arXiv:2303.08912v1 [cs.CE] 15 Mar 2023

刚体与可变形物体间摩擦接触的凸优化公式

Xuchen Han、Joseph Masterjohn、Alejandro Castro

摘要——我们提出了一种新颖的凸形式，用于对通过摩擦接触耦合的刚体与可变形体进行建模。该公式引入了一种新的共旋材料模型，其海森矩阵为半正定，使我们能够将先前关于柔顺接触凸形式的工作扩展到物体的大变形建模。我们严格刻画了所作近似，并介绍了实现细节。凭借经证明的全局收敛性、有效的热启动能力、采用大时间步长的能力以及专用的稀疏代数方法，我们的方法能够以交互速率稳健运行。我们提供了针对机器人应用相关的高难度仿真的验证结果和性能指标。我们的方法已通过开源机器人学工具包 Drake 发布。

I. 引言

机器人学正处于新时代的前沿。机器学习、计算能力和制造技术的尖端进步，正在不断突破硬件设计、传感、建模和控制的极限。

软体机器人系统 [1]，可变形物体操作能力 [2],以及基于视觉的触觉传感器 [3], [4] 的发展，为机器人应用在受控的工业环境和非结构化的家庭环境中开辟了新的可能性。然而，这些新系统在建模和仿真方面带来了挑战，尤其是在机器人仿真器传统的刚体假设不再成立时 [2], [5]。一项主要挑战是需要能够处理通过摩擦接触相互作用的刚体与可变形物体的统一仿真器 [2]。尽管面临这些挑战，机器人学领域仍有巨大的发展和创新潜力，而面向机器人应用开发开源仿真能力，可能在推动该领域进步方面发挥关键作用。

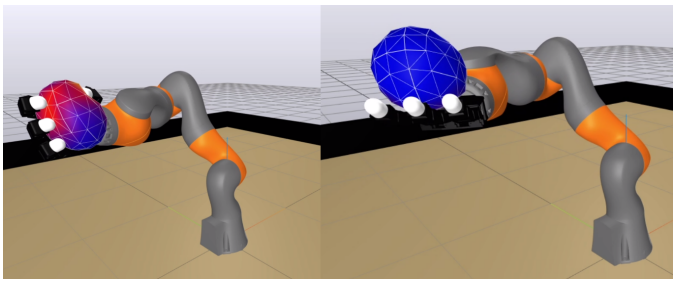


图 1：远程操作机器人抓取可变形球的仿真（参见补充视频）。以应变着色的等值线展示了球体的变形状态。我们的方法能够求解刚性手部与可变形球之间的摩擦接触，从而以交互速率实现稳固抓取。

所有作者均供职于美国丰田研究院，
firstname.lastname@tri.global。

II. 相关工作

有限元领域的早期研究聚焦于方法的数学形式和模型保真度，以准确计算接触表面处的应力与变形。节点-线段方法 [6], [7][8]通过约束接触来确保接触体表面上的节点不会穿透其对应的目标线段（在三维空间中则为面片）。双遍方法通过反转接触体表面与目标表面的角色来重复这一过程 [9]。然而，这些方法被证明缺乏稳健性，并会因过约束而导致锁死。为了解决这些问题，摩擦形式 [10] 被引入接触的线段-线段方法中 [11], [12]。

计算机图形学领域为此作出了重要贡献，尤其是在高性能视觉逼真仿真方法方面。投影高斯-赛德尔（PGS）的变体 [13], [14]广受欢迎，因为它们易于并行化。然而，由于收敛问题，这些方法缺乏鲁棒性 [15]。为提高鲁棒性，研究者开发了基于优化的求解器 [16], [17], [18]。能够从翻转中恢复的单元 [19], [20], [21] 以及共旋模型 [22], [23] 的相关研究，进一步增强了这些公式在大变形情况下的鲁棒性。

带摩擦接触的多体动力学问题因解的非光滑性而变得复杂。解的不存在 [24],指数级最坏情况复杂度 [25], 和 NP难 [16] 促使该领域开始寻求其他公式。为提高计算的可处理性，Anitescu提出了接触问题的凸近似[26]。为获得具有唯一解的严格凸表述，[27] 引入了正则化。文献 [28] 提出了一种柔顺接触的凸形式，随后在文献 [29]中扩展为允许连续表面片。

有多种开源软件支持可变形物体建模。MuJoCo [30] 将可变形体仿真为由弹簧阻尼器连接的一组刚体。Chrono [31] 和 Siconos [32] 实现了有限元法（FEM），但主要面向大规模应用，例如颗粒介质仿真。Bullet[33] 和 PhysX [34] 等游戏引擎在强化学习中广受欢迎。SOFA [35],最初为虚拟现实而设计，也已成功应用于软体机器人项目。

III. 概述与创新贡献

据作者所知，本研究首次提出了一种凸形式，用于对发生大变形的物体进行建模，并通过摩擦接触和完整约束将其与铰接刚体耦合。

我们的贡献包括以下几个方面。我们在第 V-B 节提出了一种新颖的、大变形线性共旋模型，其海森矩阵为半正定。第 VI 节使用该模型，将我们此前关于柔顺接触凸形式的研究扩展到可变形体建模。第 VI-A 节和第 VI-B 节介绍了如何利用稀疏性，并在乔列斯基分解中重用中间计算结果，从而构建规模小得多的接触问题。第 VII 节给出了与机器人学相关的验证和仿真结果，并报告了性能指标。最后，作为开源机器人学工具包 Drake [36], 的一部分，我们实现了该方法，并进行了详尽测试和全面文档编写。

IV. 数学公式

我们的系统状态由广义位置$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ 和广义速度 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$ 描述，其中 n_q和 n_v 分别表示广义位置和广义速度的总数。构型的时间导数通过 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}(\mathbf{q})\mathbf{v}$与广义速度相关联，其中$\mathbf{N}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_v}$ 为运动学映射。具体而言，我们使用关节坐标描述铰接刚体，并使用有限元法对可变形体进行空间离散化。因此，对于可变形物体，$\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别是网格顶点的位置和速度堆叠而成的向量，运动学映射 $\mathbf{N}$ 为单位矩阵。

A. 约束运动学

我们考虑 n_c 约束，这些约束在速度层面由约束速度 $\mathbf{v}_{c,i} \in \mathbb{R}^{r_i}$ 描述，其中 r_i 表示第 i 个约束的方程数。对于接触约束，$\mathbf{v}_{c,i}$对应于第 i 个接触对的相对速度向量，且 $r_i = 3$，见 [28]。对于由 $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}, t) = 0$描述的完整约束，$\mathbf{v}_{c,i} = d\mathbf{g}_i/dt$。我们可以用系统的广义速度（包括刚体和可变形物体的自由度）表示约束速度：$\mathbf{v}_{c,i} = \mathbf{J}_i\mathbf{v} + \boldsymbol{b}_i$，其中 $\mathbf{J}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_i = \partial \mathbf{g}_i/\partial t$ 分别为雅可比矩阵和偏置项。汇总所有约束后，我们将堆叠的约束速度定义为 $\mathbf{v}_c = \mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{b}$，其大小为 $r = \sum r_i$，其中 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{b}$ 分别是所有约束对应的堆叠雅可比矩阵和偏置项。

B. 离散时间步进方案

我们严格遵循 [28] 中的方案和记号。我们将时间离散为大小固定的时间间隔 δt，以便将系统状态从时间 t_n 推进到下一步 $t_{n+1} = t_n + \delta t$。为简化记号，我们用下标 0 表示时刻 t_n 的量，而时刻 t_{n+1}的量则不使用额外下标。我们按照标准的 θ-方法，使用标量参数 θ 和 $\theta_{vq} \in [0, 1]$，定义在中间时间步 $t^\theta = \theta t^{n+1} + (1-\theta)t^n$ 处求得的量。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}^\theta &\stackrel{\text{def}}{=} \theta\mathbf{q} + (1-\theta)\mathbf{q}_0, \\
\mathbf{v}^\theta &\stackrel{\text{def}}{=} \theta\mathbf{v} + (1-\theta)\mathbf{v}_0, \\
\mathbf{v}^{\theta_{vq}} &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_{vq}\mathbf{v} + (1-\theta_{vq})\mathbf{v}_0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

这样我们就可以在同一公式中纳入后向欧拉法（$\theta = \theta_{vq} = 1$）、辛欧拉法（$\theta = 0, \theta_{vq} = 1$）以及二阶中点法则（$\theta = \theta_{vq} = 1/2$）。利用这些定义，我们可以在统一框架下写出刚体与可变形体的受约束动力学，如下所示

$$
\mathbf{M}(\mathbf{q}^\theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \delta t\, \mathbf{k}(\mathbf{q}^\theta, \mathbf{v}^\theta) + \mathbf{J}(\mathbf{q}_0)^T\boldsymbol{\gamma}, \tag{2}
$$

$$
\mathcal{C} \ni \boldsymbol{\gamma} \perp \mathbf{v}_c - \hat{\mathbf{v}}_c \in \mathcal{C}^*, \tag{3}
$$

$$
\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \delta t \mathbf{N}(\mathbf{q}^\theta)\mathbf{v}^{\theta_{vq}}. \tag{4}
$$

式 (2) 汇总了刚体和可变形体自由度的动量方程。对于每个具有 n_{v_b} 个自由度的铰接刚体和可变形物体，我们用 $\mathbf{M}_b$ 表示其质量矩阵，并用 $\mathbf{k}_b$ 表示铰接刚体的外力和陀螺项 [28]，以及可变形体的内力。我们用 $\mathbf{M}$ 表示以 $\mathbf{M}_b$ 为对角块的块对角矩阵，并用 $\mathbf{k}$ 表示所有物体的 $\mathbf{k}_b$ 堆叠而成的向量。当约束冲量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不为零时，刚体和可变形体的自由度通过约束雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{q}_0)$ 耦合。遵循 [37],, 式 (3) 同时表示完整约束和接触约束的凸近似。凸集 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_{n_c}$ 是各集合 $\mathcal{C}_i$ 的笛卡尔积，其中 i 表示第 i 个约束。对于接触约束，$\mathcal{C}_i$ 对应于该接触的摩擦锥 $\mathcal{F}_i$ [28]。对于双边完整约束，$\mathcal{C}_i = \mathbb{R}^{r_i}$ 和冲量可以取任意实数。$\mathcal{C}$ 的对偶记作 $\mathcal{C}^*$。对于接触约束，$\hat{\mathbf{v}}_{c,i}$ 编码了前一时间步的接触距离信息，详情见 [28] 。对于完整约束，$\hat{\mathbf{v}}_{c,i} = -\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_0)/\delta t$，其中 $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_0)$ 是前一时间步的约束误差 [37]。最后，式 (4) 是按照 θ-方法进行的位置更新。

接下来我们讨论可变形体的建模，并请读者参阅 [28] , 了解铰接刚体的处理细节。

V. 可变形体建模

这里我们描述单个可变形物体的运动方程，并为简洁起见，省略 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{k}$ 的 b 下标。

A. 预备知识

我们采用一种标准的连续介质力学公式，并通过有限元法离散。我们将简要介绍，以提供背景并引入符号，同时请读者参阅 [38], [39] 了解更多细节。在此框架下，我们描述本研究特有的选择。

模型的运动学由拉格朗日描述映射 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t)$ 完全确定，该映射描述固体中材料点的当前位置如何随其参考位置 $\boldsymbol{X}$ 和时间 t变化。我们考虑采用能量密度函数 $\Psi(\mathbf{F}(\boldsymbol{X}))$ 建模的超弹性固体，其中 $\mathbf{F} = \partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{X}$ 为变形梯度。整个固体的弹性势能为

$$
E = \int \Psi(\mathbf{F}(\boldsymbol{X}))d\boldsymbol{X},
$$

由此产生弹性力$\mathbf{f}_e = -\partial E/\partial\mathbf{q}$。刚度矩阵定义为$\mathbf{K} = -\partial \mathbf{f}_e/\partial\mathbf{q}$。我们采用 Rayleigh

阻尼模型

$$\mathbf{f}_d(\mathbf{v}) = -\left(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}\right)\mathbf{v}, \tag{5}$$

其中，α 和 β 是瑞利阻尼系数，$\mathbf{M}$ 是有限元法离散化所得的质量矩阵。根据这些内力，式（2）中的$\mathbf{k}$可写为

$$\mathbf{k}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}_e(\mathbf{q}^\theta(\mathbf{v})) + \mathbf{f}_d(\mathbf{v}^\theta(\mathbf{v})) + \mathbf{f}_{\text{ext}}, \tag{6}$$

其中，$\mathbf{f}_{\text{ext}}$ 包括恒定外力，例如重力。

B. 共旋材料模型

原则上，我们的框架可以采用任意超弹性能量密度 Ψ（$\mathbf{F}(\boldsymbol{X})$）。实现说明请参见 [40]，常用方案综述请参见 [41] 。然而，在大变形情况下，刚度矩阵$\mathbf{K}$ 往往会变为不定，从而妨碍迭代牛顿求解器的收敛[20], [41]。常见的补救方法包括将能量密度海森矩阵投影为半正定 [20] ，或将特征值钳制为非负 [42]，，但这两种方法都会增加计算成本。另一方面，线性本构模型在存在大幅旋转变形时会引入不可接受的伪影 [23]。

我们提出一种共旋线性模型，既具备线性模型的计算效率，又能避免旋转伪影。具体而言，我们采用圣维南–基尔霍夫模型，并使用共旋线性格林应变$\mathbf{E}$

$$\Psi(\hat{\mathbf{E}}) = \mu\|\hat{\mathbf{E}}\|_F^2 + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\hat{\mathbf{E}})^2 \tag{7}$$

其中 μ 和 λ 是 Lam´e 参数。为定义共旋$\mathbf{E}$，我们首先定义一个共旋变形梯度

$$\hat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{X})^T\mathbf{F}(\boldsymbol{X})$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{X})$ 是一个待选取的旋转矩阵，用于消除变形的旋转分量。令 $\mathbf{B} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$，格林应变为

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}^T\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}^T\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}\right) - \mathbf{I}\right).\end{aligned}$$

去掉非线性项 $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$后，我们得到线性化格林应变的定义

$$\hat{\mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{I}.$$

当 $\mathbf{R} = \mathbf{R}$ 时，$\mathbf{F}$ 的极分解中的旋转分量$\mathbf{E}$ 成为 [22] 中使用的应变度量。虽然这消除了旋转伪影，但非线性 Ψ 可能导致$\mathbf{K}$不定。相反，我们用$\mathbf{R}_0$,近似$\mathbf{R}$，其中$\mathbf{R}_0$,是前一时间步的$\mathbf{F}_0(\boldsymbol{X})$ 的极分解中的旋转分量。采用这一选择后，我们的模型是线性的，旋转伪影可以忽略不计（结果见第 VII 节），并且刚度矩阵$\mathbf{K}$ 具有解析形式，且保证为半正定，证明见附录。尽管与 [23], 类似，我们并未通过在导数 [43]中舍弃非线性项来近似$\mathbf{K}$ 。我们的公式按设计关于$\mathbf{q}$ 呈线性，并且自然地推广到非四面体单元。

VI. 受约束动力学的凸形式

根据式 (2)，我们将动量残差定义为

$$\mathbf{m}(\mathbf{v}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}^\theta(\mathbf{v}))(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) - \delta t\,\mathbf{k}(\mathbf{q}^\theta(\mathbf{v}), \mathbf{v}^\theta(\mathbf{v})). \tag{8}$$

采用线性化共旋模型后，可变形体的动量平衡关于$\mathbf{v}$呈线性。对于刚体，我们遵循 [28] ，其中为保证稳定性，惯性和阻尼项采用隐式处理，而科里奥利力和陀螺力采用显式处理。这使我们能够将式 (2) 写成线性化形式:

$$\mathbf{m}(\mathbf{v_0}) + \mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{v_0}) = \mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) = \mathbf{J}^T\boldsymbol{\gamma}, \tag{9}$$

其中$\mathbf{A} = \partial\mathbf{m}/\partial\mathbf{v}$ 是对称正定（SPD）的，且与$\mathbf{v}$ 无关，我们定义

$$\mathbf{v}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v_0} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{m}(\mathbf{v_0}) \tag{10}$$

为*free-motion* 速度，即在不存在约束的情况下，当 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ 满足式 (9) 时所得到的速度。由于$\mathbf{A}$ 是分块对角的，我们分别求解每个物体的自由运动速度。第 VI-B 节将讨论效率方面的考量。根据第 V-A 节，第 b 个可变形物体对应的$\mathbf{A}$ 分块为

$$\mathbf{A}_b = (1 + \alpha\theta\delta t)\,\mathbf{M}_b + \theta\delta t(\theta_{vq}\delta t + \beta)\mathbf{K}_b. \tag{11}$$

注意，这一结果是精确的。此外，$\mathbf{A}_b$ 是 SPD，因为$\mathbf{M}_b$ 是 SPD，并且在我们的共旋模型中，$\mathbf{K}_b$ 是半正定的。我们将**线性化动量平衡**式 (9) 与约束 (3) 结合，写出动力学的凸形式

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) = \mathbf{J}^T\boldsymbol{\gamma},\\ &\mathcal{C} \ni \boldsymbol{\gamma} \perp \mathbf{v}_c - \hat{\mathbf{v}}_c \in \mathcal{C}^*.\end{aligned} \tag{12}$$

方程 (12) 是以下凸优化问题的最优性条件 [37], [28]

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{v}} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\|_A^2\\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{b} - \hat{\mathbf{v}}_c \in \mathcal{C}^*,\end{aligned} \tag{13}$$

其中我们使用了第 IV-A 节中的$\mathbf{v}_c = \mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{b}$ 。为求解式 (13)，我们使用[28]提供的半解析原始（SAP）求解器，该求解器将此问题构造成一个正则化版本，并已证明能够全局收敛到其唯一解。

A. 参与自由度

SAP [28] 求解规模为n_v的非线性方程组，当系统中包含可变形体时，该方程组通常规模很大。对于交互式机器人应用，求解如此大规模的非线性方程组往往不切实际，因此我们旨在利用程序（13）的结构来缩减其规模。

约束雅可比矩阵$\mathbf{J}$ 通常是稀疏的，因为对于第 i 个约束，约束速度$\mathbf{v}_{c,i}$ 仅涉及一组局部顶点。此外，由于接触发生在可变形物体的表面上，$\mathbf{J}$ 中对应于

内部网格顶点的列通常为零。我们将$\mathbf{J}$ 中非零列所对应的自由度称为参与自由度。所有其他自由度称为非参与自由度。在本节余下部分，我们只考虑单个物体，并省略下标 b。我们用 m_p 和 m_n 表示该物体的参与自由度和非参与自由度的数量，并通常分别用下标 p 和 n表示参与量和非参与量。采用这种分区后，我们对自由度进行置换，使非参与自由度排在参与自由度之前

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{nn} & \mathbf{A}_{np}\\ \mathbf{A}_{pn} & \mathbf{A}_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_n\\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{J}_p^T\boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_{\text{def}}=\mathbf{v}-\mathbf{v}^*$ 和 $\mathbf{J}_p$ 是$\mathbf{J}$ 中对应于所考虑的可变形物体参与自由度的列。请注意，这种分区会在右侧产生一个大小为 m_n 的（通常很大的）零块。这使我们能够通过代数运算消去 $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_n$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_n=-\mathbf{A}_{nn}^{-1}\mathbf{A}_{np}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_p \tag{15}$$

从而得到一个仅以参与自由度表示的系统

$$\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_p=\mathbf{J}_p^T\boldsymbol{\gamma} \tag{16}$$

其中，$\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{A}_{pp}-\mathbf{A}_{pn}\mathbf{A}_{nn}^{-1}\mathbf{A}_{np}\in\mathbb{R}^{m_p\times m_p}$ 是$\mathbf{A}$的舒尔补。由于（13）中的约束仅涉及参与自由度，因此现在可以求解一个仅以参与自由度表示、规模小得多的优化问题

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{v}}\quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_p^*\|_{\hat{A}}^2\\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{J}\mathbf{v}+\mathbf{b}-\hat{\mathbf{v}}_c\in\mathcal{C}^*,\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\mathbf{v}_p^*$ 仅对应参与自由度的自由运动速度。然后我们使用（15）更新非参与自由度的速度。

B. 舒尔补计算

显式构造舒尔补 $\hat{\mathbf{A}}$ 中所需的$\mathbf{A}_{nn}^{-1}$ 在计算上代价高昂且不切实际。然而，在按式（10）计算自由运动速度所需的$\mathbf{A}$ 分解过程中，我们可以将 $\hat{\mathbf{A}}$ 作为中间结果得到。我们从置换后的$\mathbf{A}$的分解开始

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{nn} & \mathbf{A}_{np}\\ \mathbf{A}_{pn} & \mathbf{A}_{pp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{nn} & \mathbf{0}\\ \mathbf{L}_{pn} & \mathbf{L}_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{nn} & \mathbf{0}\\ \mathbf{L}_{pn} & \mathbf{L}_{pp}\end{bmatrix}^T \tag{18}$$

可以看出

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}&=\mathbf{A}_{pp}-\mathbf{A}_{pn}\mathbf{A}_{nn}^{-1}\mathbf{A}_{pp}\\ &=\mathbf{L}_{pn}\mathbf{L}_{pn}^T+\mathbf{L}_{pp}\mathbf{L}_{pp}^T-\mathbf{L}_{pn}\mathbf{L}_{nn}^T(\mathbf{L}_{nn}\mathbf{L}_{nn}^T)^{-1}\mathbf{L}_{nn}\mathbf{L}_{pn}^T\\ &=\mathbf{L}_{pp}\mathbf{L}_{pp}^T\\ &=\mathbf{A}_{pp}-\mathbf{L}_{pn}\mathbf{L}_{pn}^T,\end{aligned}$$

因此，我们对置换后的$\mathbf{A}$ 进行右看式乔列斯基分解，并在块$\mathbf{A}_{nn}$ 完成分解后，记录舒尔补矩阵$\mathbf{A}$ 。此外，使用$\mathbf{A}$ 的同一分解来求解方程（10）和（15）。参与分区与非参与分区中的方程可以重新排序，以减少乔列斯基分解中的填充项。我们发现，在分区内采用 AMD排序 [44] 比任意排序产生的填充项更少。

VII. 结果与讨论

我们展示了一系列仿真测试案例，以评估所提方法的鲁棒性、准确性和性能。所有仿真均在配备两颗 16 核 Intel® Xeon® Gold 6226R 处理器和 192 GB 内存、运行 Ubuntu 20.04 的系统上进行。不过，所有测试均以单线程运行。我们在表 I 中报告场景统计数据和性能指标，并在图 2 中列出最耗时例程的计时细分。我们发现，窄相几何和逐单元有限元计算极易并行化，可立即从并行实现中获益。另一方面，SAP 求解器和舒尔补的计算都需要进行乔列斯基分解，因此不太适合并行化，需要仔细研究。拱形示例中的 SAP 问题本质上是块三对角的，而 SAP 的超节点求解器[45] 能够有效利用这一结构。然而，泰迪熊示例中的问题结构非常接近稠密结构，因此 SAP 矩阵分解成为性能瓶颈。此外，在动态性较低的场景中（例如砌体拱和圆柱压机示例），SAP 求解器可受益于其热启动策略 [28]。我们在 [28] 中研究了 SAP 随物体数量变化的可扩展性，并在 [29] 中研究了其随约束数量变化的可扩展性。除圆柱压入基准测试采用与已发表结果相匹配的模型外，所有示例均使用我们的共旋模型。除非另有说明，瑞利阻尼模型使用 $\alpha=0$ 和 $\beta=0.01$。对于所有仿真结果，SAP 均以相对容差 $\varepsilon_r=10^{-6}$ [28] 收敛。

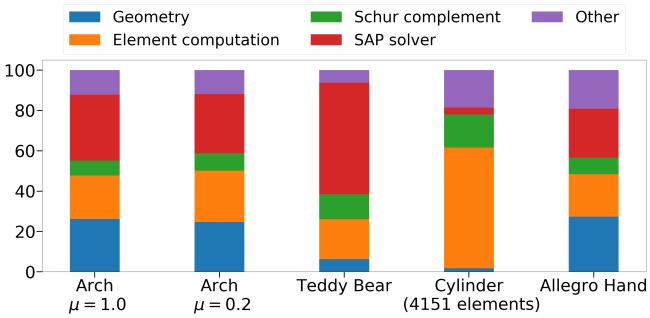


图 2：所有示例中主要计算例程（几何查询、舒尔补、有限元法的逐元素计算以及 SAP 求解器）总运行时间成本的占比（百分比）。其他所有计算均归为“其他”。

A. 两块刚性板之间受压的橡胶圆柱体

为了验证我们的方法在求解接触以及可变形体内部应力方面的效果，我们进行了一个在工程文献中得到广泛研究、且具有已知数值解的基准测试 [46], [47], [48]。

一个直径为 0.4 米的均质圆柱体被夹在两块无摩擦刚性板之间。顶板

表 I：所有示例的计时与场景统计数据。我们统计了刚体和可变形物体的自由度，每个网格顶点有 3 个自由度。实时率是模拟时间与 CPU 时间之比。我们还记录了每个时间步的约束数量（包括接触和完整约束）的最大值，以及所有时间步的平均值。

示例	DoFs	时间步（秒）	实时率	约束数量平均值（最大值）
拱形结构（$\mu = 0.2$）	225	0.04	7.26	259.5 (357)
拱形结构 ($\mu = 1.0$)	225	0.04	6.29	320.2 (364)
圆柱体 (4151 个单元)	3796	0.01	0.06	248.3 (335)
Allegro 灵巧手	410	0.01	1.01	89.5 (328)
泰迪熊	2043	0.02	0.37	236.5 (464)

向下移动 0.2 米。装置示意图如图 3 所示。圆柱体材料采用 Mooney-Rivlin 橡胶模型，其常数为 $C_1 = 0.293$ MPa、 $C_2 = 0.177$ MPa，体积模量为 1410 MPa。具体而言，我们采用 [41] 中所述的 Mooney-Rivlin 公式，以确保其静止状态下的稳定性。材料的质量密度设为 1000 kg/m^3 ，且不考虑重力。与以往文献一样，我们考虑平面应变状态。为在本质上为三维的公式中实现这一点，我们沿 z方向用两层线性四面体单元对圆柱体进行建模，在计算变形梯度 $\boldsymbol{F}$时假设 $\partial/\partial z = 0$ ，并施加零面外位移，以避免舍入误差导致的漂移。我们通过棱柱关节对顶板施加向下作用力，并测量由此产生的位移。随着顶板向下移动，接触约束自动生效，并由我们的方法自动求解。我们使作用力的大小随时间从零线性增加至$f_{\max} = 1.4$ MN/m，以匹配 [46]。为更好地与文献中的静态分析结果进行比较，我们通过对圆柱体施加 $\beta = 0.5$ 过阻尼来减小惯性效应，并在 500 秒内缓慢施加载荷。我们使用四个逐步加密的网格进行了网格细化研究。采用我们的方法得到的力-位移曲线如图 4 所示，同时还展示了 [46]中的参考解。随着空间分辨率提高，力-位移曲线逐渐收敛于参考解。

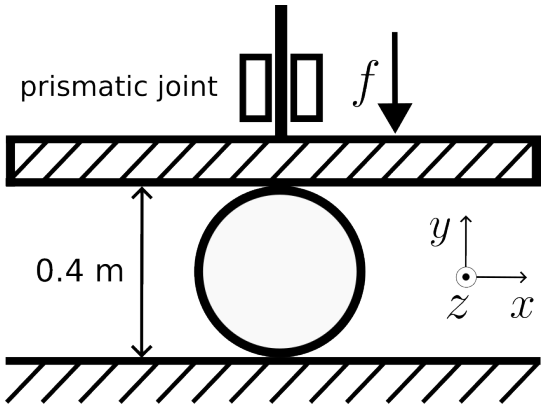


图 3：一个直径为 0.4 米的实心可变形圆柱体被夹压在刚性平板与地面之间。通过棱柱关节对平板施加向下作用力。采用 xy-平面应变假设。

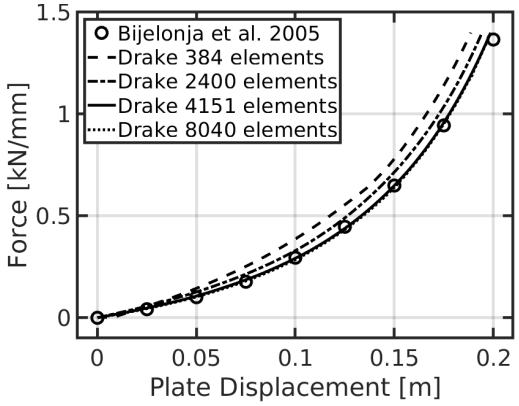


图 4：图 3 所示圆柱压入基准测试中的单位长度作用力与位移关系。随着网格细化，力-位移曲线收敛。

B. 砌体拱

我们在 [16], [18], [49] 中对摩擦相关的稳定拱测试进行了方法稳健性测试。具体而言，我们采用了 [18] 中更具挑战性的设置，其中拱的底部支撑在锋利的边缘上。与 [18], 类似，我们将拱中的块体模拟为非常坚硬的可变形材料，其杨氏模量为 20 GPa，泊松比为 0。3，密度为 2300 kg/m^3。非线性模型通常会因病态条件而难以在如此坚硬的材料存在时收敛，而得益于我们的线性化共旋模型，我们的方法通过一次线性求解，便能以机器精度求解式 (10) 中的自由运动动量平衡。我们的方法能够在 40 ms 时间步下稳定地处理块体间的摩擦接触。我们对该结构进行了 10 分钟的模拟，并验证了摩擦系数为 $\mu = 1.0$ 的块体能够形成长期稳定的拱形结构。我们还证实，摩擦系数较低时，该结构会坍塌

系数 $\mu = 0.2$。我们的方法保证收敛，因此仿真结果始终满足动量平衡、库仑摩擦模型和最大耗散原理。

C. 软气泡夹爪

我们仿真了一个软气泡夹爪 [3] 抓取并操纵一只可变形泰迪熊，如图 6 所示。这是一个 Schunk WSG 50 夹爪，其手指由充气橡胶腔室构成，可提供高度

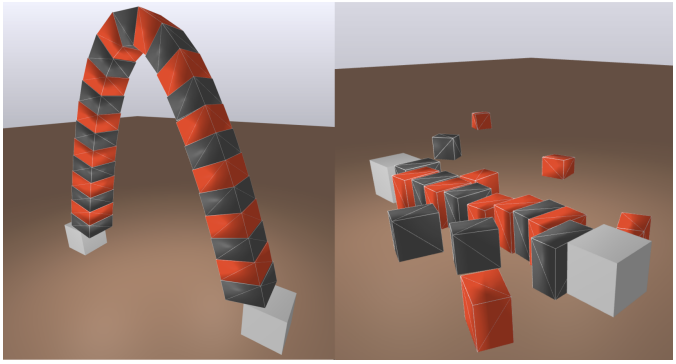


图 5：自支撑砌体拱。每块砌块均建模为刚性可变形物体，以对我们方法的稳定性进行压力测试，并展示其求解可变形体之间接触约束的能力。使用 $\mu = 1.0$ 时，结构依靠摩擦保持稳定（左）；而使用 $\mu = 0.2$ 时，结构最终会散架（右）。

柔顺抓取表面。我们将充气乳胶膜建模为可变形体积物体，其杨氏模量为 50 kPa，泊松比为 0。3。气泡的平坦底部通过完整约束连接到夹爪手指。泰迪熊的杨氏模量为 10 kPa，泊松比为 0。4。夹爪采用 PD控制，并按照预设的闭合-抬升-摇晃-放置运动序列运行。我们通过摇晃动作对仿真中的抓取稳定性进行压力测试，详见补充视频。整个系统有 2043 个自由度，最多通过 464 个约束高度耦合。我们的求解器能够使这一具有挑战性的场景中的所有时间步均收敛。

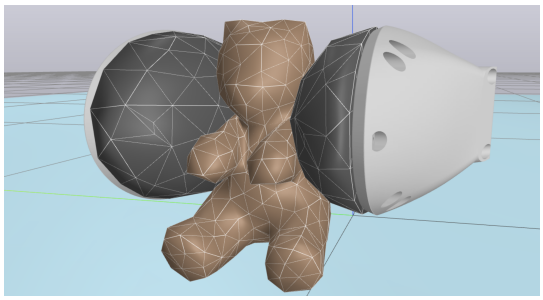


图 6：高度柔顺的 软气泡 夹爪 [3]，牢牢抓住了一只可变形的泰迪熊。

D. 交互式控制

一台配备仿人 Allegro 灵巧手（16 个自由度）的 KUKA LBR iiwa 机械臂（7 个自由度）通过远程操作实时操控可变形球（图 1）。系统使用微分逆运动学控制器，根据期望的末端执行器位姿计算期望的关节位置和速度；该位姿通过游戏手柄进行交互式控制。可变形球的杨氏模量为 25 kPa，泊松比为 0.4。随着机器人用手掌合拢包住球体，球体与手掌、指骨和指尖之间形成接触区域，从而实现稳固抓取。我们通过施加摇晃动作对抓取的稳定性进行压力测试，详见补充视频。即使考虑控制器的额外开销，我们的仿真仍能以实时速率运行。

VIII. 局限性与未来工作

我们总结了已发现的方法局限性，并提出了未来的研究方向。

并行实现： 本研究侧重于精度和算法，因此采用了串行实现。我们方法中一些最耗时的程序很容易通过并行实现获益，但 SAP 求解器和舒尔补计算是否适合并行化则不那么明显。利用现代硬件的并行化能力加速这些计算，是未来值得探索的方向。

旋转不变性： 与所有其他线性本构模型一样，我们采用滞后旋转分量的线性化模型不具备旋转不变性。因此，它不适用于使用大时间步长进行极端变形仿真。对于这类场景，我们会退回到传统的非线性模型，并采用 [20] 中提出的海森矩阵正定修正。

自接触： 由于我们的几何引擎目前尚不支持自接触，因此暂不考虑自接触。通过更新几何引擎以扩充其报告的接触集合，即可将自接触纳入我们的方法。

高速穿透： 尽管我们的方法计算成本较低，但仍可借助连续碰撞检测策略 [18]，在接触建立之前生成约束。这样便能缓解物体高速穿过彼此等问题。如何高效地解决这一问题，是作者们正在积极研究的课题。

冗余约束： 我们的几何引擎通常会引入大量约束来处理接触。同样，将大量可变形网格顶点焊接到刚体上（如第 VII-C 节所示）也会引入许多约束。尽管我们的 SAP 求解器 [28]能够保证解的存在性和唯一性，但大量约束会损害性能，这一点可从软气泡示例中看出。我们目前正在研究如何在不牺牲精度的前提下，大幅减少约束数量。

IX. 结论

我们提出了一个公式，据我们所知，这是首个通过接触和完整约束将发生大变形的物体与铰接刚体耦合起来的凸形式。

为实现这一点，我们提出了一种基于线性化格林应变的材料模型，并证明，当变形梯度的旋转分量采用滞后处理时，我们的公式是线性的，且刚度矩阵为半正定。这使我们能够将大变形建模纳入此前关于接触凸形式的工作中 [28]。我们从两个方面利用问题的结构。首先，我们对问题进行分区，并将其表示为一个规模更小、仅包含受约束变量的优化程序。其次，我们说明，优化问题所需的、计算开销较大的舒尔补，如何作为动量平衡方程乔列斯基分解过程中的中间计算结果获得。

为展示我们方法的有效性，我们给出了与机器人学相关的验证结果和仿真。具体而言，我们展示了我们的方法能够在两项具有挑战性的操作任务中稳健地求解稳定抓取。

与其他为满足指定计算预算而运行固定迭代次数的方法不同，我们的方法始终以实时速度将全约束问题求解至收敛。我们的方法借助 SAP 求解器 [3] 提供的强收敛保证，实现了这一点。因此，我们的仿真结果始终满足动量方程和摩擦定律，不会引入难以检测的伪影。对于有意义的仿真到现实迁移而言，这一点尤为关键。

性能分析表明，当自由度远多于约束时，并行化几何计算和有限元单元例程颇具优势。然而，当约束数量占主导时，并行化的效果较差，因为此类情况的主要开销来自矩阵分解和 SAP 求解器。我们的分析还总结了局限性和未来研究方向。

最后，我们将该方法整合进开源机器人学工具包 Drake [36]，并希望仿真和机器人学领域的研究者能够受益于我们的贡献。

附录

引理 *1*：对于 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) + \operatorname{tr}(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) \geq 0.$$

证明：令$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{S}$ 分别为$\mathbf{M}$ 的对称部分和反对称部分。则所需的和为

$$\operatorname{tr}((\mathbf{M}+\mathbf{M}^T)\mathbf{M}) = 2\operatorname{tr}(\mathbf{H}(\mathbf{H}+\mathbf{S})) = 2\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2) \geq 0,$$

其中，最后一个等式利用了对称矩阵与反对称矩阵乘积的迹为零这一事实。 ■

命题 *1*：式 (7) 中定义的本构模型关于$\mathbf{q}$ 是线性的，且所得刚度矩阵$\mathbf{K}$ 是半正定的。

证明：回忆 $\Psi(\hat{\mathbf{E}}) = \mu\|\hat{\mathbf{E}}\|_F^2 + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\hat{\mathbf{E}})^2$，并且 $\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{R}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\hat{\mathbf{R}}) - \mathbf{I}$，其中 $\hat{\mathbf{R}}$ 为某个常数。对$\mathbf{F}$ 求两次导数Ψ，得到

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial F_{ij}\partial F_{kl}} = \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \hat{R}_{il}\hat{R}_{kj}\right) + \lambda\hat{R}_{ij}\hat{R}_{kl},$$

$\hat{}$ 由于$\mathbf{R}$ 为常数，因此该式为常数，故式 (7) 中的模型是线性的。对于任意$\mathbf{dF} \in \mathbb{R}^{3\times3}$，$\mathbf{dF}$: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial \mathbf{F}^2}$: $\mathbf{dF}$可表示为

$$\begin{aligned}
&\mu\left(dF_{ij}dF_{ij} + dF_{kl}\hat{R}_{il}dF_{ij}\hat{R}_{kj}\right) + \lambda dF_{ij}\hat{R}_{ij}dF_{kl}\hat{R}_{kl} \\
&= \mu\left(\operatorname{tr}(\mathbf{dF}^T\mathbf{dF}) + \operatorname{tr}(\mathbf{dF}\hat{\mathbf{R}}^T\mathbf{dF}\hat{\mathbf{R}}^T)\right) + \lambda\operatorname{tr}^2(\mathbf{dF}\hat{\mathbf{R}}^T) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

第一项显然非负；将引理 1 应用于 $\mathbf{M} = \mathbf{dF}\,\hat{\mathbf{R}}^T$，可知第二项非负。因此，

对于任意的 $\mathbf{dq} \in \mathbb{R}^{n_v}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{dq}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{dq} &= \mathbf{dq}^T\,\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{q}^2}\,\mathbf{dq} \\
&= \int \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{dq}\right) : \frac{\partial^2\Psi}{\partial \mathbf{F}^2} : \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{dq}\right) d\boldsymbol{X} \geq 0,
\end{aligned}$$

因此$\mathbf{K}$ 是半正定的。 ■

致谢

我们感谢 TRI 的 Dynamics & Simulation 和灵巧操作团队一直以来的耐心与支持。感谢 Frank Permenter 提供有益的讨论，并感谢 Damrong Guoy 提供几何方面的支持。

参考文献

[1] F. Schmitt、O. Piccin、L. Barb´e 和 B. Bayle，《软体机器人的制造：综述》，*Frontiers in Robotics and AI*，第5卷，第84页，2018年。[2] J. Zhu、A. Cherubini、C. Dune、D. Navarro-Alarcon、F. Alambeigi、D. Berenson、F. Ficuciello、K. Harada、J. Kober、X. Li，等，《可变形物体机器人操作的挑战与展望》，*IEEE Robotics& AutomationMagazine*，第29卷，第3期，第67–77页，2022年。[3] N. Kuppuswamy、A. Alspach、A. Uttamchandani、S. Creasey、T. Ikeda 和 R. Tedrake，《用于稳健且具感知能力的操作的软泡沫夹爪》，载于*2020*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*）。IEEE，2020年，第9917–9924页。[4] A. Agarwal、T. Man 和 W. Yuan，《基于物理的渲染对基于视觉的触觉传感器进行仿真》，载于*2021*年*IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*）。IEEE，2021年，第1–7页。[5] X. Lin、Y. Wang、J. Olkin 和 D. Held，《Softgym：可变形物体操作深度强化学习基准》，载于机器人学习会议。PMLR，2021年，第432–448页。[6] J. Hallquist、G. Goudreau 和 D. Benson，《大规模拉格朗日计算中的接触-冲击滑动界面》，《应用力学与工程计算方法》，第51卷，137，1985 1 3，107号——第。[7] A. B. Chaudhary 和 K.-J. Bathe，《带摩擦的三维接触问题静态与动态分析的求解方法》，《计算机与结构》，第24卷，第6期，第855–873页，1986年。[8] K.-J. Bathe 和 P. Bouzinov，《论接触问题的约束函数方法》，《计算机与结构》，第64卷，第5–6期，第1069–1085页，1997年。[9] E. Bittencourt 和 G. J. Creus，《大变形问题中三维接触与冲击的有限元分析》，《计算机与结构》，第69卷，第2期，第219–234页，1998年。[10] Y. Maday、C. Mavriplis 和 A. Patera，《非协调砂浆元方法：谱离散化的应用》，NASA CR 181729，ICASE-88-59，技术报告，1988年。[11] T. McDevitt 和 T. Laursen，《摩擦接触问题的砂浆有限元表述》，《国际工程数值方法杂志》，第48卷，第10期，第1525–1547页，2000年。[12] M. A. Puso 和 T. A. Laursen，《大变形的砂浆段对段摩擦接触方法》，《应用力学与工程计算方法》，第193卷，第45–47期，第4891–4913页，2004年。[13] M. M¨uller、B. Heidelberger、M. Hennix 和 J. Ratcliff，《基于位置的动力学》，《视觉通信与图像表示杂志》，第18卷，第2期，第109–118页，2007年。[14] T. Shinar、C. Schroeder 和 R. Fedkiw，《刚体与可变形体的双向耦合》，载于*2008*年*ACM SIGGRAPH/Eurographics*计算机动画研讨会论文集，2008年，第95–103页。[15] K. Erleben，《多体动力学动画的基于速度的冲击传播》，*ACM* 图形学汇刊，第26卷，第2期，第12–es页，2007年。[16] D. M. Kaufman、S. Sueda、D. L. James 和 D. K. Pai，《多体系统摩擦接触的交错投影》，*ACM*图形学汇刊，第27卷，第5期，2008年12月。[17] T. F. Gast、C. Schroeder、A. Stomakhin、C. Jiang 和 J. M. Teran，《适用于大时间步长的优化积分器》，《*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊》，第21卷，1115，2015 10，1103号第——页。

[18] M. Li、Z. Ferguson、T. Schneider、T. Langlois、D. Zorin、D. Panozzo、C. Jiang 和 D. M. Kaufman，《增量势接触：无交叉、无翻转的大变形动力学》，ACM图形学汇刊（SIGGRAPH），第39卷，第4期，2020年。[19] G. Irving、J. Teran 和 R. Fedkiw，《用于稳健大变形仿真的可逆有限元》，载于《2004年ACM SIGGRAPH/Eurographics计算机动画研讨会论文集》，2004年，第131–140页。[20] J. Teran、E. Sifakis、G. Irving 和 R. Fedkiw，《稳健准静态有限元与肉体仿真》，载于《2005年ACM SIGGRAPH/Eurographics计算机动画研讨会论文集》，2005年，第181–190页。[21] A. Stomakhin、R. Howes、C. A. Schroeder 和 J. M. Teran，《能量一致的可逆弹性》，载于计算机动画研讨会，第1卷，第2期，2012年。[22] A. McAdams、Y. Zhu、A. Selle、M. Empey、R. Tamstorf、J. Teran 和 E. Sifakis，《通过接触与碰撞实现角色蒙皮的高效弹性》，载于2011年ACM SIGGRAPH论文集，2011年，第1–12页。[23] M. M¨uller 和 M. H. Gross，《交互式虚拟材料》，载于Graphics Interface，第2004卷，2004年，第239–246页。[24] D. Baraff，《非穿透刚体接触力计算中的问题》，Algorithmica，第10卷，第2期，第292–352页，1993年。[25] ——，《非穿透刚体的快速接触力计算》，载于《第21届计算机图形学与交互技术年会论文集》，1994年，第23–34页。[26] M. Anitescu，《非光滑刚体多体动力学的基于优化的仿真》，Mathematical Programming，第105卷，第1期，第113–143页，2006年。[27] E. Todorov，《具有接触与约束的凸且解析可逆动力学：理论及其在MuJoCo中的实现》，载于2014年IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA）。IEEE，2014年，第6054–6061页。[28] A. M. Castro、F. N. Permenter 和 X. Han，《柔顺接触的无约束凸形式》，《IEEE机器人学汇刊》，2022年。[29] J. Masterjohn、D. Guoy、J. Shepherd 和 A. Castro，《压力场接触区域的速度层级近似》，《IEEE机器人与自动化快报》，第7卷，第4期，第11 593–11 600页，2022年。[30] E. Todorov、T. Erez 和 Y. Tassa，《MuJoCo：用于基于模型的控制的物理引擎》，载于2012年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议。IEEE，2012年，第5026–5033页。[31] A. Tasora、R. Serban、H. Mazhar、A. Pazouki、D. Melanz、J. Fleis-chmann、M. Taylor、H. Sugiyama 和 D. Negrut，《Chrono：开源多物理场动力学引擎》，T. Kozubek 编。Springer，2016年，第19–49页。[32] V. Acary、O. Bonnefon、M. Br´emond、O. Huber、F. P´erignon 和 S. Sinclair，《Siconos简介》，INRIA，技术报告，2019年。[33] E. Coumans 和 Y. Bai，《PyBullet：用于游戏、机器人学和机器学习物理仿真的Python模块》，http://pybullet.org，2016–2020年。[34] 《NVIDIA PhysX》，https://github.com/NVIDIA-Omniverse/PhysX，访问日期：2023年2月27日。[35] F. Faure、C. Duriez、H. Delingette、J. Allard、B. Gilles、S. Marchesseau、H. Talbot、H. Courtecuisse、G. Bousquet、I. Peterlik 和 S. Cotin，《 SOFA：交互式物理仿真的多模型框架》，载于《计算机辅助手术中的软组织生物力学建模》，丛书《生物力学、组织工程与生物材料研究》，Y. Payan 编。Springer，2012年6月，第11卷，第283–321页。 [在线]。可查阅：https://hal.inria.fr/hal-00684539[36]

R. Tedrake 和 Drake开发团队，《Drake：面向机器人学的基于模型的设计与验证》，https://drake.mit.edu，2019年。[37] H. Mazhar、D. Melanz、M. Ferris 和 D. Negrut，《刚体多体动力学中处理硬球摩擦接触的若干方法分析》，Citeseer，技术报告，2014年。[38] J. Bonet、A. J. Gil 和 R. D. Wood，《用于有限元分析的非线性固体力学：动力学》，剑桥大学出版社，2021年。[39] T. Belytschko、W. K. Liu、B. Moran 和 K. Elkhodary，《连续体与结构的非线性有限元》，约翰·威立父子出版公司，2014年。[40] E. Sifakis 和 J. Barbic，《三维可变形固体的有限元法仿真：理论、离散化与模型降阶实践指南》，载于2012年ACM SIGGRAPH课程，2012年，第1–50页。[41] T. Kim 和 D. Eberle，《动态可变形物体：实现与生产实践问题》，载于2020年ACM SIGGRAPH课程，2020年，第1–182页。[42] B. Smith、F. D. Goes 和 T. Kim，《各向同性材料的解析特征系统畸变能，”*ACM* 图形学汇刊，第 38 卷，第 1 期，第 1–15 页，2019年。[43] J. Barbic，“精确共旋线性有限元刚度矩阵”，南加州大学，洛杉矶，美国加利福尼亚州，2012年。[44] P. R. Amestoy、T. A. Davis 和 I. S. Duff，“一种近似最小度排序算法”，*SIAM* 矩阵分析与应用杂志，第 17 卷，第 4 期，第 886–905 页，1996年。[45] T. A. Davis、S. Rajamanickam 和 W. M. Sid-Lakhdar，“稀疏线性系统直接方法综述”，数值学报，第 25 卷，第 383–566 页，2016年。[46] I. Bijelonja、I. Demirdˇzi´c 和 S. Muzaferija，“不可压缩超弹性材料大应变分析的有限体积法”，国际工程数值方法杂志，第 64 卷，第 12 期，第 1594–1609 页，2005年。[47] T. Sussman 和 K.-J. Bathe，“非线性不可压缩弹性与非弹性分析的有限元公式”，《计算机与结构》，第 26 卷，第 1-2 期，第 357–409 页，1987年。[48] A. M. A. V. 手册，“Vm201：夹在两块板之间的橡胶圆柱体”，*ANSYS* 公司版本，第 15 卷，第 539–542 页，2013年。[49] M. Macklin、K. Erleben、M. M¨uller、N. Chentanez、S. Jeschke 和 V. Makoviychuk，“可变形多物体动力学的非光滑牛顿方法”，*ACM* 图形学汇刊，第 38 卷，第 5 期，第 1–20 页，2019年。