arXiv:2303.08855v1 [math.CV] 15 Mar 2023

适用于 $\mathbb{C}^n$ 及复 Banach 空间中函数的精细 Bohr 不等式

Sabir Ahammed 和 Molla Basir Ahamed*

摘要。本文首先在某些限制条件下，得到多圆盘上具有间隙级数的全纯映射的范数型 Bohr 不等式的精细版本。接着，我们确定复 Banach 空间 X 的平衡域 G 上取值于单位圆盘 $\mathbb{D}$的全纯函数的 Bohr 不等式精细版本。此外，作为其中一项结果的推论，我们得到平衡域$G \subset X$上调和函数 $f = h + \bar{g}$ 的 Bohr 型不等式的精细版本。所有结果均证明是最佳的。

1. 引言

一个世纪前，在研究狄利克雷级数的 Bohr 绝对收敛问题时，Bohr幂级数定理被提出。如今，这已成为不同函数空间中的一个活跃研究领域。在 [24], 中，Harald Bohr 证明，对于单位圆盘 $\mathbb{D}$上的每个全纯函数 $f :=\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$

$$\sup_{|z|\leq \frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \right| \leq ||f||_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, \tag{1.1}$$

且半径 $1/3$ 是最优的。常数 $1/3$被广为称为 Bohr 半径，而 (1.1) 被称为单位圆盘 U上解析自映射类 $\mathcal{B}$ 的 Bohr 不等式。

关于单复变量中 Bohr 不等式的多项研究和新问题已见诸文献（参见 [6,11,16,19,35,36,38] 及其中的参考文献）。然而，关于 Bohr 半径问题（即所谓的 Bohr现象）的研究综述，可见综述文章 [13]。此外，关于 Bohr现象问题的参考文献也可见于研究专著 [39]。事实上，1995年，Dixon [30] 利用 Bohr 定理刻画满足冯·诺依曼不等式的 Banach 代数，此后 Bohr 定理受到越来越多的关注。从那时起，大量研究致力于将 Bohr 的结果推广到多维和抽象情形。事实上，将 Bohr 定理推广到各种函数空间如今已成为活跃的研究领域，过去三十年间也建立了不同版本的 Bohr 不等式。例如，Aizenberg 等 [8],Aytuna 和 Djakov [20] 研究了全纯函数的基的 Bohr 性质

文件：P2_Bohr_Aha_Aha_08_03_2023.tex，打印时间：2023-3-17，0.372020年 数学主题分类。主要分类号 30A10；30B10；30C45；32A05；32A10；32K05。关键词和短语。Bohr 现象、全纯函数、调和映射、间隙级数、平衡域。

；Ali 等 [12] 求得了星形对数调和映射类的 Bohr 半径；Paulsen 等 [49] 将 Bohr 不等式推广到了 Banach 代数；Hamada 等 [34] 研究了取值于齐性球的全纯映射的 Bohr 定理；Galicer 等 [33] 研究了多复变量中的混合 Bohr 半径，许多作者还研究了不同函数类的 Bohr 型不等式（参见 [2, 4, 11, 16, 27, 40–42] 及其中的参考文献。）然而，并非每类函数都具有 Bohr现象。例如，Bánátáau 等 [21] 证明，Hardy 空间 $H^p(\mathbb{D}, X)$中不存在 Bohr现象，其中 $p \in [1, \infty)$。在 [44], 中，Liu 和 Liu 证明，Bohr 不等式对函数类 $\mathcal{H}(\mathbb{D}^2, \mathbb{D}^2)$不成立；该类是由具有间隙级数展开的全纯函数 $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 组成的集合。

近年来，人们广泛研究了 Bohr 不等式的精细形式与改进形式，并证明它们对于单位圆盘上的解析自映射类以及某些调和映射类是最佳的 $\mathbb{D}$。关于精细 Bohr 不等式的详细研究，请参阅文献 [46, 48] 及其中的参考文献。实际上，针对多复变量函数的 Bohr 不等式鲜有研究。不仅如此，精细形式的不等式能否对向量值函数、具有 $\mathbb{C}^n$级数表示的全纯函数成立，更进一步说，同一不等式的精细形式能否在 Banach 空间中成立，以及它们是否为最佳，目前都尚未得到研究。最近，Liu等人 [48] 针对 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ 的情形建立了 Bohr 不等式的若干精细形式。我们在此回顾这一结果。

定理 1.1。设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+m} z^{pn+m} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$，其中 $p \in \mathbb{N}$和 $0 \le m \le p$。则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{pn+m}| r^{pn+m} + \left(\frac{1}{1+|a_m|} + \frac{r^p}{1-r^p} \right) \sum_{n=2}^{\infty} |a_{pn+m}|^2 r^{2pn+m} \le 1$$

当 $|z| = r \le r_{p,\ m}(|a_m|)$ 时，其中 $r_{p,\ m}(|a_m|)$ 是方程的唯一正根

$$(1 - |a_m| - |a_m|^2) r^{p+m} + r^p + |a_m| r^m - 1 = 0.$$

此外，我们有 $r_{p,\ m}(|a_m|) \ge \sqrt[p]{1/(2 + |a_m|)}$。

本文的主要关注点不仅在于针对上述讨论的函数给出若干种精细形式的 Bohr 不等式推广，还在于确立这些结果的最佳性。更准确地说，本文旨在研究定理 1.1 关于复 Banach 空间 X 中平衡域 G 上的全纯函数和调和函数的多维类比的精细版本。本文所得结果可化为单复变量中的相应结果。

2. 多复变量中向量值函数的精细Bohr不等式

当 Boas 和 Khavinson [23] 将 Bohr 半径问题的概念从 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数推广到多复变量中的全纯函数时，许多研究者也对 Bohr 现象给予了极大关注

（例如参见 [9,33,34,40,43,49]）。更准确地说，1997年，Boas 和 Khavinson [23] 为多圆盘 $\mathbb{D}^N = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ 引入了 N 维 Bohr 半径 K_N（$N > 1$），由此引发了对 Bohr 半径问题的广泛研究。事实上，Boas 和 Khavinson [23] 证明，N-Bohr 半径K_N 是最大的半径 $r > 0$，使得对于每个含有 N 个变量的复多项式 $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha$

$$\sup_{z \in r\mathbb{D}^N} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha z^\alpha| \leq \sup_{z \in r\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha z^\alpha \right|.$$

正如预期，常数 K_N 定义为满足条件 $\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq 1$ 的最大半径 r，该条件对所有满足 $||z||_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_N|\} < r$ 的 z，以及所有 $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \in \mathcal{H}(U^N)$ 均成立。近年来，多维 Bohr 定理的推广受到了广泛关注。关于多维 Bohr 现象的不同方面（包括该领域的最新进展），请参阅 Aizenberg [7], Liu 和 Ponnusamy [46], Paulsen [49], Defant 和 Frerick [29], Kumar [40]以及 [43, 44] 的文章和其中的参考文献。

全文中，我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集，用 $\mathbb{D}^n$ 表示 $\mathbb{C}^n$中的开单位多圆盘，并用 $\mathcal{H}(X, Y)$表示从X 到 Y的全纯映射集。符号 $'$ 表示转置。举例来说，Liu 和 Liu [44]已经证明，在 $\mathbb{C}^n$ 的单位多圆盘上，具有间隙级数的全纯映射一般不满足范数型布尔不等式。更准确地说，文献 [44]证明，对于由下式给出的函数 f

$$f(z) = \left(z_1 \frac{z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1}, z_2 \frac{z_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}} z_2} \right)', \ z = (z_1, z_2)'$$

使得 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^2, \overline{\mathbb{D}^2})$ 和

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} > \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) > 1 \text{ for } z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

为解决这一问题，作者研究了 [44] 中的 Bohr 不等式，并对函数 f 属于类 $\mathcal{H}(\mathbb{D}^n, \mathbb{C}^n)$ 和 $\mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{U^n}\right)$ 施加了一些限制条件。在 [44], 中，研究了全纯映射 f 在类 $\mathcal{H}(\mathbb{D}^n, \mathbb{C}^n)$ 上、具有间隙级数且对函数 f. 施加某些限制条件时的范数型 Bohr 不等式。

为在 $\mathbb{C}^n$ 中建立全纯函数的 Bohr 不等式，Liu 和 Liu 在 [44] 中得到了以下引理。

引理 2.1。[44] 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $N \in \mathbb{N}$ 且

$$\begin{cases} \phi_1(r) = 2r^N + r - 1, r \in [0,), \\ \phi_2(r) = 4r^{2(N-m)} + 4r^{N+1-2m} - 4r^{N-2m} + r^2 - 2r + 1, r \in [0,1), N > 2m, \\ \phi_3(r) = 4r^N + r^{2+2m-N} - 2r^{1+2m-N} + r^{2m-N} + 4r - 4, r \in [0,1), m+1 \leq N \leq 2m. \end{cases}$$

那么，对于每个 $\phi_k(r) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$，都存在最大正根。

下文中，$\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x的最大整数，其中 x 是实数。我们在此回顾 [48] 中的一个关键结果，它将有助于证明本文的结果。

引理 2.2. [48] 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$。那么对于任意 $N \in \mathbb{N}$，以下不等式成立：

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n + sgn(t) \sum_{n=1}^{t} |a_n|^2 \frac{r^N}{1-r} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r} \right) \sum_{n=t+1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq (1 - |a_0|^2) \frac{r^N}{1-r},$$

对于 $|z| = r \in [0, 1)$，其中 $t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$。

具有如下形式间隙级数的函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^n, \mathbb{C}^n)$ 的 Bohr 不等式

$$\begin{aligned} f(z) &= (a_1 z_1^m + g_1(z), a_2 z_2^m + g_2(z), \ldots, a_n z_n^m + g_n(z))' \\ &= \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{D^s f(0)(z^s)}{s!} \end{aligned} \tag{2.1}$$

在限制条件下，可在 [44] 中得到如下结果。

定理 2.1. [44] 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)'$, $N \geq m+1$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^n, \mathbb{C}^n)$ 由 (2.1) 给出，$|a_l| = ||a|| = \max_{1 \leq l \leq n} \{|a_l|\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$ 且 $a_j z_j^m + g_j(z) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}}\right)$，其中 $\frac{D^m f(0)(z^m)}{m!} = (a_1 z_1^m, a_2 z_2^m, \ldots, a_n z_n^m)'$，并且 j 满足 $|z_j| = ||z|| = \max_{1 \leq l \leq n} \{|z_l|\}$. 则

$$\frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq r_{N,\,m}$，其中 $r_{N,\,m}$ 是引理 2.1 中给出的方程 $\phi_k(r) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ 的最大正根。

定理 2.2。 [44] 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $N \geq m+1$, $f(z) = \frac{D^m f}{(0)(z^m)\,m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{D^s f}{(0)(z^s)\,s!} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}}^n\right)$. 若 $\frac{|D^m f_l(0\ z^m|)()!}{m} = \frac{||D^m f(0\ z^m||)()!}{m}$ $l = 1, 2, \ldots n$, 则

$$\frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq r_{N,\,m}$，其中 $r_{N,\,m}$ 是引理 2.1 中给出的方程 $\phi_k(r) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ 的最大正根。

此外，对于具有如下形式的间隙级数的对称函数 $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}^n}\right)$，范数型布尔不等式

$$f(z) = \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk+m} f(0)(z^{sk+m})}{(sk+m)!} \tag{2.2}$$

在 [44] 中得到了证明，并且证明了该结果是最佳的。

定理 2.3. [44] 设 $m, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq k$ 和 $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}^n}\right)$ 由 (2.2) 给出。若 $|D^m f_{(0\ \ z^m\ |)()!} = ||D^m f(0\ \ z^m\ ||)()!$, l=1,2..., 则

$$\frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{||D^{sk+m} f(0)\,\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!} \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq r_{k,\ m}$, 其中 $r_{k,\ m}$ 是方程的最大正根

$$-6r^{k-m} + r^{2(k-m)} + 8r^{2k} + 1 = 0. \tag{2.3}$$

每个 $r_{k,\ m}$ 都是最佳的。

近年来，精化 Bohr 型不等式已成为一个活跃的研究课题。许多研究者持续研究某一类解析函数、单位圆盘 $\mathbb{D}$或平移圆盘 $\Omega_\gamma := \{z \in \mathbb{C}$ 上的调和映射类的精化 Bohr 型不等式: $|z + \frac{\gamma}{1-\gamma}| < \frac{1}{1-\gamma}\}$ 其中 $0 \leq \gamma < 1$, 以及算子值函数的相关不等式。有关这类研究的详细信息，请参见（参见 [2, 5, 17, 31, 46–48, 51] 及其中的参考文献）。迄今尚无人探讨复 Banach 空间 $\mathbb{C}^n$中全纯函数的 Bohr 不等式可能具有何种精细版本。受 [44], 中的方法启发，我们希望研究 $\mathbb{C}^n$ 中全纯函数的 Bohr 不等式的精细版本，并证明其最佳性。因此，自然会引出以下问题。

问题 2.1. 我们能否建立定理 2.1 至 2.3 的精细版本？能否在保持半径不变的情况下证明它们是最佳的?

为回答问题 2.1，我们将在 $\mathbb{C}^n$ 中针对满足 [44] 所考虑的限制条件的、具有间隙级数的单位多圆盘上的全纯映射，建立范数型精细 Bohr 不等式。事实上，我们在定理 2.4 和 2.5 中证明，常数 $r_{1,0} = 1/3$ 和 $r_{2,1} = 3/5$ 均为最佳。借助引理 2.1 和 2.2，我们得到以下作为定理 2.1 的最佳改进的结果。

定理 2.4. 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)'$, $N \geq m+1$, $f \in \mathcal{H}(U^n, \mathbb{C}^n)$ 由 (2.1) 给出, $|a_l| = ||a|| = \max_{1\leq l\leq n} |a_l|$, $l = 1, 2, \ldots, n$ 且 $a_j z_j^m + g_j(z) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}^n}\right)$, 其中 $D^m f_{(0)(z^m)\,m!} = (a_1 z_1^m, a_2 z_2^m, \ldots, a_n z_n^m)'$, 且 j 满足 $|z_j| = ||z|| = \max_{1\leq l\leq n} |z_l|$. 那么

$$\mathcal{A}_m^f(||z||) := \frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!} + sgn(t) \sum_{s=1}^{t} \left(\frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!}\right)^2 \frac{||z||^{N-2s}}{1-||z||}$$
$$+ \left(\frac{||z||^m}{||z||^m + \frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}} + \frac{||z||}{1-||z||}\right) \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!}\right)^2 \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq r_{N,\ m}$, 其中 $t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$, 且 $r_{N,\ m}$ 是方程 $\phi_k(r) = 0$ ($k = 1$ 的最大正根，相关结果见引理 2.1。

我们得到的第二个结果如下，它是定理 2.2 的一个强化版本。

定理 2.5. 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $N \geq m+1$, $f(z) = \frac{D^m f}{(0)(z^m)\, m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{D^s f}{(0)(z^s)\, s!} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}}^n\right)$. 若 $\frac{|D^m f_l}{m}(0 \;\; z^m \;|\,)()! = \frac{||D^m f(0 \;\; z^m \;||\,)()!}{m}$ $l = 1, 2, \ldots n$, 则

$$\mathcal{B}_m^f(r) := \frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!} + sgn(t) \sum_{s=1}^{t} \left(\frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!}\right)^2 \frac{||z||^{N-2s}}{1-||z||}$$
$$+ \left(\frac{||z||^m}{||z||^m + \frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}} + \frac{||z||}{1-||z||}\right) \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{||D^s f(0)\,(z^s)\,||}{s!}\right)^2 \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq r_{N,\,m}$, 其中 $t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$ 和 $r_{N,\,m}$ 是引理 2.1 中给出的方程 $\phi_k(r) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ 的最大正根。

本节的最终结果是得到一个与定理 1.1 类似的结果，它是定理 2.3 的改进版本。

定理 2.6. 设 $m, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq k$ 和 $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}^n}\right)$ 由 (2.2) 给出。若 $\frac{|D^m f_l(}{m}0 \;\; z^m \;|\,)()! = \frac{||D^m f(0 \;\; z^m \;||\,)()!}{m}$, $l = 1, 2, \ldots$, 则

$$\mathcal{C}_m^f(||z||) := \frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{||D^{sk+m} f(0)\,\left(z^{sk+m}\right)\,||}{(sk+m)!} + \left(\frac{1}{||z||^m + \frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}}\right.$$
$$\left. + \frac{||z||^{k-m}}{1-||z||^k}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{||D^{sk+m} f(0)\,\left(z^{sk+m}\right)\,||}{(sk+m)!}\right)^2 \leq 1$$

对于 $||z|| = r \leq R_{k,\,m}(|c_0|)$, 其中 $|c_0| = \frac{||D^m f}{m}\frac{(0 \;\; z_0^m \;||\,)(\,)!}{}$ 和 $R_{k,\,m}(|c_0|)$ 是方程的最大正根

$$\left(1 - |c_0| - |c_0|^2\right) r^{m+k} + r^k + |c_0| r^m - 1 = 0. \tag{2.4}$$

每个 $R_{k,\,m}(|c_0|)$ 都是最佳的。

令 $\frac{D^m f_l}{(0)(z^m)\, m!} = a_l z_l^m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, 由定理 2.6 可得以下推论。

推论 2.1。设 m, $k \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots, \; a_n)'$, $0 \leq m \leq k$,

$$f(z) = \left(a_1 z_1^m + g_1(z), a_2 z_2^m + g_2(z), \ldots, a_n z_n^m + g_n(z)\right)'$$
$$= \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk+m} f(0)(z^{sk+m})}{(sk+m)!} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}^n, \overline{\mathbb{D}^n}\right),$$

$|a_1 z_1^m| = \cdots = |a_n z_n^m|$, 其中 $\frac{D^m f}{(0)(z^m)\, m!} = (a_1 z_1^m, a_2 z_2^m, \ldots, a_n z_n^m)'$。则对于 $||z|| = r \leq R_{k,\,m}(|c_0|)$, 有 $\mathcal{C}_m^f(||z||) \leq 1$, 其中 $R_{k,\,m}(|c_0|)$ 是式 (2.4) 的最大正根。每个 $R_{k,\,m}(|c_0|)$ 都是最佳的。

推论 2.2. 我们注意到，推论 2.1 是 [44] 中推论 2.1 的尖锐精细化版本。

现在我们讨论应用引理 2.2 证明定理 2.4、2.5 和 2.6。

定理 2.4 的证明。令 $z \in \mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ 固定，并记 $z_0 = z/||z||.$。定义函数 $h_j(\lambda) := f_j(\lambda z_0)$ $\lambda \in \mathbb{D}.$。于是容易看出 $h_j \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{U})$，并且

$$h_j(\lambda) = a_j \left(\frac{z_j}{||z||}\right)^m \lambda^m + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{D^s f_j(0)(z_0^s)}{s!}\lambda^s$$

根据定理 2.4 的假设，其中 j 满足 $|z_j| = ||z|| = \max_{1\le l\le n}\{|z_l|\}$.记 $b_m = a_j \left(\frac{z_j}{||z||}\right)^m$, $b_s = D^s f_j(0)(z_0^s)\ s!\ \ s = N, N+1, \ldots.$ 易见，函数 $\omega(\lambda) = b_m + \sum_{s=N}^{\infty} b_s \lambda^{s-m} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$，这是由 $h_j \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$ 得出的。此外，根据假设，$|b_m| = |a_j| = ||a||.$ 考虑函数$h_j \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$，由引理 2.2 可得

$$\sum_{s=N}^{\infty} |b_s||\lambda|^s + sgn(t)\sum_{s=1}^{t} |b_s|^2 \frac{|\lambda|^N}{1-|\lambda|} + \left(\frac{1}{1+|b_m|} + \frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)\sum_{s=t+1}^{\infty} |b_s|^2|\lambda|^{2s} \le \frac{(1-|b_m|^2)|\lambda|^N}{1-|\lambda|}$$

因此，我们得到以下估计

$$\sum_{s=N}^{\infty} \frac{|D^s f_j(0)(z_0^s)|}{s!}|\lambda|^s + sgn(t)\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{|D^s f_j(0)(z_0^s)|}{s!}\right)^2 \frac{|\lambda|^N}{1-|\lambda|}$$
$$+ \left(\frac{1}{1+|a_j|} + \frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{|D^s f_j(0)(z_0^s)|}{s!}\right)^2 |\lambda|^{2s} \le \frac{(1-|a_j|^2)|\lambda|^N}{1-|\lambda|} \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

令 $|\lambda| = ||z|| = r$ 和 $z = z_0||z||$，利用最大模原理，可得

$$\sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} + sgn(t)\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!}\right)^2 \frac{||z||^{N-2s}}{1-||z||}$$
$$+ \left(\frac{||z||^m}{||z||^m + \frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}} + \frac{||z||}{1-||z||}\right)\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!}\right)^2 \le \frac{(1-||a||^2)||z||^N}{1-||z||}.$$

因此，我们得到

$$\frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}+\sum_{s=N}^{\infty}\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!}+sgn(t)\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!}\right)^2\frac{||z||^{N-2s}}{1-||z||}$$
$$+\left(\frac{||z||^m}{||z||^m+\frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}}+\frac{||z||}{1-||z||}\right)\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!}\right)^2$$
$$\leq ||a||r^m+\frac{(1-||a||^2)r^N}{1-r}:=\mathcal{M}_f(||a||,r).$$

为了证明所需的不等式 $\mathcal{A}_m^f(||z||)\leq 1$，对于 $||z||=r\leq r_{N,\ m}$，只需证明不等式 $\mathcal{M}_f(||a||,r)\leq 1$ 对于 $r\leq r_{N,\ m}$. 成立。为此，只需分析以下几种情形。

情况一。 令 $m=0$. 由于 $0\leq||a||<1$，简单计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(||a||,r)&=||a||+(1-||a||^2)\frac{r^N}{1-r}\leq||a||+2(1-||a||)\frac{r^N}{1-r}\\&=1+(1-||a||)\left(-1+\frac{2r^N}{1-r}\right)\\&\leq 1\text{ for }r\leq r_{N,m},\end{aligned}$$

其中 $r_{N,\ m}$ 是方程 $\phi_1(r)=0$ 的根，见引理 2.1。

情况二。 令 $N>2m, m=1,2,\ldots,$. 然后可得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(||a||,r)&\leq 1-\frac{r^N}{1-r}\left(||a||-\frac{1-r}{2r^{N-m}}\right)^2+\frac{4r^{2(N-m)}+4r^{N+1-2m}-4r^{N-2m}+r^2-2r+1}{4(1-r)r^{N-2m}}\\&\leq 1\ \text{ for }\ r\leq r_{N,m},\end{aligned}$$

其中 $r_{N,\ m}$ 是方程 $\phi_2(r)=0$的根，见引理 2.1。

情况三。 令 $m+1\leq N\leq 2m, m=1,2,\ldots,$. 可推得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(||a||,r)&\leq 1-\frac{r^N}{1-r}\left(||a||-\frac{1-r}{2r^{N-m}}\right)^2\\&\quad+\frac{4r^N+r^{2+2m-N}-2r^{1+2m-N}+r^{2m-N}+4r-4}{4(1-r)}\\&\leq 1\ \text{ for }\ r\leq r_{N,m},\end{aligned}$$

其中 $r_{N,m}$ 是方程 $\phi_3(r)=0$ 的根，该方程见引理 2.1。因此，我们得出结论：对于 $r\leq r_{N,m}$，$\mathcal{A}_m^f(||z||)\leq 1$ 成立，其中 $r_{N,m}$ 见引理 2.1。

不难验证，对于某个满足定理 2.4 条件的数，$f_a(z)=(f_1(z_1)\ a,a,\ldots,a)'$, $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)'\in U^n$，其中 $f_1(z_1)=(a-z_1)/(1-az_1)$。此外，我们还可以写成 $f_1(z_1)=a-(1-a^2)\sum_{s=1}^{\infty}a^{s-1}z_1^s$. 令 $z=(r,0,\ldots,0)'$, $0\leq r<1$，这表明 $\frac{||D^s f_a(0\ z^s||)()!}{s}=(1-a^2)a^{s-1}r^s$ 且对于

$m=0$, $\frac{\|D^m f_a(0\ z^m\|)()!}{m}=a$. 事实上，对于 f_a，简单计算可得

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad \mathcal{A}_m^{f_a}(r) &= a+\sum_{s=1}^{\infty}(1-a^2)a^{s-1}r^s+sgn(t)\sum_{s=1}^{t}(1-a^2)^2a^{2(s-1)}r^{2s}\frac{r^{N-2s}}{1-r}\\ &\quad+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{r}{1-r}\right)\sum_{s=1}^{\infty}(1-a^2)^2a^{2(s-1)}r^{2s}\\ &= 1+(1-a)G(a,r),\end{aligned}$$

其中 $G(a,r):=-1+\frac{(1+a)1-ar^{\ r}}{}+\frac{(1-a^2)r^2\,(1-r)(1-ar)}{}+\frac{(1+a)r^N(1-a^{2t})sgn(t)\,1-r}{}$ 且

$$\lim_{a\to 1^-}G(a,r)=-1+\frac{2r}{1-r}.$$

显然，当 $r>1/3$.时，(2.5) 的右侧大于 1。这意味着常数 $r_{1,0}=1/3$ 是最优的。

接下来，为了证明常数 $r_{2,1}=3/5$ 是最优的，我们考虑函数$f_a(z)=(f_1(z_1)\ a, a,\ldots,a)'$, $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)'\in\mathbb{D}^n$，其中 $f_1(z_1)=z_1(a-z_1)/(1-az_1)$，对某个 $a\in[0,1]$ 成立，并且不难看出，f_a 满足定理 2.4 的条件。通过与上文类似的论证，可以容易地证明 $r_{2,1}=3/5$ 是最优的。证毕。□

定理 2.5 的证明。令 $z\in\mathbb{D}^n\setminus\{0\}$ 为固定值，并记 $z_0=z/||\underline{z}||.$。我们定义函数 $h_l(\lambda):=f_l(\lambda z_0)$ $\lambda\in\mathbb{D}, l=1,2,\ldots n.$。显然，$h_l\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$，由此可轻易推出

$$h_l(\lambda)=\frac{D^m f_l(0)\,(z_0^m)}{m!}\lambda^m+\sum_{s=N}^{\infty}\frac{D^s f_l(0)\,(z_0^s)}{s!}\lambda^s$$

由定理 2.5 的条件可知。因此，我们很容易推出 $\omega(\lambda)=b_m+\sum_{s=N}^{\infty}b_s\lambda^{s-m}\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\overline{\mathbb{D}})$，这是因为 $h_l\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\overline{\mathbb{D}})$，其中 $b_m=\frac{D^m f_l}{(0)(z_0^m)\ m!}$ 且 $\underline{b_s=\frac{D^s f_l}{(0)(z_0^s)\ s!}}$，对于 $\underline{s=}\ N,N+1,\ldots,$。由于 $\omega\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\overline{\mathbb{D}})$，根据引理 2.2，我们得到以下估计

$$\begin{aligned}&\frac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!}|\lambda|^m+\sum_{s=N}^{\infty}\frac{|D^s f_l(0)\,(z_0^s)\,|}{s!}|\lambda|^s+sgn(t)\sum_{s=1}^{t}\left(\frac{|D^s f_l(0)\,(z_0^s)\,|}{s!}\right)^2\frac{|\lambda|^N}{1-|\lambda|}\\ &+\left(\frac{1}{1+\frac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!}}+\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)\sum_{s=t+1}^{\infty}\left(\frac{|D^s f_l(0)\,(z_0^s)\,|}{s!}\right)^2|\lambda|^{2s}\\ &\le\frac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!}|\lambda|^m+\frac{\left(1-\left(\frac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!}\right)^2\right)}{1-|\lambda|}|\lambda|^N\ \text{ for }\ l=1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

令 $|\lambda| = ||z|| = r$ 和 $z = z_0||z||$，我们得到

$$\frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=N}^{\infty} \frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} + sgn(t) \sum_{s=1}^{t} \left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} \right)^2 \frac{||z||^{N-2s}}{1-||z||}$$

$$+ \left(\frac{||z||^m}{||z||^m + \dfrac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}} + \frac{||z||}{1-||z||} \right) \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\frac{||D^s f(0)(z^s)||}{s!} \right)^2$$

$$\leq ||a||||z||^m + \frac{(1-||a||^2)||z||^N}{1-||z||} = ||a||r^m + \frac{(1-||a||^2)r^N}{1-r},$$

其中 $||a|| = \frac{||D^m f_{(0}\ z_0^m\ ||}{m}\,)(\,)!$ · 通过采用与定理 2.4 证明中类似的论证，我们得到了所需结论。因此，省略细节。至此，定理的证明完成。□

定理 2.6 的证明。 取定 $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 并设 $z_0 = z/||z||$。令 $h_l(\lambda) = f_l(\lambda z_0)$，其中 $\lambda \in \mathbb{D}$，$l = 1, 2, \ldots, n$，容易看出 $h_l \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}})$。根据假设，我们可以将函数 h_l 表示为以下级数形式

$$h_l(\lambda) = b_m \lambda^m + \sum_{s=1}^{\infty} b_{sk+m} \lambda^{sk+m} = \frac{D^m f_l(0)\,(z_0^m)}{m!} \lambda^m + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk+m} f_l(0)\,\left(z_0^{sk+m}\right)}{(sk+m)!} \lambda^{sk+m}.$$

记 $\mu = \lambda^k$。于是可得

$$\omega(\mu) = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \mu^s \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}}) \text{ due to } h_l \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}}).$$

这里 $c_s = b_{sk+m} = \frac{D^{sk+m} f_{l\,(0)}(z_0^{sk+m})}{(sk+m!}$ $s = 1, 2, 3, \ldots$，且 $c_0 = \frac{D^m f_{l\,(0)}(z_0^m)}{m!}$。根据引理 2.2（取 $N = 1$），简单计算可得

$$|c_0||\lambda|^m + \sum_{s=1}^{\infty} |c_s||\lambda|^{ks+m} + \left(\frac{1}{1+|c_0|} + \frac{|\lambda|^k}{1-|\lambda|^k} \right) \sum_{s=1}^{\infty} |c_s|^2 |\lambda|^{2ks+m}$$

$$\leq |\lambda|^m \left(|c_0| + \frac{(1-|c_0|^2)|\lambda|^k}{1-|\lambda|^k} \right)$$

由此得到以下估计

$$\frac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!} |\lambda|^m + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|D^{sk+m} f_l(0)\,\left(z_0^{sk+m}\right)\,|}{(sk+m)!} |\lambda|^{ks+m}$$

$$+ \left(\frac{1}{|\lambda|^m + \dfrac{|D^m f_l(0)\,(z_0^m)\,|}{m!} |\lambda|^m} + \frac{|\lambda|^{k-m}}{1-|\lambda|^k} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{|D^{sk+m} f_l(0)\,\left(z_0^{sk+m}\right)\,|}{(sk+m)!} \right)^2 |\lambda|^{2(ks+m)}$$

$$\leq \left(|C_0||\lambda|^m + \frac{(1-|c_0|^2)|\lambda|^{k+m}}{1-|\lambda|^k} \right), \quad \text{for } l = 1, 2, \ldots, n.$$

令 $|\lambda| = ||z|| = r$ 和 $z = z_0||z||_\circ$ 然后根据最大模原理，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&\frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{||D^{sk+m} f(0)\,\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!} + \left(\frac{1}{||z||^m + \frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{||z||^{k-m}}{1-||z||^k}\right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{||D^{sk+m} f(0)\,\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!}\right)^2 \\
&\leq ||z||^m \left(|c_0| + \left(1-|c_0|^2\right) \frac{||z||^k}{1-||z||^k}\right) \\
&= 1 + \frac{\left(1-|c_0|-|c_0|^2\right)||z||^{m+k} + ||z||^k + |c_0| r^m - 1}{1-||z||^k} \leq 1
\end{aligned}$$

对于 $||z|| = r \leq R_{k,\ m}(|c_0|)$，其中 $R_{k,\ m}(|c_0|)$ 是方程 (2.4) 在 (0, 1) 内的唯一根。下一步是证明常数 $R_{k,\ m}(|c_0|)$ 是最佳的。为此，我们考虑由 f_a 定义的函数

$$f_a(z) = \left(z_1^m \frac{a-z_1^k}{1-az_1^k}, z_2^m \frac{a-z_2^k}{1-az_2^k}, \ldots, z_n^m \frac{a-z_n^k}{1-az_n^k}\right)$$

对于 $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)' \in U^n$ 及 $a \in [0, 1)$。在此情形下，我们假设 $z = (z_1, 0, \ldots, 0)'$，这意味着 $||z|| = |z_1| = r$；根据 Fréchet 导数的定义，我们得到

$$\begin{cases}
\dfrac{||D^{sk+m} f_a(0)\,\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!} = \left|\dfrac{\partial^{sk+m} f_1(0)}{\partial z_1^{sk+m}} \cdot \dfrac{z_1^{sk+m}}{(sk+m)!}\right| \text{ for } k \geq 0 \\
\dfrac{||D^m f_a(0)\,(z^m)\,||}{m!} = \left|\dfrac{\partial^m f_1(0)}{\partial z_1^m} \cdot \dfrac{z_1^m}{m!}\right| \text{ for } s = 0,
\end{cases}$$

其中

$$f_1(z) = z_1^m \left(\frac{a-z_1^k}{1-az_1^k}\right) = az_1^m - \left(1-a^2\right) \sum_{s=1}^{\infty} a^{s-1} z_1^{sk+m}.$$

简单计算可得

$$\frac{||D^m f_a(0)(z^m)||}{m!} = ar^m \text{ and } \frac{||D^{sk+m} f_a(0)\,\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!} = (1-a^2) a^{s-1} r^{sk+m}.$$

由此可见

$$\begin{aligned}
&\frac{||D^m f(0)\,(z^m)\,||}{m!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{||D^{sk+m}f(0)\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!}+\left(\frac{1}{||z||^m+\frac{||D^m f(0)(z^m)||}{m!}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{||z||^{k-m}}{1-||z||^k}\right)\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{||D^{sk+m}f(0)\left(z^{sk+m}\right)||}{(sk+m)!}\right)^2\\
&=ar^m+\left(1-a^2\right)\sum_{s=1}^{\infty}a^{s-1}r^{sk+m}+\left(\frac{r^{-m}}{1+a}+\frac{r^{k-m}}{1-r^k}\right)\left(1-a^2\right)^2\sum_{s=1}^{\infty}a^{2s-2}r^{2sk+2m}\\
&=r^m\left(a+\left(1-a^2\right)\frac{r^k}{1-r^k}\right)
\end{aligned}$$

当且仅当 $r>R_{k,m}(a)$ 时，该值大于 1。这证明了 $R_{k,m}(a)$ 的最佳性，由此定理的证明完成。□

3. 复 Banach 空间中 Bohr 不等式的改进形式

关于复 Banach 空间中的 Bohr 不等式已有一些文献。本节将考察复 Banach 空间中 Bohr现象的改进形式。设 X 和 Y 为复 Banach 空间，$\mathcal{B}_Y$ 为 Y 中的单位球。对于域 $G\subset X$ 和 $\Omega\subset Y$，令 $\mathcal{H}(G,\Omega)$ 表示从 G 到 Ω 的所有全纯函数的集合。任意映射 $f\in\mathcal{H}(G,\Omega)$ 都可以展开为如下级数

$$f(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}D^s f(0)\,(x^s)\,, \tag{3.1}$$

其中 $D^s f(0)$、$s\in\mathbb{N}$ 表示 f 在 0 处的第 s 阶 Fréchet 导数，它是从 $\prod_{i=1}^{s}X$ 到 $\mathbb{C}$ 的有界对称 s 重线性映射。约定 $D^0 f(0)\,(x^0)=f(0)$。若对所有 $z\in\mathbb{D}$ 都有 $zG\subset G$，则称域 $G\subset X$ 为平衡的。给定一个平衡域 G，我们将高维 ***Bohr*** 半径记为 $K_X^G(\Omega)$，它是满足下列条件的最大非负数 r

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|\frac{1}{s!}D^s f(0)\,(x^s)\right|\le d(f(0),\partial\Omega)$$

对所有 $x\in rG$ 以及具有原点处展开式（3.1）的全纯函数 $f\in\mathcal{H}(G,\Omega)$ 均成立。这里，我们将 d 记为 $f(0)$ 与域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 之间的欧几里得距离 。容易看出，经典 Bohr 不等式（1.1）表明 $K_{\mathbb{C}}^G(\mathbb{D})=1/3$. 近年来，研究人员对 Banach 空间上的 Bohr 不等式及其改进版本给予了极大关注。例如，Aizenberg [7] 证明，对于任意平衡域 $G\subset\mathbb{C}^n$，$K_{\mathbb{C}^n}^G(\mathbb{D})\ge 1/3$；并且还证明，当 G 为凸域时，常数 $K_{\mathbb{C}^n}^G(\mathbb{D})=1/3$ 是最佳的。此外，通过对 $f\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$ 施加限制，使得 $f(0)=0$，对于任意平衡域 $G\subset\mathbb{C}^n$，Liu 和 Ponnusamy [46] 将该量改进为 $K_{\mathbb{C}^n}^G(\mathbb{D})\ge 1/\sqrt{2}$，并证明当 G 为凸域时，常数 $K_{\mathbb{C}^n}^G(\mathbb{D})=1/\sqrt{2}$ 是最佳的。此外，

Hamada 等人 [34] 将 Bohr 不等式推广到了 Banach 空间 X 中有界平衡域 G 上的全纯映射 $f \in \mathcal{H}(G, \mathcal{B}_Y)$，其中 $\mathcal{B}_Y$ 是复 Banach 空间 Y中的（齐次）单位球；他们还证明，若 $\mathcal{B}_Y$ 是一个 J^*-代数的单位球，则 Bohr 半径无法进一步改进，即 $K_X^G(\mathbb{D}) = 1/3$ （见 [34, 推论 3.2]）。对于复平面 $\mathbb{C}$中的单连通域 Ω，Bhowmik 和 Das [25, 定理 3]给出了量 $K_X^G(\mathbb{D})$ 的一个下界。此外，文献 [28] 针对复 Banach 空间 X得到了广义 Bohr 半径 $R_{p,\ q}(X)$，其中 $p,\ q \in [1, \infty)$。此外，文献 [28] 研究了量 $R_{p,\ q}(X)$ 的 $n-$变量版本 $R_{p,\ q}^n(X)$，并为无限维复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$确定了 $R_{p,\ q}^n(X)$。近期还出现了许多其他与多维 Bohr 半径相关的结果（见 [7,9,10,18,19,22,28,43,49]及其中的参考文献）。

受 Ali等人 [15] 及 [35, 推论 1], 的研究启发，有人提出了一个关于对称解析函数的问题（见 [36, 问题 1]），本文通过建立以下结果对该问题给出了完整解答。

定理 3.1. [36] 设 $k, m \in \mathbb{N},\ f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{sk+m} z^{sk+m} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$。则

$$\sum_{s=0}^{\infty} |a_{sk+m} z^{sk+m}| \leq 1 \text{ for } r \leq r_{k,m},$$

其中，$r_{k,m}$ 是方程 (2.3) 的最大正根。数值 $r_{k,m}$ 是最佳的。

近期，文献 [19]中针对属于类 $\mathcal{H}(G, \mathbb{D})$ 且具有间隙级数的函数，建立了定理 3.1 的多维推广。结果如下：

定理 3.2. [19] 设 $k, m \in \mathbb{N},\ 0 \leq m \leq k$。假设 G 是复 Banach 空间 X 中的有界平衡域，且 $f \in \mathcal{H}(G, \mathbb{D})$ 具有如下形式：$f(x) = \frac{D^m f_{(0)}(x^m)}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D^{sk+m} f_{(0)}(x^{sk+m})}{(sk+m)!}$。则有

$$\frac{|D^m f(0)\,(x^m)\,|}{m!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|D^{sk+m} f(0)\,\left(x^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!} \leq 1 \text{ for } x \in (r_{k,m})\, G.$$

这里，常数 $r_{k,\ m}$ 是方程 (2.3) 在 (0,1) 中的最大正根。半径 $r_{k,\ m}$ 是最佳的。

为了进一步改进定理 3.2 中的不等式，自然会提出以下问题。

问题 3.1。 我们能否建立定理 1.1 的一个类似结果，使其成为定理 3.2 的尖锐精细化版本?

Ponnusamy 等人 [50] 在 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ 且 $f(0) = 0$ 的情形下，建立了 Bohr 不等式的一个精细化版本。我们回顾他们的结果。

定理 3.3。 假设 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$。那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \left(\frac{1}{1+|a_1|} + \frac{r}{1-r}\right) \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n-1} \leq 1 \ \text{ for } \ r \leq \frac{3}{5}.$$

数值 $3/5$ 是最佳的。

现在，我们给出一个结果，以回答关于类 $\mathcal{H}(G,\Omega)$ 中具有间隙级数的函数的问题 3.1。为了得到最佳估计，我们采用 Liu等人 [48] 近期提出的方法，他们用该方法研究了对称函数 $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 的 Bohr 半径。在最后一节中，我们将证明，应用定理 3.4 有助于我们建立 Bohr 型不等式的多维精细版本，该版本适用于从有界平衡域 G 映射到$\mathbb{D}$的调和函数 f。

定理 3.4。设 $k,m\in\mathbb{N}, 0\leq m\leq k$。假设 G 是复 Banach 空间 X中的有界平衡域，并且 $f\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$ 的形式为 $f(x)=D^m f(0)(x^m)/m!+\sum_{s=1}^{\infty}D^{sk+m}f(0)(x^{sk+m})/(sk+m)!$。则

$$\mathcal{I}^f_{m,k}(r):=\frac{|D^m f(0)\,(x^m)\,|}{m!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(x^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}$$
$$+\left(\frac{1}{r^m+\frac{|D^m f(0)(x^m)|}{m!}}+\frac{r^{k-m}}{1-r^k}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(x^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}\right)^2\leq 1$$

对于 $x\in(R_{k,\,m}(|c_0|))G$，其中 $R_{k,\,m}(|c_0|)$ 是方程 (2.4) 在 (0, 1) 内的最大正根。

作为定理 3.4（对于 $m=0$ 和 $k=1$）的推论，我们得到以下推论，它实际上是推论 3.2] 的精细化版本 [34,。

推论 3.1。设 $f\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$ 的形式为 $f(x)=\sum_{s=0}^{\infty}D^s f_{(0)(x^s)\,s!}$，~~其中 $D^s f(0)$~~、$s\in\mathbb{N}$ 表示 f 在 0 处的 s 阶 Fréchet 导数。则

$$|f(0)|+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^s f(0)\,(x^s)\,|}{s!}+\left(\frac{1}{1+|f(0)|}+\frac{r}{1-r}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^s f(0)\,(x^s)\,|}{s!}\right)^2\leq 1$$

对于 $x\in(1/3)G$。这里，常数 $1/3$ 是最佳的。

现在我们着重为复 Banach 空间 X 中的有界平衡域 G 以及具有间隙级数的 $f\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$ 推导定理 3.3 的一个类比，并得到以下 Bohr 不等式的尖锐精细化版本。

定理 3.5. 设 G 是复 Banach 空间 X 中的有界平衡域，且 $f\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$ 具有以下形式：$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}D^s f_{(0)(x^s)\,s!}$。那么我们有

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^s f(0)(x^s)|}{s!}+\left(\frac{1}{r+\frac{|Df(0)(x)|}{1!}}+\frac{1}{1-r}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^s f(0)(x^s)|}{s!}\right)^2\leq 1 \tag{3.2}$$

对于 $x\in(3/5)G$。常数 $3/5$ 是最佳可能的。

定理 3.4 的证明。任取固定的 $y\in G$，并令 $F(z):=f(zy)$，$z\in\mathbb{D}$。那么显然，$F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是全纯的，且

$$F(z)=\frac{D^m f(0)\,(y^m)}{m!}z^m+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{D^{sk+m}f(0)\left(y^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}z^{sk+m}=z^m g(z^k),$$

其中 $g(z) := c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s z^s \in \mathcal{H}(U,U)$，且

$$c_0 = \frac{D^m f(0)\,(y^m)}{m!} \text{ and } c_s = \frac{D^{sk+m} f(0)\,\left(y^{sk+m}\right)}{(sk+m)!},\ s = 1, 2, \ldots$$

由于 $g \in \mathcal{H}(U,U)$，根据引理 2.2（取 $N = 1$），可得

$$\sum_{s=0}^{\infty} |c_s||z|^{zk} + \left(\frac{1}{1+|c_0|} + \frac{|z|^k}{1-|z|^k}\right) \sum_{s=1}^{\infty} |c_s|^2 |z|^{2sk} \leq |c_0| + \left(1 - |c_0|^2\right) \frac{|z|^k}{1-|z|^k}$$

将两边乘以 $|z|^m$，并代入 c_s 的值，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{\infty} \frac{|D^{sk+m} f(0)\,\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!} |z|^{sk+m} \\
&\quad + \left(\frac{1}{|z|^m + \frac{|D^m f(0)(y^m)|}{m!}|z|^m} + \frac{|z|^{k-m}}{1-|z|^k}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{|D^{sk+m} f(0)\,\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}\right)^2 |z|^{2sk+2m} \\
&\leq |z|^m |c_0| + \left(1 - |c_0|^2\right) \frac{|z|^{k+m}}{1-|z|^k} \\
&= 1 + \frac{\left(\left(1 - |c_0| - |c_0|^2\right)\right) |z|^{m+k} + |z|^k + |c_0||z|^m - 1}{1-|z|^k}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $|z| = r$ 和 $x = y|z|$ 的情形，不等式 $\mathcal{I}_{m,k}^f(r) \leq 1$ 对 $x \in (R_{k,m}(|c_0|))\,G$ 成立，其中 $R_{k,m}(|c_0|)$ 是方程 (2.4) 在 (0, 1) 中的最大正根。

为证明常数 $R_{k,m}(|c_0|)$ 不可改进，我们采用与证明 [19] 和 [34] 时类似的方法。我们证明，对于 $x \in r_0 G$，不等式 $\mathcal{I}_{m,k}^f(r) \leq 1$ 不成立，其中 $r_0 \in (R_{k,m}(|c_0|), 1)$。众所周知，存在一个 $c \in (0,1)$ 和 $\gamma \in \partial G$，使得 $cr_0 > R_{k,m}(|c_0|)$ 且 $c\sup\{||x||\colon x \in \partial G\} < ||\gamma||$。考虑定义在 G 上的函数 h：

$$h(x) := W\left(\frac{c\Psi_\gamma(x)}{||\gamma||}\right) \text{ and } W(z) := z^m \left(\frac{a - z^k}{1 - az^k}\right),$$

其中，Ψ_γ 是 X 上的有界线性泛函，满足 $\Psi_\gamma(\gamma) = ||\gamma||, ||\Psi_\gamma|| = 1$，且$a \in [0,1)$。容易验证，$c\Psi_\gamma(x)/||\gamma|| \in \mathbb{D}$，且 $h \in \mathcal{H}(G,\mathbb{D})$。取$x = r_0\gamma$，可得

$$h(r_0\gamma) = (cr_0)^m \left(\frac{a - (cr_0)^k}{1 - a\,(cr_0)^k}\right) = (cr_0)^m \left(a - \left(1 - a^2\right) \sum_{s=1}^{\infty} a^{s-1}\,(cr_0)^{sk}\right).$$

因此，经过繁琐的计算可得

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}(cr_0)^{sk+m}$$
$$+\left(\frac{1}{(cr_0)^m+\frac{|D^mf(0)(y^m)|}{m!}(cr_0)^m}+\frac{(cr_0)^{k-m}}{1-(cr_0)^k}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}\right)^2(cr_0)^{2sk+2m}$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}(cr_0)^{sk+m}$$
$$+\left(\frac{1}{1+\frac{|D^mf(0)(y^m)|}{m!}}+\frac{(cr_0)^k}{1-(cr_0)^k}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{sk+m}f(0)\left(y^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}\right)^2(cr_0)^{2sk+m}$$
$$=(cr_0)^m a+\left(1-a^2\right)\sum_{s=1}^{\infty}a^{s-1}(cr_0)^{sk+m}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{(cr_0)^k}{1-(cr_0)^k}\right)\left(1-a^2\right)^2\sum_{s=1}^{\infty}a^{2s-2}(cr_0)^{2ks+m}$$
$$=(cr_0)^m\left(a+\left(1-a^2\right)\frac{(cr_0)^k}{1-(cr_0)^k}\right)$$
$$=1+\frac{\left((1-a-a^2)(cr_0)^{m+k}+(cr_0)^k+a(cr_0)^m-1\right)}{1-(cr_0)k}>1.$$

这表明常数 $R_{k,m}(|c_0|)$ 无法进一步改进。 □

定理 3.5 的证明。设任取固定的 $y\in G$，并令 $F(z):=f(zy)$，其中 $z\in\mathbb{D}$。那么容易看出，$F\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是全纯的，且

$$F(z)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{D^sf(0)(y^s)}{s!}z^s=\sum_{s=1}^{\infty}b_sz^s=:\varphi(z),$$

其中 $b_s=\frac{D^sf_{(0)(y^s)}}{s!}$当 s=1, 2, . . . 时，且 $\varphi(z)=z\sum_{s=1}^{\infty}b_sz^{s-1}=z\sum_{s=0}^{\infty}B_sz^s$，其中 $B_s:=b_{s+1}$当 $s=0,1,2,\ldots$时。显然，$\sum_{s=0}^{\infty}B_sz^s\in\mathcal{H}(\mathbb{D},\overline{\mathbb{D}})$。根据引理 2.2（取 $N=1$），必有

$$\sum_{s=0}^{\infty}|B_s||z|^s+\left(\frac{1}{1+|B_0|}+\frac{|z|}{1-|z|}\right)\sum_{s=1}^{\infty}|B_s|^2|z|^{2s}\le|B_0|+\left(1-|B_0|^2\right)\frac{|z|}{1-|z|}$$

这意味着

$$\sum_{s=0}^{\infty}|b_{s+1}||z|^s+\left(\frac{1}{1+|b_1|}+\frac{|z|}{1-|z|}\right)\sum_{s=1}^{\infty}|b_{s+1}|^2|z|^{2s}\le|B_0|+\left(1-|B_0|^2\right)\frac{|z|}{1-|z|}.$$

事实上，我们有

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^{s+1}f(0)(y^{s+1})|}{(s+1)!}|z|^s+\left(\frac{1}{1+\frac{|Df(0)(y)|}{1!}}+\frac{|z|}{1-|z|}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{s+1}f(0)(y^{s+1})|}{(s+1)!}\right)^2|z|^{2s}$$
$$\le|B_0|+\left(1-|B_0|^2\right)\frac{|z|}{1-|z|}.$$

两边同乘 $|z|$ 后，上述不等式可写成如下形式

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^{s+1}f(0)(y^{s+1})|}{(s+1)!}|z|^{s+1}+\left(\frac{|z|^2}{|z|+\frac{|Df(0)(y)|}{1!}|z|}+\frac{|z|^2}{1-|z|}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{s+1}f(0)(y^{s+1})|}{(s+1)!}\right)^2|z|^{2s+1}$$
$$\leq |B_0||z|+\left(1-|B_0|^2\right)\frac{|z|^2}{1-|z|}.$$

令 $|z|=r$ 和 $x=y|z|$，即可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|D^{s+1}f(0)(x^{s+1})|}{(s+1)!}+\left(\frac{1}{r+\frac{|Df(0)(x)|}{1!}}+\frac{1}{1-r}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{|D^{s+1}f(0)(x^{s+1})|}{(s+1)!}\right)^2\\&\leq |B_0|r+\left(1-|B_0|^2\right)\frac{r^2}{1-r}\\&\leq 1+\frac{J(|B_0|)}{1-r},\end{aligned}$$

其中 $J(t):=-1+r+tr(1-r)+(1-t^2)r^2$。因此，当 $J(t)\leq 0$ 对 $t\leq 3/5$ 成立时，所需的不等式成立。容易证明，$J(t)$ 在 $t_0=(1-r)/2r$ 处有一个临界点，且 $J(t)$ 在 t_0 处取得最大值。由此可得

$$J(t)\leq J(t_0)=\frac{(5r-3)(r+1)}{4}\leq 0 \text{ for } r\leq\frac{3}{5}.$$

因此，所需的不等式得证。

最后，我们证明不等式（3.2）对 $x\in r_0G$ 不成立，其中 $r_0\in(3/5,1)$。众所周知，存在 $c\in(0,1)$ 和 $\gamma\in\partial G$，使得 $cr_0>3/5$ 且 $c\sup\{||x||:x\in\partial G\}\leq||\gamma||$。现在，我们考虑定义在 G 上的函数 h，其定义为

$$h(x):=\omega\left(\frac{c\Psi_\gamma(x)}{||\gamma||}\right)\text{ and }\omega(z):=z\left(\frac{a-z}{1-az}\right),$$

其中，Ψ_γ 是 X 上的有界线性泛函，满足 $\Psi_\gamma(\gamma)=||\gamma||, ||\Psi_\gamma||=1$，且 $a\in[0,1)$。容易验证，$c\Psi_\gamma(x)/||\gamma||\in\mathbb{D}$，且 $h\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$。取 $x=r_0\gamma$，得到

$$h(r_0\gamma)=(cr_0)\left(\frac{a-(cr_0)}{1-a(cr_0)}\right)=a(cr_0)-\left(1-a^2\right)\sum_{s=1}^{\infty}a^{s-1}(cr_0)^{s+1}.$$

经过常规计算可得

$$
\begin{aligned}
&|D^s h(0)(y)|(cr_0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|D^s h(0)(y^s)|}{s!}(cs_0)^s \\
&\quad + \left(\frac{1}{cr_0 + a(cr_0)} + \frac{1}{1 - cr_0}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{|D^s h(0)(y^s)|}{s!}(cs_0)^s\right)^2 \\
&= a(cr_0) + \left(1 - a^2\right) \sum_{s=2}^{\infty} a^{s-2}(cr_0)^s + \left(\frac{1}{cr_0 + a(cr_0)} + \frac{1}{1 - (cr_0)}\right) \sum_{s=2}^{\infty} \left(1 - a^2\right)^2 a^{2s-4}(cr_0)^{2s} \\
&= a(cr_0) + \left(1 - a^2\right) \frac{(cr_0)^2}{1 - a(cr_0)} \\
&> 1.
\end{aligned}
$$

这表明常数 $3/5$ 是最佳的。 □

3.1. 平衡域中调和函数的精细 Bohr 不等式。调和映射的方法已应用于流体流动问题的研究与求解（见 [14, 26]）。例如，2012年，Aleman 和 Constantin [14] 建立了调和映射与理想流体流动之间的联系。事实上，Aleman 和 Constantin 开发了一种巧妙的方法，利用单叶调和映射求解不可压缩二维 Euler 方程（详情见 [26] ）。

复值函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 若其 u 和 v 均满足拉普拉斯方程 $\bigtriangledown^2 u = 0$ 和 $\bigtriangledown^2 v = 0$，则称其在 U 中为调和函数，其中

$$\bigtriangledown^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

众所周知，在假设 $g(0) = 0$的条件下，调和函数f 具有唯一的典范表示 $f = h + \overline{g}$，其中 h 和 g 分别是 U中的解析函数，称为 f的解析部分和共解析部分。若进一步f 是单叶的，则称 f 在域 Ω 上是单叶调和函数。局部单叶调和映射 $f = h + \overline{g}$ 在其雅可比行列式$J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)| = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$对于 $z \in U$时是保向的。

2010年，Abu-Muhanna [6] 首次研究了定义在 U 中的复值调和函数类 $f = h + \bar{g}$ 的 Bohr 半径，其中 $|f(z)| < 1$ 对所有$z \in U.$ 成立。此后，Kayumov 等人 [37] 研究了局部单叶调和映射的 Bohr 半径；Liu 和 Ponnusamy [45]确定了k-拟共形调和映射的 Bohr 半径；Evdoridis 等人 [32] 研究了局部单叶调和映射的 Bohr 不等式的一个改进版本；Ahamed [1, 3]研究了若干类调和映射的改进 Bohr-Rogosinski 不等式。最近，Arora [19] 研究了复 Banach 空间中具有间隙级数的调和函数的 Bohr 型不等式。

定义在有界平衡域 G 上、取值于 $\mathbb{D}$的调和映射 $f=h+\bar{g}$ 可表示为间隙级数:

$$f(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D^{sk+m}h(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}+\overline{\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D^{sk+m}g(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}}, \tag{3.3}$$

其中 h 和 g 属于 $\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$。文献 [19] 中证明了

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{|D^{sk+m}h(0)\left(x^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}+\frac{|D^{sk+m}g(0)\left(x^{sk+m}\right)|}{(sk+m)!}\right)\leq 2 \tag{3.4}$$

对于 $x\in(r_{k,\ m})G$，其中 $r_{k,\ m}$ 是方程 (2.3) 的最大正根，且半径 $r_{k,\ m}$ 是最佳的。

鉴于上述观察，自然会提出这样的问题：我们能否得到调和函数 f从有界平衡域 G 映射到 $\mathbb{D}$上的 ***Bohr*** 型不等式的多维精细版本？我们通过建立以下最佳结果，对 (3.4) 的一个精细版本进行了考察，从而对这一问题给出了肯定的回答。

定理 3.6。设 G 是复 Banach 空间 X 中的有界域。假设 k、$m\in\mathbb{N}$ 满足 $0\leq m\leq k$，且 $f=h+\bar{g}$ 是调和函数，其从 G 映射到 $\mathbb{D}$，并由 (3.3) 给出。则不等式 $A_h(x)+A_g(x)\leq 2$ 对 $x\in(R_{m,\ k}(|c_0|))G$ 成立，其中 $R_{m,\ k}(|c_0|)$ 是方程 (2.4) 在 (0, 1) 内的最大根，我们定义

$$\begin{aligned}A_V(x):=&\sum_{s=0}^{\infty}\left|\frac{D^{sk+m}V(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}\right|\\&+\left(\frac{1}{r^m+\frac{|D^mV(0)(x^m)|}{m!}}+\frac{r^{k-m}}{1-r^k}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\left|\frac{D^{sk+m}V(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}\right|\right)^2\end{aligned}$$

当 $V=h,g$ 时。半径 $R_{m,k}(|c_0|)$ 是最佳可能的。

定理 3.6 的证明。 根据假设， $f=h+\bar{g}$且 $h,g\in\mathcal{H}(G,\mathbb{D})$。因此，将定理 3.4 应用于函数

$$h(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D^{sk+m}h(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!}\text{ and }g(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D^{sk+m}g(0)\left(x^{sk+m}\right)}{(sk+m)!},$$

我们很容易得到，对于 $x\in(R_{m,k}(|c_0|))G$，有 $A_h(x)\leq 1$ 且 $A_g(x)\leq 1$，其中 $R_{m,k}(|c_0|)$ 是方程 (2.4) 在 (0, 1) 内的最大根。将这两个不等式相加可得

$$A_h(x)+A_g(x)\leq 2\text{ for }x\in(R_{m,k}(|c_0|))G.$$

显然，所需的不等式已经成立。接下来，为了证明常数$R_{m,\ k}(|c_0|)$是最佳的，我们采用与定理 3.4 的证明中类似的论证。以下我们考虑上例中给出的函数 $h(r_0\gamma)$

其中 r_0、 c 和 γ的取值相同。因此，对于 $|\lambda| = 1$，不难看出

$$h(r_0\gamma) + \overline{\lambda h(r_0\gamma)} = (1+\bar{\lambda})(cr_0)^m \left(a - \left(1-a^2\right) \sum_{s=0}^{\infty} a^{s-1} (cr_0)^{sk} \right).$$

因此，经过简单计算可得

$$\begin{aligned} A_h(x) + A_g(x) =& 2(cr_0)^m \left(a + \left(1-a^2\right) \sum_{s=0}^{\infty} a^{s-1} (cr_0)^{sk} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{1+a} + \frac{(cr_0)^k}{1-(cr_0)^k} \right) \frac{(1-a^2)^2 (cr_0)^2}{1-a^2(cr_0)^{2k}} \right) > 2 \end{aligned}$$

由此可知，常数 $R_{m,k}(|c_0|)$ 是最佳的。事实上，在定理 3.4 的证明中用于证明最佳性部分的论证，也可以证明右侧的最后一个不等式。□

致谢： 作者谨向匿名审稿人表示感谢，感谢他们提出详尽的意见和建议，这些意见和建议将显著改善本文的呈现。

伦理标准遵循情况

利益冲突 作者声明，就本文的发表而言，不存在利益冲突。

数据可用性声明 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] M. B. Ahamed, 《某类近凸调和映射的 Bohr–Rogosinski 半径》, *Comput. Methods Funct. Theory* (2022)。https://doi.org/10.1007/s40315- 022-00444-6。[2] M. B. Ahamed 和 S. Ahammed, 《单位圆盘上自解析映射类的 Bohr 型不等式》, *Comput. Methods Funct. Theory* (2023)。https://doi.org/10.1007/s40315- 023-00482-8。[3]M. B. Ahamed, 《某些调和映射类的尖锐精化 Bohr–Rogosinski 不等式》, *Complex Var.Elliptic Equ.* (2022)。https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2155636[4] M. B. Ahamed 和 V. Allu, 《某些调和映射类的 Bohr 现象》, *Rocky Mountain J. Math.* **52**(4): 1205-1225 (2022年8月)。DOI: 10.1216/rmj.2022.52.1205。[5] M. B. Ahamed、V. Allu 和 H. Halder, 《平移圆盘上解析函数的 Bohr 现象》, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 47(2022年)。103-120。[6] Y. Abu-Muhanna, 《从属关系与有界调和类中的 Bohr 现象》, *Complex Var. Elliptic Equ.* **55** (2010年), 1071–1078。[7] L. Aizenberg, 《Bohr 幂级数定理的多维类比》, *Proc. Amer.Math. Soc.* **128** (2000), 1147-1155。[8] L. Aizenberg、A. Aytuna 和 P. Djakov, 《多复变量全纯函数空间中基的 Bohr 定理推广》, *J. Math. Anal. Appl.* **258**(2001), 429–447。[9] L. Aizenberg、A. Aytuna 和 P. Djakov, 《Bohr 现象的抽象方法》, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (9) (2000), 2611–2619。

[10] L. Aizenberg 和 N. Tarkhanov, 《椭圆方程中的 Bohr 现象》, Proc. London Math. Soc. 82 (2)(2001), 385-401。[11] S. A. Alkhaleefah、I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《关于具有固定零系数的 Bohr 不等式》, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (12) (2019), 5263-5274。[12] R. M. Ali、Z. Abdulhadi 和 Z.C. NG, 《星形对数调和映射的 Bohr 半径》, Complex Var. Elliptic Equ. 61(1), 1-14 (2016)。[13] R. M. Ali、Y. Abu-Muhanna、S. Ponnusamy、N.K. Govil 等（编）, 《逼近理论与应用复分析进展》, Springer 优化及其应用丛书, 第117卷 (2016), 第265-295页。[14] A. Aleman 和 A. Constantin, 《调和映射与理想流体流动》, Arch. Ration. Mech. Anal. 204 (2012), 479–513。[15] R. M. Ali、R. W. Barnard 和 A. Yu. Solynin, 《关于幂级数 Bohr 现象的一则注记》, J. Math. Anal. Appl. 449(1)(2017), 154-167。[16] V. Allu 和 V. Arora, 《凹单叶函数的 Bohr-Rogosinski 型不等式》, J. Math. Anal. Appl.(2022) 126845。[17] V. Allu 和 H. Halder, 《多维 Bohr 不等式的算子值类比》, Canadian Math. Bull. (2022)。[18] V. Allu、H. Halder 和 S. Pal, 《算子值全纯函数的 Bohr 与 Rogosinski 不等式》, 《数学科学通报》182(2023), 103214。[19]V. Arora, 《复 Banach 空间中具有空隙级数的全纯函数与调和函数的 Bohr 现象》, Complex Var. Elliptic Equ. (2022), https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2146106[20] A. Aytuna 和 P. Djakov, 《整函数空间中基的 Bohr 性质及其推广》, Bull. London Math. Soc. 45(2)(2013), 411-420。[21] C. B ´En ´Eteau、A. Dahlner 和 D. Khavinson, 《关于 Bohr 现象的评论》, Comput. Methods Funct. Theory 4 (2004), 1–19。[22] o. Blasco, 《Banach 空间的 p-Bohr 半径》, Collect. Math. 68(2017), 87–100。[23] H. P. Boas 和 D. Khavinson, 《多变量中的 Bohr 幂级数定理》, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2975–2979。[24] H. Bohr, 《一个关于幂级数的定理》, 《伦敦数学学会会刊》s2-13 (1914), 1–5。[25] B.Bhowmik 和 N. Das, 《高维全纯函数的 Bohr 半径及其渐近值》, 巴黎科学院数学学报。2021;359:911–918。[26] A. Constantin 和 M. J. Martin, 《流体流动的调和映射方法》, Math. Ann. 369 (2017), 1–16。[27] N. Das, 《Bohr 与 Rogosinski 现象的改进》, J. Math. Anal. Appl. 508(1) (2022), 125847。[28] N. Das, 《一维及高维广义 Bohr 半径的估计》, Canad Math. Bull. (2022), 1-18, https://doi.org/10.4153/S0008439522000674。[29] A. Defant 和 L. Frerick, 《多维 Bohr 半径的对数下界》, Israel J. Math 152(2006), 17-28。[30] P. G. Dixon, 《满足非含幺 von Neumann 不等式的 Banach 代数》, Bull. London Math. Soc. 27(4)(1995), 359–362。[31] S. Evdoridis、S. Ponnusamy 和 A. Rasila, 《平移圆盘上 Bohr 不等式的改进》, 《数学结果》(2021) 76:14。[32] S. Evdoridis、S. Ponnusamy 和 A. Rasila, 《局部单叶调和映射的 Bohr 不等式改进》, Indagationes Math.30(2019) 201-213。[33] D. Galicer、M. Mansilla 和 S. Muro, 《多变量中的混合 Bohr 半径》, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 777-796。[34] H. Hamada、T. Honda 和 G. Kohr, 《取值于齐性球的全纯映射的 Bohr 定理》, Israel jour. Math (2009) 173 177-187。[35] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《奇解析函数的 Bohr 不等式》, Comput. Methods Funct

[36] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，间隙级数解析函数与调和函数的 Bohr 不等式，J. Math. Anal. Appl. 465(2018)，857-871。[37] I. R. Kayumov、S. Ponnusamy 和 N. S hakirov，局部单叶调和映射的 Bohr 半径，Math. Nachri. DOI: 10.1002/mana.201700068。[38] I. R. Kayumov、D. M. Khammatova 和 S. Ponnusamy，解析函数的 Bohr-Rogosinski现象与 Cesàro算子，J. Math. Anal. Appl. 496 (2021)，124824。[39] G. Kresin 和 V. Maz'ya，《尖锐实部定理：统一方法》，T. Shaposhnikova 从俄文译出并编辑，数学讲义，第1903卷，施普林格出版社，柏林，2007年。[40]S. Kumar，关于多维Bohr半径，Proc Amer Math Soc, DOI: 10.1090/proc/16280。[41] S. Kumar 和 R. Manna，重新探讨多维Bohr半径，J. Math. Anal. Appl. 523(2023)，127023。[42] S. Lata 和 D. Singh，非交换Hardy空间上的 Bohr 不等式，Proc. Amer. Math. Soc. 150(1) (2022)，201-211。[43] R. Lin、M. Liu 和 S. Ponnusamy，多复变量中具有间隙级数的全纯映射的 Bohr 型不等式，《数学科学学报》43 (2023)，63-79。[44] X. Liu 和 T-S Liu，多复变量中具有间隙级数的全纯映射的 Bohr 不等式，J. Math. Anal. Appl. 485 (2020) 123844。[45] z. Liu 和 S. Ponnusamy，从属及 K-拟共形调和映射的 Bohr 半径，《马来西亚数学科学学会通报》42,(2019)，2151–2168。[46] M-S. Liu 和 S. Ponnusamy，精细Bohr不等式的多维类比，Proc. Amer. Math. Soc. 149(5), (2021), 2133-2146。[47]M-S. Liu、S. Ponnusamy 和 J. Wang，拟从属类及 K-拟正规调和映射类中的 Bohr现象，RACSAM 149(5), (2020), 114:115。[48] G. Liu、Z. Liu 和 S. Ponnusamy，有界解析函数的精细 Bohr 不等式，《数学科学通报》 173 (2021)，103054。[49] V. I. Paulsen 、 G. Popescu 和 D. Singh，关于 Bohr 不等式 Proc. Lond. Math.Soc. 85(2)，493-512 (2002)。[50] S. Ponnusamy、R. Vijayakumar 和 K-J. Wirths，模为1的有界函数系数的新不等式，《数学结果》(2020) 75: Art 107[51] S. Ponnusamy、R. Vijayakumar 和 K.-J. Wirths，拟从属类中改进的 Bohr现象，J. Math. Anal. Appl. 506 (1) (2022)，125645。

Sabir Ahammed，贾达普大学数学系，加尔各答-700032 ,
西孟加拉邦，印度。电子邮箱：
sabira.math.rs@jadavpuruniversity.in

MollaBasir Ahamed，贾达普大学数学系，加尔各答- 700032，西孟加拉邦，印度。电子邮箱：mbahamed.math@jadavpuruniversity.in