基于人工神经网络的深度校准：期权定价模型的性能比较

Young Shin Kim[a]、Hyangju Kim[b,*]、Jaehyung Choi[c,**]

[a]石溪大学商学院，美国纽约[b]花旗银行，美国纽约[c]高盛，美国纽约

arXiv:2303.08760v1 [q-fin.MF] 15 Mar 2023

摘要

本文探讨将人工神经网络（ANN）作为一种无模型解决方案，用于期权定价模型的校准算法。我们构建人工神经网络，为两种广为人知的GARCH类期权定价模型校准参数：Duan 的 GARCH 和经典温和稳定GARCH模型。这两种模型显著改进了布莱克-斯科尔斯模型的局限性，但计算复杂度较高。为克服这一技术难题，我们采用蒙特卡洛模拟（MCS）方法生成数据集来训练人工神经网络，并将其用于校准最优参数。性能结果表明，人工神经网络方法始终优于MCS，且在训练完成后具有计算速度更快的优势。本文还讨论了期权的希腊值。

*JEL*分类：C15,C63,C65,G130

关键词：深度校准、人工神经网络（ANN）、前馈神经网络 k（前馈神经网络）、期权定价模型、GARCH模型、Duan 的 GARCH 模型、温和稳定模型

*免责声明：本出版物中表达的观点、信息或意见仅代表Hyangju Kim个人，并不代表花旗集团及其各自关联公司或员工的立场。

**免责声明：本文中表达的意见和陈述均为作者个人观点。高盛及其各自关联公司均未提出本文中的任何意见或陈述，也并非其来源（这些意见或陈述可能与高盛内部或高盛所持有或表达的观点不同）。本文内容仅供参考，不构成投资建议（或任何其他类型的建议）。对于本文的任何内容，或任何人依赖此类内容（或其中任何部分）采取或未采取的任何行动，作者、高盛及其各自的关联公司、高管、员工或代表均不承担任何责任。电子邮箱地址：aaron.kim@stonybrook.edu（Young Shin Kim）、hyangju.kim@gmail.com（Hyangju Kim）、jj.jaehyung.choi@gmail.com（Jaehyung Choi）

预印本已提交至爱思唯尔 *2023*年*3*月*16*日

1. 引言

过去几十年来，期权定价一直是定量金融领域的核心课题，期权市场也取得了显著发展。自布莱克和斯科尔斯（1973）与默顿（1973）的开创性研究以来，布莱克-斯科尔斯模型一直是最基础的期权定价模型。然而，其严格的假设（例如波动率恒定或采用几何布朗运动（GBM））因无法反映金融市场的经验特征而受到批评。

此后，人们提出了许多模型，以放宽 Black-Scholes 模型的假设。一种成功的方法是在广义自回归条件异方差（GARCH）框架下采用随机波动率。早期的尝试由恩格尔和穆斯塔法（1992）提出，重点研究隐含条件波动率。随后，Duan（1995）利用局部风险中性估值关系，建立了更为严谨的 GARCH期权定价模型框架；在该框架下，未来一期的条件方差在风险中性测度和物理测度下均保持不变。后来，Duan 等（2004）和 Duan 等（2006）将该模型扩展至跳跃扩散模型。Duan 的 GARCH 模型假设残差服从正态分布，然而，实证证据表明，模型中残差服从正态分布这一假设无法恰当地描述资产收益动态（Duan（1999）以及门和 Rachev（2009））。

另一种方法称为 L´évy 分布，它允许标的分布具有跳跃、偏度、峰度和厚尾，从而克服几何布朗运动假设的缺陷。它也称为稳定分布，其一个著名的子类是经典截尾稳定（CTS）分布。[1] 研究者从多个方向对 CTS 分布进行了研究，例如投资组合管理（土田 等 (2012)；贝克 等 (2013)；格奥尔基耶夫 等

[1]其他子类包括经典截尾稳定过程、广义经典截尾稳定过程、修正截尾稳定过程、正态截尾稳定过程、Kim-Rachev截尾稳定过程以及快速衰减截尾稳定过程。

(2015)；Anand 等 (2016)；Choi 等 (2021)）以及动量策略（Choi等 (2015)）。

作为期权定价领域对这两种方法的整合，Kim 等人(2008a)、Kim 等人(2010a)和 Kim 等人(2022)通过引入经典截尾稳定（CTS）分布 [2] 改进了 Duan 的 GARCH 模型，并将其称为 CTS-GARCH 模型。CTS-GARCH 模型考虑了创新过程的非正态性，被认为是最先进的期权定价模型之一，因为它同时解决了布莱克-斯科尔斯模型的两项关键局限（Kim等人(2010b)）。

然而，这些模型大多具有较高维度，这在参数校准阶段会带来问题；需要调整参数，以找到最接近市场价格的最佳模型输出。因此，即使多维模型表现更优，布莱克-斯科尔斯模型在实践中仍然具有实用价值。

近年来，机器学习作为一种非参数或无模型的解决方案，为应对维数灾难提供了新的思路。随着计算能力的提升和算法的进步，这一领域正在快速发展。

机器学习的主要支柱之一是人工神经网络（ANN）。人工神经网络（也称为神经网络或多层感知器）由 McCulloch 和 Pitts 于 1943 年提出。人工神经网络由输入层、多个隐藏层和输出层组成，每个隐藏层都执行向量到向量或向量到标量的计算，以尽可能准确地逼近输出层。隐藏层的并行结构使其能够利用多处理器，因此人工神经网络的计算速度明显快于传统算法。凭借这一优势，人工神经网络迅速发展，并出现了多种类型，例如多层感知器神经网络、卷积神经网络、径向基函数神经网络、循环神经网络、模块化神经网络等。

[2]CTS 分布曾以不同名称进行研究，包括 Koponen (1995) 提出的截断 *L ́évy* 飞行、Barndorff-Nielsen 和 Levendorskii (2001) 提出的截尾稳定分布、Barndorff-Nielsen 和 Shephard (2001)˘以及 Cont 和 Tankov (2004) 提出的分布、Boyarchenko 和 Levendorskii (2000) 提出的*KoBoL* 分布，以及 Carr 等人(2002) 提出的*CGMY* 分布。Kim等人(2008b)提出的 KR 分布是 CTS 分布的扩展。Rosi ́nski (2007) 将 CTS 分布推广为截尾稳定分布。

金融领域的许多研究也致力于探索人工神经网络的应用。尤其是，由于人工神经网络建立在多维非线性模型的基础上，因此作为解决期权定价模型中长期存在的计算难题的一种有前景的替代方法，受到了广泛关注。早期的尝试是将人工神经网络用作布莱克-斯科尔斯公式的函数逼近器，这一做法由 Malliaris 和 Salchenberger（1993）以及 Hutchinson等人 （1994）提出。此后，已有一百多篇论文研究了人工神经网络在期权定价中的应用，涉及各种参数输入和性能指标（Ruf 和 Wang（2019））。

虽然大多数研究利用人工神经网络，根据市场数据中的参数估算期权价格，并通过样本外检验衡量其表现，但 Bayer等 （2019）和 Alaya等 （2021）近期提出了一种不同的方法。在这种方法中，人工神经网络并不侧重于逼近定价公式，而是应用于校准阶段，以求得模型参数。由于训练集是通过蒙特卡洛模拟（MCS）方法生成的，因此可以获得更可靠且避免市场不完备性的数据集。使用足够大的数据集也是这一方法的另一项优势。

本文同样将人工神经网络作为一种替代校准方法进行研究。我们针对 Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 模型，分别使用 MCS 方法生成包含 100,000 组模拟参数和价格向量的训练集，随后训练由三个隐藏层组成、每层有二十个节点的人工神经网络。具体而言，我们采用的是不包含任何循环或回路的前馈神经网络。训练好的人工神经网络用于校准 2021年6月至2022年5月期间每月第二个星期三的标准普尔 500 指数看涨期权和看跌期权价格。我们发现，这种方法不仅表现优于此前的 MCS 方法，而且运行速度显著更快。此外，我们还使用人工神经网络方法计算了期权希腊值。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论 GARCH 期权定价模型。第 3 节介绍人工神经网络的构建与训练方法。第 4 节使用实证数据考察人工神经网络在校准方面的表现。最后，第 5 节给出结论。

2. 预备知识

本节将重新讨论具有无限可分 创新项的 Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 期权定价模型。无限可分随机变量是指能够表示为无穷多个独立同分布随机变量之和的随机变量。这一概念在稳定分布和期权定价模型的研究中发挥着重要作用。

我们首先以 CTS 分布为例，回顾一种无限可分布，随后概述 Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 期权定价模型。最后，我们概述如何使用 MCS方法对这两种 GARCH 期权定价模型进行欧式看涨期权和看跌期权定价。

2.1. CTS 分布

X 称为经典截尾稳定分布随机变量，记作$X \sim$ CTS(α, C, λ_+, λ_-, m)（Rachev等（2011）和 Kim等（2010b））， 如果该分布的特征函数表示为

$$
\begin{aligned}
&E[e^{iuX}] = \phi_{\text{CTS}}(u;\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-,m) \\
&= \exp\left((m - C\Gamma(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}))iu - C\Gamma(-\alpha)\left((\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_- + iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha\right)\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

where C_+， C_-， λ_+， λ_-为正数， $0 < \alpha < 2$、 $m \in \mathbb{R}$， 且 Γ 为伽马函数 .

如果我们将 $C = (\Gamma(2-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}))^{-1}$ 和 $m = 0$ 代入 $Z \sim$ CTS(α, C, λ_+, λ_-, m), 那么我们有 $E[Z] = 0$, 且 var(Z) $= 1$。在这种情况下，随机变量 Z 称为 标准*CTS*分布, 且 $Z \sim$ stdCTS(α, λ_+, λ_-)。 Z 的特征函数为

$$
\begin{aligned}
&E[e^{iuZ}] = \phi_{\text{stdCTS}}(u;\alpha,\lambda_+,\lambda_-) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})}iu + \frac{(\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_- + iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha}{\alpha(\alpha-1)(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2})}\right).
\end{aligned} \tag{2}
$$

我们将 Z 的对数拉普拉斯变换函数表示如下（Kim 等人（2010b））：

$$
\begin{aligned}
l(x) &:= \log\left(\phi_{\text{stdCTS}}(-ix;\alpha,\lambda_+,\lambda_-)\right) \\
&= \frac{x(\lambda_+^{\alpha-1}-\lambda_-^{\alpha-1})}{(\alpha-1)(\lambda_+^{\alpha-2}+\lambda_-^{\alpha-2})} + \frac{(\lambda_+-x)^\alpha-\lambda_+^\alpha+(\lambda_-+x)^\alpha-\lambda_-^\alpha}{\alpha(\alpha-1)(\lambda_+^{\alpha-2}+\lambda_-^{\alpha-2})}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

2.2. Duan 的广义自回归条件异方差和 *CTS-GARCH* 期权定价模型

设 $(S_t)_{t\in\{0,1,\cdots,T^*\}}$为标的资产价格过程，$(y_t)_{t\in\{0,1,2,\cdots,T^*\}}$为标的资产对数收益率过程，其中 $y_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$，且 $y_0 = 0$，$T^* < \infty$位于时间范围内。在物理测度 $\mathbb{P} = \bigoplus_{t=1}^{T^*} \mathcal{P}_t$下，假设 $(y_t)_{t\in\{0,1,2,\cdots,T^*\}}$服从 GARCH模型：

$$
\begin{cases}
y_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}\epsilon_{t+1} \\
\sigma_{t+1}^2 = \kappa + \xi\sigma_t^2\epsilon_t^2 + \zeta\sigma_t^2
\end{cases}
\quad \text{for } t \in \{0,1,2,\cdots,T^*-1\}, \tag{4}
$$

其中，μ_{t+1} 为日预期收益率，ϵ_{t+1} 服从无限可分布。S_0、ϵ_0和 σ_0 为满足 $\epsilon_0 = 0$的实常数。该 GARCH模型包含满足 κ、ξ、ζ 的参数，其中$\xi + \zeta < 1$。

接下来，我们分别将 $(R_t)_{t\in\{1,2,\cdots,T^*\}}$ 和 $(d_t)_{t\in\{1,2,\cdots,T^*\}}$ 定义为标的资产的日无风险收益率序列和日股息率序列。于是，存在一个风险中性测度$\mathbb{Q} = \bigoplus_{t=1}^{T^*} \mathcal{Q}_t$，使得：

- $\eta_{t+1} = \theta_{t+1} + \epsilon_{t+t}$，其中 $\theta_{t+1} = \frac{\mu_{t+1} - R_{t+1} + d_{t+1} + w_{t+1}}{\sigma_{t+1}}$ 是风险市场价格，$\omega_{t+1} = \log E_{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma_{t+1}\epsilon_{t+1}}\right]$。
- η_{t+1} 在测度 $\mathbb{Q}$ 下也具有无限可分性。

对公式（4）应用测度变换，可得 $\mathbb{Q}$ 下的风险中性价格过程：

$$
\begin{cases}
y_{t+1} = R_{t+1} - d_{t+1} - \omega_{t+1} + \sigma_{t+1}\eta_{t+1} \\
\sigma_{t+1}^2 = \kappa + \xi\sigma_t^2(\eta_t - \theta_t)^2 + \zeta\sigma_t^2
\end{cases}
\quad \text{for } t \in \{0,1,2,\cdots,T^*-1\} \tag{5}
$$

其中 $\xi+\zeta<1$。为简化条件 $\xi+\zeta<1$，我们定义两个参数 ψ 和 γ，分别为 $\psi=\frac{\xi}{\zeta}$ 和 $\gamma=\xi+\zeta$。于是可得

$$\sigma_t^2=\kappa+\frac{\gamma}{\psi+1}\left(\psi\sigma_{t-1}^2(\eta_{t-1}-\theta_t)^2+\sigma_{t-1}^2\right), \tag{6}$$

其中 κ，ψ，$\gamma>0$、$\eta_0=0$ 和 $\sigma_0>0$。

在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下，标的资产价格定义为 $S_t=S_0e^{\sum_{j=1}^t y_j}$（$t\in\{1,2,\cdots,T-1,T,\cdots,T^*\}$）。到期时间为 T、收益函数为 $H(S(T))$ 且满足 $t\le T\le T^*$ 的欧式期权价格为

$$E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sum_{j=t+1}^T R_j}H(S(T))\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sum_{j=t+1}^T R_j}H(S_te^{\sum_{j=t+1}^T y_j})\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{7}$$

例如，行权价为 K、到期时间为 T 的欧式普通看涨期权和看跌期权在时刻 $t=0$ 的价格分别为

$$\text{(Call)}=E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sum_{j=1}^T R_j}\max\{S_0e^{\sum_{j=1}^T y_j}-K,0\}\right] \tag{8}$$

and

$$\text{(Put)}=E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sum_{j=1}^T R_j}\max\{K-S_0e^{\sum_{j=1}^T y_j},0\}\right], \tag{9}$$

分别。

此外，令 m 为定义为 $m=\frac{K}{S_0e^{\sum_{t=1}^T R_t}}$ 的价内外程度，则有

$$\text{(Call)}=S_0V_C \text{ and } \text{(Put)}=S_0V_P, \tag{10}$$

其中

$$V_C = E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{\exp\left(\sum_{t=1}^{T} -d_t - w_t + \sigma_t\eta_t\right) - m, 0\right\}\right] \tag{11}$$

and

$$V_P = E_{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{m - \exp\left(\sum_{t=1}^{T} -d_t - w_t + \sigma_t\eta_t\right), 0\right\}\right]. \tag{12}$$

现在，我们介绍两个采用无限可分创新的 GARCH 期权定价模型的常见例子:

• *Duan* 的 *GARCH* 模型 （Duan（1995））：假设 η_t'服从标准高斯分布（该分布是无限可分的），则可得到 Duan 的 GARCH 期权定价模型，其中 $w_t = \frac{\sigma_t^2}{2}$。

—

• *CTS-GARCH* 模型 （Kim 等人 （2010a））：假设 η_t'服从标准CTS分布（该分布同样是无限可分的），我们将此 GARCH 模型称为 CTS-GARCH 期权定价模型。具体而言，当我们在测度 $\mathbb{Q}$ 下对所有$t \in \{1, 2, \cdots\}$ 设定 $\eta_t \sim$ stdCTS(α, λ_+, λ_-) 时，有

$$w_t = \log\left(\phi_{\text{stdCTS}}(-i\sigma_t; \alpha, \lambda_+, \lambda_-)\right) = l(\sigma_t) \tag{13}$$

根据公式（3）。

2.3. 使用 *MCS* 方法为欧式看涨期权和看跌期权定价

为简化模型，本文余下部分作出以下假设：日无风险收益率 R_t 为常数 R， θ_t 为常数 θ，且 $d_t = 0$。我们将 $t \in \{1, 2, \cdots, T, \cdots, T^*\}$ 定义为 $0 < T \leq T^*$ 的时间步集合，其中每一步代表一个营业日。我们还假设一年有 250 个营业日，并将年无风险收益率定义为 $r = 250 \cdot R$。年分数时间记作 $\tau = \frac{T}{250}$，并将 m 定义为价内外程度，

—

其中 $m = \frac{Ke^{-RT}}{S_0} = \frac{Ke^{-r\tau}}{S_0}$。

基于这些假设，我们可以使用 MCS方法生成一组无限可分随机数$\{\eta_{t,n}$：$t \in \{1,2,\cdots, T^*\}, n \in \{1, 2, \cdots, N\}\}$。接下来，我们应用 GARCH模型获得一组波动率 $\{\sigma_{t,n}$： $t \in \{1, 2, \cdots, T^*\}, n \in \{1, 2, \cdots, N\}\}$，其定义如下

$$\sigma_{t,n} = \sqrt{\kappa + \frac{\gamma}{\psi + 1}\left(\psi\sigma_{t-1,n}^2(\eta_{t-1} - \theta)^2 + \sigma_{t-1,n}^2\right)}, \tag{14}$$

其中 $\kappa, \psi, \gamma > 0, \eta_0 = 0$ 以及 $\sigma_{0,n} = \sigma_0$，对于常数 σ_0。

给定到期时间 $T \leq T^*$ 和价内外程度 m，我们将 V_C 和 V_P 近似为:

$$V_C \approx \hat{V}_C = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \max\left\{\exp\left(\sum_{t=1}^{250\tau} -w_{t,n} + \sigma_{t,n}\eta_{t,n}\right) - m, 0\right\} \tag{15}$$

and

$$V_P \approx \hat{V}_P = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \max\left\{m - \exp\left(\sum_{t=1}^{250\tau} -w_{t,n} + \sigma_{t,n}\eta_{t,n}\right), 0\right\}. \tag{16}$$

根据式（15）和（16），Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 模型中的看涨期权与看跌期权价值可计算如下:

- ***Duan*** 的 ***GARCH*** 模型：我们生成一组标准高斯随机数 $\{\eta_{t,n}$:$t \in \{1,2,\cdots,T^*\}, n \in \{1,2,\cdots,N\}\}$，并设定 $w_{t,\ n} = \frac{\sigma_t^2}{\ \ 2}{}^{n}$。然后，我们得到 Duan 的 GARCH 模型的看涨期权和看跌期权价格。在此情况下，我们将 (15) 和 (16) 分别记为

$$V_C^{Duan}(m,\ \tau;\ \kappa,\ \psi,\ \gamma,\ \theta,\ \sigma_0) = \hat{V}_C \quad \text{and} \quad V_P^{Duan}(m,\ \tau;\ \kappa,\ \psi,\ \gamma,\ \theta,\ \sigma_0) = \hat{V}_P, \tag{17}$$

。看涨期权和看跌期权价格可用 MCS 近似为

$$\text{Call}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) \approx S_0 V_C^{Duan}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0) \tag{18}$$

and

$$\text{Put}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) \approx S_0 V_P^{Duan}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0). \tag{19}$$

- *CTS-GARCH* 模型：我们模拟一组标准 CTS随机数 $\{\eta_{t,n} : t \in \{1,2,\cdots,T^*\}, n \in \{1,2,\cdots,N\}\}$ 其参数为（α， λ_+， λ_-）。通过设定 $w_{t,n} = l(\sigma_{t,n})$，我们得到 CTS-GARCH 模型的看涨期权和看跌期权价格。具体而言，我们用（15）和（16）分别表示看涨期权和看跌期权价值：

$$V_C^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-) = \hat{V}_C \quad \text{and} \quad V_P^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-) = \hat{V}_P, \tag{20}$$

利用 MCS，我们可以得到 CTS-GARCH 模型下的看涨期权和看跌期权价格，使得

$$\text{Call}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) \approx S_0 V_C^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-) \tag{21}$$

and

$$\text{Put}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) \approx S_0 V_P^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-). \tag{22}$$

3. 人工神经网络

在本节中，我们构建两个人工神经网络，用于计算 Duan 的 GARCH 模型和 CTS-GARCH 模型下的看涨期权和看跌期权价格。更准确地说，我们设计多层人工神经网络来生成与函数值相似的结果，

分别对应 V_C^{Duan}、 V_P^{Duan}、 V_C^{CTS} 和 V_P^{CTS}。为了便于训练，我们对这四个函数取对数，并定义如下新函数：

$$v_C^{Duan}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \log\left(V_C^{Duan}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-)\right) \quad (23)$$

$$v_P^{Duan}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \log\left(V_P^{Duan}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-)\right) \quad (24)$$

$$v_C^{CTS}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \log\left(V_C^{CTS}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-)\right) \quad (25)$$

$$v_P^{CTS}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \log\left(V_P^{CTS}(m,\tau;\kappa,\psi,\gamma,\theta,\sigma_0,\alpha,\lambda_+,\lambda_-)\right) \quad (26)$$

3.1. 生成训练集

我们首先按照上一节所述，使用 MCS 方法为四个函数 v_C^{Duan}、 v_P^{Duan}、 v_C^{CTS} 和 v_P^{CTS} 生成训练集。由于 v_C^{Duan} 和 v_P^{Duan} 有七个输入参数（m、 τ、 κ、 ψ、 γ、 θ、 σ_0），因此我们在输入层中设置七个节点。对于 v_C^{CTS} 和 v_P^{CTS}，除 v_C^{Duan} 和 v_P^{Duan} 的七个输入参数外，还需要三个额外的输入参数（α、 λ_+ λ_-）。输入参数的取值范围见表 1。各模型训练集生成过程的更多详情如下：

• *Duan* 的 *GARCH* 模型：我们根据表 1 中规定的边界，为（m、 τ、 κ、 ψ、 γ、 λ、 σ_0）生成 100,000 个七维均匀分布随机向量。为避免随机向量聚集，我们使用 Halton 算法（Halton（1964））。然后，我们分别使用 MCS 计算 100,000 个 v_C^{Duan} 和 v_P^{Duan}。在 MCS 中，我们基于具有七维模型参数的 Duan 的 GARCH 模型，使用 20,000 条样本路径。

• *CTS-GARCH* 模型：我们根据表 1 中指定的边界，为 (m, τ, κ, ψ, γ, θ, σ_0, α, λ_+, λ_-) 生成 100,000 个十维均匀分布随机向量。对于均匀随机数 u_1， $u_2 \in$ (0，1)，分别通过 $\lambda_+ = \tan(\frac{u_1\pi}{2}) + 0.1$ 和 $\lambda_- = \lambda_+ = \tan(\frac{u_2\pi}{2}) + 0.1$ 生成 λ_+ 和 λ_- 的随机数。我们也像在 Duan 的 GARCH 模型中那样，使用 Halton 算法生成均匀随机向量。然后，我们使用 MCS 分别计算 100,000 个 v_C^{CTS} 和 v_P^{CTS}。在 MCS 中，我们使用

参数	下界	上界
m	0.5	1.5
τ	0.4	1
κ	0	$1 \cdot 10^{-5}$
ψ	0.1	0.4
γ	0.5	0.9999
θ	0	0.8
σ_0	$1 \cdot 10^{-6}$	0.04
α	0.01	1.999
λ_+	0.1	∞
λ_-	0.1	∞

表 1：输入参数的范围

基于 CTS-GARCH 模型及其十维模型参数生成的 20,000 条样本路径。

3.2. 多层人工神经网络训练

本节使用四个训练集 v_C^{Duan}、 v_P^{Duan}、 v_C^{CTS} 和 v_P^{CTS}，训练四个人工神经网络多层网络。每个人工神经网络均由三个隐藏层组成，每层有二十个节点。输出为单个值，隐藏层节点的激活函数为简单的 Sigmoid函数[3]，，而输出激活函数为线性函数[4]。 v_C^{Duan}和v_P^{Duan}对应的人工神经网络有七个输入节点，而 v_C^{CTS}和 v_P^{CTS}对应的人工神经网络有十个输入节点。其架构如图 1 所示。我们将分别对应于 v_C^{Duan}、 v_P^{Duan}、 v_C^{CTS}和 v_P^{CTS}的四个人工神经网络记为

$$F_C^{Duan}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0), \tag{27}$$

$$F_P^{Duan}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0), \tag{28}$$

$$F_C^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-), \tag{29}$$

$$\text{and } F_P^{CTS}(m, \tau; \kappa, \psi, \gamma, \theta, \sigma_0, \alpha, \lambda_+, \lambda_-). \tag{30}$$

[3] $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

[4] $f(x) = x$

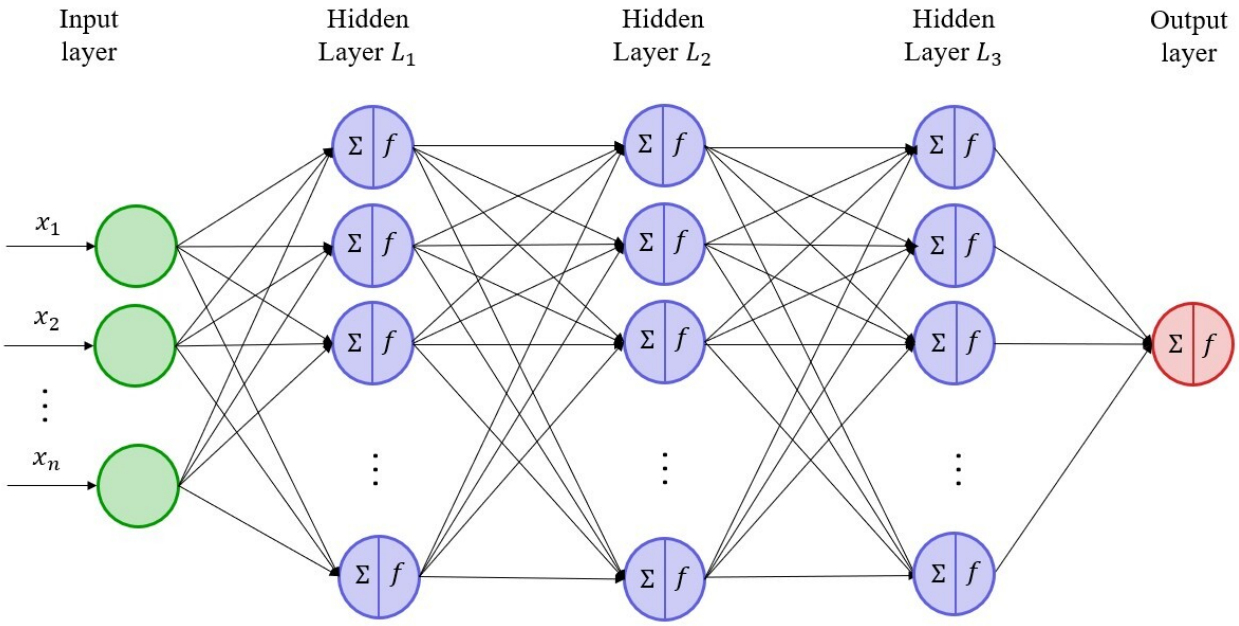


图 1：校准的人工神经网络结构

此外，我们设定 Duan 的 GARCH 模型的参数 $\Theta_{Duan} = （\kappa、\ \psi、\ \gamma、\ \theta、\ \sigma_0）$，以及 CTS-GARCH 模型的参数$\Theta_{CTS} = （\kappa、\ \psi、\ \gamma、\ \theta、\ \sigma_0、\ \alpha、\ \lambda_+、\ \lambda_-）$。于是，我们得到

$$\text{Call}_{ANN}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) = S_0 \exp\left(F_C^{Duan}\left(\frac{Ke^{-r\tau}}{S_0}, \tau; \Theta_{Duan}\right)\right) \tag{31}$$

$$\text{Put}_{ANN}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) = S_0 \exp\left(F_P^{Duan}\left(\frac{Ke^{-r\tau}}{S_0}, \tau; \Theta_{Duan}\right)\right) \tag{32}$$

$$\text{Call}_{ANN}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) = S_0 \exp\left(F_C^{CTS}\left(\frac{Ke^{-r\tau}}{S_0}, \tau; \Theta_{CTS}\right)\right) \tag{33}$$

$$\text{Put}_{ANN}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) = S_0 \exp\left(F_P^{CTS}\left(\frac{Ke^{-r\tau}}{S_0}, \tau; \Theta_{CTS}\right)\right). \tag{34}$$

随后，我们得到

$$\text{Call}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) \approx \text{Call}_{ANN}^{Duan}(S_0, K, \tau, r), \tag{35}$$

$$\text{and Put}^{Duan}(S_0, K, \tau, r) \approx \text{Put}_{ANN}^{Duan}(S_0, K, \tau, r), \tag{36}$$

在 Duan 的 GARCH 模型下，以及

$$\text{Call}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) \approx \text{Call}^{CTS}_{ANN}(S_0, K, \tau, r), \tag{37}$$

$$\text{and Put}^{CTS}(S_0, K, \tau, r) \approx \text{Put}^{CTS}_{ANN}(S_0, K, \tau, r), \tag{38}$$

在 CTS-GARCH 模型下。

我们使用 Matlab^{TM} 中的深度学习工具箱函数训练这四个人工神经网络。根据文档[5]所述，函数拟合网络的默认训练算法是 Levenberg–Marquardt 算法。均方误差（MSE）被用作网络的性能指标。

图 2 展示了训练这四个人工神经网络过程中各训练轮次的均方误差： F_C^{Duan}、F_P^{Duan}、F_C^{CTS} 和 F_P^{CTS}。 F_C^{Duan}和 F_P^{Duan}的均方误差最小值分别为 0.0169 和 0.0061，分别出现在第 84 和第 178 个训练轮次。对于 F_C^{CTS}和 F_P^{CTS}，训练轮次限制为 300，均方误差最小值分别为 0.0541 和 0.0447，均出现在第 300 个训练轮次。

还值得注意的是，本研究中的人工神经网络并非用于预测，而是用于寻找更好的解析近似。因此，我们不使用验证集。

4. 校准

本节将讨论使用两种不同方法校准参数：人工神经网络方法和 MCS 方法，其中 MCS 方法作为基准方法。我们使用标准普尔 500 指数的看涨期权和看跌期权数据来校准参数 Θ_{Duan} 和 Θ_{CTS}。在本研究中，我们选取了 2021年6月至2022年5月期间每月第二周的 12 个星期三。期权合约的到期时间为 7 至 90 天不等，我们排除了买入价或卖出价为零的期权。此外，我们仅对看涨期权和看跌期权中价外（OTM）期权的参数进行校准。

[5]https://www.mathworks.com/help/deeplearning/ref/fitnet.html

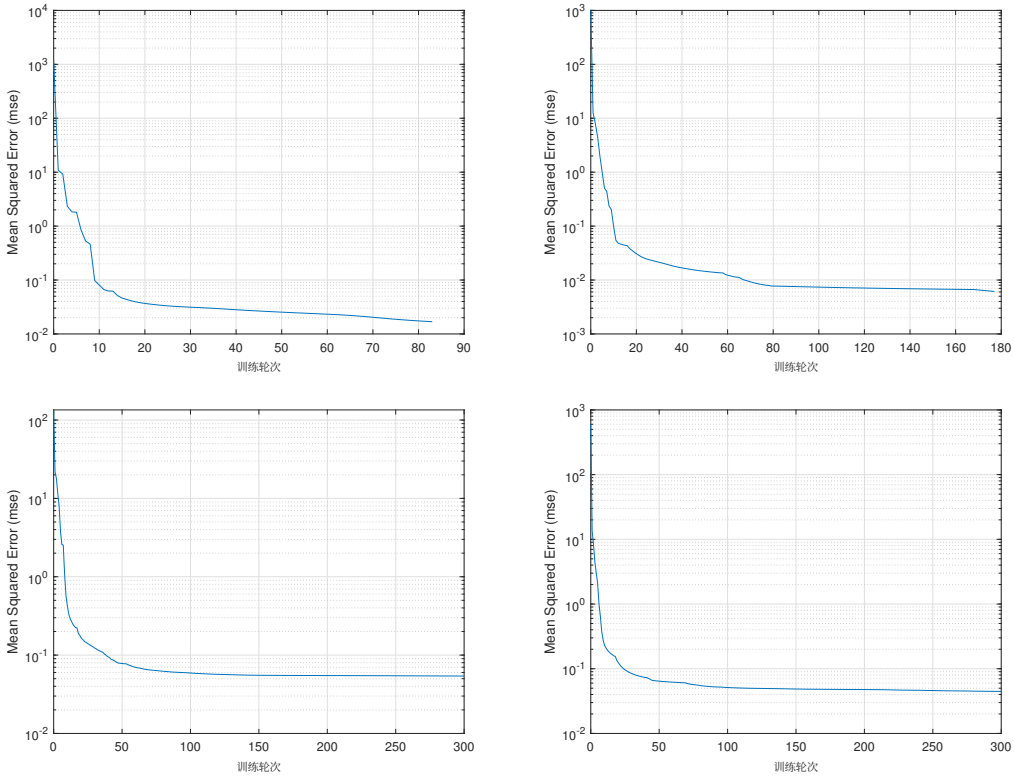


图 2：训练轮次与均方误差。左上和右上分别为 Duan 的 GARCH 模型看涨期权价格和看跌期权价格的均方误差。左下和右下为 CTS-GARCH 模型的均方误差。

我们首先将用于虚值期权的人工神经网络指定为

$$F_{OTM}^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan}) = F_P^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan})\cdot 1_{m<1} + F_C^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan})\cdot 1_{m\geq 1} \tag{39}$$

and

$$F_{OTM}^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS}) = F_P^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS})\cdot 1_{m<1} + F_C^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS})\cdot 1_{m\geq 1}. \tag{40}$$

我们采用以下相对均方根误差（rel-RMSE）最小化方法校准参数:

$$\min_{\Theta_{Duan}} \left(\sum_{K_n e^{-rT_n}<S_0} \left(\frac{F_{OTM}^{Duan}\left(\frac{K_n e^{-rT_n}}{S_0}, \frac{T_n}{250}; \Theta_{Duan}\right) - \log\left(\frac{P_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)}{\log\left(\frac{P_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)} \right)^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{K_n e^{-rT_n}\geq S_0} \left(\frac{F_{OTM}^{Duan}\left(\frac{K_n e^{-rT_n}}{S_0}, \frac{T_n}{250}; \Theta_{Duan}\right) - \log\left(\frac{C_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)}{\log\left(\frac{C_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{41}$$

and

$$\min_{\Theta_{CTS}} \left(\sum_{K_n e^{-rT_n}<S_0} \left(\frac{F_{OTM}^{CTS}\left(\frac{K_n e^{-rT_n}}{S_0}, \frac{T_n}{250}; \Theta_{CTS}\right) - \log\left(\frac{P_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)}{\log\left(\frac{P_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)} \right)^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{K_n e^{-rT_n}\geq S_0} \left(\frac{F_{OTM}^{CTS}\left(\frac{K_n e^{-rT_n}}{S_0}, \frac{T_n}{250}; \Theta_{CTS}\right) - \log\left(\frac{C_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)}{\log\left(\frac{C_{market}(K_n,T_n)}{S_0}\right)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{42}$$

其中， S_0 是指定星期三的标准普尔 500 指数价格， $C_{market}(K_n, T_n)$ 和 $P_{market}(K_n, T_n)$ 分别是行权价为 K_n 且

到期时间 T_n[6]。

作为基准，我们使用 MCS 方法校准相同的参数。与人工神经网络的情况类似，我们定义

$$v_{OTM}^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan}) = v_C^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan})\cdot 1_{m\geq 1} + v_P^{Duan}(m,\tau;\Theta_{Duan})\cdot 1_{m<1} \tag{43}$$

and

$$v_{OTM}^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS}) = v_C^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS})\cdot 1_{m\geq 1} + v_P^{CTS}(m,\tau;\Theta_{CTS})\cdot 1_{m<1}. \tag{44}$$

我们按照 (41) 和 (42) 中所述，使用 MCS 方法校准参数，分别将 F_{OTM}^{Duan}和 F_{OTM}^{CTS}替换为 v_{OTM}^{Duan}和 v_{OTM}^{CTS}。有关使用 CTS-GARCH 模型进行期权定价时参数校准的更多详情，请参见 Kim 等人(2010a)、Kim 等人(2019) 和 Kim等人(2022)。

Duan 的 GARCH 模型的校准参数见表2和表3，而 CTS-GARCH 模型的校准参数见表4和表5。表3和表5展示了使用人工神经网络方法获得的结果，表2和表4则展示了使用 MCS 方法获得的结果。我们列出了相对均方根误差值以进行性能分析。表6汇总了两个模型（Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH）以及两种期权定价方法（MCS 和人工神经网络）的所有相对均方根误差。

根据表格，我们可以观察到：

- 采用人工神经网络方法的 CTS-GARCH 模型相对均方根误差最小，因此表现最佳，但 2022年11月10日、2021年12月8日、2022年3月9日和2022年5月10日这四种情况除外。

[6]为了解决非线性优化问题，我们使用了 Matlab 中的 lsqcurvefit() 函数^{TM}，并采用信赖域反射最小二乘算法。详情请参见 Coleman和Li（1994，1996）以及 https://www.mathworks. com/help/optim/ug/lsqcurvefit.html。

- 对于 2022年3月8日和2022年5月10日这两种情况，采用 MCS方法的 Duan 的 GARCH 模型相对均方根误差最小。

- 在2022年11月10日和2022年12月8日的案例中，采用人工神经网络方法的 Duan 的 GARCH 模型具有最小的相对均方根误差。

- 在本研究中，采用 MCS方法的 CTS-GARCH 模型具有最大的相对均方根误差。

与 Duan 的 GARCH 模型相比，CTS-GARCH 模型更灵活，因为它多出三个参数。然而，CTS-GARCH 模型的复杂性使得采用 MCS方法进行模型校准的效率较低。对此，人工神经网络为模型校准提供了一种高效的替代方案，使 CTS-GARCH 模型能够应用于实际场景。

图3左侧各图展示了2021年6月9日虚值看涨期权和看跌期权的市场价格，以及 Duan 的 GARCH 模型和 CTS-GARCH 模型校准后的模型价格。右侧各图展示了采用 MCS方法和人工神经网络方法时，市场价格以及 Duan 的 GARCH 模型和 CTS-GARCH 模型对应的隐含波动率曲线。图3第一行展示到期天数为9天的期权价格和隐含波动率，第二行展示到期天数为37天的情形，第三行展示到期天数为72天的情形。这些曲线表明，与本研究考察的其他方法相比，采用人工神经网络方法得到的 CTS-GARCH 模型价格所对应的隐含波动率曲线最接近市场隐含波动率曲线。

使用人工神经网络方法的优势之一，是能够轻松获得期权的希腊值，而使用MCS方法几乎无法做到这一点。例如，表7展示了采用2021年6月9日校准的参数、期限分别为7天、37天和72天的平值（ATM）看涨期权和看跌期权的德尔塔（Δ）、伽马（Γ）、西塔（Θ）和柔（ρ）[7]。由于本研究中的波动率并非常数，而是随机波动，因此未考虑维加（ν）

[7]德尔塔 $\left(\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}\right)$：期权价格($V$)相对于标的价格($S$)变化的敏感度。伽马 $\left(\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$：德尔塔变化相对于标的价格变化的敏感度。西塔 $\left(\Theta = \frac{\partial V}{\partial \tau}\right)$：期权价格相对于期权到期时间($\tau$)的敏感度。柔 $\left(\rho = \frac{\partial V}{\partial r}\right)$：期权价格相对于无风险收益率 ($r$)的敏感度。维加 $\left(\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)$：期权价格变化相对于标的资产波动率的敏感度。

Date	θ	κ	ξ	ζ	σ_0	相对均方根误差
2021年6月9日	0.9293	$1.68 \cdot 10^{-6}$	0.2778	0.5000	0.0085	0.3048
2021年7月7日	0.8984	$1.21 \cdot 10^{-6}$	0.2931	0.5000	0.0068	0.3585
2021年8月11日	0.9513	$1.05 \cdot 10^{-6}$	0.2847	0.5000	0.0057	0.3927
2021年9月8日	1.0877	$9.88 \cdot 10^{-7}$	0.2492	0.5000	0.0065	0.4349
2021年10月6日	0.9826	$2.70 \cdot 10^{-6}$	0.2584	0.5000	0.0094	0.2837
2021年11月10日	0.9905	$1.65 \cdot 10^{-6}$	0.2681	0.5000	0.0075	0.2952
2021年12月8日	0.8833	$2.27 \cdot 10^{-6}$	0.2943	0.5000	0.0081	0.2763
2022年1月12日	0.8447	$2.13 \cdot 10^{-6}$	0.3000	0.5000	0.0073	0.2799
2022年2月9日	0.8745	$2.94 \cdot 10^{-6}$	0.2869	0.5000	0.0091	0.2305
2022年3月9日	1.0237	$5.27 \cdot 10^{-6}$	0.2464	0.5000	0.0158	0.1881
2022年4月6日	1.0867	$1.47 \cdot 10^{-6}$	0.2434	0.5000	0.0092	0.3980
2022年5月10日	1.0220	$3.97 \cdot 10^{-6}$	0.1918	0.5971	0.0176	0.2311

表2：使用 MCS方法校准 Duan 的 GARCH 模型参数

。我们使用有限差分方法计算每个变量的希腊值。

众所周知，人工神经网络方法的计算速度明显快于 MCS方法。表 8 分别列出了使用 MCS 和人工神经网络方法，在 Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 模型上计算虚值看涨期权和看跌期权的耗时。例如，我们在2021年6月9日观测到 558 个看涨期权和看跌期权价格。使用 MCS 和人工神经网络方法，在 Duan 的 GARCH 模型上计算 558 个看涨期权和看跌期权价格分别需要 0.13 秒和 0.085 秒；在 CTS-GARCH 模型上则分别需要 0.3286 秒和 0.0187 秒。看涨期权和看跌期权价格观测值（观测值）每天都有所不同，并列于表 8 的观测值列中。使用人工神经网络方法计算 Duan 的 GARCH 模型的速度约为 MCS方法的 9 倍。同样，对于 CTS-GARCH 模型，MCS方法的耗时约为人工神经网络方法的 20 倍。

5. 结论

本文回顾了用于期权定价的 Duan 的 GARCH 模型和 CTS-GARCH 模型，并探讨了使用人工神经网络提升校准性能的方法。为实现这一目标，我们针对不同的模型参数生成训练集，并使用 MCS方法计算看涨期权和看跌期权价格。随后，我们使用生成的训练集训练了一个每层包含二十个节点的三层人工神经网络

Date	θ	κ	ξ	ζ	σ_0	相对均方根误差
2021年6月9日	1.1103	$4.64 \cdot 10^{-7}$	0.2258	0.5395	0.0064	0.1972
2021年7月7日	1.0196	$6.32 \cdot 10^{-7}$	0.2354	0.5621	0.0049	0.2793
2021年8月11日	1.1729	$1.74 \cdot 10^{-7}$	0.1994	0.5737	0.0056	0.3383
2021年9月8日	1.1810	$2.89 \cdot 10^{-7}$	0.1927	0.5783	0.0064	0.4107
2021年10月6日	0.9015	$8.75 \cdot 10^{-7}$	0.2115	0.6441	0.0074	0.2826
2021年11月10日	1.1827	$4.99 \cdot 10^{-7}$	0.1968	0.5700	0.0066	0.2634
2021年12月8日	1.1276	$7.31 \cdot 10^{-7}$	0.2238	0.5424	0.0060	0.2078
2022年1月12日	0.6377	$4.46 \cdot 10^{-7}$	0.3000	0.6252	0.0047	0.3632
2022年2月9日	0.8367	$6.29 \cdot 10^{-7}$	0.2081	0.6739	0.0076	0.2626
2022年3月9日	0.9301	$1.64 \cdot 10^{-6}$	0.1905	0.6666	0.0121	0.2297
2022年4月6日	1.0649	$5.37 \cdot 10^{-7}$	0.2088	0.5990	0.0070	0.3616
2022年5月10日	1.0130	$1.67 \cdot 10^{-6}$	0.1506	0.7046	0.0141	0.2417

表3：使用人工神经网络方法校准 Duan 的 GARCH 模型参数

Date	θ	κ	ξ	ζ	σ_0	α	λ_+	λ_-	相对均方根误差
2021年6月9日	0.9386	$1.69 \cdot 10^{-6}$	0.2805	0.5050	0.0086	1.9998	14.0138	10.0760	0.8819
2021年7月7日	0.9074	$1.23 \cdot 10^{-6}$	0.2960	0.5050	0.0068	1.9921	11.2482	11.9459	0.9014
2021年8月11日	0.9608	$1.06 \cdot 10^{-6}$	0.2876	0.5050	0.0057	1.9998	11.9686	6.3593	0.9211
2021年9月8日	1.0986	$9.97 \cdot 10^{-7}$	0.2517	0.5050	0.0066	1.9543	13.9703	87.5816	0.9113
2021年10月6日	0.9923	$2.72 \cdot 10^{-6}$	0.2609	0.5050	0.0095	1.9833	51.2546	9.3704	0.8716
2021年11月10日	1.0004	$1.67 \cdot 10^{-6}$	0.2708	0.5050	0.0076	1.8757	13.9376	11.8176	0.8938
2021年12月8日	0.8921	$2.30 \cdot 10^{-6}$	0.2973	0.5050	0.0082	1.9999	6.0208	24.1959	0.8832
2022年1月12日	0.8531	$2.15 \cdot 10^{-6}$	0.3030	0.5050	0.0073	1.7526	5.2020	27.2385	0.8971
2022年2月9日	0.8832	$2.97 \cdot 10^{-6}$	0.2898	0.5050	0.0092	1.9999	11.2642	9.8365	0.8822
2022年3月9日	1.0340	$5.32 \cdot 10^{-6}$	0.2488	0.5050	0.0160	0.8949	8.5344	28.3573	0.8142
2022年4月6日	1.0976	$1.48 \cdot 10^{-6}$	0.2458	0.5050	0.0093	1.9999	2.4136	0.7439	0.8864
2022年5月10日	1.0323	$4.01 \cdot 10^{-6}$	0.1937	0.6031	0.0178	1.9984	14.8261	15.2165	0.7809

表4：使用MCS方法校准CTS-GARCH模型的参数

Date	θ	κ	ξ	ζ	σ_0	α	λ_+	λ_-	相对均方根误差
2021年6月9日	0.5526	$1.56 \cdot 10^{-8}$	0.0954	0.7906	0.0046	1.4202	0.1019	0.5492	0.1662
2021年7月7日	2.5598	$4.65 \cdot 10^{-6}$	0.0631	0.5124	0.0065	1.0542	13.6212	0.1155	0.2372
2021年8月11日	1.2173	$1.43 \cdot 10^{-8}$	0.1960	0.6349	0.0076	0.7306	46.0982	0.1629	0.2936
2021年9月8日	1.1724	$6.67 \cdot 10^{-10}$	0.1582	0.7666	0.0068	0.8133	3.9428	0.1019	0.2781
2021年10月6日	0.5119	$2.51 \cdot 10^{-8}$	0.0014	0.5016	0.0163	0.5610	13.7536	12.3532	0.2504
2021年11月10日	1.9605	$4.93 \cdot 10^{-8}$	0.1048	0.5092	0.0079	0.6510	1.4461	4.1668	0.2701
2021年12月8日	0.0281	$3.46 \cdot 10^{-6}$	0.2965	0.7125	0.0091	0.7452	31.5555	0.5439	0.2474
2022年1月12日	0.6766	$2.27 \cdot 10^{-6}$	0.2979	0.5750	0.0075	0.5862	20.2640	3.5172	0.2233
2022年2月9日	0.4874	$2.72 \cdot 10^{-6}$	0.2624	0.6696	0.0100	0.7577	27.9998	1.5475	0.2152
2022年3月9日	0.5884	$2.91 \cdot 10^{-6}$	0.1191	0.8183	0.0134	0.6454	21.7075	4.0287	0.2684
2022年4月6日	1.5418	$9.84 \cdot 10^{-6}$	0.1040	0.5271	0.0078	0.9238	21.6161	1.5811	0.3571
2022年5月10日	0.8144	$3.15 \cdot 10^{-8}$	0.1669	0.7220	0.0178	0.7674	28.8533	4.4167	0.2756

表5：使用人工神经网络方法校准 CTS-GARCH 模型参数

	Duan 的 GARCH 模型		CTS-GARCH 模型	
Date	MCS	ANN	MCS	ANN
2021年6月9日	0.3048	0.1972	0.8819	**0.1662**
2021年7月7日	0.3585	0.2793	0.9014	**0.2372**
2021年8月11日	0.3927	0.3383	0.9211	**0.2936**
2021年9月8日	0.4349	0.4107	0.9113	**0.2781**
2021年10月6日	0.2837	0.2826	0.8716	**0.2504**
2021年11月10日	0.2952	**0.2634**	0.8938	0.2701
2021年12月8日	0.2763	**0.2078**	0.8832	0.2474
2022年1月12日	0.2799	0.3632	0.8971	**0.2233**
2022年2月9日	0.2305	0.2626	0.8822	**0.2152**
2022年3月9日	**0.1881**	0.2297	0.8142	0.2684
2022年4月6日	0.3980	0.3616	0.8864	**0.3571**
2022年5月10日	**0.2311**	0.2417	0.7809	0.2756

表6：模型校准的相对均方根误差值

看涨/看跌期权	S_0	r	K	τ	模型	Δ	Γ	Θ	ρ
Call	4219.55	0.0020	4220	0.0360	Duan 的 GARCH	0.4109	$5.7074 \cdot 10^{-3}$	382.59	61.56
					CTS-GARCH	0.2933	$3.5068 \cdot 10^{-3}$	274.16	43.88
				0.1480	Duan 的 GARCH	0.6089	$3.2794 \cdot 10^{-3}$	311.14	370.61
					CTS-GARCH	0.4744	$2.4125 \cdot 10^{-3}$	312.57	288.33
				0.2880	Duan 的 GARCH	0.6656	$2.2740 \cdot 10^{-3}$	181.63	780.57
					CTS-GARCH	0.5042	$1.3049 \cdot 10^{-3}$	194.84	586.98
Put	4219.55	0.0020	4215	0.0360	Duan 的 GARCH	-0.2923	$2.6660 \cdot 10^{-3}$	439.87	-45.64
					CTS-GARCH	-0.2196	$1.7826 \cdot 10^{-3}$	389.37	-34.41
				0.1480	Duan 的 GARCH	-0.4410	$2.0529 \cdot 10^{-3}$	442.75	-288.81
					CTS-GARCH	-0.2956	$1.4555 \cdot 10^{-3}$	283.71	-194.58
				0.2880	Duan 的 GARCH	-0.4726	$1.5977 \cdot 10^{-3}$	152.80	-613.73
					CTS-GARCH	-0.2807	$1.0474 \cdot 10^{-3}$	178.97	-369.67

表7：2021年6月9日平值看涨期权和看跌期权的希腊值

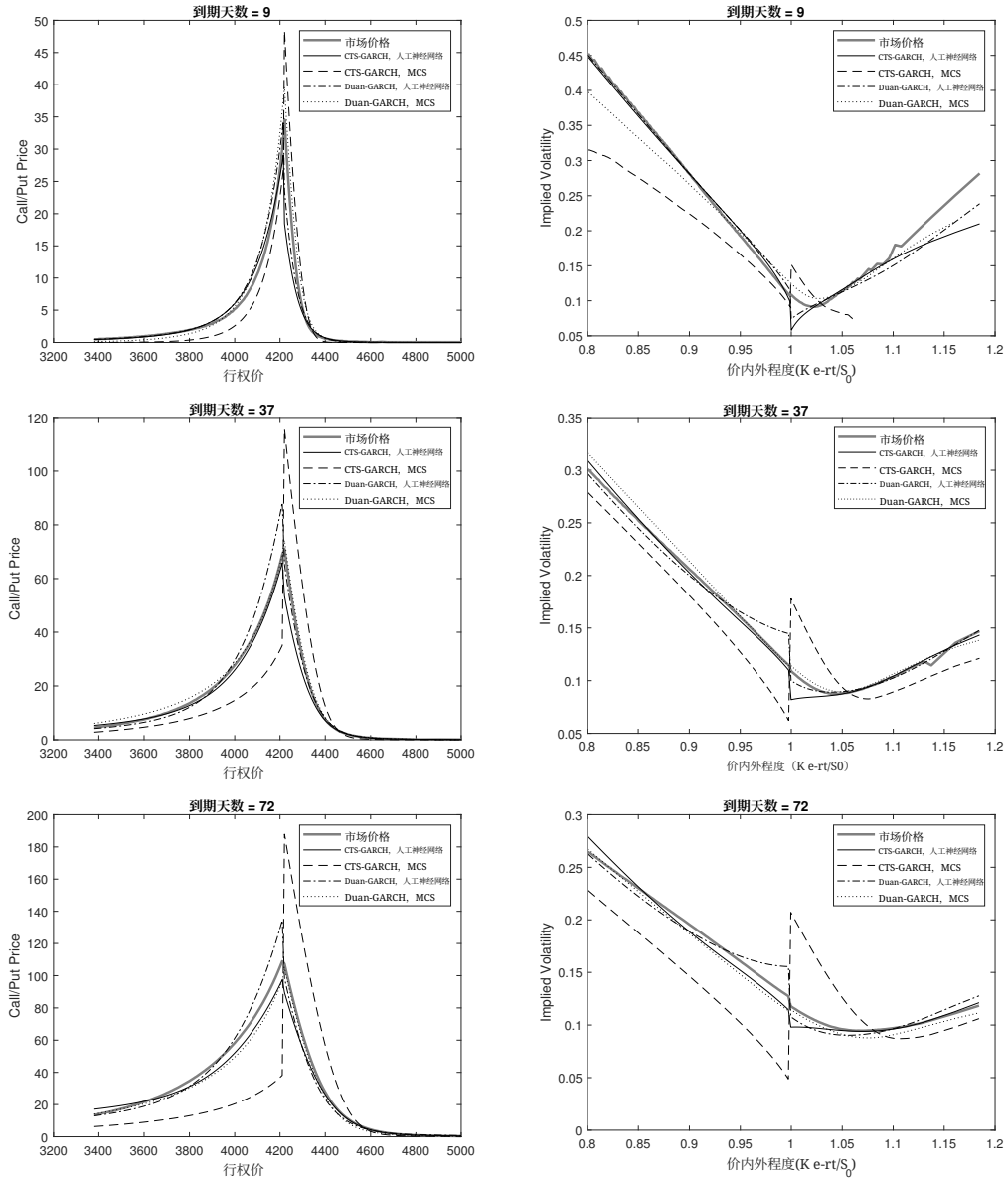


图3：2021年6月9日校准后的看涨期权和看跌期权价格及隐含波动率曲线

		Duan 的 GARCH 模型		CTS-GARCH 模型	
Date	Obs.	MCS（秒）	ANN（秒）	MCS（秒）	ANN（秒）
2021年6月9日	558	0.1300	0.0185	0.3286	0.0187
2021年7月7日	644	0.1387	0.0191	0.3411	0.0175
2021年8月11日	706	0.1339	0.0169	0.3025	0.0172
2021年9月8日	729	0.1518	0.0166	0.3363	0.0172
2021年10月6日	845	0.1422	0.0178	0.3390	0.0178
2021年11月10日	858	0.1463	0.0183	0.3229	0.0175
2021年12月8日	843	0.1538	0.0174	0.3342	0.0182
2022年1月12日	878	0.1598	0.0169	0.3356	0.0172
2022年2月9日	928	0.2017	0.0193	0.3539	0.0207
2022年3月9日	923	0.1625	0.0176	0.3351	0.0185
2022年4月6日	818	0.1410	0.0165	0.3285	0.0189
2022年5月10日	570	0.1211	0.0163	0.2978	0.0171

表 8：使用 MCS 和人工神经网络方法计算 Duan 的 GARCH 和 CTS-GARCH 模型所需时间的比较

训练集。此外，我们分别针对 Duan 的 GARCH 模型和 CTS-GARCH 模型中的看涨期权与看跌期权，构建了四个人工神经网络。最后，我们使用训练好的人工神经网络校准市场期权价格，以展示其有效性。结果表明，训练完成后，人工神经网络的速度显著快于 MCS 方法，且在校准性能方面优于 MCS 方法。此外，人工神经网络方法还可用于计算希腊值，而 MCS 方法无法做到这一点。

参考文献

Alaya, M. B., Kebaier, A., and Sarr, D. (2021). 利率模型的深度校准。*arXiv*预印本 *arXiv:2110.15133*。Anand, A., Li, T., Kurosaki, T., and Kim, Y. S. (2016). Foster–Hart 最优投资组合。《银行与金融杂志》,*68*, 117–130。Barndorff-Nielsen, O. E. and Levendorskii, S. (2001). 正态逆高斯型 Feller 过程。《定量金融》, *1*, 318 – 331。Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001). 正态修正稳定过程。牛津大学经济系经济学系列工作论文, *72*。Bayer, C., Horvath, B., Muguruza, A., Stemper, B., and Tomas, M. (2019). 关于（粗糙）随机波动率模型的深度校准。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.08806*。Beck, A., Kim, Y. S. A., Rachev, S., Feindt, M., and Fabozzi, F. (2013). 基于美国高频数据对市场风险估计中的 ARMA-GARCH 模型进行实证分析。《非线性动力学与计量经济学研究》,*17*(2), 167–177。Black, F. and Scholes, M. (1973). 期权与公司负债的定价。《政治经济学杂志》, *81*(3), 637–654。˘Boyarchenko, S. I. and Levendorskii, S. Z. (2000). 截断 Lévy 过程的期权定价。《理论与应用金融国际期刊》, *3*, 549–552。Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2002). 资产收益的精细结构：一项实证研究。《商业杂志》, *75*(2), 305–332。Choi, J., Kim, H., and Kim, Y. S. (2021). 投资组合构建中的多元化收益风险平价。*arXiv*预印本 *arXiv:2106.09055*。Choi, J., Kim, Y. S., and Mitov, I. (2015). 运用经典截尾稳定分布的收益风险动量策略。《银行与金融杂志》, *58*, 194–213。Coleman, T. and Li, Y. (1994). 关于有界约束大规模非线性最小化中反射牛顿法的收敛性。《数学规划》, *67*(2)。Coleman, T. and Li, Y. (1996). 一种针对有界约束非线性最小化的内点信赖域方法。《*SIAM*优化杂志》,*6*。Cont, R. and Tankov, P. (2004). 《跳跃过程金融建模》。Chapman & Hall / CRC。Duan, J.-C. (1995). GARCH期权定价模型。《数学金融》, *5*(1), 13–32。Duan, J.-C. (1999). 条件厚尾分布与期权中的波动率微笑。多伦多大学罗特曼管理学院，工作论文。

Duan, J.-C., Ritchken, P., 和 Sun, Z.（2004）。以跳跃开启GARCH：收益与波动率存在跳跃时的期权定价与对冲。多伦多大学和凯斯西储大学。Duan, J.-C., Ritchken, P., 和 Sun, Z.（2006）。GARCH跳跃模型、跳扩散过程与期权定价的近似。《数学金融》，《数学金融》，*16*(1)，21–52。Engle, R. F. 和 Mustafa, C.（1992）。根据期权价格推导隐含自回归条件异方差模型。《计量经济学杂志》，《计量经济学杂志》，*52*(1-2)，289–311。Georgiev, K., Kim, Y. S., 和 Stoyanov, S.（2015）。存在交易成本时的定期投资组合调整。《运筹学数学方法》，《运筹学数学方法》，*81*(3)，337–359。Halton, J.（1964）。算法247：基于进制反转的准随机点序列。《ACM通讯》，《*ACM*通讯》，*7*。Hutchinson, J. M., Lo, A. W., 和 Poggio, T.（1994）。通过学习网络对衍生证券进行定价和对冲的非参数方法。《金融学杂志》，《金融学杂志》，*49*(3)，851–889。Kim, Y. S., Jiang, D., 和 Stoyanov, S.（2019）。风险中性定价过程中的长记忆与短记忆。《衍生品杂志》，《衍生品杂志》，*26*(4)，71–88。Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., 和 Fabozzi, F. J.（2008a）。采用L´evy过程和时变波动率的金融市场模型。《银行与金融杂志》，《银行与金融杂志》，*32*，1363–1378。Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., 和 Fabozzi, F. J.（2008b）。一种新的截尾稳定分布及其在金融中的应用。载于G. Bol、S. T. Rachev和R. Wuerth（编），《风险评估：银行与金融决策》，Physika Verlag、Springer。77–110。Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., 和 Fabozzi, F. J.（2010a）。截尾稳定与截尾无限可分GARCH模型。《银行与金融杂志》，《银行与金融杂志》，*34*，2096–2109。Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., 和 Fabozzi, F. J.（2010b）。截尾稳定与截尾无限可分GARCH模型。《银行与金融杂志》，《银行与金融杂志》，*34*(9)，2096–2109。Kim, Y. S., Roh, K.-H., 和 Douady, R.（2022）。具有时变指数尾的截尾稳定过程。《定量金融》，《定量金融》，*22*，541–561。Koponen, I.（1995）。截断L´evy飞行趋近高斯随机过程的收敛问题的解析方法。《物理评论E》，《物理评论*E*》，*52*，1197–1199。Malliaris, M. 和 Salchenberger, L.（1993）。用于估算期权价格的神经网络模型。《应用智能》，《应用智能》，*3*(3)，193–206。McCulloch, W. S. 和 Pitts, W.（1943）。神经活动中内在观念的逻辑演算。《数学生物物理学通报》，《数学生物物理学通报》，*5*(4)，115–133。

Menn, C. 和 Rachev, S. T.（2009）。平滑截断稳定分布、GARCH模型与期权定价。《运筹学数学方法》，《运筹学数学方法》，*69*，411–438。Merton, R. C.（1973）。理性期权定价理论。《贝尔经济学与管理科学杂志》，141–183。Rachev, S. T., Kim, Y. S., Bianchi, M. L., 和 Fabozzi, F. J.（2011）。采用*L´evy*过程和波动率聚集的金融模型。约翰·威立父子公司。Rosi´nski, J.（2007）。稳定过程的温和化。《随机过程及其应用》，《随机过程及其应用》，*117*(6)，677–707。Ruf, J. 和 Wang, W.（2019）。用于期权定价与对冲的神经网络：文献综述。*arXiv*预印本 *arXiv:1911.05620*。Tsuchida, N., Zhou, X., 和 Rachev, S.（2012）。基于证券基本面因子、在最大权重和换手率约束下的均值-ETL投资组合选择。《投资杂志》，《投资杂志》，*21*(1)，14–24。