无交叉路径 $\alpha u\gamma$ 的另一侧，并让两条边 $h'y$ 和 vy 分别在 α 和 γ 处与 uw 和 ux 交叉；示意见图 10（右）。所得绘图是 2-平面的，因此我们可以添加一条无交叉边 hh'，这与 G 的极大性矛盾。因此，若 $\deg(v) = 6$，则 v 至多与 G 中的一个孤立顶点相邻，证毕。

C 第 3.4 节的证明：度为三的顶点

C.1 T3-1 顶点

引理 12. 设 u 是 *T3-1* 顶点，其在 G 中的邻点为 v、w、x，且边 uv 在 D 中无交叉。那么 D 中与 uv 相邻的两个面都是三角形，其边界由与 u 相邻的边（的一部分）以及与 v 相邻的双重交叉边构成。此外，我们有 $\deg(v) \geq 5$。

证明。由于 u 是 T3-1 顶点，边 uv 是 D 中与 u 相邻的唯一无交叉边，而边 ux 和 uw 在 D 中均有交叉。

设从 u 开始沿 ux 遍历时， ab 是第一条与 ux 相交的边，并将此交叉点记为 α。根据引理 27，对于 ab 的至少一个端点，结论成立；不妨设对 a 成立，则弧 $a\alpha$ 在 D 中无交叉，且 ua 是 D 中的一条无交叉边。由于 D 中通过无交叉边与 u 相邻的唯一顶点是 v，因此可得 $a = v$。

接下来我们断言， vb 在 D中是双重交叉的。反设 vb 仅为单交叉。于是 u 和 b 出现在 D的一个公共面上，因此根据引理 4， D中存在一条无交叉边 ub。由于 D 中与 u 通过无交叉边相邻的唯一邻点是 v，可知 $b = v$，这与 G 是一个无环的简单图相矛盾。因此，边 vb 在 D中是双重交叉的，断言得证。将 vb 除 α之外的另一个交叉点记为 β。

令 $P_\circ$ 表示 D中的无交叉闭合路径 $\alpha uv\alpha$ ，其中第一条弧沿着 xu ，最后一条弧沿着 vb。边 vb 与 ux 交叉有两种可能方式：要么 $P_\circ$ 将 x 和 w 分隔开，要么 x 和 w 位于 $P_\circ$的同一侧；示意见图 11。前一种情况下，交叉点 β 与 v出现在同一个公共面上，这与引理 28 矛盾。因此，后一种情况总是成立，且 b， w，x 都位于 $P_\circ$的同一侧。此外，由于 G 是 2-连通的，没有与 v 相邻的顶点能位于由 $P_\circ$ 围成的 D 的面内。特别地，由 $P_\circ$ 围成的 D 的面是一个三角形，该面与 uv关联，其边界由与 u 关联的边（部分）以及与 v关联的双重交叉边构成，正如引理陈述中所说。

由对称性（交换 x 和 w），在 D中存在一条双重交叉边 vc ，它与 uw 在交叉点 γ 处相交，因此 $uv\gamma$ 在 D中围成一个三角面。

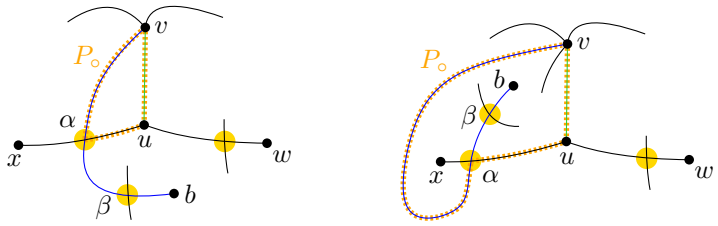


图 11. 引理 12 的证明：边 ux 和 vb 可能交叉的两种方式。

剩下要证明的是 $\deg(v) \geq 5$。我们已经找出了 G 中 v的三个邻点：顶点 u，b，c。如果这些是 v仅有的邻点，那么我们可以将 v 放在无交叉路径 $\alpha u \gamma$ 的另一侧，并相应地重新绘制边 vb和 vc，使它们分别不与 ux 和 uw相交；示意图见图 12（左）。由此得到的 G 绘图是 2-平面的，且交叉点比 D少，这就产生了矛盾。因此，$\deg(v) \geq 4$。将 v 在 G 中的第四个邻点（除 u，b，c以外）记为 y。

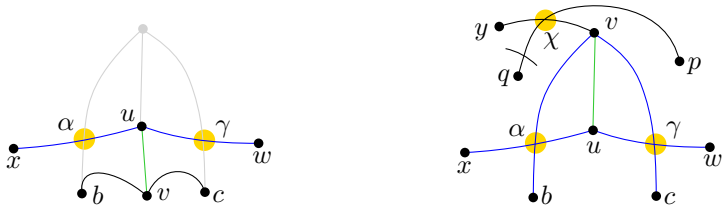


图 12. 重新绘制以导出矛盾：若 $\deg(v) = 3$（左）；若 $\deg(v) = 4$，则 v 和 p 出现在一个公共面上（右）。

反设 $\deg(v) = 4$。如果 vy 无交叉，我们可以再次参照图 12（左）重新绘制，并重新绘制边 vy，使其在 α 或 γ 处与 ux 或 uw 相交，从而得到一个交叉点比 D 更少的 G 的 2- 平面绘图，这不可能。因此，vy 必定有交叉。令 pq 为从 v 出发沿 vy 行进时第一个与 vy 相交的边，并将该交叉点记为 χ；示意见图 12（右）。根据引理 27，pq 至少有一个端点，设不失一般性为 p，使得弧 $p\chi$ 在 D 中无交叉，且 pv 是 D 的一条无交叉边。由于 v 在 D 中沿无交叉边相邻的唯一邻点是 u，可得 $p = u$，这意味着 $q \in \{w, x\}$。然而，从 u 出发沿 ux 行进时，ux 的第一个交叉点是与 vb 在 $\alpha \neq \chi$ 处的交叉；从 u 出发沿 uw 行进时，uw 的第一个交叉点是与 vc 在 $\gamma \neq \chi$ 处的交叉。因此，uw 和 ux 均不包含无交叉弧 $u\chi$，矛盾。由此可得 $\deg(v) \geq 5$，这正是引理陈述中的结论。

C.2 T3-2 顶点

引理 13. 设 u 是 D 中一个 *T3-2* 顶点，其邻点为 v、w、x，且 uv 在点 α 处被交叉。则 α 是 D 中 uv 的唯一交叉点。此外，与 uv 交叉的边是双重交叉边，与 w 或 x 关联，且其位于 w 或 x 与 α 之间的部分无交叉。

证明。设 u 是 D 中的一个 T3-2 顶点，且 uv 是 D 中唯一一条有交叉的关联边。将 u 在 G 中另外两个邻点记为 w 和 x。令 $e = ab$ 为从 u 出发沿 uv 行进时第一个与之相交的边，并将该交叉点记为 α。根据引理 27，e 至少有一个端点通过一条无交叉边与 u 在 D 中相邻；令 a 为这样的邻点。根据假设，在 D 中恰有两条边与 u 关联，这意味着 $a \in \{w, x\}$。不失一般性，设 $a = w$。

首先，我们证明 uv 在 D 中是单交叉的。反设 uv 是双重交叉的。我们构造 G 的另一个交叉数最小的 2-平面绘图 D'，使其双重交叉边的数量严格少于 D，这与 D 是可容许的（即在 G 的所有交叉数最小的 2-平面绘图中，其双重交叉边数量最少）相矛盾。

注意，我们可以重新绘制边 e，使其从 w 出发，从 uv的任一侧接近 α：沿着无交叉边 wu朝向 u，再沿着 uv 的无交叉弧 $u\alpha$ 到达 α，即可到达其中一侧；沿着无交叉路径 wux，然后穿过 uw，再沿着 uv 的无交叉弧 $u\alpha$ 到达 α，则可到达另一侧。因此，为了得到 D'，我们重新绘制 e，使其从 e 能够沿着原绘图继续前往 b 且不与 uv交叉的一侧接近 α；示意见图 13。这样消除了 uv上的一个交叉点，使 uv 成为单交叉边。e 上的交叉点数量不会增加，因为消除了一个交叉点（位于 α处），至多引入另一个交叉点（与 ux相交）。边 ux 在 D中无交叉，因此在新绘图 D'中至多是单交叉的。所有其他边上的交叉点数量保持不变，且交叉点总数不会增加。因此，绘图 D' 是 2-平面的、交叉点最少的，并且其中双重交叉边的数量严格少于 D中的数量，矛盾。由此可知，uv 是单交叉的，也就是说，交叉点 α 与 wb 相交，是其在 D中的唯一交叉点。

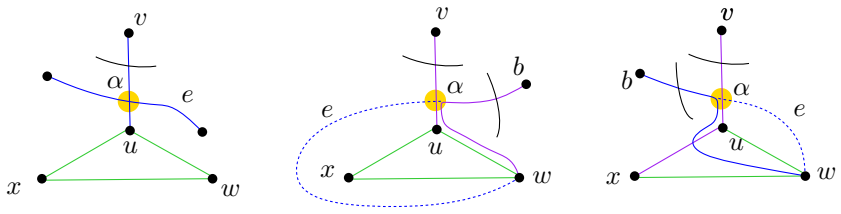


图 13. 重新绘制边 e，以减少双重交叉边的数量。

根据引理 27， wb 的弧 $w\alpha$ 无交叉。因此，只需证明 wb在 D中是双重交叉的。反设 wb 是单交叉的，也就是说，它在 D 中的唯一交叉点是 α。那么，b 和 u位于 D的同一个面上。因此，根据引理 4， D中存在一条无交叉边 ub，这意味着 $b \in \{w, x\}$。由于图 G 是简单的（没有环），我们有 $b = x$。然而，由于 wux 是 D 中的一条无交叉路径，且 $\deg(u) = 3$，顶点 x 和 w 位于同一个面上，因此它们之间有一条无交叉边，位于 D中。特别地，边 xw 在 D中不会与 uv 交叉，矛盾。由此可知， wb 在 D中是双重交叉的，证毕。

引理 14. 设 u 是 D 中的一个 *T3-2* 顶点，且 u 的邻点为 v、w、x，其中边 uv 被边 wb（双重交叉）单交叉。则存在 G 的一个可容许绘图 D'，满足：*(1)* 除边 wb 外， D' 与 D 完全相同；*(2)* 在 D' 中，边 wb 与边 ux 相交。

证明. 通过如下方式重新绘制边 wb，从而由 D 得到 D'：从 w 出发，沿 wu 的另一侧前进，然后沿 wu 到达 u，穿过 ux，接着沿 uv 前进，直到与 wb 的旧绘图相交，再从那里沿其原绘图继续前进至 b。对每条边而言，交叉点的数量均保持不变，只有 uv （在 D 中单交叉，在 D' 中无交叉）和 ux （在 D 中无交叉，在 D' 中单交叉）例外。因此，绘图 D' 是可容许的，并具有上述两项性质。

C.3 引理15的证明

与引理陈述中一样，设 u 是 D 中的一个 T3-2 顶点，且 v、w、x 是 u 的邻点，使得边 uv 被双重交叉边 wb 单交叉，而边 ux 和 uw 在 D 中无交叉。将 uv 与 wb 的交叉点记为 α，并将 wb 的第二个交叉点记为 β。

路径 xuw 无交叉，且是 D 中某个面的边界的一部分，因此根据引理 4， D 中存在一条无交叉边 wx 。类似地，路径 $wu\alpha$ 无交叉，且是 D 中面 f 的边界的一部分。因此，根据引理 28，边 wb 在 w 与 α 之间无交叉，而 w 和 β 不出现在 D 的同一个公共面上。由于 uv 只有一个交叉点，且位于 α，可知 w 和 v 位于 D 的同一个公共面上，因此根据引理 4，它们在 G 中相邻。所以，我们面对的是图 14（左）所示的绘图，而不是图 14（中）所示的绘图；在后者中， w 和 β 出现在同一个公共面上。

引理 29。我们有度$(w) \geq 4$。

证明。 我们已经证明， u、x、v、b都是 G中 w的邻点。接下来只需证明它们两两不同。根据假设（ v、x、w是 G中 u的三个邻点）， u、x、w两两不同。由于 uv与 wb交叉点，且 D 是简单的，因此 $b \notin \{u, v\}$。由于边 wx 是无交叉的，而边 wb 有交叉点，因此我们还有 $b \neq x$。

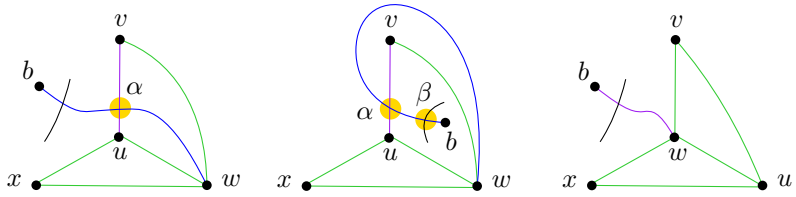


图 14. T3-2 顶点 u 周围的情况（左）。因 $w = 4$ 和 β 出现在同一个面上而不可容许的绘图（中）。当 deg( ) 时移除一个交叉点（右）。

引理 15. 设 u 是一个 *T3-2* 顶点，其邻点为 v、w、x，且边 uv在 D中与一条双重交叉边 wb 相交。那么 度(w) ≥ 5 ，且最小值{度(v)、度(x)} ≥ 4。

证明。 我们知道，在 G中， w与 u、 v、 x 以及 b都相邻。如果 deg(w) $= 4$, 那么我们可以在绘图中交换 u 和 w 的位置；见图 14（右）。这样便消除了 α 处 uv 与 wb 之间的交叉点，且不会引入任何交叉点，这与 D的交叉数最小性矛盾。因此，deg(w) ≥ 5。

注意到 v 和 x 的局部作用是对称的，因为根据引理 14，可以绘制边 wb ，使其与 uv 或 ux 中的任意一条相交，而不改变其他任何内容。因此，只需证明度(v) ≥ 4 ，而度(x) ≥ 4 可由对称性得出。我们有度(v) ≥ 3 ，因为在 D中有一条交叉边与 v 相 incident，且根据引理9，与孤立顶点相连的两条边均无交叉。将 v 在 G 中的第三个邻点（除 u, w外）记为 y。

现在反设 deg(v) $= 3$。那么 $y \neq x$ ，因为如果 $y = x$，我们就可以在由无交叉边 uw 和 ux 围成的面内，靠近 u 重新绘制 v ，使得与 v 相 incident 的所有边都变为无交叉边，且不引入任何交叉点。这样至少消除了一个交叉点，即 uv 与 wb 之间的交叉点，这与 D 的交叉数最小性矛盾。因此，我们有 $y \neq x$。

我们断言边 vy 被交叉。如果 vy 是无交叉的，那么我们可以重新绘制边 wb ，使它与 ux 相交，而不是与 uv 相交；然后沿着无交叉边 uv 和 vy ，从 u 绘制一条无交叉边到 y。这与 G 的极大性矛盾，因此边 vy 被交叉，正如所断言的那样。

设 st 是从 v 出发沿 vy 行进时第一个与 vy 相交的边，并将此交叉点记为 σ。根据引理 27， st 至少有一个端点通过一条无交叉边与 D 中的 v 连通；令 s 为这样的端点。于是 $s \in \{u, w\}$，并且由于我们知道所有与 u 相 incident 的边都不会在 D 中与 vy 相交，因此有 $s = w$。

显然，我们有 $t \neq u$ ，因为边 wu 无交叉；并且 $t \neq y$ ，因为 wt 与 vy 相交，且 D 是简单的。我们声称边 wt 是双重交叉的。假设 wt 是单交叉的。那么 v 和 t 在 D 中出现在同一个公共面上，因此它们在 G 中相邻，这与 deg(v) $= 3$ 矛盾。因此，

边 wt 是双重交叉的，正如所声称的那样。将它的第二个交叉点（除 σ 外）记为 τ。

根据引理 28，我们知道 w 和 τ 不在 D的公共面上，因此 v 和 τ 位于 D中的一个公共面上。重新绘制边 wb，使其与 ux 相交，而不是与 uv相交；再将边 wt 从 w 开始重新绘制，使其沿着 wu延伸，然后与 uv相交，再穿过 f 到达 τ，之后沿其原有绘图延伸；见图 15（中）。所得绘图 D' 的交叉点数与 D完全相同。每条边的交叉点数仅在 ux和 vy上发生变化：ux在 D 中无交叉，在 D'中有一次交叉；vy在 D' 中的交叉点比在 D中少一个。因此，D' 是 G的交叉数最小的 2-平面绘图。

如果 vy 在 D中是双重交叉的，那么 D' 中的双重交叉边严格少于 D，这与 D 可容许相矛盾。因此，vy 在 D 中是单交叉的，而在 D'中无交叉。但此时我们可以重新绘制 wt，使其与 ux 相交而不是与 uv相交，并添加一条无交叉边 uy。注意到 $y \notin \{w, v, x\}$，这与 G的极大性相矛盾；见图 15（右）。由此可得 $\deg(v) \geq 4$，证毕。

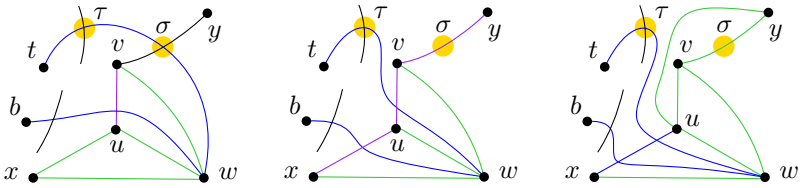


图 15. T3-2 顶点 u 及其一个三度邻点 v 周围的情况（左）。如果边 vy 在 D中是双重交叉边，那么重新绘制 wt 可得到一个双交叉边更少的可容许绘图（中）。否则，边 vy 在 D中是单交叉边，重新绘制 wt 可使 vy 变为无交叉，从而可以添加一条边 uy（右）。

C.4 T3-3 孤点

引理 16. 设 z 是 D中的一个 *T3-3* 顶点，且 z' 是 G中 z 的一个邻点，满足 $\deg(z') \leq 3$。那么 z' 也为 *T3-3* 顶点，也就是说，z和 z' 在 D中构成一个低效隐士。

证明。根据引理 7，孤立顶点的两个邻点的度都至少为四。因此，$\deg(z') = 3$。由于 z 是一个 T3-3 顶点，边 zz' 在 D 中是无交叉的。根据引理 12，T3-1 顶点沿着（唯一的）无交叉边相邻的顶点的度至少为五。因此，我们知道 z' 不是 T3-1 类型。又根据引理 15，T3-2 顶点的所有邻点的度都至少为四，所以我们也可以得出 z' 不是 T3-2 类型。唯一剩下的可能性是，z' 是一个 T3-3 顶点，它与 z 构成一个低效隐士。

引理 17. 设 z、z' 是 D 中的一对低效隐士，且它们在 G 中的（共同）邻点为 x、y。那么 xy 是 D 中的一条无交叉边，且 x 和 y 的度均至少为五。

证明。由于 xzy 是 D 中的一条无交叉路径，根据引理 4，我们在 D 中有一条无交叉边 xy。不失一般性，假设圈 xzy 围成 D 中的一个面（如有必要，重新绘制边 xy，使其紧贴路径 xzy）。由于 G 至少有五个顶点，且根据引理 6，它是 2-连通的，因此 x 和 y 都至少有一个邻点位于 x、y、z、z' 之外。因此，D 中存在一个（唯一的）面 ψ，其边界上包含路径 $xz'y$，以及至少另外两条边的一部分：一条与 x 关联的边 e，以及一条与 y 关联的边 f，使得 e、f、xy 两两不同。类似地，在 D 中存在一个（唯一的）面 ψ'，其边界上包含边 xy，但不包含顶点 z 和 z'。令 e' 和 f' 分别表示 $\partial\psi'$ 上与 x 和 y 关联、且不是公共边 xy 的那条边。示意见图 16（左）。

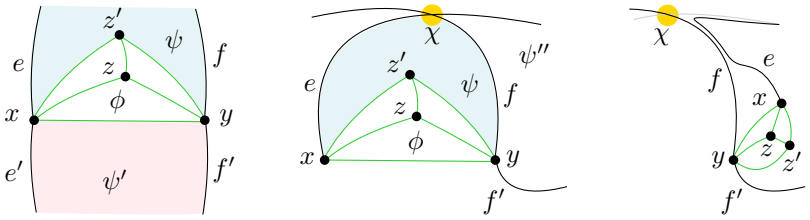


图 16. 引理 17 的证明：低效隐士 z、z' 及其邻域（左）；假设 $e = e'$（中）；重新绘制以导出矛盾（右）。

由于 G 是极大 2-平面图，且 z' 的度恰好为三，因此 G 中除 x、y、z' 之外，没有其他顶点位于 $\partial\psi$ 上：如果存在这样的顶点，根据引理 4，它就会与 z' 相邻。类似地，G 中除 x、y 之外，没有其他顶点位于 $\partial\psi'$ 上，因为只需将 z 和 z' 移到 xy 的另一侧，就能轻易改变绘图。特别地，由此可知 e、f、e'、f' 在 D 中均为交叉边。

为导出矛盾，假设 $\deg(x) = 4$，这意味着 $e = e'$。令 g表示从 x出发沿 e 行进时遇到的第一条交叉边，并用 χ表示该交叉点。由于 g 在 D中至多有两个交叉点，g 位于 χ 一侧的弧在 D中无交叉。由于 G 是极大 2-平面图，根据引理 4，沿这条无交叉弧的 g端点是 x的邻点，这意味着该端点是 y。

由边 xy 以及 e和 g上对应的弧共同构成的简单闭曲线 $C = x\chi y$ 在 D中无交叉。记 $V^- = V(D)$ 为 $\setminus\{x, y, z, z'\}$。我们声称，V^- 的所有顶点都位于 C的同一侧。注意到，z 和 z' 在 V^- 中没有邻点，而 x 在 V^-中恰有一个邻点。由此可见，若 V^- 的顶点分布在 C两侧，那么删除 y 会将 G分离，这与 G 是 2-连通的矛盾。这就证明了我们的断言：V^- 的所有顶点都位于 C的同一侧。特别地，可得 $g \in \{f, f'\}$。

注意， f 和 f'之间的情形是对称的：若 $f = f'$，则结论显然成立；否则，我们可以改变绘图，使 z 和 z'都出现在 xy的另一侧，从而交换 ψ 和 ψ' 的角色，同时也交换 f 和 f'的角色。因此，不失一般性，我们可以假设 $g = f$。示意图见图16（中）。

然后，我们可以如下重新绘制 G：移除所有 x， z， z'，并将它们放置在 f 另一侧的面 ψ'' 中。由 x， y， z， z' 构成的 K_4 子图可以在 ψ'' 内部无交叉地绘制，而边 e 则沿着 f延伸至 χ，再沿着 D中 e 的原始绘图绘制。示意见图16（右）。这些改动没有引入交叉点，并且移除了交叉点 χ。因此，得到的绘图是 G 的一个 2-平面绘图，其交叉点严格少于 D，这与 D的交叉数最小性矛盾。

由此可知，$\deg(e) \geq 5$，类似地，$\deg(f) \geq 5$。

C.5 T3-3 混合点

引理18。 设 u 是 D中的一个 *T3-3* 混合点，其邻点为 v、 w、 x。那么， v、 w、 x 的度均至少为四。此外，在 v、 w、 x中，至少有一个顶点的度至少为六；或者在 v、 w、 x 中，至少有两个顶点的度至少为五。

证明。 将 Q 记为由 u、 v、 w、 x 在 D中诱导的 K_4-子图。不失一般性，假设 xuv、 uvw和 xuw 都是 D的三角面。比如，如果 G 中的三角形 xuv 在 D中不围成一个面，那么就重新绘制边 xw，使其紧贴 D中的无交叉路径 xuw。

根据引理 16， v、 w、 x 的度都至少为四。为导出矛盾，假设这三个顶点的度都恰好为四。

令 e、 f和 g 分别为与 v、 w和 x相 incident、但不属于 Q的（唯一）边。我们断言， e、 f和 g中任意两条都不交叉。为此，反设 e 和 f 在点 χ处交叉。那么，我们可以在 D 中交换 v 和 w 的位置，并相应地重新绘制边 e、 f，使得 e 沿着 f 原来的绘图绘制，反之亦然，直至 χ；从该点起，两条边各自沿着原来的绘图继续延伸。这一改变消除了一个交叉点（χ），并使除 e、 f以外所有边的每条边的交叉数保持不变。由于原绘图 D 是 2-平面的， $e \setminus \chi$ 的两条弧中至多有一条至多有一个交叉点。类似地， $f \setminus \chi$ 的两条弧中至多有一条至多有一个交叉点。因此， e 和 f 的新绘图各自至多有两个交叉点。（事实上，如果其中一条有两个交叉点，那么另一条就没有交叉点。）所以，修改后的绘图是 2-平面的，且交叉点数少于 D，这与 D的交叉数最小性矛盾。由此可知， e 和 f 不交叉；根据对称性，断言边 e、 f和 g中任意两条都不交叉也成立。

不过，我们声称 e、 f、 g 在 D 中都被交叉。以边 e 为例，令 $z \notin \{u, v, w, x\}$ 表示它的另一个端点。如果 e 在 D 中是无交叉的，那么我们可以添加一条边 uz，使其从 u 出发，经过三角形 uvw 内部，然后与 vw 相交，并沿着 e 延伸至 z。在所得的绘图 D' 中， vw 和 uz 都有一个交叉点，其余交叉点则与 D 中相同。因此，绘图 D'

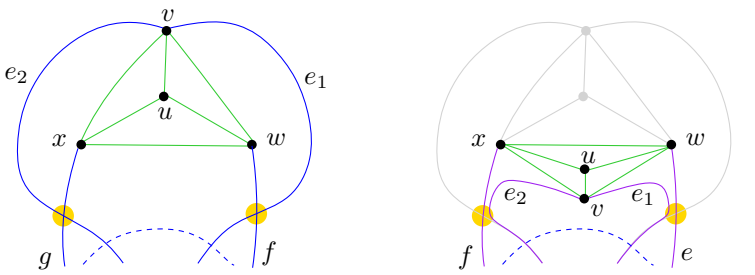
是 2-平面的，且图 $G \cup uz$ 是 2-平面图，这与 G 的极大性矛盾。因此， e 被交叉，由对称性可知， f 和 g 在 D 中也被交叉。

令 $h = ab$ 为从 v 开始沿 e 行进时第一个与 e 相交的边。根据引理 27， h 至少有一个端点与 v 在 G 中相邻；不失一般性，假设 a 是这样的端点。因此可得 $a \in \{v, w\}$，也就是说，我们有 $h \in \{f, g\}$。但我们已在上文证明， e 不与 f 或 g 中的任何一个相交，矛盾。因此， v， w， x 中至少有一个的度不小于五。

不失一般性，假设 v 的度至少为五。反设 $\deg(v) = 5$ 且 $\deg(w) = \deg(x) = 4$。令 e_1 和 e_2 分别表示 $D \setminus Q$ 中关联于 v 且在 D 中围绕 v 的关联边循环次序上分别与 vw 和 vx 相邻的边。与上文一样，令 f 和 g 分别为关联于 w 和 x、且不属于 Q 的（唯一）边。对 e， f， g 使用与上文相同的论证可知， e_1， e_2， f， g 在 D 中均被交叉，且 f 与 g 不相交。

从 w 开始遍历 f 时， $h_1 = ab$ 是第一个与 f 相交的边。根据引理 27， h 至少有一个端点与 G 中的 w 相邻。不失一般性，假设 a 是这样的端点。由此可得 $a \in \{v, x\}$ ；又由于 f 和 g 不交叉，因此我们有 $a = v$ ，且从 v 开始遍历 h_1 时， f 是第一个与 h_1 相交的边。类似地，我们得出：从 x 开始遍历 g 时，第一个与之相交的边 h_2 与 v 关联；从 v 开始遍历 h_2 时， g 是第一个与 h_2 相交的边。由此可得 $h_1 = e_1$ 和 $h_2 = e_2$ ，局部绘图如图 17(a) 所示。然后，我们可以将 u 和 v 翻到边 xw 的另一侧，并重新绘制边 e_1 和 e_2 ，使它们分别沿着 f 和 g 延伸，直到原有的交叉点处，再继续沿原来的绘图延伸。所得绘图是 2-平面的，且比 D 少两个交叉点，这与 D 的交叉数最小性矛盾。

因此， w， x 的度至少为五，或者度$(v) \geq 6$。



(a) 原始绘图。 (b) 重新绘制 u， v 和 e_1， e_2。

图17. 引理18的示意图，其中度$(v) = 5$ 和度$(w) =$ 度$(x) = 4$。顶点 v 和 u 可以翻转到边 wx的另一侧。

D 第 3.5 节的证明：收费方案

引理 19. 孤立顶点所占有的每条半边都只由该孤立顶点占有。

证明。设 G 中的 h 是一个孤立顶点，并设 G 的边 uv 承载着 h。接下来我们只考虑顶点 v，对 u 的论证是对称的。

如果 $\deg(v) \geq 5$，则 h 认领 v 处的两条半边 $\overrightarrow{hv}$ 和 $\overrightarrow{uv}$。显然，与 h 相接的半边 $\overrightarrow{hv}$ 只能由 h 认领。至于 $\overrightarrow{uv}$，我们首先注意到，根据引理 10，没有其他孤立顶点会认领 $\overrightarrow{uv}$。T3-1 顶点只认领一条与其相接的未交叉半边，而根据引理 7，u 和 v 的度均至少为四。T4-H 型顶点不会认领任何未交叉半边。因此，没有 T3-1 或 T4-H 型顶点会认领 $\overrightarrow{uv}$。剩下需要考虑的是 T3-2 和 T3-3 顶点的外围边。

因此，设 z 是一个 T3-2 或 T3-3 顶点，并设 $\overrightarrow{xw}$ 是由 z 认领的外围半边。我们可以假设路径 xzw 在 D 中无交叉；若 z 属于 T3-2 类型，则使用引理 14。反设 $\overrightarrow{xw} = \overrightarrow{uv}$。于是，我们重新绘制无交叉路径 uhv，使其紧贴无交叉路径 xzw，从而在所得的 G 的 2-平面绘图 D'中形成一个由 $uhvz$ 围成的四边形面 Q。现在，我们可以在 Q 内添加一条无交叉边 hz，这与 G 的极大性矛盾。因此，除 h 外，没有其他顶点认领 $\overrightarrow{uv}$。

引理 20. 每条双重交叉半边至多被认领一次。

证明。</style}设 h 是位于 v 处、由顶点 u 认领的一条双重交叉半边。

如果 u 是 T4-H 类型，那么根据引理 11，从 v 开始沿 h 行进时，遇到的第一个 α 交叉点是与双重交叉边 ux 相交，而其中的弧 $u\alpha$ 在 D 中无交叉。鉴于 ux 是双重交叉的，上述陈述唯一确定了 u。具体而言，没有其他顶点认领 h。

考虑 u 是 T3-2 顶点的情况。令 uw 表示与 u 相 incident、且在 D 中被 h 交叉的边，并将该交叉点记为 α。那么，根据引理 13，h 的弧 $v\alpha$ 在 D 中无交叉。因此，唯一可能认领 h 的其他顶点是 w。然而，根据引理 15，$\deg(w) \geq 5$，所以 w 也不认领 h。

接下来考虑 u 属于 T3-1 类型的情况。此时，从 v 出发沿 h 行进时遇到的第一个交叉点 α，对应的边是 uw；根据引理 12，弧 $u\alpha$ 无交叉。反设 h 被另一个顶点认领。那么根据引理 12，该顶点必为 w，且必为 T3-1 顶点，弧 αw 也必无交叉。将 h 除 α 之外的另一个交叉点记为 β，并设边 pq 与 h 在 β 处相交。对于 pq 的至少一个端点，不妨设为 p，弧 $p\beta$ 在 D 中无交叉。此外，p 必须与 u 或 w 之一位于 D 的某个公共面上，不妨设为 u。于是根据引理 4，p 和 u 由 D 中的一条无交叉边连接。由于 v 是 u 在 D 中通过无交叉边连接的唯一邻点，可知 $p = v$，这与 D 是简单绘图矛盾（边 h 和 $pq = vq$ 相交）。

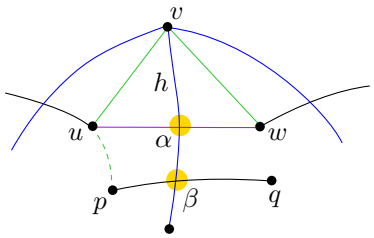


图 18. 引理 20 的证明：两个 T3-1 顶点 u 和 w 认领了位于 v 处的同一条半边 h，由此导致矛盾。

引理 25. 至多一个低度顶点会认领五度顶点处的半边。

证明。 考虑 G中的一个五度顶点 u，反设 v_1, v_2是两个不同的低度顶点，它们认领了位于 u处的半边。不妨设 $\deg(v_1) \le \deg(v_2)$。

根据引理 11，T4-H 型顶点会认领位于度至少为六的顶点处的半边。因此，我们有 $\deg(v_2) \le 3$。由于每个度为三的顶点会认领位于某个顶点处的三条半边，但 $\deg(u) = 5$，所以 $\deg(v_1) = 2$。最后，根据引理 8，可得 $\deg(v_2) \neq 2$。因此，我们有 $\deg(v_1) = 2$ 并且 $\deg(v_2) = 3$。注意，v_1 认领了两条边，这两条边在 D中均无交叉：一条是与 v_1关联的边 uv_1，另一条是承载 v_1的边。还要注意，根据引理 7，v_1 和 v_2 在 G中不相邻。接下来，我们将 v_2 视为四种不同类型的度为三的顶点。

情形 *1*（v_2 是一个 *T3-3* 顶点）。于是，v_2 认领的三条半边在 D 中均无交叉。再加上 v_1 认领的两条无交叉半边，这意味着与 u 关联的五条边在 D 中均无交叉。但这样一来，我们就可以添加一条边 v_1v_2 到 D，且只需与一条此前无交叉的边相交，这与 G 的极大性矛盾。

情况 *2*（v_2 是一个 *T3-2* 顶点）。于是，v_2 的两个邻点 w、x 通过 D 中的无交叉边与 u 相邻。由于 v_2 还认领了一条与 u关联的交叉边，因此至少有一条无交叉边 ux、uw 被 v_1 认领。由于 v_1 和 v_2 在 G 中不相邻，因此 ux 或 uw 中必有一个包含 v_1。于是，根据引理 14，我们可以调整使得 v_1、y、v_2 在 D 中围绕 u 的邻点圆周序列中连续出现，其中 $y \in \{w, x\}$。由于边 uy 在 D 中无交叉，我们可以添加一条边 v_1v_2，它只与 uy 相交，这与 G 的极大性矛盾。

情形 *3*（v_2 是一个 *T3-1* 顶点）。那么，v_2 所指的半边中有两条是交叉的，第三条是 v_2u，它是无交叉的。与 u 关联的其余两条半边是 v_1所指的两条无交叉半边；见图 19（左）。然后，我们可以在绘图中交换 v_2 和 u 的位置。结果是，与 u 关联的除 uv （仍然无交叉）之外的所有边都变成单交叉；见

图 19（右）。所得绘图是 G 的一个 2-平面绘图，其双重交叉边比 D严格更少，这就产生了矛盾。（或者，我们可以添加一条无交叉边 v_1v_2，这与 G的极大性矛盾。）

所有情况下都导出了矛盾。因此， D中不存在这样的顶点 v_1， v_2 。

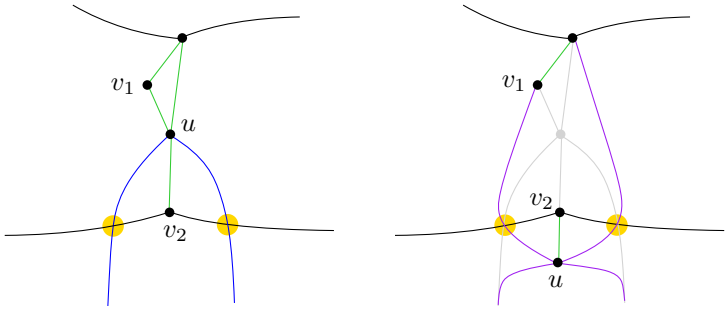


图 19. 引理 25 的证明：与一个孤立顶点 v_1 和一个 T3-1 顶点 v_2 相邻的五度顶点 u （左）；重新绘制后得到矛盾（右）。

E 上界：定理 2 的证明

本节介绍一种构造边数较少的一族极大 2-平面图的方法。这些图大致可以描述为编织圆柱网格。更确切地说，给定 $k \in \mathbb{N}$，我们按如下方式构造具有 $10k+140$ 个顶点的图 G_k。

– 取 k 个 C_{10} 的副本，即一个有 10 个顶点的圈，并将它们记为 D_1，…，D_k。对于 $i \in \{1,\dots,10\}$，将 D_i 的顶点记为 v_0^i，…，v_9^i，使得 D_i 的边为 $\{v_j^i v_{j\oplus 1}^i : \ 0 \le j \le 9\}$，其中 $\oplus$ 表示模 10 加法。– 对每个 $i \in \{1,\dots,k-1\}$，按以下方式用编织匹配连接 D_i 和 D_{i+1} 的顶点。当 j 为偶数时，添加边 $v_j^i v_{j\oplus 8}^{i+1}$ 到 G_K；当 j 为奇数时，添加边 $v_j^i v_{j\oplus 2}^{i+1}$ 到 G_K。示意见图 20（左）。– 对 D_1 和 D_k 的每条边，我们附加一个构件 $X \simeq K_9 \setminus (K_2+K_2+P_3)$，以禁止这些边上的交叉点。将 X 的顶点记为 x_0，…，x_8，使得 $\deg_X(x_0) = \deg_X(x_1) = 8$，$\deg_X(x_8) = 6$，且所有其他顶点的度均为七。令 x_6、x_7 为 x_8 的非邻点。对于 D_1 和 D_k 的一条边 e，我们附加一个 X 的副本，使得 e 在此副本中对应边 x_6x_7。总共， D_1 和 D_k 中有 20 条边，而每个 X 的副本会增加另外七个顶点，因此这些构件共向 G_K 添加了 $20 \cdot 7 = 140$ 个顶点。– 对于 D_1 和 D_k，我们分别再添加十条边连接各自的顶点，实质上是在每个圈上添加所有长度为二的边。更明确地说，对于所有 $0 \le j \le 9$ 和 $i \in \{1,k\}$，我们添加边 $v_j^i v_{j\oplus 2}^i$。

至此，图 G_k 的构造完成。注意， G_k 有 $10k + 140$ 个顶点，而 $10k + 10$ （$k - 1$）有 $+ 20 \cdot 31 + 2 \cdot 10 = 20k + 630$ 条边。因此，要渐近地证明定理 2，只需选择 $c \geq 630 - 2 \cdot 140 = 350$ 并证明 G_k 是极大 2-平面图。之后我们将再说明如何将结论推广到 n 的所有取值。

要证明 G_k 是 2-平面的，只需给出它的 2-平面绘图。图 20 给出了这样一种绘图：(1) 我们可以直接按照图 20（左）所示的绘图，将圈 D_1、.....、 D_k 及其连接边一层层嵌套；(2) 按照图 20（右）所示的绘图，绘制所有附着在 D_1 和 D_k 的边上的 X 副本。

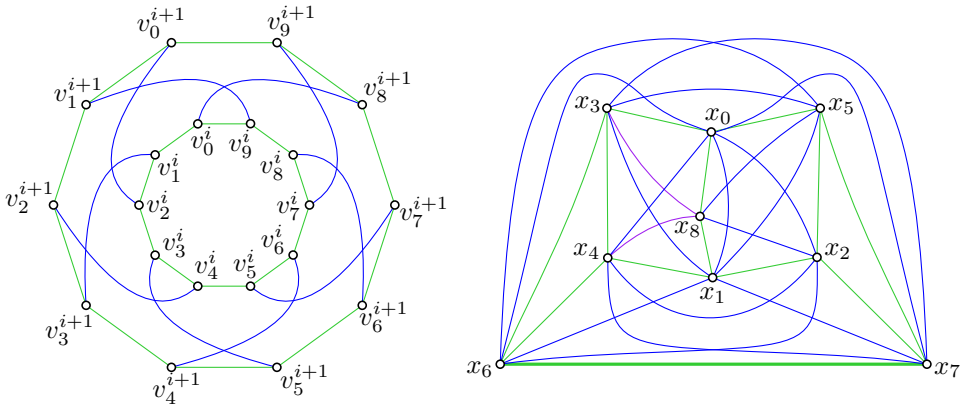


图 20。 G_k 中两个连续十圈之间的编织匹配（左，以蓝色显示）；附加到 G_k 中第一个和最后一个十圈的边上的构造图 X （右）。

不过，要论证 G_k 是极大2-平面的，挑战要大得多。事实上，我们不知道有什么直接的方法可以确立这一结论。相反，我们将论证 G_k 实质上只有一种 2-平面绘图，也就是上文所述的绘图。随后，只需检查这一绘图，并注意到由于每一对非邻接顶点都被一个由双交叉边构成的圈隔开，因此无法再添加任何边，即可得出其极大性。

根据引理 3，在讨论极大性时，我们可以将注意力限制在简单绘图上。

引理 30. 如果一个2-平面图 G 不是极大2-平面图，那么就存在一个简单2-平面绘图 G ，它不是极大2-平面绘图。

证明。 如果 G 不是极大 2-平面图，那么在 G 中存在一对不相邻顶点 u， v ，使得 $G' = G \cup e$ 是 2-平面图。根据引理 3，存在 G' 的一个简单 2-平面绘图，其在 G 上的限制是 G的一个简单 2-平面绘图，而后者不是极大 2-平面。

首先，我们证明 X 本质上只有一种 2-平面绘图。为证明这一结论，我们需要更准确地说明“本质上 ”的含义。由于我们把 X 视为带标号图，因此需要考虑 X的自同构。回想一下， $X \simeq K_9 \setminus (K_2 + K_2 + P_3)$。因此，顶点有四个等价类：(1) 唯一的 6 度顶点 x_8 ；(2) x_8的两个非邻点，即 x_6 和 x_7；(3) 两个 8 度顶点，即 x_0和 x_1；(4) 其余度为 7 的顶点。(2) 类和 (3) 类中的顶点均可自由且独立地互换。在 (4) 类的顶点中，有两对非邻点；我们可以互换这两对顶点，也可以分别互换每一对。因此，图 20（右）所示绘图有 $\mathrm{Aut}(X) = (Z_2)^5$ 和 $|\mathrm{Aut}(X)| = 32$ 种变体。在所有这些变体中，恰有一个面以 x_6 和 x_7 为边界顶点（图 20 中的外面），且无交叉边 x_6x_7 被一个由双重交叉边构成的四元环包围。因此， X 的其余顶点无法与 G_k的其余部分发生联系（具体而言，无法从后者获得额外的边）。所以我们认为这 32 种绘图本质上相同。我们要证明的是， X不存在其他相关绘图。

引理 31. 图 X 是极大 2-平面图，并且它在球面 $\mathcal{S}^2$上有一个本质上唯一的简单2-平面绘图，即图 *20*（右）所示的绘图。

我们通过对 X 的简单绘图空间进行穷举计算探索，证明引理 31。我们的方法类似于 Angelini、Bekos、Kaufmann 和 Schneck [2] 用于完全图和完全二分图拓扑绘图的方法。我们以增量方式构建这些绘图，并使用双连通边表（DCEL） [7, Chapter 2] 表示。首先插入一条边进行初始化，然后按某种顺序处理其余边，使得每次处理一条边时，其至少一个端点已经位于绘图中（如果图是连通的，这总是可行的）。插入一条边时，我们尝试：（1）源顶点循环次序中的所有可能位置；对于每个位置，再尝试（2）绘制交叉点数为零、一或二的边。每次这样的尝试都相当于遍历一个与源顶点关联的面，以及邻域中至多另外两个面（在这一过程中，一个面可能出现多次，因为并非每个交叉点都会改变面，且交叉也可能返回到先前访问过的面）。

每当我们考虑交叉一条边时，都会确保不与相邻边交叉，也不与已经被交叉过的边交叉，以保持绘图简单；我们还会确保每条边被交叉的次数不超过两次，以保持 2-平面绘图。如果目标顶点尚未出现在绘图中，我们就将其插入相应的面中；否则，就必须在该面的边界上找到它。如果成功插入一条边，我们就将当前插入搜索的状态压入栈中，然后继续处理下一条边。否则，该边无法插入，我们就回溯，将之前插入的边从栈中弹出，并继续尝试插入这条边的其他可能方案。

每当所有边都成功添加到绘图中时，我们就输出该绘图，并通过回溯寻找可能剩余的绘图。最终，

所有选项都已探索完毕，我们也就知道了所有可能的绘图。由于该算法会考虑给定图的所有可能带标号的绘图，而这类绘图的数量通常随顶点数呈指数增长，因此它只能用于规模较小且固定的图。幸运的是，上文描述的图 X 足够小，只有 9 个顶点和 32 条边。我们可以通过研究图 20（右）所示的绘图，或多次运行算法以得出以下结论，来验证 X是极大 2-平面图。

引理 32. 从 K_9 中至多删除三条边后得到的图都不是 2-平面。

试图以类似的方式证明 G_k 是极大 2-平面时，我们面临一个显而易见的挑战：图 G_k 肯定并非规模较小的常数大小图。为克服这一挑战，我们（1）将图中的所有 X 副本都省略（反正根据引理 31，我们已知它们的绘图），并在 G_k 中通过将 D_1 和 D_k 的边初始化为带有两个虚假交叉点来复现它们的作用，从而有效地使其他边无法与这些边交叉；（2）迭代地计算可能的绘图：从 D_1 的唯一绘图开始，逐步考虑目前得到的所有部分绘图，在每个绘图中再添加一个 D_i，然后进行清理，并移除所得绘图中不再有用的部分（例如，被双交叉边围住的部分）。我们希望这样的清理步骤能让我们维护一个规模较小、大小恒定的“相关”绘图，尽管从概念上说，整个绘图可能非常庞大。因此，我们所说的部分绘图，是指从 D_1 开始，按顺序成功添加 G_i 中出现的一系列十圈 D_2、……、D_i，并在每次扩展后应用清理步骤所得到的 2-平面绘图。

缩小搜索空间。请记住，我们的总体目标是绘制 G_k。为了得到 G_k 的绘图，最终必须通过添加 D_k 来扩展某个部分绘图，从而完成绘图。因此，实际上，我们尝试对每个部分绘图进行两次扩展：第一次添加普通、不受约束的 D_i；如果第一次扩展可行，则第二次添加 D_k，其边不可交叉。我们还希望需要考虑的部分绘图数量仍然可控。为此，我们考虑所有在同构意义下等价的部分绘图，其中同构将 D_{i-1} 映射到自身，并保持指标的奇偶性（因为只有 D_{i-1} 与 D_i 之间有边，且上述同构保持这些边的集合不变）。

我们还会分析发现的每个部分绘图，判断它是否有可能最终通过添加 D_k 来完成。如果不可能，那么所考虑的绘图对于绘制 G_k 就无关紧要。要使这种扩展存在，必须满足以下必要条件。

引理 33. 对于某个 $i \in \mathbb{N}$，G_i 的部分绘图 Γ 只有在存在 Γ 中的一个面 f 以及一组曲线 $\Phi = \{\phi_v\colon\ v \in V(D_i)\}$ 时，才能扩展为某个 $k > i$ 的 G_k 的2-平面绘图；其中 ϕ_v 在 Γ 中连接 v 与 f（内部的某个点），并且在绘图 $\Gamma \cup \Phi$ 中，Γ 的每条边至多有两个交叉点。

证明。若要扩展为 G_k 的绘图，最终必须通过 D_k 补全部分绘图 Γ。由于 D_k 的边不可与其他边相交，因此 D_k 全部位于 Γ 的同一个面内。D_i 的每个顶点 v 都有一条通往 D_k 中某个顶点的路径（经由 D_{i+1}、.....、D_{k-1}）。这条路径对应于上文所述的一条曲线 ϕ_v。由于 ϕ_v 对应于 G_k 中的一条路径，我们无法确切说明沿 ϕ_v 的交叉点数量。不过，Γ 的边在任何情况下都不得总共被交叉超过两次。

根据引理 33，可通过对 Γ 的对偶图应用标准网络流技术，高效判定是否存在面 f 和一组曲线 Φ：一个单源 s 通过一条单位容量边连接到 D_i 的每个顶点，D_i 的每个顶点连接到与其关联的所有面，而 Γ 的每条边 e 则通过一条容量为二减去 e 在 Γ 中的交叉点数的边，连接两个关联面。接下来要判断的是，是否存在一个从 s 到 f、值为十的流。我们将 Γ 中所有存在这种流的面称为 Γ 的**潜在最终面**。根据引理 33，所有不含任何潜在最终面的部分绘图都可以丢弃。

清理。下面稍作详细说明算法发现的所有部分绘图所采用的清理步骤。清理基于面的分类。若一个面到某个潜在最终面存在值至少为三的流，则称其为**活跃的**。

引理 34. *将 Γ 的 2-平面绘图扩展为 G_k的 2-平面绘图时，对于 $k > i$，$G_k \setminus G_i$ 的所有顶点都必须放置在 Γ的活跃面中。*

证明。考虑 Γ的一个面 f，并假设将 Γ扩展为 G_k的绘图时，$G_j \setminus G_i$中至少有一个顶点被放置在 f中，其中 $i < j \leq k$为某个值。我们必须证明 f在 Γ中是活跃的。如果 D_j的 ℓ个顶点在 Γ'中被放置到 f中，那么根据引理 33，存在一股流，其流量至少为 ℓ，流向 Γ的一个潜在最终面。因此，只需考虑 D_j 中只有一个或两个顶点在 Γ'中被放置到 f 中的情形。设 v 为其中一个顶点。由于 D_j 在 G_j中构成一个圈，它的两条边会穿过 f的边界，连接到 f之外的顶点 u、w。根据引理 33，存在一组三条曲线 Φ，即分别从 u、v、w到 Γ的一个潜在最终面的曲线 ϕ_u、ϕ_v、ϕ_w，使得 Γ的每条边在 $\Gamma \cup \Phi$中至多被交叉两次。我们可以分别将曲线 ϕ_u 和 ϕ_w 沿着 D_j与从 v 到 u、w 的两条路径接续起来，从而得到一组三条曲线 Φ'，从 v 到 Γ 中的一个潜在最终面，并使得 Γ 的每条边在 $\Gamma \cup \Phi'$中至多被交叉两次。因此，如所述，Φ' 证明了存在一股从 f 流向一个潜在最终面的流，且其流量至少为三。

除了活跃面，我们还有被动面和过渡面。如果部分绘图中的一个面 f不是活跃面，且其边界上有 D_i 的一个顶点 v，并且在对偶图中存在一条从 f 到某个活跃面的路径 P，长度至多为二，且 P 的第一条边与 v 不关联，那么该面就是被动面。如果部分绘图中的一个面既不是活跃面，也不是被动面，但在对偶图中至少有一条边连接到活跃面，且至少还有另一条边通向活跃面或被动面（也可能是两条边都连接到同一个活跃面），那么该面就是过渡面。一个面

如果是活跃面、被动面或过渡面，就称为相关面；所有其他面都是无关面。根据以下引理，在绘制 G_k 时，我们可以不考虑无关面。

引理 35. 将 Γ 的 2-平面绘图扩展为 G_k 的 2-平面绘图时，对于 $k > i$，$G_k \setminus G_i$ 的顶点和边与 Γ 的无关面不相交。

证明。根据引理 34，$G_k \setminus G_i$ 的所有顶点都位于 Γ 的活跃面中。G_k 中的每条边至多有两个交叉点，因此最多与 Γ 的三个面相交。$G_k \setminus G_i$ 中的边有两种类型：(1) 连接 $G_k \setminus G_i$ 中两个顶点的边；(2) 连接 D_i 中一个顶点与 $G_k \setminus G_i$ 中一个顶点的边。第一种类型的边始于并终于活跃面（可能是同一个面）。如果它途经中间的另一个面，那么该面符合过渡面的判定标准，因此不是无关面。第二种类型的边终于一个活跃面，始于一个活跃面或被动面（可能是它终止的同一个面）。如果它途经中间的另一个面，那么该面符合过渡面的判定标准，因此不是无关面。

根据引理 35，在每次迭代结束时从绘图中移除无关面是安全的。类似地，我们也移除无关顶点。若绘图中的一个顶点或交叉点 v 是 G_i 的顶点；（2）关联两个或更多相关面；或（3）恰好关联一个相关面，且若移除 v，该面就会变成一个透镜（仅由一个二循环围成），则称其为相关。移除顶点在这种情况下相当于沿着相关面的边界收缩两条关联边之一。所有其他顶点均为无关。最后，我们在因移除无关面而腾空的每个区域中添加一个不可交叉星，从而完成清理步骤。这样可以确保绘图得以保持，并确保在后续迭代中没有边能够穿过这片空间——这片空间现在看似空无一物，实则不然。

至此，我们完成了对计算方法的描述，该方法用于证明图 G_k（本质上）具有唯一的 2-平面绘图，从而渐近地证明定理 2。接下来还需说明如何得到对所有 n取值都成立的结论。

严格来说，k 的最小合理取值是 $k = 2$，这样我们就有 160 个顶点。为了处理范围 $n < 160$，我们利用每个有 n个顶点的 2-平面图至多有 $5n - 10$ 条边这一事实，并直接令 $c \geq (5 \cdot 159 - 10) - 2 \cdot 159 = 467$。增大 k 只能得到 n 为 10 的倍数的取值。为了得到其间所有其他取值，注意我们可以在构件 X 的一个副本中添加一个新顶点 x'，并将其与三个顶点 x_3、x_4 和 x_6相连。考虑 X（参见图 20）本质上唯一的 2-平面绘图，在 X^+ 的任意 2-平面绘图中：$= X + x'$，顶点 x' 必须放置在无交叉三角形 $x_3x_4x_6$周围四个面中的一个内；同时，为了保持图的 2-平面性，不能再向图中添加任何与 x' 关联的边。因此，在 G_k中所需数量的一至九个 X 副本中添加这样的顶点，我们便能达到 n的全部取值范围。每个额外顶点会增加三条边，而非

两条边。但由于我们对 c的设定较为宽松，最多九条额外边已经计入其中。