arXiv:2303.08930v2 [math.CO] 7 Apr 2023

通过超图链建立定量 Helly 型定理

ATTILA JUNG

Abstract. 我们提出一个组合框架，用于分析定量 Helly 型问题。借助这一框架，我们证明了一个分数 Helly 数为 $3d$ 的定量分数 Helly 定理，以及 B´ar´any、Katchalski 和 Pach 的定量 Helly 定理的一个稳定性版本。

1. Introduction

Helly 型定理的研究有两个方向：定量问题和抽象问题。定量结果关注特定空间中的凸集交集模式，最初 $\mathbb{R}^d$，其目标不是寻找交集中的点，而是界定交集的大小，例如其体积或直径。另一方面，抽象结果研究更一般的结构，例如具有某些性质的超图，这些性质刻画了凸集行为的某些基本方面。本文将这两个方向联系起来。

有些定量结果涉及多个凸集交集模式（例如，凸集的交集体积有大有小），因此通常的组合技巧并不能直接应用。本文提出一个组合框架，用于分析这类定量 Helly 型问题。具体而言，我们提出超图链的定义（见定义 4、5、6 和 7），并证明主要结果——定理 8：某类定量彩色 Helly 定理蕴含一个定量分数 Helly 定理。

首先，考虑定量体积定理。

定理1（B´ar´any、Katchalski 和 Pach [3]）。假设有限凸集族中任意 $2d$ 个成员的交集体积至少为 1。那么，该族所有成员的交集体积至少为 $c(d)$，其中的常数仅取决于 d 。

文献 [3], 证明了可以取 $c(d) = d^{-2d^2}$ ，并猜想对于某个绝对常数 $c > 0$，应当有 $c(d) = d^{-cd}$ 。Nasz´odi 以 $c(d) \approx d^{-2d}$ 证实了定理1；随后 Brazitikos [4], 对其论证进行了改进，证明可以取 $c(d) \approx d^{-3d/2}$。关于更多定量赫利型结果，请参阅综述 [6, 8]。

Helly 定理可以用超图语言表述如下。设 V 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个凸集有限族；若 V 的某个子集所对应的凸集交集非空，则称该子集为我们超图的一条超边。Helly 定理

本研究得到 R´enyi 研究所的 R´enyi 博士奖学金、NK-FIH 项目资助 FK132060，以及国家研究、发展与创新办公室的 TKP2021-NKTA-62 主题卓越计划资助。

指出，如果 V 的子集 S 的所有 $(d+1)$ 元组都是超图的超边，那么 S 也如此。注意，定理1无法用同一种语言表述，因为这里涉及两个超图：其中一个超图的超边对应于交集体积至少为 1 的凸集族，另一个超图的交集体积至少为 $c(d)$。本文旨在提供一个组合框架，以便用这种框架表述定理1及其他定量结果。

Lov´asz [12] 提出的彩色 Helly 定理（其首个已发表的证明由 B´ar´any [2] 给出）如下所述。若 $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_{d+1}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限凸集族（颜色类），且对于任意彩色选择 $C_1 \in \mathcal{C}_1,\dots,C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$，交集 $\bigcap_{i=1}^{d+1} C_i$ 非空，则存在某个 j，使得交集 $\bigcap_{C\in\mathcal{C}_j} C$ 也非空。

在 [5], 中给出了以下定量变体。

定理2（Dam´asdi、F¨oldv´ari 和 Nasz´odi [5]）。设 $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_{3d}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限凸集族。假设对于任意彩色选择 $C_1 \in \mathcal{C}_1,\dots,C_{3d} \in \mathcal{C}_{3d}$，交集 $\bigcap_{i=1}^{3d} C_i$ 的体积至少为一。

那么，存在一个 j，满足 $1 \le j \le 3d$，使得 $\operatorname{vol}\left(\bigcap_{C\in\mathcal{C}_j} C\right) \ge d^{-cd^2}$，其中 $c>0$ 为普适常数。

Katchalski 和刘提出的分数 Helly 定理 [11]（另见 [13,第 8] 章）是另一项经典的赫利型结果，其内容如下。固定维数 d，并取一个 $\alpha \in (0,1)$，设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸集有限族，且满足以下性质：在 $\mathcal{C}$ 中所有大小为 $d+1$的子族里，至少有$\alpha\binom{|\mathcal{C}|}{d+1}$ 个子族，其 $d+1$ 个成员的交集非空。那么，存在一个大小为 $|\mathcal{C}'| \ge \frac{\alpha}{d+1}|\mathcal{C}|$ 的子族 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C}'$ 中所有成员的交集非空。

在 [10], 中，给出了分数 Helly 定理的以下定量变体。

定理 3（荣和 Nasz´odi [10]）。对于每个维数 $d \ge 1$ 和每个 $\alpha \in (0,1)$，都存在一个 $\beta \in (0,1)$，使得以下结论成立。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限凸集族。假设在所有大小为 $3d+1$ 的子族中，至少有 $\alpha\binom{|\mathcal{C}|}{3d+1}$ 个子族满足：其中 $3d+1$ 个成员的交集体积至少为一。

那么，存在一个大小至少为 $\beta|\mathcal{C}|$ 的子族 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，使得 $\operatorname{vol}\left(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\right) \ge d^{-cd^2}$，其中 $c>0$ 是一个普适常数。

在定理 1、2 和 3 中，分别出现了基数 $2d$、$3d$ 和 $3d+1$。容易验证（参见 [3]），定理1对任何小于 $2d$ 的数都不成立，这意味着另外两个定理也有相同的下界。目前尚无更好的下界。

转向抽象结果，我们用超图的语言描述 Helly 定理以及分数赫利定理和彩色赫利定理。设 V 是一个（可能无限的）集合。基集为 V 的超图是其子集的任意一个族，$\mathcal{H} \subset 2^V$。若 $H \in \mathcal{H}$ 且 $G \subset H$ 蕴含 $G \in \mathcal{H}$，则称超图为向下封闭超图。向下封闭超图 $\mathcal{H}$ 的 Helly 数为 h，如果对于每个有限子集

$S \subset V$ 关系 $\binom{S}{h} \subset \mathcal{H}$ 蕴含 $S \in \mathcal{H}$。现在记 $\mathbb{R}^d$ 的凸集族为 Cvx(d)，并将由交集非空的凸集子族构成的超图记为 $\mathcal{K}_d = \{\mathcal{C} \subset \text{Cvx}(d) : \cap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset\}$。Helly 定理指出， $\mathcal{K}_d$ 的 Helly 数为 $d+1$。

若存在一个函数 $\beta : (0, 1) \to (0, 1)$，使得对于任意满足 $\left|\mathcal{H} \cap \binom{S}{k}\right|$ 的有限子集 $S \subset V$，只要超边数满足条件 $\alpha\binom{|S|}{k}$，且带有一个 $\alpha \in (0, 1)$，那么就存在一个大小至少为 $\beta|S|$ 的子集 $S' \subset S$，使得$S' \in \mathcal{H}$，则称基集 V 上的向下封闭超图 $\mathcal{H}$ 具有分数 Helly 数 k。分数 Helly 定理指出， $\mathcal{K}_d$ 的分数 Helly 数为 $d+1$。

接下来，我们将在抽象框架下表述彩色 Helly 定理。设S_1、.....、 $S_k \subset V$ 是基集 V 的若干子集（不一定互不相交），我们称它们为颜色类。若集合 $F \subset V$ 中每个颜色类都恰有一个元素，则称 $F \subset V$ 是这些颜色类的一个彩色选择。非常形式地，为了说明如何处理属于多个颜色类的元素，我们称 $F \subset V$ 为一个彩色选择，若存在一个满射 $\phi : [k] \longrightarrow F$，满足对所有 $i \in [k]$， $\phi(i) \in S_i$。我们用 $S_1 \otimes \ldots \otimes S_k$ 表示所有彩色选择组成的集合。

如果对于每个有限子集 $S_1, \ldots, S_k \subset V$，只要 $(S_1 \otimes \ldots \otimes S_k) \subseteq \mathcal{H}$，就存在一个颜色类 S_j 满足 $S_j \in \mathcal{H}$，那么基集 V 上的向下封闭超图 $\mathcal{H}$ 的彩色 Helly 数为k。彩色 Helly 定理指出， $\mathcal{K}_d$ 的彩色 Helly 数为 $d+1$。

Alon、Kalai、Matouˇsek 和 Meshulam [1] 在抽象情形下研究了赫利型结果。他们证明，如果一个超图的分数 Helly 数有界，那么它也具有所谓的 (p, q) 性质（定义见 [1]）。Holmsen [9] 证明，如果一个超图的彩色 Helly 数为 k，那么它的分数 Helly 数至多为 k。从这个意义上说，分数 Helly 定理可以通过纯组合证明从彩色 Helly 定理推导出来。需要注意的是，Holmsen 的结果并不能直接推出定理2与定理 3之间存在类似关系，因为凸集的交集有两种不同类型（集合的交集体积为一，以及集合的交集体积为 d^{-cd^2}）。

在第 2 节中，我们引入超图链的概念，并介绍主要结果——定理 8 和 9。它们表明，Holmsen 的结果可以推广到超图链。因此，这些结果可应用于定量 Helly 型问题。定理 8 和 9 的证明见第 3 节。在第 4 节中，我们展示主要结果在几何上的推论。定理 8 表明（见推论 12），在定理 3 中，我们可以将数量从 $3d+1$ 降至 $3d$（代价是体积损失更大）。我们的第二个主要结果定理 9 表明，定理 1 具有稳定性：无需检验给定凸集的所有 $2d$ 元组的交集体积是否至少为一。只需验证几乎所有这样的元组，即可得出几乎所有交集都具有某个正体积。最后，我们在第 5 节提出一些开放问题。

定量 Helly 型定理见于 [7, 15, 16]，重点研究 $\mathbb{R}^d$中的凸集、 $\mathbb{Z}^d$格，或具有特定拓扑性质的拓扑空间中的集合。据我们所知，我们首次尝试在超图的一般背景下探讨定量 Helly 型问题，这与 [1] 和 [9]的研究结果一脉相承。

2. Hypergraph Chains

定义 4. 设 V 为一个（可能是无限的）集合。基集为 V 的超图无限序列 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 称为超图链，若每个 $\mathcal{H}_\ell$ 都向下封闭，且对所有 $\ell \in \mathbb{Z}$， $\mathcal{H}_\ell \subset \mathcal{H}_{\ell+1}$。

若 $V = \mathrm{Cvx}(d)$ 且 $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{K}_d$ 对所有 ℓ均成立，则 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 是一个超图链。一个更有趣的例子是：当 $V = \mathrm{Cvx}(d)$、 $v \in$ 为实数且满足 $\ell \in \mathbb{Z}$ 时，来自 $\mathbb{R}^d$ 的凸集族在 $\mathcal{H}_\ell$ 中构成一条超边，当且仅当它们的交集体积至少为 v^ℓ。我们将此超图记为 $\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)$。

定义5. 若基集 V 上的超图链 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 满足：对每个 $S \subseteq V$， $\binom{S}{h} \subset \mathcal{H}_\ell$ 蕴含 $S \in \mathcal{H}_{\ell+1}$，则称其 Helly 数为 h。

根据此定义，$(\mathcal{K}_d)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的 Helly 数为 $d+1$。

更有趣的是，定理1指出，若 $v \approx d^{-3d/2}$，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的 Helly 数为 $2d$。

定义6. 若超图链 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的基集为 V，则称其具有彩色 Helly 数 k，如果对于 V 的任意有限子集（颜色类） $S_1, \ldots, S_k$，只要 $S_1 \otimes \ldots \otimes S_k \subset \mathcal{H}_\ell$，就存在一个颜色类 S_j，使得 $S_j \in \mathcal{H}_{\ell+1}$。

注意，取 $S_1 = S_2 = \ldots = S_k = S$ 时，具有彩色 Helly 数 k 的超图链的 Helly 数为 $h \leq k$。

根据定义，$(\mathcal{K}_d)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 具有彩色 Helly 数 $d+1$。

更有意思的是，定理2——定量彩色 Helly 定理——可以表述如下。若 $v = d^{-cd^2}$ 来自定理2，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 具有彩色 Helly 数 $3d$。

定义 7. 若存在函数 $\beta : (0,1) \to (0,1)$，使得对于每个有限集$S \subset V$，若 $|\mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{k}| \geq \alpha\binom{|S|}{k}$ 且存在某个 $\alpha \in (0,1)$，则存在一个 $S' \subset S$，满足$|S'| \geq \beta(\alpha)|S|$ 且 $S' \in \mathcal{H}_{\ell+1}$，则称以基集 V 为底的超图链 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 k。

与前两种情形一样，$(\mathcal{K}_d)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $d+1$，且定理 3 指出，若 $v = d^{-cd^2}$ 来自定理 3，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $3d+1$。

现在我们可以陈述主要结果了，它是 [9] 中定理 3 的一个定量类比。

定理 8. 若超图链 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 k，则 $(\mathcal{H}_{(k+1)\ell})_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 k。

这里，得到的分数 Helly 数与假设的彩色 Helly 数相同，但对应的并非完全相同的超图链：我们只能从原链中每隔 $(k+1)$ 个元素取一个。分数 Helly 数能否低于彩色 Helly 数？如果某个超图链的 Helly 数小于其彩色 Helly 数，答案可以说是部分肯定的。

定理 9。如果超图链 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的 Helly 数为 h 且其彩色 Helly 数为 $k \geq h$，那么存在一个函数 $\beta : (0,1) \to [0,1)$，满足 $\lim_{\alpha\to 1}\beta(\alpha) = 1$，使得对于每个有限集 $S \subset V$，如果 $|\mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{h}| \geq \alpha\binom{|S|}{h}$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立，那么就存在一个 $S' \subset S$，使得 $|S'| \geq \beta(\alpha)|S|$ 且 $S' \in \mathcal{H}_{\ell+3}$。

我们可以将这一结果解读为 Helly 性质的一个稳定性版本（在某些附加假设下），因为 $\lim_{\alpha\to 1}\beta(\alpha)=1$。

据我们所知，最优的 β here 可能会将 (0, 1) 中很大一部分 αs 赋值为 0；这正是它与分数 Helly 数为 h 的超图链之间的区别，在后者中这是不可能的。不过至少，如果 α 非常接近 1，那么 $\beta(\alpha)$ 也会接近 1。

3. Proof of Theorems 8 and 9

我们先从 [9] 中引理 3.1 的一个类似结果开始。我们用 $\omega_h(\mathcal{H}_\ell|_S)$ 表示 S 中最大 h-团的大小，即满足 $\binom{K}{h}\subset\mathcal{H}_\ell$ 的最大子集 $K\subset S$ 的大小。

引理 10。设 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 是一个超图链，其 Helly 数为 h，彩色 Helly 数为 k，定义在基集 V上。那么对于每个有限子集 $S\subset V$，有

(a) $\left|\binom{S}{k}\setminus\mathcal{H}_\ell\right|\geq\binom{\frac{1}{k}(|S|-\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+1}|_S))}{k}$, *and*

(b) $\left|\binom{S}{h}\setminus\mathcal{H}_\ell\right|\geq\binom{k}{h}^{-1}\binom{\frac{1}{h}(|S|-\omega_h(\mathcal{H}_{\ell+2}|_S))}{h}$.

证明。注意，对于每个 Helly 数为 h 且彩色 Helly 数为 k的超图链，$h\leq k$ 都成立。固定 $\ell\in\mathbb{Z}$。

为证明（a）部分，设 $\{M_1,\dots,M_t\}\subset\binom{S}{k}\setminus\mathcal{H}_{\ell+1}$是 $\mathcal{H}_{\ell+1}$中由两两不相交且大小均为 k的缺失边组成的一个最大族。由该族的极大性可知，$\binom{S\setminus(M_1\cup\ldots\cup M_t)}{k}\subset\mathcal{H}_{\ell+1}$，因此，$\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+1}|_S)\geq|S\setminus(M_1\cup\ldots\cup M_t)|=|S|-tk$，或者等价地，

$$t\geq\frac{1}{k}((|S|-\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+1}|_S))). \tag{1}$$

考虑一个由 $I\in\binom{[t]}{k}$ 个 k 指数组成的选择。由于每个 M_i 都是 $\mathcal{H}_{\ell+1}$ 中缺失的一条超边，因此 $\{M_i:\ i\in I\}$ 是一个由 k 个颜色类组成的族，其中任意一个都不包含在 $\mathcal{H}_{\ell+1}$ 中。由于 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 k，存在一个由 $\{v_i$ 个顶点组成的彩色选择 $i\in I\}\subset V$（即对所有 $i\in I$ 都有 $v_i\in M_i$），使得 $\{v_i:\ i\in I\}$ 不是 $\mathcal{H}_\ell$ 中的一条超边。

注意，若 I_1、$I_2\in\binom{[t]}{k}$ 是不同的指标选择，那么根据 M_j 两两不交这一点，我们有 $\{v_i:\ i\in I_1\}\neq\{v_i:\ i\in I_2\}$。因此，我们找到了 $\binom{t}{k}$ 个 $\binom{S}{k}\setminus\mathcal{H}_\ell$ 的成员，从而完成了（a）部分的证明。

为证明（b）部分，设 $\{M_1,\dots,M_t\}\subset\binom{S}{h}\setminus\mathcal{H}_{\ell+2}$ 是由 $\mathcal{H}_{\ell+2}$ 中互不相交的缺失边组成的最大规模族，其中每条边的大小均为 h。与（a）部分中的论证类似，我们有

$$t\geq\frac{1}{h}((|S|-\omega_h(\mathcal{H}_{\ell+2}|_S))). \tag{2}$$

考虑一组 $I\in\binom{[t]}{k}$ k 个指标的选取。与（a）部分的证明一样，由于 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 k，因此存在一个彩色选择 $\{v_i$：从颜色类 $\{M_i:\ i\in I\}$ 中选出的顶点 $i\in I\}\subset V$，使得 $\{v_i:\ i\in I\}$ 不是 $\mathcal{H}_{\ell+1}$ 中的一条超边。根据 Helly 性质，存在一个 $J\in\binom{I}{h}$ 和一个 $F\in\binom{S}{h}\setminus\mathcal{H}_\ell$，使得对于每个 $j\in J$，都有 $|F\cap M_j|=1$。任意固定的 $J\in\binom{[t]}{h}$ 以这种方式至多出现 $\binom{t-h}{k-h}$ 次。此外，任意固定的 $F\in\binom{S}{h}\setminus\mathcal{H}_\ell$ 至多对应一个 J，因此至少有 $\binom{t}{k}/\binom{t-h}{k-h}=\binom{t}{h}/\binom{k}{h}$ 条缺失边 $F\in\binom{S}{h}\setminus\mathcal{H}_\ell$；结合 (2)，即可完成引理 10 的（b）部分的证明。□

定理 9 的证明。固定 $\ell \in \mathbb{Z}$，并假设 S 中 $\mathcal{H}_{\ell+3}$ 的最大超边大小至多为 $(1-\varepsilon)|S|$，其中某个 $\varepsilon > 0$。由于 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的 Helly 数为 h，这意味着 $\omega_h(\mathcal{H}_{\ell+2}|_S) \leq (1-\varepsilon)|S|$。引理 10 的（b）部分给出 $\left|\binom{S}{h} \setminus \mathcal{H}_\ell\right| \geq \binom{k}{h}^{-1}\binom{\varepsilon|S|/h}{h} \geq \delta \cdot \binom{|S|}{h}$，其中某个 $\delta = \delta(\varepsilon, k, h) > 0$。因此，若 $\beta(\alpha) \leq 1-\varepsilon$，则 $\alpha \leq 1-\delta$，从而证明了定理 9。□

为了证明定理 8，我们需要以下技术引理。它是 [9] 中引理 3.2 的类似结果，并且可以利用引理 10 的（a）部分证明。

引理 11. 设 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 是定义在基集 V 上、彩色 Helly 数为 k 的超图链。设 $S \subset V$ 是一个有限子集，且 $|S| = n$ 足够大。若对于某个 $t \in \mathbb{Z}$ 和 $c \in (0,1)$，不等式 $\omega_k(\mathcal{H}_{t+1}|_S) \leq cn/2$ 成立，则对于任意给定的 $i \in [k]$ 和满足 $|\mathcal{F}_i| \geq c\binom{n}{i}$ 的族 $\mathcal{F}_i \subset \binom{S}{i}$，存在另一个族 $\mathcal{F}_{i-1} \subset \binom{S}{i-1}$ 以及一个 $M \in \binom{S}{k} \setminus \mathcal{H}_t$，使得 $|\mathcal{F}_{i-1}| \geq \left(\frac{c}{12k^2}\right)^k \binom{n}{n-1}$，并且对于所有 $A \in \mathcal{F}_{i-1}$ 和 $v \in M$，均有 $A \cup \{v\} \in \mathcal{F}_i$。

证明。对于每个 $A \in \binom{S}{i-1}$，令 $\Gamma_A = \{v \in S : (A \cup \{v\}) \in \mathcal{F}_i\}$，并令

$$\mathcal{P} = \left\{(A, M) : A \in \binom{S}{i-1}, M \in \binom{\Gamma_A}{k} \setminus \mathcal{H}_t\right\}.$$

我们希望给 $|\mathcal{P}|$ 一个下界。由引理 10 的（a）部分，对于固定的 $A \in \binom{S}{i-1}$，至少有 $\binom{\frac{1}{k}(|\Gamma_A| - (c/2)k}{k}^n)$ 个不同的 $M \in \binom{\Gamma_A}{k} \setminus \mathcal{H}_t$，使得 $(A, M) \in \mathcal{P}$。由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}| &\geq \sum_{A\in\binom{S}{i-1}} \binom{\frac{1}{k}\left(|\Gamma_A| - (c/2)n\right)}{k} \\ &\geq \binom{n}{i-1}\binom{\binom{n}{i-1}^{-1}\frac{1}{k}\sum_{A\in\binom{S}{i-1}}(|\Gamma_A| - (c/2)n)}{k}.\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{A\in\binom{S}{i-1}} |\Gamma_A| = i|\mathcal{F}_i| \geq ic\binom{n}{i} > (n-i)c\binom{n}{i-1},$$

我们得到

$$\sum_{A\in\binom{S}{i-1}} (|\Gamma_A| - (c/2)n) > (n-i)c\binom{n}{i-1} - (c/2)n\binom{n}{i-1},$$

因此

$$|\mathcal{P}| \geq \binom{n}{i-1}\binom{\frac{nc}{2k} - \frac{ci}{k}}{k}.$$

若 n 相对于 i 和 k 足够大，则

$$|\mathcal{P}| \geq \left(\frac{c}{12k^2}\right)^k \binom{n}{i-1}\binom{n}{k}.$$

由于有 $\binom{n}{k}$ 种可能的 $M \in \binom{S}{k}$，因此存在一个 M，其中至少有 $\left(\frac{c}{12k^2}\right)^k \binom{n}{i-1}$ 个不同的 $A \in \binom{S}{i-1}$ 满足 $(A, M) \in \mathcal{P}$。这些 A 将构成 $\mathcal{F}_{i-1}$。□

定理 8 的证明。已知 $\alpha \in (0,1)$，我们的目标是找到相应的 $\beta \in (0,1)$，使其满足定义 7。令 $f(x) = \left(\frac{x}{12k^2}\right)^k$，$\alpha_0 = \alpha$，$\alpha_{i+1} = f(\alpha_i)$。我们将证明 $\beta = \alpha_{k-1}$ 是一个合适的选择。固定 $\ell \in \mathbb{Z}$，并反设 $\left|\mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{k}\right| \geq \alpha\binom{n}{k}$，但 $\mathcal{H}_{\ell+k+1}$ 在 S 内没有大小至少为 βn 的超边。由于 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 k，其 Helly 数至多为 k，因此 $\mathcal{H}_{\ell+k+1}$ 没有大小至少为 βn 的超边意味着 $\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+k}|_S) < \beta n$。

令 $\mathcal{F}_k = \mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{k}$。由于 $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 是一条超图链，因此对所有 $i \geq 0$，都有 $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{H}_{\ell+i}$；特别地，$\mathcal{F}_k \subset \mathcal{H}_{\ell+k}$。我们有 $|\mathcal{F}_k| \geq \alpha\binom{n}{k}$ 和 $\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+k}|_S) < \beta n \leq (\alpha/2)n$，因此可以应用引理 11，取 $t = \ell+k-1$ 和 $c = \alpha$，得到一个 $\mathcal{F}_{k-1} \subset \binom{S}{k-1}$，满足 $|\mathcal{F}_{k-1}| \geq \alpha_1\binom{n}{k-1}$，以及一个 $M_1 \in \binom{S}{k} \setminus \mathcal{H}_{\ell+k-1}$，使得对所有 $A \in \mathcal{F}_{k-1}$ 和 $v \in M_1$，都有 $A \cup \{v\} \in \mathcal{F}_k$。现在，我们有 $|\mathcal{F}_{k-1}| \geq \alpha_1\binom{n}{k-1}$ 和 $\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+k-1}|_S) \leq \omega_k(\mathcal{H}_{\ell+k}|_S) < \beta n \leq (\alpha_1/2)n$，于是可以再次应用引理 11，这次取 $t = \ell+k-2$ 和 $c = \alpha_1$，得到一个 $\mathcal{F}_{k-2} \subset \binom{S}{k-2}$，满足 $|\mathcal{F}_{k-2}| \geq \alpha_2\binom{n}{k-2}$，以及一个 $M_2 \in \binom{S}{k} \setminus \mathcal{H}_{\ell+k-2}$，使得对所有 $A \in \mathcal{F}_{k-2}$ 和 $v \in M_2$，都有 $(A \cup \{v\}) \in \mathcal{F}_{k-1}$。注意，对所有 $A \in \mathcal{F}_{k-2}$、$v_1 \in M_1$、$v_2 \in M_2$，都有 $(A \cup \{v_1, v_2\}) \in \mathcal{F}_k = \mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{k}$。

重复这一过程 $k-1$ 次后，我们得到一个 $\mathcal{F}_1 \subset \binom{S}{1}$，它具有 $|\mathcal{F}_1| \geq \alpha_{k-1}n = \beta n$ 和 $M_1, \ldots, M_{k-1} \in \binom{S}{k} \setminus \mathcal{H}_{\ell+1}$，使得对所有 $A \in \mathcal{F}_1$，$v_1 \in M_1, \ldots, v_{k-1} \in M_{k-1}$，均有 $A \cup \{v_1, \ldots, v_{k-1}\} \in \mathcal{H}_\ell \cap \binom{S}{k}$。由于 $\omega_k(\mathcal{H}_{\ell+1}|_S) < \beta n$，必定存在一个 $M_k \in \left(V\left(\binom{\mathcal{F}_1}{k}\right) \setminus \mathcal{H}_{\ell+1}\right)$。然而，将 $M_1, \ldots, M_k$ 视为颜色类，$(\mathcal{H}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 k，这就导致了矛盾，因为 $M_1 \otimes \ldots \otimes M_k \subset \mathcal{H}_\ell$，但不存在颜色类 $M_i \in \mathcal{H}_{\ell+1}$。□

4. Consequences for Quantitative Theorems

根据定理 2 中的 $v = d^{-cd^2}$，由定理 2 可知 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 $3d$，因此可由定理 8 得到以下推论。

推论 12. 对于任意维数 $d \geq 1$ 以及任意 $\alpha \in (0,1)$，存在一个 $\beta \in (0,1)$，使得以下结论成立。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限凸集族。假设在所有大小为 $3d$ 的子族中，至少有 $\alpha\binom{|\mathcal{C}|}{3d}$ 个子族，其 $3d$ 个成员的交集体积不小于 1。

那么，存在一个大小至少为 $\beta|\mathcal{C}|$ 的子族 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，使得 $\operatorname{vol}\left(\bigcap_{C\in\mathcal{C}'} C\right) \geq d^{-cd^3}$ 其中 $c > 0$ 是一个普适常数。

证明。上述结论等价于：若 $v = d^{-c'd^3}$，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $3d$，其中 c' 是一个普适常数。定理2指出，若 $v = d^{-cd^2}$ 如定理2所述，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 $3d$。将定理 8 应用于后一个超图链，可得，$\left(\mathbb{Q}_d\left(v^{(3d+1)\ell}\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $3d$，且 $v = d^{-cd^2}$。但这等价于：若 $v = d^{-c'd^3}$，则 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $3d$。□

这对分数 Helly 数做了小幅改进，该数在定理 3 中为 $3d+1$。我们能否低于 $3d$? 定理 9 至少意味着，定量 Helly 定理的稳定性版本具有 Helly 数 $2d$，如下所示。

推论13. 对每个正整数 d，都存在一个函数 $\beta : (0,1) \to [0,1)$，满足 $\lim_{\alpha \to 1} \beta(\alpha) = 1$，使得以下结论成立。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限凸集族。假设在所有大小为 $2d$ 的子族中，至少有 $\alpha\binom{|\mathcal{C}|}{2d}$ 个子族，其 $2d$ 个成员的交集体积至少为一。

那么，存在一个大小至少为 $\beta|\mathcal{C}|$ 的子族 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，使得 $\operatorname{vol}\left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C\right) \geq d^{-cd^2}$，其中 $c > 0$ 是一个普适常数。

证明。由于 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ 根据定理2取 $v = d^{-cd^2}$ 时，由定理1可知其 Helly 数为 $2d$，由定理2可知其彩色 Helly 数为 $3d$，因此我们可以应用定理 9。推论13的假设指出，对于凸集的一个有限子集 $\mathcal{C}$，不等式 $\left|\mathcal{Q}_d(v^0) \cap \binom{\mathcal{C}}{2d}\right| \geq \alpha\binom{|\mathcal{C}|}{2d}$ 在某个 $\alpha \in (0,1)$ 下成立，其中 v 可由定理2得到。定理 9 给出一个子族 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，满足 $\mathcal{C}' \in \mathcal{Q}_d(v^3)$ 和 $|\mathcal{C}'| \geq \beta(\alpha)|\mathcal{C}|$，其中 β 是定理 9 中的函数。对于 $\mathcal{C}'$，不等式 $\operatorname{vol}\left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C\right) \geq \left(d^{-cd^2}\right)^3 = d^{-3cd^2}$ 成立。

□

5. Remarks

以下问题尚待解决。

猜想1. 对于每个维数 d，存在一个 $v = v(d) \in (0,1)$，使得 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ 的分数 Helly 数为 $2d$。

猜想2. 对于每个维数 d，存在一个 $v = v(d) \in (0,1)$，使得 $\left(\mathcal{Q}_d\left(v^\ell\right)\right)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ 的彩色 Helly 数为 $2d$。

我们的定理 8 表明，证明猜想2也将证实猜想1。

Acknowledgement

作者谨向 M´arton Nasz´odi 致谢，感谢他提出这一问题，并在研究过程中进行了许多宝贵的讨论。

References

[1] Noga Alon、Gil Kalai、Ji˘r´ı Matou˘sek 和 Roy Meshulam。几何中产生的超图的横截数。 *Advances in Applied Mathematics*，29(1)：79 – 101，2002。[2] Imre B ´ ´ ´ *Discrete Math.* 40 2 3 141 152, arany。1982
Carathéodory 定理的一种推广。，(-)：–。[3] Imre B ´ ´ ´ *Proc.* arany、*Amer. Math. Soc.* 86 1 109 114, 1982
Meir Katchalski 和 Janos Pach。定量 Helly 型定理。，()：–。[4] Silouanos Brazitikos。Brascamp-Lieb不等式与 Helly 定理的定量版本。*Mathematika*，63(1)：272–291，2017。[5] G´abor Dam´asdi、Vikt´oria F¨oldv´ari 和 M´arton Nasz´odi。关于凸体交集体积的彩色Helly型定理。 *Journal of Combinatorial Theory, Series A*，178：105361，2021。[6] Jes´us A. De Loera、Xavier Goaoc、Fr´ed´eric Meunier 和 Nabil H. Mustafa。Carathéodory、Helly、Sperner、Tucker 和 Tverberg 定理：离散却无处不在。，()：–。[7] Jes´us A. De Loera、Reuben N. La Haye、David Rolnick 和 Pablo Sober´on。连续参数的定量组合几何。 *Discrete Comput. Geom.* 57 2 318 334, ，()：–。2017

[8] Andreas Holmsen 和 Rephael Wenger。Helly 型定理与几何截 transversal。载于 Jacob E. Goodman、Joseph O'Rourke 和 Csaba D. T

´ *Handbook of discrete and* oth 编，，第 – 页。

computational geometry 91 123 2018

CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，。第三版。[9] Andreas F Holmsen。具有禁用子结构的超图中的大团。*Combina-*

torica 40 4 527 537, 2020 ，( )：–。[10] Attila

Jung 和 M ´ ´ *European* arton

Journal of Combinatorics 99 103424, 2022

Naszodi。定量分数 Helly 定理与 (p, q) 定理。，：。[11] M. Katchalski 和 A. Liu。R^n 中的一个几何问题。*Proc. Amer. Math. Soc.*，75(2)：284–288，1979。[12] L´aszl´o Lov´asz。习题 206。*Mat. Lapok*，25(3-4)：第 370 页，1974。（匈牙利语）。[13] Ji˘ri Matousek。*Lectures on discrete geometry*，第 212 卷，*Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，2002。[14] M

´ ´ ´ ´ *Discrete Comput.* arton Naszodi。

Geom. 55 1 243 248, 2016

Barany、Katchalski 和 Pach 猜想的证明。，( )：–。[15] David Rolnick 和 Pablo Sober´on。组合几何中的定量 (p,q) 定理。*Discrete Mathematics*，340(10)：2516 – 2527，2017。[16] Sherry Sarkar、Alexander Xue 和 Pablo Sober´on。凹函数的定量组合几何。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，182：105465，2021。

Department of Computer Science, Eötvös Loránd University, Budapest.

Email address: jungattila@gmail.com