切向磁化双旋性层中的电磁波传播（以铁氧体板中的自旋波为例）

Edwin H. Lock 和 Sergey V. Gerus

（*Kotel'nikov* 无线电工程与电子学研究所（弗里亚济诺分部），俄罗斯科学院，俄罗斯莫斯科州弗里亚济诺）

本文以解析方法求解了切向磁化双旋光层中沿任意方向传播的电磁波问题，未采用静磁近似。研究发现，对于这一问题，可以将麦克斯韦方程组化为四阶微分方程，而所得双二次特征方程确定了两个不同的波数 k_{x21} 和 k_{x22} ，用于描述波在层厚度方向上的分布。针对 k_{x21} 和 k_{x22} 为实数的情况，得到了描述波在双旋光层中传播的色散方程。研究表明，在作为双旋光层特例的铁氧体板中，沿板厚度方向可能出现三种波分布：表面-表面分布（k_{x21} 和 k_{x22} 为实数）、体-表面分布（k_{x21} 为虚数，k_{x22}为实数）以及体-体分布（k_{x21} 和 k_{x22} 为虚数）。本文研究了铁氧体板中表面自旋波的特性。研究发现，在波谱的很大一部分范围内，波数 k_{x21} 和 k_{x22} 随波矢取向的变化关系，与相应的静磁态关系显著不同。

1. 引言

由于过去十年磁振子学的快速发展，关于自旋波特性以及利用这些波在基于铁氧体和反铁磁体的结构中实现的物理效应，已经积累了大量新数据[1 - 10]。众所周知，波数为 $0 < k < 10^4$ cm^{-1} 的自旋波（SW）通常仍采用静磁近似进行描述，并假设自旋波数 $k >> k_0 \equiv \omega/c$（其中 ω 是

自旋波的循环频率和 c——光速）因此，可以使用静磁方程来描述这些波，也就是说，在麦克斯韦方程组中忽略含有乘子 ω/c 的项。这种自旋波描述方法已在 [11], 中提出，该文至今仍是关于自旋波最常被引用的理论著作。由于数学处理简便，[11] 中获得的结果在过去六十多年里一直用于计算自旋波特性以及设计各种自旋电子器件 [12 - 14]。自旋波通常也被称为静磁波（MSW），这是因为在描述这些波时采用了静磁近似 [11]。

与此同时，大约在20世纪80年代，自旋波研究者开始遇到一些问题，这些问题无法在静磁近似下对自旋波的描述中得到解答。因此，开始出现不采用静磁近似研究自旋波特性的论文[13, 15 - 28]。其中一些论文研究了小波数下自旋波特性的变化k [15 - 23], , 包括相关研究[18, 19, 22], , 探讨了表面静磁波在$k \to k_0$传播时，非均匀磁化的铁氧体-电介质结构中产生辐射的机制。文献[20]研究了铁氧体层周围介质的介电常数对自旋波色散关系的影响。研究还表明[25], , 在静磁近似下按照公式自旋波的坡印廷矢量计算结果并不正确，因此应根据已知公式 计算自旋波的坡印廷矢量和功率流[1]，并利用第一个麦克斯韦方程求出微波电场 E[2]。对表面自旋波微波场的矢量线分布进行计算[26 - 28] , 有助于理解波传播机制。具体而言，研究发现，微波磁感应强度的矢量线形成两排涡旋，分别局限于铁氧体板的两个相对表面附近；相邻涡旋的矢量线方向始终相反。这些

Re(*) /8i

Re[ ]/ 8c
= π P EH*

[1] 在上述公式中，E 和 H 分别为微波电场矢量和磁场矢量，B 为磁感应矢量，Ψ 为自旋波的静磁势。[2]参见下文公式（4）中的第一个方程。

涡旋排之间的边界是一个平面（位于铁氧体板内部），在该平面上，自旋波微波电场的振幅为零。因此，表面自旋波可视为磁感应涡旋，它们在各种铁氧体结构中沿铁氧体板传播，并随时间演化。

需要指出的是，在所有上述未采用静磁近似开展的研究中，对自旋波（SW）特性的考察仅限于自旋波群速度与相速度矢量共线的情形[3]（即波沿垂直于外加磁场方向或平行于该方向传播）。显然，为了进一步发展磁振子学，基于麦克斯韦方程组（不采用静磁近似）求得自旋波沿任意方向传播问题的解析解至关重要。解决这一问题将使自旋波的描述提升到一个全新的层次，最终不仅能够准确计算波矢与群速度矢量取向不共线的自旋波特性，还能首次计算这类波的坡印廷矢量、能流的方向和密度，以及微波磁场和电场矢量线的结构。此外，下文将表明，解决这一问题还将揭示自旋波全新的基本特性。

2. 问题陈述。

下文将说明，数学方法能够对麦克斯韦方程组（不采用静磁近似）进行解析求解，并求得电磁波在厚度为 s 的切向磁化双旋光层中沿任意方向传播时的色散方程（图 1）。该层的介电和磁导率由二阶厄米张量 $\overleftrightarrow{\varepsilon}_2$ 和 $\overleftrightarrow{\mu}_2$

[3] 唯一的例外是[16, 23], 那些描述任意方向上自旋波传播的论文；然而，正如下文将要说明的，这些论文给出的结果并不正确。

$$\overleftrightarrow{\mu_2} = \begin{vmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon_2} = \begin{vmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

需要指出的是，这个问题的数学描述相当繁琐，因此下文将不得不省略中间计算过程。为简洁地书写所得结果，我们将为不同的中间量引入一些记号。

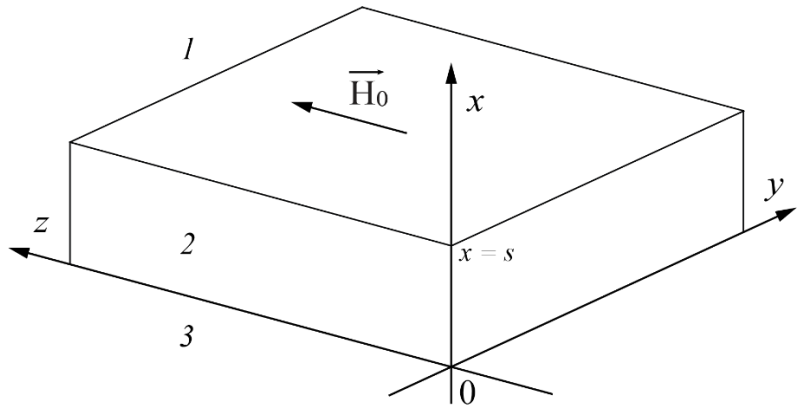

图 1. 问题的几何结构：1 和 3—真空半空间，2—双旋光层（在一种特殊情况下为铁氧体板），厚度为 s。

由于下面获得的结果可能对研究不同介质中电磁波的研究人员有用——例如铁氧体、反铁磁介质或等离子体的旋磁层（它们是双旋磁介质的特殊情形，并分别具有与表达式（1）和（2）相对应的张量或张量），因此，所有数学推导和公式都将针对双旋光层中波传播的一般情况给出。同时，为避免内容显得过于抽象，将使用所得公式计算（作为示例）在铁氧体板中传播的电磁波特性；对于该铁氧体板，张量的对角分量和非对角分量由表达式 [13] 描述。

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad \nu = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2} \qquad (3)$$

其中 $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, γ 为旋磁常数，$4\pi M_0$ – 铁氧体饱和磁化强度，$f = \omega/2\pi$ – 电磁波频率。本文不再详细说明张量 $\overleftrightarrow{\varepsilon}_2$ 的对角分量和非对角分量的频率依赖关系，因为以下讨论适用于这些依赖关系的任意形式，包括图 1 中层 *2* 的介电常数为标量的情况。

3. 描述切向磁化双旋磁层中电磁波传播的方程。

考虑一个厚度为 s 的无限大平面双旋光层 2，其周围是真空半空间 1 和 3（图 1）。为了表征介质 1–3 中的电磁场，分别用相应的下标 j = 1、2 或 3 表示。层 2 在切向均匀磁场 $\mathbf{H_0}$ 的作用下达到饱和磁化，其介电常数和磁导率张量由表达式 (1) 和 (2) 描述。半空间 1 和 3 的相对介电常数和磁导率均为标量，分别为 ε_1, μ_1 и ε_3, μ_3。

$\overleftrightarrow{\varepsilon}_2$ $\overleftrightarrow{\mu}_2$

频率为 ω、在双旋光层平面内传播，并按谐波规律 ~ exp(iωt) 随时间变化的电磁场，必须满足每种介质中复振幅所对应的麦克斯韦方程组[4]

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\mathrm{j} + i\omega\mathbf{B}_\mathrm{j}/c = 0 \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B}_\mathrm{j} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_\mathrm{j} - i\omega\mathbf{D}_\mathrm{j}/c = 0 \\ \mathrm{div}\,\mathbf{D}_\mathrm{j} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

[4] 本研究不考虑交换相互作用。

其中 $\mathbf{E_j}$、$\mathbf{H_j}$ 和 $\mathbf{D_j}$、$\mathbf{B_j}$ 分别为微波电场强度、磁场强度以及电感应强度、磁感应强度矢量的复振幅，它们之间的关系由以下公式给出

$$\mathbf{D_j} = \overleftrightarrow{\varepsilon}_j \mathbf{E_j},\ \mathbf{B_j} = \overleftrightarrow{\mu}_j \mathbf{H_j} \qquad (5)$$

需要指出的是，在此前试图解决这一问题的论文中（例如，参见[16, 23]），为了描述铁氧体介质中的波传播，人们立即提出将系统（4）的解设为如下形式的平面波 ~ 。我们认为，从数学角度来看，这种方法是错误的，无法求得麦克斯韦方程组（4）的通解。按照数学上正确的方法，波对坐标x（垂直于双旋光层）的依赖关系，应通过求解根据问题几何结构对系统（4）进行简化后得到的微分方程来确定。因此，我们应将系统（4）的解设为在层平面yz内传播、且具有任意波矢$\mathbf{k}$的均匀平面波。也就是说，与[16, 23], 不同，我们保留场分量$\mathbf{E_j}$ 和$\mathbf{H_j}$ 对x坐标的任意依赖关系，并认为这些分量在层平面内以及随时间的变化均遵循谐波规律，其表达式为

$$\mathbf{E_j} = \mathbf{e_j}(x)\exp(-i\mathbf{kr}) \ \text{ or } \ E_{xj,yj,zj} = e_{xj,yj,zj}(x)\exp(-ik_y y - ik_z z), \qquad (6)$$

$$\mathbf{H_j} = \mathbf{h_j}(x)\exp(-i\mathbf{kr}) \ \text{ or } \ H_{xj,yj,zj} = h_{xj,yj,zj}(x)\exp(-ik_y y - ik_z z). \qquad (7)$$

除笛卡尔坐标系 $\Sigma_D = \{x; y; z\}$ 外，这里还引入相应的极坐标（柱坐标）系 $\Sigma_P = \{x; r; \varphi\}$，其中角度 φ 从 y 轴起算，逆时针方向为角度的正方向。两种坐标系 Σ_P 和 Σ_D 的坐标关系可由公式 $y = r\cos\varphi$、$z = r\sin\varphi$表示。显然，波矢模 k 及其分量 k_y 和 k_z 之间也满足表达式 $k_y = k\cos\varphi$、$k_z = k\sin\varphi$和 。

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2$$

将表达式 (6) 和 (7) 代入 (5)，再将 (5) 代入 (4)，并类比 [29, 30], 求解双旋光介质 2 的方程组 (4)，可得一个仅包含电磁场分量 E_{z2} 和 H_{z2}的 x 相关振幅 e_{z2} 和 h_{z2} 的二元方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k_0^2}\dfrac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} - F_\nu e_{z2} - i\mu_{zz} F_{\nu g} h_{z2} = 0 \\ \dfrac{1}{k_0^2}\dfrac{\partial^2 h_{z2}}{\partial x^2} - F_g h_{z2} + i\varepsilon_{zz} F_{\nu g} e_{z2} = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

其中，无量纲函数 F_ν、F_g 和 $F_{\nu g}$ 在坐标系 Σ_D 和 Σ_P中的形式如下

$$F_\nu = \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{k_z^2}{k_0^2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{\mu}(\mu^2 - \nu^2) = \frac{k^2}{k_0^2}\left(\cos^2\varphi + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\sin^2\varphi\right) - \varepsilon_{zz}\mu_\perp, \tag{9}$$

$$F_g = \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{k_0^2} - \frac{\mu_{zz}}{\varepsilon}(\varepsilon^2 - g^2) = \frac{k^2}{k_0^2}\left(\cos^2\varphi + \frac{\mu_{zz}}{\mu}\sin^2\varphi\right) - \mu_{zz}\varepsilon_\perp, \tag{10}$$

$$F_{\nu g} = \frac{k_z}{k_0}\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{k}{k_0}\sin\varphi\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right), \tag{11}$$

并且还使用了以下记号

$$\mu_\perp = (\mu^2 - \nu^2)/\mu, \tag{12}$$

$$\varepsilon_\perp = (\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon. \tag{13}$$

注意，张量的两个非对角分量 ν 和 g 仅出现在 и 函数 F_{vg} 中$\overleftrightarrow{\varepsilon}_2$而 $\overleftrightarrow{\mu}_2$分量仅出现在 F_v 函数中，g 分量则仅出现在 F_g 函数中（这说明了引入这些记号的原因）。

从方程组 (8) 的第一个方程求出 h_{z2} 的值，并将其代入第二个方程，可得到振幅 e_{z2}的以下微分方程

$$\frac{\partial^4 e_{z2}}{\partial x^4} + 2\eta\frac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} + \alpha e_{z2} = 0, \tag{14}$$

其中

$$\eta = -k_0^2\left(F_\nu + F_g\right)/2 \tag{15}$$

$$\alpha = k_0^4 F_\nu F_g - \mu_{zz}\varepsilon_{zz} k_0^4 F_{\nu g}^2 . \qquad (16)$$

以下特征方程对应于方程（14），用于确定双旋光层内波数 k_{x2} 的值

$$k_{x2}^4 + 2\eta k_{x2}^2 + \alpha = 0 . \qquad (17)$$

利用表达式（15）和（16），很容易证明方程（17）的判别式只能取正值:

$$\eta^2 - \alpha = k_0^4 \left(F_\nu + F_g\right)^2 / 4 - k_0^4 \left(F_\nu F_g - \mu_{zz}\varepsilon_{zz} F_{\nu g}^2\right) =$$

$$= k_0^4 \left[\left(F_\nu - F_g\right)^2 / 4 + \mu_{zz}\varepsilon_{zz} F_{\nu g}^2 \right] > 0 . \qquad (18)$$

特征方程（17）有四个根，由表达式定义

$$k_{x2}^2 = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \alpha} = \frac{k_0^2}{2}\left(F_\nu + F_g \pm \sqrt{\left(F_\nu - F_g\right)^2 + 4\mu_{zz}\varepsilon_{zz} F_{\nu g}^2} \right) \qquad (19)$$

且所有根都是单根（非重根）：

$$k_{x21} = \sqrt{-\eta - \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = k_0 \sqrt{\frac{F_\nu + F_g}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(F_\nu - F_g\right)^2 + 4\mu_{zz}\varepsilon_{zz} F_{\nu g}^2}} , \qquad (20)$$

$$k_{x22} = \sqrt{-\eta + \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = k_0 \sqrt{\frac{F_\nu + F_g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(F_\nu - F_g\right)^2 + 4\mu_{zz}\varepsilon_{zz} F_{\nu g}^2}} , \qquad (21)$$

$$k_{x23} = -k_{x21} , \qquad (22)$$

$$k_{x24} = -k_{x22} . \qquad (23)$$

4. 描述双旋光层中电磁波的解。

为确定微分方程 (14) 的解，我们需要找出根 $k_{x21} - k_{x24}$ 可以取哪些值。首先要注意，根 $k_{x21} - k_{x24}$ 不可能是复数（因为根据 (18)，始终有 $\eta^2 - \alpha > 0$），而只能取实数或虚数值，具体取决于 (20) 和 (21) 中被开方数的符号。从这些表达式可以看出，若 $\alpha < 0$，则 $|\eta|$ 始终小于数值，其前面的符号决定了被开方数的符号；在这种情况下，k_{x21} 始终为虚数，而 k_{x22} 始终为实数（η取任何符号均如此）。反之，若 $\alpha > 0$,

$\sqrt{\eta^2 - \alpha}$

始终为，且和 在时取虚数值，在时取实数值。

因此，根据上述条件并利用表达式 (15)、(16) 和 (9)–(11)，可以针对双旋光层的某些参数，在坐标空间 {k_y, k_z, f} 或 {k, φ, f} 中绘制边界面。根据 (15) 和 (16)，这些边界面的方程可写为以下形式

$$\eta = 0 \text{ or } F_v + F_g = 0 \qquad (24)$$

$$\alpha = 0 \text{ or } F_v F_g - \mu_{zz}\varepsilon_{zz}F_{vg}^2 = 0, \qquad (25)$$

边界面具有简单的物理意义：当它们与电磁波的某个色散面 $f(k_y,k_z)$[5]，相交时，边界面会将该色散面上的区域划分为根 $k_{x21} - k_{x24}$ 取实值和虚值的区域。

首先需要指出，表达式 (25) 与无界双旋光介质中电磁波的色散方程相同（参见 [30] 中的关系式 (20)–(23)）；若将该方程简化为二维情形，只需令一个垂直于矢量 H_0 的坐标方向上的波数为零（例如，在 [30] 中的关系式 (20)–(23) 里取 $k_x = 0$ ）。

为了清楚地描绘曲面 α = 0 和 η = 0，我们以图 1 中的层 2 为铁氧体板（这是双旋光层的一种特殊情况）为例进行计算。该板的饱和磁化强度为 $4\pi M_0 = 1750$ Gc，介电常数为 $\varepsilon_2 = 15$。计算中，将板磁化至饱和的均匀磁场 H_0 取为 300 Oe。

请注意，对于 铁氧体板，α 的符号会改变，当频率从 变为 时（因为根据式（3）和式（12），我们有 且 在时）。

$$\mu_\perp \to \infty$$

现在，为确定在空间区域 {k_y, k_z, f} 中，根 k_{x21} и k_{x22} 在哪些区域取实值、哪些区域取虚值，我们在该空间中计算并绘制曲面 α = 0、 η = 0 以及平面 。由这些曲面所界定的空间区域

[5] 例如，铁氧体板中传播的某类自旋波的色散面。

以及这些曲面与平面 $k_y = 0$、$k_z = 0$ 和 $f = 7000$ 兆赫的截面如图2所示。

图2中三维图表的含义是：如果波的色散面位于空间区域 $\{k_y, k_z, f\}$ 内，我们就能知道该波在切向磁化铁氧体层（厚度任意！）厚度方向上的分布。也就是说，尽管我们尚未得到波的色散方程，但现在仅根据微分方程 (14) 的性质，就已知道这些空间区域。

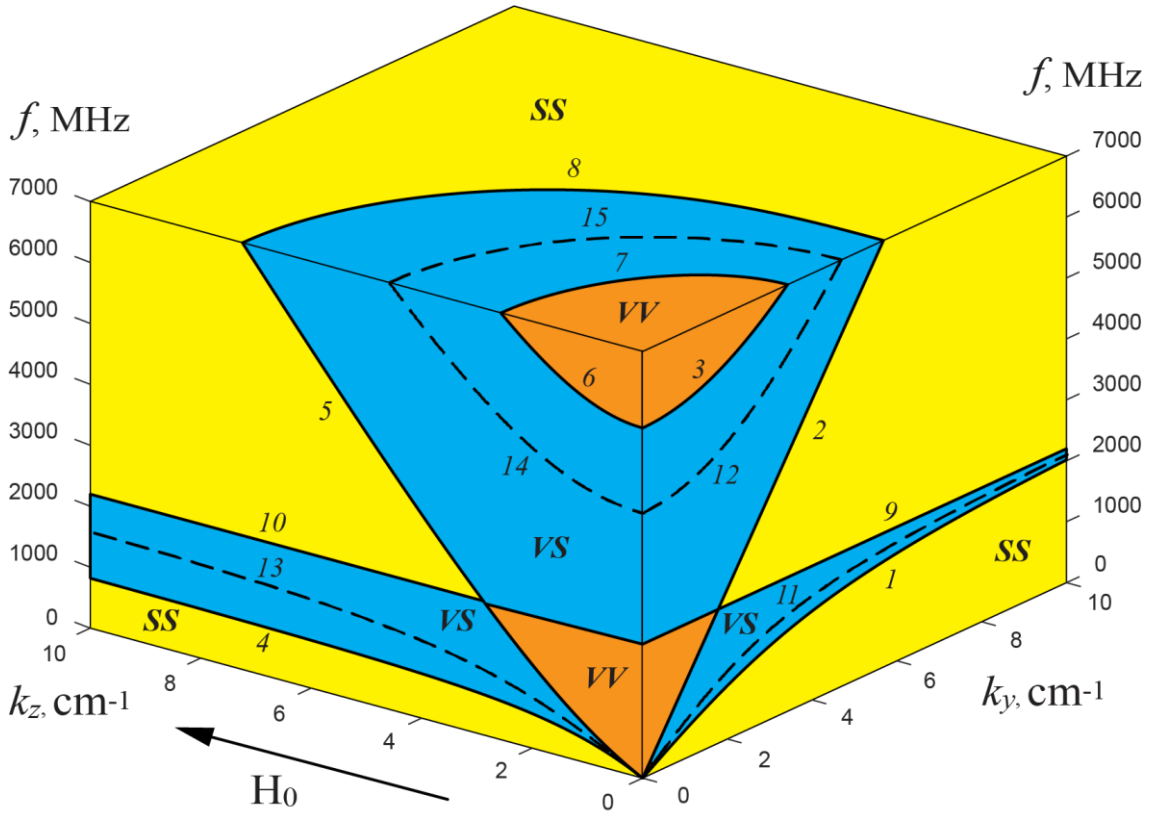

图2. 铁氧体板横截面中的空间区域 SS、VS 和 VV，它们定义了波分布的特征。SS、VS 和 VV 区域的边界由联合曲面 $\alpha = 0$ （其本身包含若干曲面）和平面 . 确定。曲线 1 - 3、4 - 6 和 7 - 8 分别对应曲面 $\alpha = 0$ 与平面 $k_y = 0$、$k_z = 0$ 和 $f = 7000$ 兆赫的交线。直线 9 和 10 分别是平面 与平面 $k_y = 0$ 和 $k_z = 0$ 的交线。虚线曲线 11 - 12、13 - 14 和 15 分别是曲面 $\eta = 0$ 与平面 $k_y = 0$、$k_z = 0$ 和 $f = 7000$ 兆赫的交线。

分析图2可知，图2中体积最大的部分是以黄色标出的 SS 区域，其中 $\alpha > 0$ and $\eta < 0$。位于 SS 区域内的波色散面部分，将描述根 k_{x21} и k_{x22} 为实数值的解；与之对应的微分方程 (14) 的通解形式为

$$e_{z2} = A\exp(k_{x21}x) + B\exp(-k_{x21}x) + C\exp(k_{x22}x) + D\exp(-k_{x22}x). \qquad (26)$$

也就是说，对于色散面的这些部分，沿铁氧体板厚度方向的波分布仅由指数函数描述，这种波通常称为表面-表面波，或 SS 波。

图2中最小的区域由 VV区域占据，以橙色标出，其中 $\alpha > 0$ and $\eta > 0$。位于 VV区域内的波色散面部分将描述根 k_{x21} and k_{x22}取虚数值的解，对应于微分方程 (22) 的通解形式为

$$e_{z2} = A\cos(k_{x21}x) + B\sin(-k_{x21}x) + C\cos(k_{x22}x) + D\sin(-k_{x22}x). \qquad (27)$$

因此，对于色散面的这一部分，沿铁氧体板厚度方向的波分布仅由三角函数描述，这种波通常称为体-体波，或 VV 波。

关系式 $\alpha < 0$ 适用于图2中以蓝色标出的 VS区域，而曲面 $\eta = 0$ （其横截面 11 – 15 以虚线曲线表示）始终位于 VS区域内。如上所述，在这些区域中，无论 η的符号如何，k_{x21} 的值均为虚数，k_{x22} 的值均为实数。也就是说，位于 VS区域内的波色散面部分将描述对应于以下形式的微分方程 (22) 通解的波

$$e_{z2} = A\cos(k_{x21}x) + B\sin(-k_{x21}x) + C\exp(k_{x22}x) + D\exp(-k_{x22}x). \qquad (28)$$

换言之，对于色散面的这些部分，沿铁氧体板厚度方向的分布将由三角函数和指数函数共同描述，这种波通常称为体表波或 VS 波。

需要指出的是，最后一种情况中，微分方程 (22) 的通解形式为：

，对应于 k_{x21} 的实数值和 k_{x22} 的虚数值的情况，在铁氧体板中从未出现[7]。

因此，铁氧体板内部的波分布会随波参数以及色散或等频依赖关系的某一部分[6] 而变化；例如，这种分布在某一部分可对应于 SS波（由表达式 (26) 描述），在另一部分则对应于 VS 波（由表达式 (28) 描述）。这正是精确的自旋波描述与静磁近似下的自旋波描述之间的一个重要区别[11], ：在静磁近似下，每个自旋波色散面都具有特定类型的自旋波分布（表面或体分布）。

显然，空间区域 $\{k_y, k_z, f\}$ 与铁氧体层中的波分布类型之间存在一一对应关系，而这与我们接下来考虑的边值问题无关——边值问题可以是由真空半空间包围的简单铁氧体板、单面金属化铁氧体板、金属-电介质-铁氧体-电介质-金属结构等。

下面我们将为由表达式 (26) 描述的表面自旋波，推导色散方程以及双旋光层内部微波电磁场分量的表达式。显然，其他类型波的类似关系也可以用同样的方法得到。

5. 双旋光层内部电磁场分量的表达式

为得到双旋光层内部电磁波所有微波分量的表达式，首先需要求出它们的振幅 e_{x2}、e_{y2}、h_{x2}、h_{y2} 和 h_{z2}。

将表达式 (26) 代入方程组 (8) 的第一个方程，可得振幅 h_{z2} 的表达式

[6] 众所周知，色散关系和等频关系是色散面的截面，因此，前文关于该色散面与边界面交线的所有论述同样适用于这些关系。

$$h_{z2} = i\beta_1\left(A\exp(k_{x21}x) + B\exp(-k_{x21}x)\right) + i\beta_2\left(C\exp(k_{x22}x) + D\exp(-k_{x22}x)\right), \quad (30)$$

其中

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_{zz}F_{vg}}\left(F_v - \frac{k_{x21}^2}{k_0^2}\right), \quad (31)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\mu_{zz}F_{vg}}\left(F_v - \frac{k_{x22}^2}{k_0^2}\right). \quad (32)$$

代入　　表达式（6）和（7）代入（5），再将（5）代入方程组（4），我们得到 n

$$k_y e_{z2} - k_z e_{y2} - k_0\mu h_{x2} - ik_0 v h_{y2} = 0 \quad (33)$$

$$-ik_z e_{x2} - \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} + k_0 v h_{x2} + ik_0\mu h_{y2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial e_{y2}}{\partial x} + ik_y e_{x2} + ik_0\mu_{zz} h_{z2} = 0 \quad (35)$$

$$\mu\left(\frac{\partial h_{x2}}{\partial x} - ik_y h_{y2}\right) + iv\left(\frac{\partial h_{y2}}{\partial x} + ik_y h_{x2}\right) - i\mu_{zz}k_z h_{z2} = 0 \quad (36)$$

$$k_y h_{z2} - k_z h_{y2} + k_0\varepsilon e_{x2} + ik_0 g e_{y2} = 0 \quad (37)$$

$$ik_z h_{x2} + \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} + k_0 g e_{x2} + ik_0\varepsilon e_{y2} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial h_{y2}}{\partial x} + ik_y h_{x2} - ik_0\varepsilon_{zz} e_{z2} = 0 \quad (39)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial e_{x2}}{\partial x} - ik_y e_{y2}\right) + ig\left(\frac{\partial e_{y2}}{\partial x} + ik_y e_{x2}\right) - ik_z\varepsilon_{zz} e_{z2} = 0 \quad (40)$$

由方程（33）和（37），我们可以分别得到表达式　　s

$$h_{x2} = \frac{k_y}{\mu k_0}e_{z2} - \frac{k_z}{\mu k_0}e_{y2} - i\frac{v}{\mu}h_{y2}, \quad (41)$$

$$e_{x2} = -\frac{k_y}{\varepsilon k_0}h_{z2} + \frac{k_z}{\varepsilon k_0}h_{y2} - i\frac{g}{\varepsilon}e_{y2}. \quad (42)$$

将表达式 (41) 和 (42) 代入方程 (34) 和 (38)，可得以下关系式

$$i\frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2}h_{z2} - iF_{\nu 2}h_{y2} - F_{\nu g}e_{y2} + \frac{\nu k_y}{\mu k_0}e_{z2} - \frac{1}{k_0}\frac{\partial e_{z2}}{\partial x} = 0, \tag{43}$$

$$-i\frac{k_y k_z}{\mu k_0^2}e_{z2} + iF_{g2}e_{y2} - F_{\nu g}h_{y2} + \frac{gk_y}{\varepsilon k_0}h_{z2} - \frac{1}{k_0}\frac{\partial h_{z2}}{\partial x} = 0, \tag{44}$$

其中，无量纲函数 $F_{\nu 2}$ 和 F_{g2} 的形式为

$$F_{\nu 2} = \frac{k_z^2}{\varepsilon k_0^2} - \mu_\perp, \tag{45}$$

$$F_{g2} = \frac{k_z^2}{\mu k_0^2} - \varepsilon_\perp, \tag{46}$$

将表达式 (43) 乘以 iF_{vg}，再将表达式 (44) 乘以 F_{v2}。将所得表达式相加，得到 e_{y2} 的值

$$e_{y2} = \frac{1}{F_2}\left[a_0 e_{z2} - ia_2 h_{z2} + \frac{F_{\nu g}}{k_0}\frac{\partial e_{z2}}{\partial x} - i\frac{F_{\nu 2}}{k_0}\frac{\partial h_{z2}}{\partial x}\right]. \tag{47}$$

现在将表达式 (43) 乘以 iF_{g2}，再将表达式 (44) 乘以 F_{vg}。将所得关系式相加，得到 h_{y2} 的值

$$h_{y2} = \frac{1}{F_2}\left[ib_0 e_{z2} + b_2 h_{z2} + \frac{F_{\nu g}}{k_0}\frac{\partial h_{z2}}{\partial x} + i\frac{F_{g2}}{k_0}\frac{\partial e_{z2}}{\partial x}\right]. \tag{48}$$

I在表达式 (47) 和 (48) 中，我们引入了以下符号

$$F_2 = F_{\nu 2}F_{g2} - F_{\nu g}^2, \tag{49}$$

$$a_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2}F_{\nu 2} - \frac{\nu k_y}{\mu k_0}F_{\nu g}, \tag{50}$$

$$a_2 = \frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2}F_{\nu g} - \frac{gk_y}{\varepsilon k_0}F_{\nu 2}, \tag{51}$$

$$b_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2}F_{\nu g} - \frac{\nu k_y}{\mu k_0}F_{g2}, \tag{52}$$

$$b_2 = \frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2}F_{g2} - \frac{gk_y}{\varepsilon k_0}F_{\nu g}. \tag{53}$$

从（47）和（48）可以看出，振幅 e_{y2} 和 h_{y2} 仅通过振幅 e_{z2}、h_{z2} 及其 x 坐标导数来表示。将

表达式（47）和（48）代入（41）和（42），可得到振幅 e_{x2} 和 h_{x2}的类似表达式。为简洁地记录所有振幅对 x 坐标的依赖关系，我们引入无量纲函数 Σ_0、 Σ_1、 Σ_2 和 Σ_3，使其满足以下关系

$$e_{z2}=\Sigma_0(x),\ \frac{\partial e_{z2}}{\partial x}=k_0\Sigma_1(x),\ h_{z2}=i\Sigma_2(x),\ \frac{\partial h_{z2}}{\partial x}=ik_0\Sigma_3(x). \tag{54}$$

将公式 (26) 和 (30) 代入关系式 (54)，得到函数 Σ_0、 Σ_1、 Σ_2 和 Σ_3 的下列表达式

$$\Sigma_0(x)=A\exp(k_{x21}x)+B\exp(-k_{x21}x)+C\exp(k_{x22}x)+D\exp(-k_{x22}x) \tag{55}$$

$$\Sigma_1(x)=\frac{k_{x21}}{k_0}\left(A\exp(k_{x21}x)-B\exp(-k_{x21}x)\right)+$$

$$+\frac{k_{x22}}{k_0}\left(C\exp(k_{x22}x)-D\exp(-k_{x22}x)\right) \tag{56}$$

$$\Sigma_2(x)=\beta_1\left(A\exp(k_{x21}x)+B\exp(-k_{x21}x)\right)+$$

$$+\beta_2\left(C\exp(k_{x22}x)+D\exp(-k_{x22}x)\right), \tag{57}$$

$$\Sigma_3(x)=\frac{k_{x21}}{k_0}\beta_1\left(A\exp(k_{x21}x)-B\exp(-k_{x21}x)\right)+$$

$$+\frac{k_{x22}}{k_0}\beta_2\left(C\exp(k_{x22}x)-D\exp(-k_{x22}x)\right) \tag{58}$$

为说明引入的符号，注意，数值 Σ_0 –Σ_3 的数字下标对应于表达式 (55) – (58) 中指数项附近乘子里的波数 k_{x21} 和 k_{x22} 的最高次幂（关系式 (31) 和 (32) 中数值 β_1 和 β_2 的 k_{x21} 和 k_{x22} 的幂次也计入在内）。

将关系式 (54) - (58) 代入振幅 e_{x2}、e_{y2}、h_{x2}、h_{y2} 和 h_{z2} 对应的表达式 (41)、(42)、(26)、(30)、(41)、(42) 和 (48)，再将所得表达式代入公式 (6) 和 (7)，即可得到双旋光层内部微波电磁场的所有分量

$$E_{x2}=\frac{i}{\varepsilon F_2}\left[\frac{k_z}{k_0}\left(b_0\Sigma_0+F_{g2}\Sigma_1+b_2\Sigma_2+F_{vg}\Sigma_3\right)-\frac{k_y}{k_0}F_2\Sigma_2-\right.$$

$$-g\left(a_0\Sigma_0+F_{\nu g}\Sigma_1+a_2\Sigma_2+F_{\nu 2}\Sigma_3\right)\Big]\exp(-ik_y y-ik_z z)\,, \tag{59}$$

$$H_{x2}=\frac{1}{\mu F_2}\left[\frac{k_y}{k_0}F_2\Sigma_0-\frac{k_z}{k_0}\left(a_0\Sigma_0+F_{\nu g}\Sigma_1+a_2\Sigma_2+F_{\nu 2}\Sigma_3\right)+\right.$$

$$\left.+\nu\left(b_0\Sigma_0+F_{g2}\Sigma_1+b_2\Sigma_2+F_{\nu g}\Sigma_3\right)\right]\exp(-ik_y y-ik_z z)\,, \tag{60}$$

$$E_{y2}=\frac{1}{F_2}\left[a_0\Sigma_0+F_{\nu g}\Sigma_1+a_2\Sigma_2+F_{\nu 2}\Sigma_3\right]\exp(-ik_y y-ik_z z)\,, \tag{61}$$

$$H_{y2}=\frac{i}{F_2}\left[b_0\Sigma_0+F_{g2}\Sigma_1+b_2\Sigma_2+F_{\nu g}\Sigma_3\right]\exp(-ik_y y-ik_z z)\,, \tag{62}$$

$$E_{z2}\quad {}_0^{x}(\,)\exp(\,{}_y^{ik_y y-ik_z z}\,{}_z^{-}\,)\,, \tag{63}$$

$$H_{z2}=i\Sigma_2(x)\exp(-ik_y y-ik_z z)\,, \tag{64}$$

6. 双旋光层外部电磁场分量的表达式

层

现在来考虑在介质 1 和 3 中双旋光层外部产生的微波场，这些介质的标量介电常数和磁导率分别为 ε_1、 μ_1 和 ε_3、 μ_3。将形式为 (6) 和 (7) 的解代入麦克斯韦方程组 (4) 后，可得到两个彼此独立的关于振幅 $e_{z1,3}$ 和 $h_{z1,3}$ 的微分方程，以替代方程组 (8)：

$$\frac{\partial^2 e_{z1,3}}{\partial x^2}-\left(k_z^2+k_y^2-k_0^2\varepsilon_{1,3}\mu_{1,3}\right)e_{z1,3}=0\,, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 h_{z1,3}}{\partial x^2}-\left(k_z^2+k_y^2-k_0^2\varepsilon_{1,3}\mu_{1,3}\right)h_{z1,3}=0\,, \tag{66}$$

下列特征方程确定了方程 (65) 和 (66) 的解

$$k_{x1,3}^2=k_z^2+k_y^2-k_0^2\varepsilon_{1,3}\mu_{1,3}\,. \tag{67}$$

由于微波场应在远离该层处呈指数衰减，因此将在介质1中寻找方程（65）和（66）的如下形式的解

$$e_{z1}=N\exp(-k_{x1}x)\,, \tag{68}$$

$$h_{z1} = iG\exp(-k_{x1}x), \tag{69}$$

而在介质3中，则为如下形式

$$e_{z3} = K\exp(k_{x3}x), \tag{70}$$

$$h_{z3} = iL\exp(k_{x3}x), \tag{71}$$

其中，N、G、L 和 K 是相互独立的系数。

将麦克斯韦方程组 (4) 变换后，我们用 $e_{x1,3}$、$h_{y1,3}$ 和 $h_{x1,3}$ 表示 $e_{z1,3}$ 和 $h_{z1,3}$，后两者由表达式 (68) – (71) 描述；然后将所得关系式代入 (6)、(7)，求出半空间 1 和 3 中微波场分量的表达式:

$$E_{x1} = \frac{i}{q_1^2}\left(Gk_y k_0\mu_1 - Nk_z k_{x1}\right)\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z). \tag{72}$$

$$H_{x1} = \frac{1}{q_1^2}\left(Gk_z k_{x1} - Nk_y k_0\varepsilon_1\right)\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z), \tag{73}$$

$$E_{y1} = \frac{1}{q_1^2}\left(Nk_y k_z - Gk_{x1} k_0\mu_1\right)\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z), \tag{74}$$

$$H_{y1} = \frac{i}{q_1^2}\left(Gk_y k_z - Nk_{x1} k_0\varepsilon_1\right)\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z), \tag{75}$$

$$E_{z1} = N\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z), \tag{76}$$

$$H_{z1} = iG\exp(-k_{x1}x - ik_y y - ik_z z), \tag{77}$$

$$E_{x3} = \frac{i}{q_3^2}\left(Lk_y k_0\mu_3 + Kk_z k_{x3}\right)\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z). \tag{78}$$

$$H_{x3} = -\frac{1}{q_3^2}\left(Lk_z k_{x3} + Kk_y k_0\varepsilon_3\right)\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \tag{79}$$

$$E_{y3} = \frac{1}{q_3^2}\left(Kk_y k_z + Lk_{x3} k_0\mu_3\right)\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \tag{80}$$

$$H_{y3} = \frac{i}{q_3^2}\left(Lk_y k_z + Kk_{x3} k_0\varepsilon_3\right)\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \tag{81}$$

$$E_{z3} = K\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \tag{82}$$

$$H_{z3} = iL\exp(k_{x3}x - ik_y y - ik_z z), \tag{83}$$

其中，q_1 和 q_3 的值由下列表达式描述

$$q_{1,3}^2 = k_z^2 - k_0^2\varepsilon_{1,3}\mu_{1,3}. \tag{84}$$

7. 双旋光层中电磁波的色散方程

现在我们来推导描述电磁波在双旋光层中传播的色散方程。满足在 x = 0 和 x = s 处切向分量 E_y、E_z、H_y 和 H_z 连续的边界条件后，可以得到以下关于常数系数 A、B、C、D、G、N、K、L 的八个方程组成的方程组：

$$\begin{aligned}
&N\exp(-k_{x1}s) = \Sigma_0(s)\\
&F_2\frac{Nk_y k_z - G\mu_1 k_{x1}k_0}{q_1^2\exp(k_{x1}s)} = a_0\Sigma_0(s) + F_{vg}\Sigma_1(s) + a_2\Sigma_2(s) + F_{v2}\Sigma_3(s)\\
&G\exp(-k_{x1}s) = \Sigma_2(s)\\
&F_2\frac{Gk_y k_z - N\varepsilon_1 k_{x1}k_0}{q_1^2\exp(k_{x1}s)} = b_0\Sigma_0(s) + F_{g2}\Sigma_1(s) + b_2\Sigma_2(s) + F_{vg}\Sigma_3(s)\\
&K = \Sigma_0(0)\\
&F_2\frac{Kk_y k_z + L\mu_3 k_{x3}k_0}{q_3^2} = a_0\Sigma_0(0) + F_{vg}\Sigma_1(0) + a_2\Sigma_2(0) + F_{v2}\Sigma_3(0)\\
&L = \Sigma_2(0)\\
&F_2\frac{Lk_y k_z + K\varepsilon_3 k_{x3}k_0}{q_3^2} = b_0\Sigma_0(0) + F_{g2}\Sigma_1(0) + b_2\Sigma_2(0) + F_{vg}\Sigma_3(0)
\end{aligned} \tag{85}$$

将 N、G、K 和 L 的值代入方程组（85）的第二、第四、第六和第八个方程，其中这些值取自第一个、第三个、第五个和第七个方程，可得关于系数 A、B、C 和 D 的四个方程组成的方程组（这些系数出现在值 $\Sigma_0 - \Sigma_3$ 中）：

$$\begin{aligned}
&\left(a_0-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2\right)\Sigma_0(s)+F_{vg}\Sigma_1(s)+\left(a_2+\frac{\mu_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2\right)\Sigma_2(s)+F_{v2}\Sigma_3(s)=0\\
&\left(b_0+\frac{\varepsilon_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2\right)\Sigma_0(s)+F_{g2}\Sigma_1(s)+\left(b_2-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2\right)\Sigma_2(s)+F_{vg}\Sigma_3(s)=0\\
&\left(a_0-\frac{k_yk_z}{q_3^2}F_2\right)\Sigma_0(0)+F_{vg}\Sigma_1(0)+\left(a_2-\frac{\mu_3k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2\right)\Sigma_2(0)+F_{v2}\Sigma_3(0)=0\\
&\left(b_0-\frac{\varepsilon_3k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2\right)\Sigma_0(0)+F_{g2}\Sigma_1(0)+\left(b_2-\frac{k_yk_z}{q_3^2}F_2\right)\Sigma_2(0)+F_{vg}\Sigma_3(0)=0
\end{aligned}. \tag{86}$$

将描述值 $\Sigma_0-\Sigma_3$ 的表达式（55）–（58）代入方程组（86），并合并系数 A、B、C 和 D 相同的同类项，可得一个方程组

$$\begin{cases}
d_{11}A+d_{12}B+d_{13}C+d_{14}D=0\\
d_{21}A+d_{22}B+d_{23}C+d_{24}D=0\\
d_{31}A+d_{32}B+d_{33}C+d_{34}D=0\\
d_{41}A+d_{42}B+d_{43}C+d_{44}D=0
\end{cases}, \tag{87}$$

其中矩阵元的形式为

$$d_{11}=\left[a_0-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{vg}+\beta_1\left(a_2+\frac{\mu_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{v2}\right)\right]\exp(k_{x21}s) \tag{88}$$

$$d_{12}=\left[a_0-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{vg}+\beta_1\left(a_2+\frac{\mu_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{v2}\right)\right]\exp(-k_{x21}s) \tag{89}$$

$$d_{13}=\left[a_0-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{vg}+\beta_2\left(a_2+\frac{\mu_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{v2}\right)\right]\exp(k_{x22}s) \tag{90}$$

$$d_{14}=\left[a_0-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{vg}+\beta_2\left(a_2+\frac{\mu_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{v2}\right)\right]\exp(-k_{x22}s) \tag{91}$$

$$d_{21}=\left[b_0+\frac{\varepsilon_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{g2}+\beta_1\left(b_2-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{vg}\right)\right]\exp(k_{x21}s) \tag{92}$$

$$d_{22}=\left[b_0+\frac{\varepsilon_1k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{g2}+\beta_1\left(b_2-\frac{k_yk_z}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{vg}\right)\right]\exp(-k_{x21}s) \tag{93}$$

$$d_{23}=\left[b_0+\frac{\varepsilon_1 k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{g2}+\beta_2\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_1^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}\right)\right]\exp(k_{x22}s) \quad (94)$$

$$d_{24}=\left[b_0+\frac{\varepsilon_1 k_{x1}k_0}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{g2}+\beta_2\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_1^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}\right)\right]\exp(-k_{x22}s) \quad (95)$$

$$d_{31}=a_0-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu g}+\beta_1\left(a_2-\frac{\mu_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu 2}\right) \quad (96)$$

$$d_{32}=a_0-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu g}+\beta_1\left(a_2-\frac{\mu_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu 2}\right) \quad (97)$$

$$d_{33}=a_0-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}+\beta_2\left(a_2-\frac{\mu_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu 2}\right) \quad (98)$$

$$d_{34}=a_0-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}+\beta_2\left(a_2-\frac{\mu_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu 2}\right) \quad (99)$$

$$d_{41}=b_0-\frac{\varepsilon_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{g2}+\beta_1\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu g}\right) \quad (100)$$

$$d_{42}=b_0-\frac{\varepsilon_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{g2}+\beta_1\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x21}}{k_0}F_{\nu g}\right) \quad (101)$$

$$d_{43}=b_0-\frac{\varepsilon_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{g2}+\beta_2\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2+\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}\right) \quad (102)$$

$$d_{44}=b_0-\frac{\varepsilon_3 k_{x3}k_0}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{g2}+\beta_2\left(b_2-\frac{k_y k_z}{q_3^2}F_2-\frac{k_{x22}}{k_0}F_{\nu g}\right) \quad (103)$$

因此，在双旋光层中传播的电磁波的色散方程，是由表达式（88）–（103）定义系数的齐次方程组（87）的四阶行列式。

8. 铁氧体板中表面自旋波特性的计算

作为示例，为展示色散方程 (87) 的功能和实用性，我们来考察铁氧体板中自旋波的一些特性。

显然，对于自旋波（SW），所得到的描述与先前在静磁近似下 [11] 和不采用静磁近似时 [16, 23], 的描述之间，主要区别在于：铁氧体板内沿 x 坐标方向的波分布由两个波数[7] – k_{x21} и k_{x22}描述！

下面说明这种差异如何影响表面自旋波的特性。图3展示了不同频率下表面自旋波的等频关系，其中红色曲线 1 – 4 根据本文提出的理论计算得出，黑色曲线 1' – 4' 则是在静磁近似下计算得出。计算采用以下参数：H_0 = 300 奥斯特，$4\pi M_0$ = 1750 高斯，s = 40 微米。

图3显示，等频曲线*1 – 4*与相应曲线*1' - 4'*仅在频率接近= 2197.7 兆赫时才彼此不同。然而，如果我们观察表征微波场沿铁氧体板厚度分布的波数 k_{x21} 和 k_{x22} 如何沿等频曲线变化，并将这种变化与静磁近似下计算的波数 k_{x2ms} 的类似变化进行比较[11], ，就能看到显著差异（见图4）。

$$f_{\perp} = \omega_{\perp}/2\pi = \sqrt{\omega^2 + \omega_H\omega}/2\pi$$

如图4所示，在波矢的截止角附近的角度 φ 处，磁静态关系 $k_{x2ms}(\varphi)$ 接近曲线 $k_{x22}(\varphi)$；而在φ = 0 处，这些关系接近曲线 $k_{x21}(\varphi)$。$k_{x22}(\varphi = 0)$ 与 $k_{x21}(\varphi = 0)$ 的数值差异显著依赖于频率，并随频率从 f = 2198 MHz 时的 255 cm^{-1} 变化到 f = 2500 MHz 时的 2 cm^{-1} 。

[7] 这与先前关于沿矢量 H0 方向传播的后向自旋波在切向磁化铁氧体板中的研究结果一致 [24]。

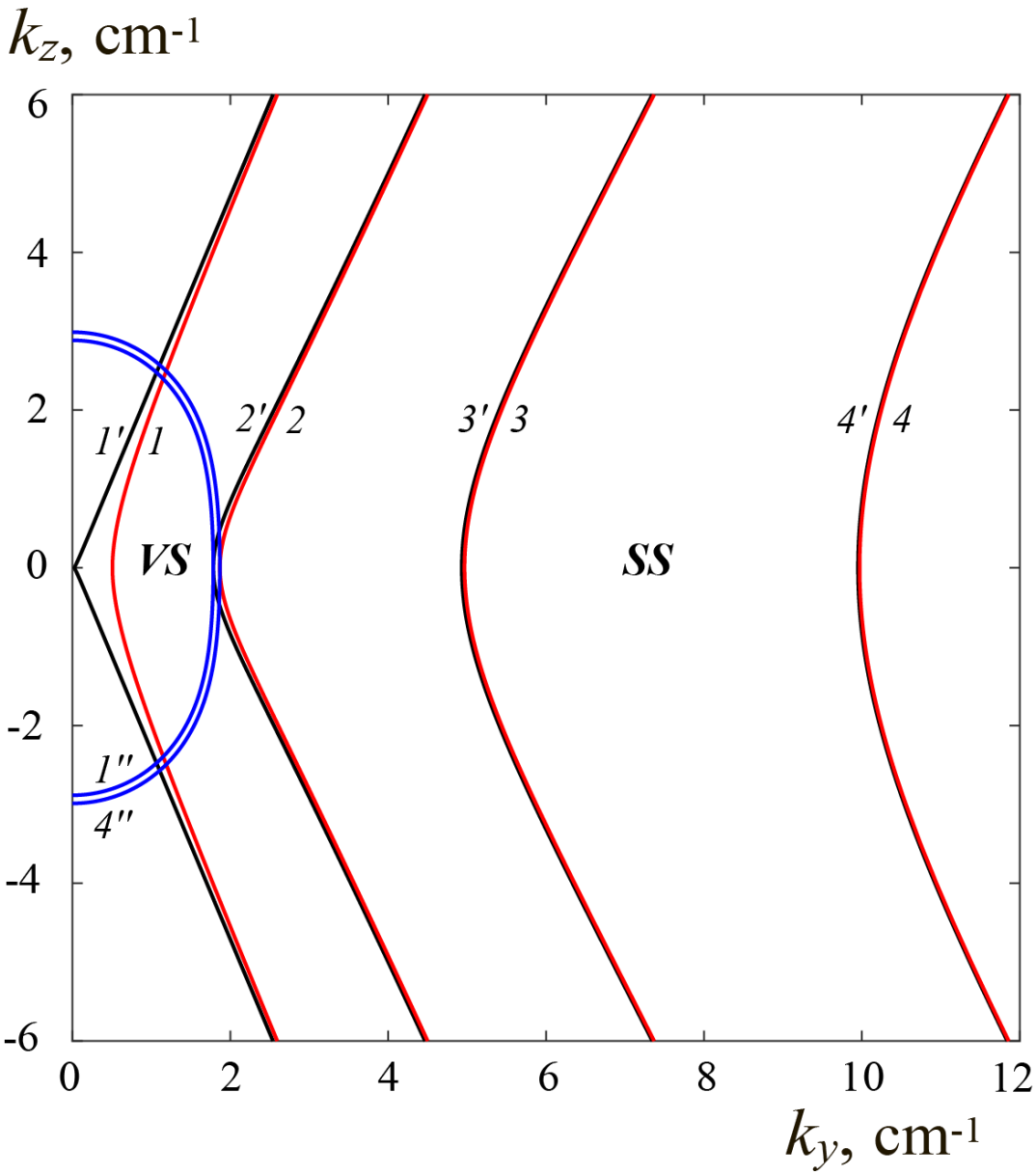

图3. 切向磁化铁氧体板中表面自旋波的等频关系，频率为 2198（1 和 1'）、2216.3（2 和 2'）、2250（3 和 3'）和 2300 兆赫（4 和 4'）（仅显示 $k_y > 0$ 的半平面）。曲线 1'–4'（黑色）是在静磁近似下计算的，曲线 1–4（红色）则未采用该近似。图中还显示了曲线 1'' 和 4''，它们分别是表面 $\alpha = 0$ 与平面 $f = 2198$ 兆赫和 $f = 2300$ 兆赫的交线（对于 $f = 2198$ 兆赫，曲线 1'' 将曲线 1 分隔为存在表面自旋波的区域和存在 VS 波的区域，而曲线 4'' 不与曲线 4 相交）。

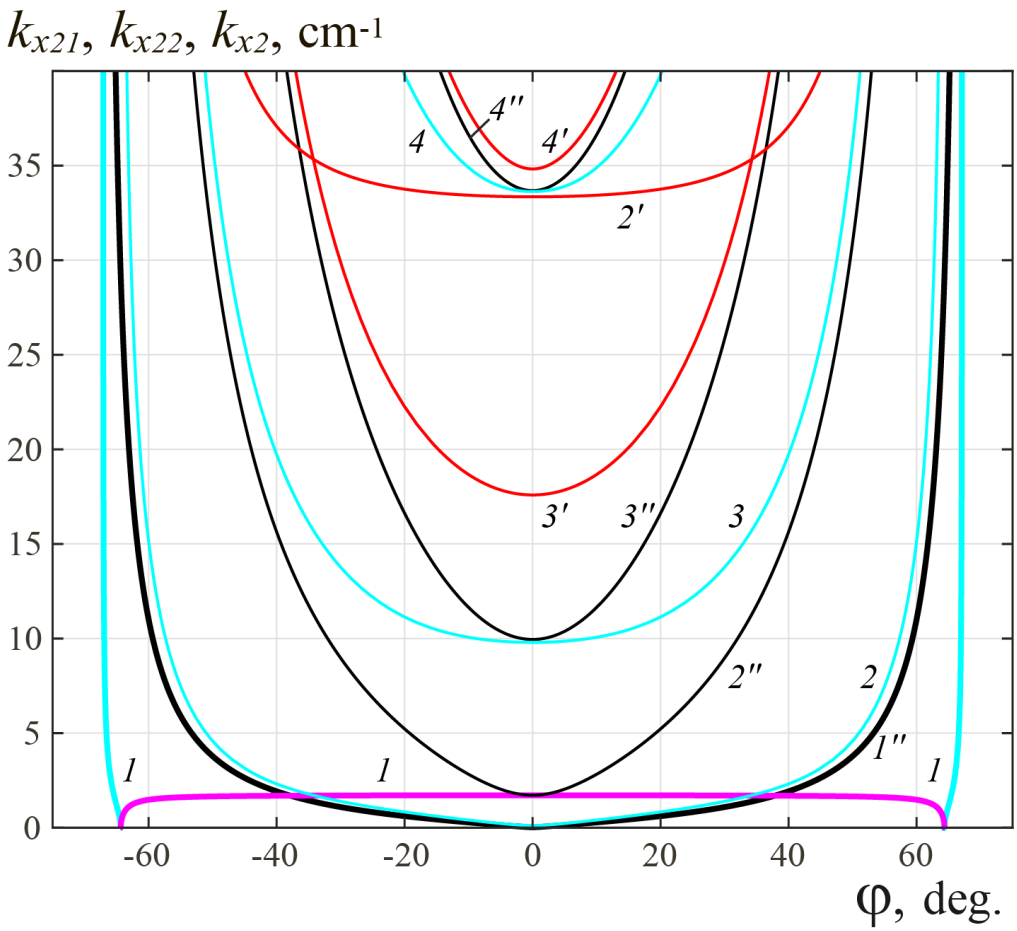

图4. 波数 k_{x21}（绿色曲线 1–4）、k_{x22}（红色曲线 1'–4'）和 k_{x2ms}（黑色曲线 1''–4''）分别对应频率 2198、2216.3、2300 和 2500 兆赫，随表示波矢取向的角度 φ 变化。图中未显示曲线 1'，因为它位于 ~ 250 cm^{-1}之上。曲线 1 中以紫色显示的部分，其 k_{x21} 取虚数值，对应 VS 波（数值 $|k_{x21}|$ 显示在纵坐标轴上）。

9. y 轴方向的表面自旋波传播与先前所得结果的比较

众所周知，多年前就已得到了沿切向磁化铁氧体板传播、且垂直于磁场矢量 H_0 的表面自旋波的描述（未采用静磁近似）（例如，参见 [17,18]）。对于这种情况，麦克斯韦方程组很容易求解，由此得到的表面自旋波沿铁氧体板厚度方向的分布为

其特征是只有一个波数，而不是两个。因此，乍一看，上面对表面 SV 波的描述与先前得到的描述之间存在明显矛盾。事实上，正如下文将要说明的，这种矛盾只是表面上的。

显然，将上述考虑中的 $k_z = 0$ （或 $\varphi = 0$）代入任意方向波传播的一般情形，即可得到 SW 波垂直于矢量 $\mathbf{H_0}$ 传播的情况。在此情况下（当 $k_z = 0$时），麦克斯韦方程组 (4) 分解为两个彼此独立的子系统，其中一个仅包含场分量 E_{z2}、H_{x2} 和 H_{y2}，另一个则包含 H_{z2}、E_{x2} 和 E_{y2}。由于在 (11) 中令 $k_z = 0$，可得 $F_{vg} = 0$，振幅 e_{z2} 和 h_{z2} 的方程组 (8) 因而化为两个彼此独立的齐次亥姆霍兹方程，一个关于振幅 e_{z2}，另一个关于振幅 h_{z2}。第一个方程描述已知的表面自旋波（H 波，包含分量 E_{z2}、H_{x2} 和 H_{y2}），其条件为（将等式 $F_{vg} = 0$ 代入表达式 (21) 可得此 k_{x22} 值）；第二个方程描述表面电磁波（E 波，包含分量 H_{z2}、E_{x2} 和 E_{y2}，这是普通电介质层的典型特征），其条件为（将等式 $F_{vg} = 0$ 代入表达式 (20) 可得此 k_{x21} 值）。可以看出，所提及的 k_{x22} 和 k_{x21} 值与先前得到的结果一致（例如，参见 [13, 17, 29]）。

$$F_{kk}^{22} = \sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\mu_v} = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \mu_\perp^2 \varepsilon_x \mu_y}\, k_1$$

$$k_{F_{kk}}^{21} = \sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\mu_v} = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \mu_\perp^2 \varepsilon_x \mu_y \mu_{zz}}\, k_1$$

然而，仔细研究图 4 的读者可能会发现，这与上述论证存在矛盾，并会问：这是怎么回事——很明显，根据图4中的计算，表面自旋波的特征并非是单一的波数 $\varphi = 0$ 和 $k_z = 0$ （如前所述），而是两个波数 k_{x21} 和 k_{x22}？！

为解释这一现象，下面计算系数 A、B 和 C 相对于系数 D 的变化随波数 k_z 的关系（图5）。这里提醒一下，系数 A、B、C 和 D 定义了指数函数的振幅

表达式 (26) 中的函数。从图5可以看出，指数项 A 和 B 附近的系数 和 在 $k_z = 0$ （或 φ = 0）处变为零，而指数项 C 和 D 附近的系数 和 却不会变为零！因此显然，在 $k_z = 0$ （或 φ = 0）处，铁氧体板厚度方向上的表面自旋波分布由单一波数 k_{x22} 描述。

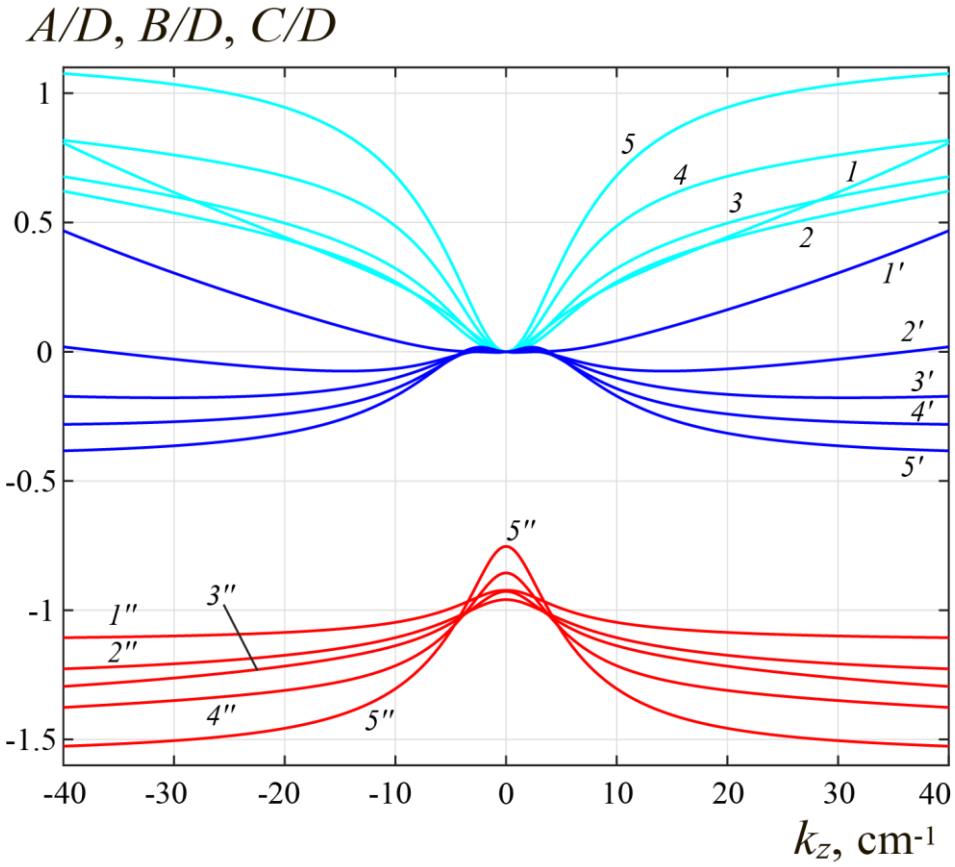

图5. 系数比 A/D（浅蓝色曲线 1–5）、B/D（蓝色曲线 1'–5'）和 C/D（红色曲线 1''–5'''）随波数 k_z 变化的关系，频率分别为 2217、2300、2500、2800 和 3200 兆赫。

根据图4的数据，我们注意到，当 φ ~ 0 和 k_z ~ 0时，k_{x21} (φ) 的依赖关系并不能真正描述铁氧体板厚度方向上的自旋波分布，因为从图5可以看出，在 k_z ~ 0 时，所有频率下的系数 A 和 B 实际上都等于零。因此，根据公式 (55) – (64)，在φ ~ 0 和 k_z ~ 0 时，微波场振幅分布的主要贡献来自系数 C 和 D 及其对应的

波数 k_{x22}。因此，应注意，在静磁近似下描述沿铁氧体厚度方向的表面自旋波分布，对于自旋波频谱的起始部分（频率 ~ 200 兆赫以上 ）在 φ ~ 0 且 k_z ~ 0的范围内并不十分精确。在此范围内，$k_{x2ms}(\varphi)$ 关系曲线几乎与 $k_{x21}(\varphi)$ 关系曲线重合，但与 $k_{x22}(\varphi)$ 关系曲线相距甚远。

$f_{\perp}$

10. 结论

本文从解析角度出发，在不采用静磁近似的情况下，求解了切向磁化的平行平面双旋光层中沿任意方向传播电磁波的一般问题，其中介电常数和磁导率由二阶厄米张量表示。研究表明，将麦克斯韦方程组在层面内的解表示为形式为 's 的波 ~ ，并任意保留波对 x 坐标（即垂直于层面方向）的依赖关系，可以将麦克斯韦方程组化为一个方程组，其中仅包含与恒定均匀磁场矢量平行的微波电场和磁场的 x 相关振幅 $\mathbf{H_0}$。进而，该方程组可化为一个四阶线性微分方程，其对应的双二次特征方程决定了电磁波沿层厚度方向分布的波数。研究表明，该特征方程有四个简单（非重根）根 k_{x21}、 k_{x22}、 $k_{x23} = -k_{x21}$ 和 $k_{x24} = -k_{x22}$，它们不能是复数，只能取实数值或虚数值。

exp( ) ik y ikz

针对在由介电半空间包围的双旋光层中传播、且 $\mathbf{k}_{x21}$ 和 $\mathbf{k}_{x22}$ 取实数值的电磁波，求解了边值问题，并推导出描述这些电磁波的色散方程，该方程是一个四阶行列式，来自一组齐次线性方程组。结果表明，沿层平面任意方向传播的电磁波，在铁氧体层和相邻半空间中均具有微波电磁场的全部六个分量——三个磁场分量和三个电场分量。在物理上，

这意味着，层表面满足边界条件后，相邻半空间中会同时出现 E 波和 H 波，而这两种波通过双旋光层相互耦合。

基于这一理论，我们研究了铁氧体板中的自旋波特性。铁氧体板是双旋光层的一种特殊情况。研究表明，在铁氧体板及以其为基础的最简单结构中，铁氧体板内部的波分布可由指数函数和三角函数描述，分别对应表面波分布和体波分布。因此，在与这些结构相对应的波色散面 $f(k_y, k_z)$ 上，可能存在描述沿铁氧体厚度方向具有三种不同分布的传播波的区域：表面-表面波（k_{x21} 和 k_{x22} 为实数）、体-表面波（k_{x21} 为虚数，k_{x22} 为实数）以及体-体波（k_{x21} 和 k_{x22} 为虚数）。第四种情况，即表面-体波（其中 k_{x21} 为实数，k_{x22} 为虚数），在铁氧体板及以其为基础的结构中并不存在。在 $\{k_y, k_z, f\}$ 坐标空间中，我们绘制了边界面；这些边界面与某一自旋波色散面相交时，会将该色散面上具有不同波分布的区域分隔开。研究表明，边界面由一个方程描述，该方程与无限大铁氧体（双旋光）介质中的电磁波色散方程相同，只是后者简化为二维情形。

将静磁近似下计算的表面自旋波特性与未采用该近似时计算的类似特性进行了比较。结果发现，两种方法计算得到的等频关系仅在较小波数 $k < \sim 3\ cm^{-1}$ 的区域内存在显著差异，该区域对应的频率区间为 ~ 20兆赫，且高于频率 。研究表明，在铁氧体厚度方向的自旋波分布中，指数项附近的系数 A 和 B 在 $k_z = 0$ （或 $\varphi = 0$）时变为零，因此此时的波分布可由单一波数 k_{x22}描述。研究还发现，表面自旋波的波数 k_{x21} 和 k_{x22} 随波矢取向 φ 的变化关系为 f $_{21}\exp(\ )_x$ $_{21}\exp(\ )_x k$

与宽频带 ~ 200 MHz 内类似的磁静态关系 $k_{x2ms}(\varphi)$ 显著不同，该频带位于频率 {v?} 之上。特别是，在角度 φ 接近波矢截止角时，$k_{x2ms}(\varphi)$ 关系曲线接近 $k_{x22}(\varphi)$ 曲线，而在 $\varphi \sim 0$ 处则接近 $k_{x21}(\varphi)$ 曲线；$k_{x22}(\varphi = 0)$ 与 $k_{x21}(\varphi = 0)$ 的数值之差随频率显著变化，从 ~255 cm^{-1} （频率为 {v?} ）变为 ~ 2 cm^{-1} （频率为 {v?}MHz）。因此，对于 $\varphi \sim 0$ 和 $k_z \sim 0$ 处表面自旋波频谱的起始部分，采用磁静态描述来表示表面自旋波沿铁氧体厚度的分布并不准确；此时 $k_{x2ms}(\varphi)$ 关系曲线远离 $k_{x22}(\varphi)$ 关系曲线，且几乎与 $k_{x21}(\varphi)$ 关系曲线重合，实际上并未描述该波（因为 $A(\varphi = 0) = B(\varphi = 0) = 0$）。

所获得的关于电磁波在切向磁化双旋光层中传播问题的解，为计算铁氧体、反铁磁介质和等离子体等介质层中的精确波特性提供了广泛可能。具体而言，利用所提出的理论，不仅可以计算所研究波的坡印廷矢量、能流方向与密度以及矢量线，还可以基于现有的电动力学方法解决更复杂的问题。

资助

本研究是俄罗斯科学院 Kotel’nikov 无线电工程与电子学研究所国家任务的一部分。

参考文献

1. S. A. Nikitov、D. V. Kalyabin、I. V. Lisenkov 等，《Physics-Uspekhi》58（2015年）1002。2. A. V. Chumak、V. I. Vasyuchka、A. A. Serga、B. Hillebrands，《Nature Physics》11（2015年）453。3. X. S. Wang、H. W. Zhang、X. R. Wang，《Phys. Rev. Appl.》9（2018年）024029

4. A. Yu. Annenkov、S. V. Gerus、E. H. Lock, 《EPL》（《欧洲物理快报》）123（2018年）44003。5. S. A. Nikitov、A. R. Safin、D. V. Kalyabin 等, 《Physics-Uspekhi》63（2020年）945。6. P. Pirro、V. I. Vasyuchka、A. A. Serga、B. Hillebrands, 《Nature Reviews Materials》6（2021年）1114。7. A. Barman、G. Gubbiotti、S. Ladak 等, 《Journal of Physics: Condensed Matter》33（2021年）413001。8. A. Chumak、P. Kabos、M. Wu 等, 《IEEE Transactions on Magnetics》58（2022年）1。9. S. A. Odintsov、S. E. Sheshukova、S. A. Nikitov、E. H. Lock、E. N. Beginin、A. V. Sadovnikov, 《Journal of Magnetism and Magnetic Materials》546（2022年）168736。10. S. V. Gerus、A. Yu. Annenkov、E. H. Lock, 《Journal of Magnetism and Magnetic Materials》563（2022年）169747。11. R. W. Damon、J. R. Eshbach, 《J. Phys. Chem. Solids》19（1961年）308。12. A. V. Vashkovskii、V. S. Stalmakhov、Y. P. Sharaevskii, 《微波电子学中的静磁波》（萨拉托夫国立大学，俄文版）1993年。13. A. G. Gurevich 和 G. A. Melkov, 《磁化振荡与波》（CRC，佛罗里达州博卡拉顿）1996年。14. D. D. Stancil、A. Prabhakar, 《自旋波：理论与应用》（纽约：Springer Science + Business Media）2009年。15. O. G. Vendik、B. A. Kalinikos、S. I. Miteva, 《苏联高等院校学报：无线电电子学》XXIV（1981年）52。16. R. Ruppin, 《Journal of Applied Physics》62（1987年）11。17. V. V. Danilov、I. V. Zavislyak 和 M. G Balinskii, 《自旋波电动力学》（Libid'，基辅）1991年。18. A. V. Vashkovskii、E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》46（2001年）674。19. A. V. Vashkovskii、E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》46（2001年）1163。20. A. V. Vashkovskii、E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》47（2002年）87。

21. E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》48 (2003) 1369. 22. A. V. Vashkovskii, E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》54 (2009) 456. 23. S. A. Vyatkina, R. K. Babichev, V. N. Ivanov, 《电磁波与电子系统》16 (2011) 64. 24. A. V. Vashkovskii, E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》57 (2012) 490. 25. A. V. Vashkovsky, E. H. Lock, Physics-Uspekhi 54 (2011) 281. 26. E. H. Lock, 《固态现象》233-234 (2015年) 476. 27. E. G. Lokk, 《通信技术与电子学杂志》61 (2016) 33 28. E. G. Lokk, A. V. Vashkovskii, 《通信技术与电子学杂志》61 (2016) 877. 29. A. G. Gurevich, 《微波频率下的铁氧体》（莫斯科，国家物理文献出版社）1960. 30. E. H. Lock, A. V. Lugovskoi, S. V. Gerus, 《通信技术与电子学杂志》66, (2021) 834.