arXiv:2303.08853v1 [math.CA] 15 Mar 2023

有限变换及其在二阶以上贝塞尔微分方程中的应用

Gabriel L´opez Garza

墨西哥城大都会自治大学数学系，墨西哥

摘要

本文介绍了一种有限变换方法。该方法在一定程度上等价于 Z 变换方法，但对其进行了推广。将所介绍的方法应用于贝塞尔函数，可以求解具有给定初始条件的相关高于二阶的常微分方程。

关键词：有限变换、贝塞尔函数、运算微积分

1. 引言

在所谓的“有限变换”中，最著名的由序列定义的变换可能是 Z 变换（详尽的研究见[13]）。给定一个序列 $\{f_n\}$，Z变换定义为 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}$。$Z$ 变换与本文所介绍的变换之间的主要区别在于：对于前者，只要定义中的级数在至少一个 z 值处收敛，该序列就可进行变换；而对于本文研究的变换，则不要求收敛。第 4 节将说明 ζ变换是本文所研究变换的一种特殊情形。有限变换的其他著名实例包括斯图姆–刘维尔变换（例如参见 [4]）。基本上，为了解某些微分方程（常微分方程，甚至偏微分方程），可以将一个序列与某些适当的函数联系起来。众所周知，自伴算子的特征函数 $\{\phi_n(t)\}$在满足某些边界条件时（即给定斯图姆-刘维尔问题的解），可为函数 f （该函数满足取决于

所考虑问题的某些条件）提供广义傅里叶展开，其形式为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t), \quad a_n = \langle f, \phi_n \rangle,$$

其中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是为每个斯图姆-刘维尔问题定义的内积。因此，在这个有限变换的例子中，序列 $\{a_n\}$可定义为函数 $f(t)$ 的变换，记作 $\mathcal{T}$：

$$\mathcal{T}[f(t)] \stackrel{def}{=} \{a_n\},\ n \geq 0.$$

这种定义的变换在一定程度上对求解微分方程非常有用。不过，由该变换导出的方法（例如 [4]）并未提供[11]中定义的完整的 Mikusi´nski 算子方法。这是因为由内积导出的卷积乘积含有非零零因子（例如，对于任意的 $n \neq m$, $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$，鉴于斯图姆-刘维尔问题的特征函数彼此正交，且当然都不为零）。尽管如此，这一局限（从启发式角度看是一种局限）却为卷积代数提供了丰富的例子[8], 。本文主要尝试尽可能扩展有限变换方法；即便无法在 Mikusi´nski 意义上完成算子演算，也要将其扩展为一种方法，以便在各种实际问题中求解涉及贝塞尔算子及其他算子的许多常微分方程或偏微分方程。

有限变换的例子有勒让德变换 [3], 和拉盖尔变换 [10]。不过，除了施图姆–刘维尔变换之外，还有许多其他方法可以将一个序列与给定函数联系起来，例如诺伊曼级数 [14, 第十六章]。在我们的方法中，通过一个微分算子构造变换；从某种意义上说，该算子是贝塞尔函数麦克劳林级数的推广，后文将对此作出解释。

本文研究的变换方法，是将某一组适当的函数与一个序列 $\{a_n\} \in \mathbb{C}$ 联系起来。由于序列集合不是代数域，因此研究仅限于对于柯西乘积可逆的序列。并非每个非零序列都可逆，这正是无法将我们的研究扩展为完整的 Mikusi´nski 算子演算的主要原因。因此，与 [1] 中研究的 Mikusi´nski 算子演算相比，我们的研究与传统的拉普拉斯变换法更为相似。事实上，

对于给定初始条件的某些微分方程，可以通过有限变换与一个多项式相联系，从而将变换后的方程化为部分分式分解形式求解。部分分式分解可以与已知变换或已知变换的柯西乘积相联系。最后，像往常一样求得逆变换，从而解决问题。

本文结构如下：第2节介绍变换集中使用的运算，并定义所用的有限变换（第2.1小节）。第3节求解一些高阶贝塞尔方程，并展示其与拉普拉斯变换的等价性。不过值得注意的是，这些变换是通过微分而非积分算子定义的，与经典拉普拉斯变换的情形不同。在最后一节中，本文将在所研究的变换方法背景下，充分解释人们早已注意到的相似之处：函数 ber 和 bei 分别与余弦和正弦函数十分相似。 [5, p. 136]

2. 数学背景

给定两个序列 $\{a_n\},\{b_n\}$，我们定义它们的乘积（即所谓的柯西乘积）如下：

$$\begin{aligned}\{a_n\}\{b_n\} &= \left\{\sum_{\tau=0}^{n} a_\tau b_{n-\tau}\right\} \\ &= \{a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots\}.\end{aligned} \tag{1}$$

在 [2, 第 721] 页中证明了，两个序列的柯西乘积为零，当且仅当其中一个序列是零序列 $a_n = 0,\ n \geq 0$ 因此可以构造序列商域。然而，并非所有非零序列都可逆。要使一个序列可逆，必须要求给定序列的首项不为零。事实上，给定一个序列 $\{a_n\},\ a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0$，关于柯西乘积的乘法逆元$\{b_n\}$ 可以通过递归轻松求得，因为

$\{a_n\}\{b_n\} = \{1, 0, 0, \dots\}$ 蕴含

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_1 &= -\frac{a_1}{a_0^2} \\ b_2 &= \frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2} \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{-1}{a_0}\left(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right). \end{aligned}$$

并非每个非零序列都有乘法逆元，这一事实限制了按照 Mikusi´nski 的思路构建算子演算 [11], ；不过，正如我们将看到的，利用本文中的可逆序列，可以构造许多变换，并像其他用于求解微分方程的变换方法那样对它们进行运算。经过最后的讨论，定义了适当序列的集合 $\mathcal{A} = \{\{a_n\} : a_0 \neq 0\}$ 。

利用柯西乘积，可以构造许多算子 $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$。一个重要的例子是右移，它是由序列 $s = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$ 通过柯西乘积定义的算子。若 $\{a_n\}$、$n \geq 0$是满足 $a_n \in \mathbb{C}$的任意序列，则有

$$s\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\}\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{0, a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

因此，右移算子 $S: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 由 $S[\{a_n\}] \stackrel{def}{=} s\{a_n\}$定义。符号 $S[\{a_n\}]$ 在大多数论文中并不常用，通常会改用算子s S （例如见 [2]）；为避免与既有惯例混淆，本文将始终采用这一做法。

由此可得 $s^2 = ss = \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$，一般而言

$$s^n = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\},$$

这是一个除 $n+1$ 处的数值为 1 外其余各处均为 0 的序列。对于 s 的幂，以下记法是标准的

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \stackrel{def}{=} a_0 s^0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots, \tag{2}$$

其中 $s^0 = \{1, 0, 0, \dots\}$，此后我们简记为 $a_0 s^0 = a_0$，而微积分中的任意常数 c 都表示序列 $c \stackrel{def}{=} \{c, 0, 0, \dots\}$。我们回顾一下，关系式 (2) 纯粹是形式上的，完全不涉及收敛这一概念 [2,p. 723]。

请注意，$s = \{0, 1, 0, \dots\}$ 对于柯西乘积而言不可逆，但序列 $\{1, 0, 0, \dots\} + s = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$实际上可逆，且容易推导出以下公式 [2]

$$\begin{aligned} \{1\} &= \frac{1}{1-s}, && (3)\\ \{r^n\} &= \frac{1}{1-rs}, && (4)\\ \left\{\cos\frac{\pi}{2}n\right\} &= \{1, 0, -1, 0, \dots\} = \frac{1}{1+s^2}, && (5)\\ \left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\} &= \{0, 1, 0, -1, \dots\} = \frac{s}{1+s^2}. && (6) \end{aligned}$$

也就是说，序列 $1 - s$ 是序列$\{1\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ 在柯西乘积下的乘法逆元；更确切地说，序列 $1-s$是 $\{1\}$的逆序列类的一个代表元。对于从 (4) 到 (6) 的恒等式，符号 $1/G(s)$ 也有类似的含义。

序列 $\{y_n\}$ 的左移 l 定义为

$$\begin{aligned} l\{y_n\} = l\{y_0, y_1, y_2, \dots\} &\stackrel{def}{=} \{y_1, y_2, y_3, \dots\} = \{y_{n+1}\}\\ l^m\{y_n\} &\stackrel{def}{=} \{y_{n+m}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

以下公式 [2, p. 724]将用于求解本文中与贝塞尔算子及其他算子相关的微分方程:

$$s^m(l^m\{y_n\}) = s^m\{y_{n+m}\} = \{y_n\} - y_0 - sy_1 - \cdots - s^{m-1}y_{m-1}. \quad (8)$$

注意，公式 (8) 与给定函数的 m 阶导数的拉普拉斯变换公式相似。

2.1. 有限变换的定义

给定级数 $g(t) = a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots$，其中 $a_n \in \mathbb{C}$ 和 $f_n(t)$ 是已知函数，我们将变换 $\mathcal{T}[g(t)] = G(s)$ 定义为

如下公式

$$\mathcal{T}[g(t)] \stackrel{def}{=} \{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \tag{9}$$
$$= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots = G(s), \tag{10}$$

当且仅当存在算子 L 使得 $L[f_n(t)] = f_{n-1}(t)$ $n \geq 1$。算子 L 对应于左移 s，称为序列 $\{f_n(t)\}, n \geq 0$的左移具体实现。

a_n 将由作用于给定函数的不同微分算子实例给出，如下例所示。请注意，(10) 是关于 s 的幂的纯形式表达式，这种记法与收敛问题无关。

3. 应用示例

1. 贝塞尔函数诱导的变换。对于阶为$\nu \geq 0$ 的贝塞尔函数，我们考虑如下形式的单项式 $f_{n,\nu}(t) = \frac{t/2^{2n+\nu}}{\Gamma(\nu+n+1)n!}$。若 $L_\nu \stackrel{def}{=} \frac{1}{t}DtD - \frac{\nu^2}{t^2}$ 是一个微分算子，其中 D 表示对t求导，则直接计算可得

$$L_\nu f_{n,\nu}(t) = f_{n-1,\nu}(t), \text{ for } n \neq 0, \tag{11}$$
$$L_\nu f_{0,\nu}(t) = 0, \text{ for } n = 0, \tag{12}$$

这样，L_ν 就对应于这种具体实现中的左移 s。事实上，如果 $f(t)$是一个满足以下条件的函数

$$f(t) = a_0 f_{0,\nu}(t) + a_1 f_{1,\nu}(t) + a_2 f_{2,\nu}(t) + \cdots, a_n \in \mathbb{C},$$

那么我们将贝塞尔变换 $\mathcal{T}_{B_\nu}$ 定义为

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[f(t)] = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

并且，由于

$$L_\nu f(t) = a_1 f_{0,\nu}(t) + a_2 f_{1,\nu}(t) + \cdots,$$

根据式 (11) 和 (12)，我们有

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[L_\nu f(t)] = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$$

因此，将 L_ν 应用于函数 $f(t)$，就相当于对 $\mathcal{T}[f(t)]$, 进行左移，正如我们所声称的那样。

固定 $\nu \geq 0$ 时的变换示例如下:

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[J_\nu(t)] = \{1, -1, 1, -1, \dots\}, \tag{13}$$
$$\mathcal{T}_{B_\nu}[I_\nu(t)] = \{1, 1, 1, \dots\}, \tag{14}$$
$$\mathcal{T}_{B_\nu}[\mathrm{Ber}_\nu(t)] = \left\{\cos\frac{(3\nu+2n)\pi}{4}\right\}, \tag{15}$$
$$\mathcal{T}_{B_\nu}[\mathrm{Bei}_\nu(t)] = \left\{\sin\frac{(3\nu+2n)\pi}{4}\right\}. \tag{16}$$

其中， $J_\nu(t)$是众所周知的 $\nu \geq 0$ 阶贝塞尔函数，而$I_\nu(t)$是第一类修正贝塞尔函数。式（15）和（16）中特别有趣的情形是 $\nu = 0$ ，此时

$$\mathcal{T}_{B_0}[\mathrm{Ber}(t)] = \{1, 0, -1, 0, \dots\} \tag{17}$$
$$\mathcal{T}_{B_0}[\mathrm{Bei}(t)] = \{0, -1, 0, 1, \dots\}. \tag{18}$$

公式（13）至（18）是众所周知的（例如，参见 [12]第140页，其中给出了公式（15）和（16））。对于一般函数，变换 $\mathcal{T}_{B_\nu}$ 可以通过迭代算子 L_ν来计算。令 $L_\nu^m = L_\nu(L_\nu^{m-1})$ $m \geq 2$为 m 阶算子，则对于满足极限 $f(t)$的函数

$$\lim_{t\to 0}(L^m f(t)) = a_m \tag{19}$$

若该极限存在，我们将 $\lim_{t\to 0}(L_\nu^m f(t)) = L_\nu^m f(0) = a_m$记为如此。因此，对于该极限对任意 $m \in \mathbb{N}$ 均存在的函数类，我们定义

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[f(t)] = \{f(0), L_\nu f(0), L_\nu^2 f(0), \dots\}.$$

注意级数 $f(x) = f(0) + a_1 f_{1,\,\nu}(t) + a_2 f_{2,\,\nu}(t) + \cdots$与麦克劳林级数的相似之处。就我们的目的而言，这种一致性不再进一步探讨；变换 $\mathcal{T}_{B_\nu}$ 的存在只要求极限 (19) 存在。有许多函数可以通过反复应用 L_ν 算子来计算其变换，例如 $\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sinh t$、$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh t$、$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}(\sin t + \cos t)$以及许多其他函数。读者可以直接通过应用该算子验证变换 $\mathcal{T}_{B_\nu}$ 存在；不过，根据阶数为二分之一和奇数的贝塞尔函数公式，这一点很容易直接证明（ [12, 第 138 页和第 140]页）。例如，利用 [12] 中的公式 24.58，我们有$I_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sinh t$，因此

$$\mathcal{T}_{B_{1/2}}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sinh t\right]=\{1,1,1,\dots\}.$$

2. 贝塞尔算子的变换法。对 Plum 方程 $\Delta^2 u-\gamma\Delta u-\frac{4\gamma}{r^2}u=\Lambda u$分离变量后，其中 Δ 是极坐标下的拉普拉斯算子 [6], 所得的四阶方程 $(ty'')''-((9t^{-1}+8\mu^{-1}t)y')'=\Lambda ty$ 可利用例 1 中的变换求解。事实上，最后一个方程可以写成与 [1,式 45]等价的形式

$$\left[L_2^2-\frac{8}{\mu}L_2-\left(\lambda^2+\frac{8}{\mu}\right)\lambda^2\right]y(t)=0. \tag{20}$$

将 $\mathcal{T}_{B_2}$ 应用于方程 (20)，得到

$$\{Y_{n+2}\}-\frac{8}{\mu}\{Y_{n+1}\}-\left(\lambda^2+\frac{8}{\mu}\right)\lambda^2\{Y_n\}=0, \tag{21}$$

其中 $\{Y_n\}=\mathcal{T}_{B_2}[y(t)]$、$\mathcal{T}_{B_2}[L_2^2y(t)]$, 和 $\mathcal{T}_{B_2}[L_2y(t)]$ 是应用公式 (7) 后得到的。将 (21) 乘以 s^2 并应用公式 (8)，可得

$$\{Y_n\}-Y_0-sY_1-s\frac{8}{\mu}(\{Y_n\}-Y_0)-s^2\left(\lambda^2+\frac{8}{\mu}\right)\lambda^2\{Y_n\}=0,$$

因此

$$\{Y_n\}=\frac{Y_0+s\left(Y_1-\frac{8}{\mu}Y_0\right)}{(1+\lambda^2 s)\left(1-\left(\frac{8}{\mu}+\lambda^2\right)s\right)} \tag{22}$$

并对 (22) 进行部分分式分解后

$$\{Y_n\}=\frac{1}{2(4+\lambda^2\mu)}\left(\frac{8Y_0-\mu Y_1+Y_0\lambda^2\mu}{1+\lambda^2 s}+\frac{Y_1\mu+Y_0\lambda^2\mu}{1-(8/\mu+\lambda^2)s}\right). \tag{23}$$

利用公式 (13) 和 (14) 的一般形式，即

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[J_\nu(\sqrt{\lambda}t)] \;=\; \lambda^{\nu/2}\{\lambda^k\}=\frac{\lambda^{\nu/2}}{1-\lambda s} \tag{24}$$

$$\mathcal{T}_{B_\nu}[I_\nu(\sqrt{\lambda}t)] \;=\; \lambda^{\nu/2}\{(-\lambda)^k\}=\frac{\lambda^{\nu/2}}{1+\lambda s} \tag{25}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{B_2}[J_2(\lambda t)] &= \lambda^2\{1,-1,1,-1,\dots\} = \frac{1}{1-(-\lambda^2)s}\\ \mathcal{T}_{B_2}\left[I_2\left(\sqrt{\frac{8}{\mu}+\lambda^2}\,t\right)\right] &= \left(\frac{8}{\mu}+\lambda^2\right)\{1,1,1,1,\dots\} = \frac{1}{1-\left(\frac{8}{\mu}+\lambda^2\right)s}.\end{aligned}$$

利用最后两个方程，可以对方程 (23) 取逆变换，以求解初值问题 (20)，其初始条件为 $y(0) = Y_0$，且 $\lim_{t\to 0} L_2 y(t) = Y_1$。读者可能会注意到，利用恒等式 $J_2(u) = -J_0(u) + \frac{2}{u}J_1(u)$ 和 $I_2(u) = I_0(u)$ $\frac{2}{u}I_1\ u$ [7] ( )，

我们得到的解与 [1] 中公式给出的解相同。

3. 麦克劳林级数诱导的变换。考虑形式为 $f_n(t) = t^n/n!$ 的单项式，因此，由于 $\frac{d}{dt}t^n/n! = t^{n-1}/(n-1)!$，在这一具体实现中，左移就是关于 t 的导数。给定一个函数 $f(t)$，且 $\lim_{t\to 0} f_{(n)}(t) = f^{(n)}(0)$ $n \geq 0$ 存在，则 f 的离散变换，记作 $\mathcal{T}_M[f(t)] = F(s)$，按定义为以下序列

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M[f(t)] &\stackrel{def}{=} \{f(0), f'(0), f^{(2)}(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots\}\\ &= f(0) + f'(0)s + f^{(2)}(0)s^2 + \cdots,\end{aligned}$$

并且，形式上，

$$\mathcal{T}_M[f'(t)] = \{f'(0), f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), \dots\} = f'(0)+f^{(2)}(0)s+f^{(3)}(0)s^2+\cdots.$$

一般而言，若 $\mathcal{T}_M[y(t)] = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_n\}, n \geq 0$，则 $\mathcal{T}_M[y'(t)] = \{a_1, a_2, \dots\} = \{a_{n+1}\}, n \geq 0$。因此 $\mathcal{T}_M[y^{(m)}(t)] = \{a_m, a_{m+1}, \dots\} = \{a_{n+m}\}$，$n \geq 0$，所以 m 阶导数对应于 m 位右移。

注意，例如，序列 $\{1,1,1,\dots\}$ 对应于指数函数，并且根据公式 (3)，$\mathcal{T}_M[e^t] = \{1,1,1,\dots\} = \frac{1}{1-s}$。此外，根据公式 (5)，很容易看出 $\mathcal{T}_M[$余弦 $t] = \frac{1}{1+s^2}$。而且，根据公式 (6)，$\mathcal{T}_M[$正弦 $t] = \frac{s}{1+s^2}$.

现在利用公式（8），可以求解常系数非齐次微分方程。作为示例，我们求解

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}; \tag{26}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{27}$$

根据（7），若 $\mathcal{T}_M[y(t)] = \{y_n\}, n \geq 0$，则在此实现中，导数必然满足

$$\mathcal{T}_M[y^{(m)}(t)] = l^m\{y_n\} = \{y_{n+m}\}. \tag{28}$$

对 (26) 进行变换，并令 $\mathcal{T}_M[y(t)] = \{y_n\} = Y(s)$，根据公式 (28) 可得

$$\{y_{n+2}\} - 3\{y_{n+1}\} + 2\{y_n\} = \frac{1}{1-3s}. \tag{29}$$

将 (29) 乘以 s^2，并考虑初始条件 (27)，使得 $\mathcal{T}_M[y(0)] = y_0 = 1$，$\mathcal{T}_M[y'(0)] = y_1 = 0$，因此根据公式 (8)，化简后可得

$$\begin{aligned}
\{y_n\}(1-3s+2s^2) &= \frac{s^2}{1-3s} + 1 - 3s & (30)\\
\{y_n\} &= \frac{1-6s+10s^2}{(1-3s)(s-1)(2s-1)} & (31)\\
Y(s) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-3s} + \frac{\frac{5}{2}}{1-s} - \frac{2}{1-2s} & (32)\\
y(t) &= \mathcal{T}_M^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t}. & (33)
\end{aligned}$$

显然，(32) 是对 (31) 进行部分分式分解后得到的，而 (33) 则由 (4) 得到，因为在这种实现中 $\mathcal{T}_M[e^{rt}] = \{r^n\} = \frac{1}{1-rs}$。当然，与变换方法中通常的做法一样，如果 $\mathcal{T}_M[y(t)] = Y(s)$，则定义 $y(t) \stackrel{def}{=} \mathcal{T}_M^{-1}[Y(s)]$。

4. Z 变换情形

现在建立本文研究的 Z 变换与麦克劳林变换之间的对应关系。对于一个函数 $G \in \mathcal{C}^\infty$，可由公式定义一个序列$\{g_n\}$

$$g_n \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} G\left(\frac{1}{x}\right) \tag{34}$$

当且仅当该极限确实存在时。对于序列 $\{g_n\}$，该序列的 ζ变换定义为

$$\mathcal{T}_Z[\{g_n\}] = F(z) = g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{g_2}{z^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^n}, \tag{35}$$

如果级数 (35) 至少对一个 $z \in \mathbb{C}$ 收敛。ζ变换的性质众所周知（例如参见 [13]）。请注意，对应关

$$z^{-n} \leftrightarrow s^n \tag{36}$$

建立了ζ变换与麦克劳林变换之间的一一对应关系，因此二者等价。这些变换的主要区别在于：在本文研究的其他所有变换中，左移 s 都与微分算子相关（尤其是麦克劳林变换 $\mathcal{T}_M$，其中 s 对应导数）；而对于 z^{-n}，无法通过求导并在 $z = 0$处求值，从给定的洛朗级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^n}$ 中求得 g_n，但可以通过复积分做到这一点。

另一处区别是，如前所述，给定级数是否收敛，并不能决定麦克劳林变换是否存在。例如，序列 $\{1, 1, 1, \ldots, \}$ 的 Z 变换为

$$\mathcal{T}_Z[\{1, 1, \ldots\}] = F(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots = \frac{z}{z-1} \tag{37}$$

仅当 $|z| > 1$时才存在，但

$$\mathcal{T}_M[\{1, 1, \ldots\}] = \frac{1}{1-s} \tag{38}$$

是良定义的。因此，虽然在式（37）中，Z 变换 $F(z)$ 仅在 $|z| > 1$时存在，但公式（38）表明，序列 $\{1, 1, 1, \ldots 1 \ldots\}$ 关于柯西乘积的乘法逆元是序列$\{1, -1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} = 1 - s$，读者不难验证这一点。

示例 [与 Z 变换]的等价性。为说明该变换与麦克劳林变换之间的等价性，我们求解一个初值问题：

$$\begin{aligned} y_{k+1} - 3y_k &= 4 \\ y_0 &= 1. \end{aligned} \tag{39}$$

该问题已通过在 [9, 例3.42]中使用 Z 变换求解。根据 Z 变换 [13, 第3章，第3节7] 中的方程和初始

条件（39）变换为

$$Y(z) = \mathcal{T}_Z[\{y_n\}] = \frac{-2z}{z-1} + \frac{3z}{z-3} \tag{40}$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^n} \tag{41}$$

其中，式 (41) 是通过展开式 (40) 的洛朗级数得到的。考察对应关系 (36) 并将其应用于式 (41)，即可求得式 (39) 的麦克劳林变换：

$$\begin{aligned} Y(s) = \mathcal{T}_M[\{y_n\}] &= \frac{-2}{1-s} + \frac{3}{1-3s} \\ \{y_k\} = \mathcal{T}_M^{-1}[Y(s)] &= -2\{1,1,\dots\} + 3\{1,3,3^2,\dots\} \end{aligned}$$

因此，差分问题 (39) 的解为 $y_k = -2 + 3^{k+1}$，如 [9] 所示。

当然，也可以直接用麦克劳林变换求解问题 (39)，如下所示；前面的论述只是为了强调对应关系 (36)。若直接用麦克劳林变换 $Y(s) = \mathcal{T}_M[\{y_n\}]$ 求解问题 (39)，根据问题 (39) 中的方程可得

$$\{y_{k+1}\} - 3\{y_k\} = 4\{1,1,\dots\},$$

将最后一个方程乘以 s，应用公式 (8)，并取 $y_0 = 1$（它对应于问题 (39) 中的初值），可得

$$\begin{aligned} s\{y_k\} - 1 - 3s\{y_k\} &= 4s\{1,1,\dots\} \\ (1-3s)Y(s) &= \frac{4s}{1-s} + 1 \\ Y(s) &= \frac{4s}{(1-s)(1-3s)} + \frac{1}{1-3s}, \end{aligned}$$

因此，经过部分分式分解后

$$Y(s) = \frac{-2}{1-s} + \frac{2}{1-3s} + \frac{1}{1-3s} = \frac{-2}{1-s} + \frac{3}{1-3s}.$$

因此，取逆变换并应用公式 (4)，可得

$$\{y_k\} = -2\{1,1,\dots\} + 3\{3^k\}, k > 0,$$

因此，$y_k = -2 + 3^{k+1}$、$k > 0$ 和 $y_0 = 1$，这与先前给出的 Z 变换解一致。

5. 结论

ber 和 bei 函数分别与余弦函数和正弦函数之间显著的相似性，早已引起注意（例如参见 [5,第 136]页），但据我所知，这种相似性尚未得到彻底理解。按照本文的方法，Ber 和 Bei 函数以及余弦和正弦分别对应于同一个变换（或序列）：Ber 和 Bei 对应 L_ν 算子，余弦和正弦则对应 d/dt 算子。表（1）展示了这些函数之间的精确对应关系。

算子	函数	变换	关联序列
L_ν	$\mathsf{Ber}(t)$	$\mathcal{T}_{B_\nu}[\mathsf{Ber}_\nu\, t] = \frac{1}{1+s^2}$	$\{1, 0, -1, 0, \dots\}$
L_ν	$\mathsf{bei}(t)$	$\mathcal{T}_{B_\nu}[\mathsf{bei}_\nu\, t] = \frac{s}{1+s^2}$	$\{0, -1, 0, 1, \dots\}$
L_ν	$I_\nu(t)$	$\mathcal{T}_{B_\nu}[I_\nu t] = \frac{1}{1-s}$	$\{1, 1, \dots\}$
D	$\text{余弦 } t$	$\mathcal{T}_M[\text{余弦 } t] = \frac{1}{1+s^2}$	$\{1, 0, -1, 0, \dots\}$
D	$\text{正弦 } t$	$\mathcal{T}_M[\text{正弦 } t] = \frac{s}{1+s^2}$	$\{0, -1, 0, 1, \dots\}$
D	e^t	$\mathcal{T}_M[e^t] = \frac{1}{1-s}$	$\{1, 1, \dots\}$

表（1）根据各自的算子，展示正弦、余弦和贝塞尔函数之间的对应关系。

例如，表（1）显示，序列 $\{1, 1, \dots\}$ 与两个不同的函数相对应：贝塞尔函数 I_ν 和指数函数。因此，即使它们是通过不同的变换方法得到的，其变换也相同。当然，与每个函数相关联的算子分别为 L_ν 和 D。因此，在本文所研究的变换方法框架下，便可充分解释两种不同方法所得结果的巧合。

参考文献

[1] Bengochea, G., L´opezGarza, G., Mikusi´nski 的《具有代数基础及贝塞尔函数应用的算子演算》。《积分变换与特殊函数》，(2014), 25(4) 272-282。[2] Brand, L.，《序列的除法代数及其相关算子演算》。《美国数学月刊》，第 71 卷，第 7 期（1964 年 8–9 月），第 719-728 页。

[3] Churchill, R., V.，《勒让德变换的运算演算》。《数学与物理杂志》，33，165-178（1954）。[4] Eringen, C.，《有限斯特姆–刘维尔变换》。《数学季刊》，第 5 卷，第 1 期，1954 年，第 120-129 页。[5] Ditkin, V. A., Prudnikov, A. P.，《积分变换与算子演算》。培格曼出版社，1965。[6] Everitt, W. N., Markett, C.，关于满足高阶微分方程的贝塞尔函数的一种推广。《计算与应用数学杂志》。1994；54：325-349。[7] Everitt, W. N.，《四阶贝塞尔型特殊函数：综述》。《差分方程、特殊函数与正交多项式》，世界科学出版社。[8] Huffman, J. P., Heatherly, H. E.，《由斯图姆–刘维尔变换产生的卷积代数及其应用》。《国际数学与数学科学杂志》27;4（2001）221-228。[9] Kelly, W. G., Peterson, A. C.，《差分方程：应用导论》。学术出版社，2001。[10] McCully, J.，《拉盖尔变换》。《SIAM评论》第 2 卷第 3 期，1960 年 7 月。[11] Mikusi´nski, J.，《算子演算》。培格曼出版社，伦敦和纽约，1959。[12] Spiegel, M. R.，《Schaum 数学公式与表格手册》。麦格劳-希尔（1998）。[13] V´ıch, R.，《Z变换理论与应用》。D. Reidel出版公司，1984。[14] Watson, G. N.，《贝塞尔函数理论论著》，剑桥大学出版社，剑桥，1922。