arXiv:2303.08937v1 [cs.CG] 15 Mar 2023

Portalgon 中的最短路径

Maarten Löffler ! ˇ
乌得勒支大学信息与计算科学系，荷兰；杜兰大学计算机科学系，美国新奥尔良

Tim Ophelders
乌得勒支大学信息与计算科学系，荷兰；埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰

FrankStaals !
乌得勒支大学信息与计算科学系，荷兰

Rodrigo I. Silveira ! ˇ
加泰罗尼亚理工大学数学系，西班牙

摘要

任何内蕴多面体曲面都可以表示为一组简单多边形（片段），这些多边形沿着长度相等且方向一致的边成对粘合，每个片段都赋予由其欧几里得度量导出的测地度量。我们将这种表示称为*portalgon*；如果两个 portalgon 所表示的曲面等距，则称它们等价。

我们分析最短路径的复杂度。如果一条路径在 portalgon 上的任意最短路径至多经过某个片段常数次，我们就称该片段为*happy* 。如果 portalgon 的所有片段都是 happy，则称该 portalgon 为 happy。我们提出了一种高效算法，用于计算 happy portalgon 上的最短路径。

一般来说，最短路径经过同一个片段的次数没有上限。与此相对，我们证明，任何多面体曲面的内蕴德劳内三角剖分都对应一个 happy portalgon。由于计算内蕴德劳内三角剖分可能效率低下，我们为一类受限的 portalgon 提供了一种高效算法，用于计算 happy portalgon。

2012 年 ACM 学科分类计算理论 → 计算几何

关键词与短语多面体曲面、最短路径、测地距离、德劳内三角剖分

资助 *Rodrigo I. Silveira*：部分经费由 MICINN 通过项目 PID2019-104129GB-I00/ MCIN/ AEI/ 10.13039/501100011033 提供。

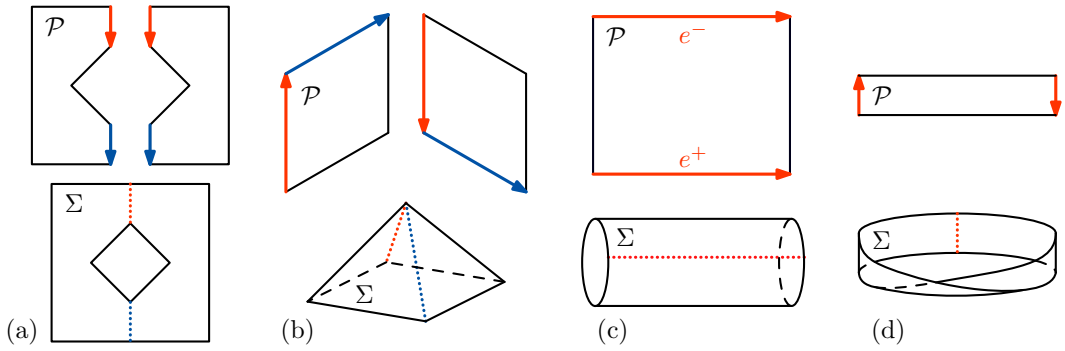


图 1门户多边形示例。相同颜色的箭头表示彼此识别的门户。(a) 表示带孔多边形的门户多边形。(b) 表示无底金字塔曲面的门户多边形。(c) 表示圆柱体曲面的门户多边形。(d) 表示莫比乌斯带（一种不可定向曲面）的门户多边形。

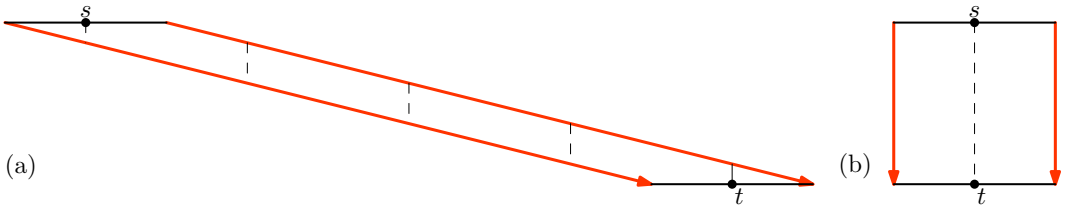


图 2 (a) 一个 portalgon，其中 s 与 t 之间的最短路径（虚线）具有无界复杂度。(b) 同一曲面的另一种表示，其中该路径具有常数复杂度。

1 引言

我们将*portalgon* $\mathcal{P}$ 定义为由若干简单多边形（片段）组成的集合，其中某些边成对识别，见图 1。将一个 portalgon 的所有片段拼接起来后，我们得到一个二维曲面 Σ，其内蕴度量 是多面体的 [8, 19]。注意，Σ 不一定能以平面或无自相交的方式嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，也不一定是可定向的。我们称$\mathcal{P}$ 为 Σ的一种表示；关键的是，同一个曲面原则上可能有许多不同的表示。门户多边形可以视为简单多边形、带孔多边形、多面体曲面，甚至可展曲面的推广。

我们关注在门户多边形上计算最短路径的计算复杂度。具体而言，我们分析最短路径图 SPM(s)；它表示从源点 s 到门户多边形中所有其他点的全部最短路径。我们的主要发现如下：

- 由给定门户多边形$\mathcal{P}$表示的曲面 Σ上，最短路径的复杂度就 Σ 和$\mathcal{P}$的组合性质而言可能无界。最短路径的复杂度取决于表示该曲面的特定门户多边形$\mathcal{P}$的一个参数，我们称之为其幸福度 h。具体而言，我们证明，最短路径的最大复杂度为 $\Theta(n+hm)$，其中 n 是门户多边形中的顶点总数， $m \le n$ 是门户数。给定$\mathcal{P}$中的一个源点，其最短路径图的复杂度为 $O(n^2h)$。此外，如果$\mathcal{P}$ 经过三角剖分，则可在 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$ 时间内计算得到，其中 k 是输出复杂度， $\lambda_4(k)$是定义在 k 个符号上的四阶 Davenport-Schinzel 序列的长度。每个具有多面体内蕴度量的曲面，都存在一种表示形式，使其成为幸福度 h 为常数的门户多边形。具体来说，这样一种表示由其内蕴德劳内三角剖分给出。在此类门户多边形中，最短路径的复杂度为 $O(n)$。由于计算内蕴德劳内三角剖分并不容易，我们研究如何将给定的幸福度为 h的门户多边形转换为幸福度为常数的门户多边形。对于一类受限的门户多边形，我们提出了一种算法，可在 $O(n+\log h)$ 时间内完成转换。一般情况下，如何计算出这样一种良好的表示仍是一个悬而未决的问题。

1.1 与相关工作的比较

最短路径已在许多不同的几何场景中得到研究，例如简单多边形、多边形区域、地形、曲面和多面体（参见例如 [6, 12, 14, 24]；全面综述请参阅 [21]）。高效计算最短路径是计算几何中的一个基础问题 [20, 23, 13, 6, 28, 27]。对于简单多边形环境，相关情况已得到充分理解 [13, 12]。对于带孔多边形，高效解法也早已为人所知 [14],，最近更提出了一种最优的 $O(n+k\log k)$ 时间算法，其中 n 是多边形的顶点总数，而 k 是

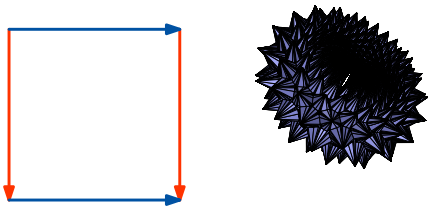


图3 (a) 表示平坦环面的一个 portalgon。(b) 有趣的是，平坦环面可以在 $\mathbb{R}^3$ 中等距嵌入；然而，所得嵌入的复杂度非常高 [5, 17]（图片来源：`https://www.imaginary.org/es/node/2375`）。

孔的数量 [27]。对于更复杂的环境，例如凸多面体的表面，已有若干算法被提出 [6, 22, 29], ，其中一些甚至已实现 [15, 16]。然而，对于更一般的曲面，相关情况还不够明了。

门户多边形推广了许多以往研究过的几何场景。因此，我们的目标是统一现有的最短路径结果。据我们所知，此前尚未有人尝试这样做，尽管近二十年前的一篇博客文章中曾将若干与本文所探讨问题密切相关的问题列为开放问题 [10]。相反，门户多边形这一概念鲜少受到探索；尽管它早已融入流行文化 [7, 9, 26], ，但仅有 Erickson 和 Nayyeri 从计算角度在环形射线发射的背景下对其进行过研究 [11]。

衡量最短路径的复杂度时，我们可以区分其内在复杂度，以及由底层曲面的表示所导致的复杂度。例如，在一个具有 n 个顶点的凸多面体 Σ 上， π 上的最短路径可能会穿过（因而发生弯折） $O(n)$条边。因此， π 在 Σ 上的描述具有 $O(n)$复杂度。然而，已知任何位于 $\mathbb{R}^3$ 中的凸多面体都可以展开成一个简单的平面多边形P_Σ，并且展开方式使得 π 上的最短路径对应于 P_Σ [1, 2, 6]中的一条线段。因此， π 实际上可以用常数复杂度的方式在 P_Σ 中描述。容易看出，某些 portalgon 可能具有复杂度无界的最短路径，如图 2(a) 所示。然而，这种无界复杂度完全是由表示造成的；事实上，存在另一个不会出现这种情况的等价 portalgon（图 2(b)）。我们引入一个参数，明确衡量最短路径具有高复杂度的可能性，并将其称为幸福度——正式定义请参见第2节。

在第3节中，我们根据幸福度分析最短路径的复杂度。我们的第一个主要结果是：如果一个 portalgon 有 n 个顶点，幸福度为 h，那么从给定源点出发的最短路径图的复杂度为 $O(n^2h)$。此外，我们证明，对于三角剖分门户多边形，可以采用输出敏感方式计算该图：若 k 是最短路径图的复杂度，那么可以在 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$ 时间内计算得到。

值得注意的是，我们对最短路径图的分析，与用于计算多面体曲面上最短路径的技术有相似之处，其中最为显著的是 [6, 22]。然而，portalgon 的一般性更强，这意味着它与以往方法存在重要差异。我们需要处理亏格非零的曲面（例如，参见图3），而 Chen 和 Han [6] 要求亏格为零，才能计算三角形内部的映射（参见他们定理4的证明）。此外， Σ 可能无法嵌入具有平坦三角形的欧几里得空间。另一个区别是，portalgon 中的最短路径可以多次穿过同一条门户边，而多面体曲面的算法通常（明确或隐含地）假设这种情况不可能发生（例如，见 [22]）。

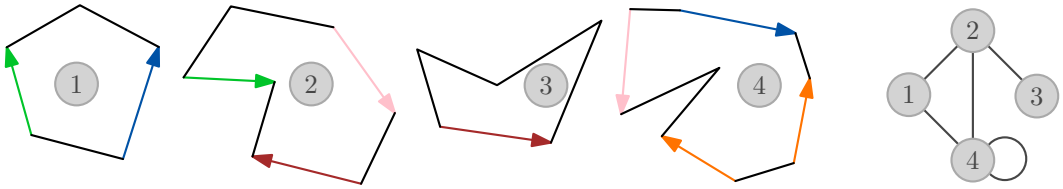


图4 由四个片段和五个门户组成的 portalgon 的片段图。

最短路径图的复杂度可以用幸福度的函数来给出上界，这一事实引出了一个自然的问题：对于给定的曲面 Σ，它是否总能表示为具有有界幸福度的 portalgon $\mathcal{P}$？ 在第 4 节中，我们证明这个问题的答案是“是”。具体而言，我们的第二个主要结果是，对于任意 portalgon，其内蕴德劳内三角剖分 [4] 都具有常数幸福度。

接下来，这又引出了一个自然的问题：给定一个曲面 Σ，我们能否高效地计算出一个表示它的 portalgon，使其幸福度有界，最好是常数？显然，这个问题的答案取决于 Σ 的表示方式。如果 Σ 是以 portalgon $\mathcal{P}$ 的形式给出的（其幸福度可能无界），那么这个问题就对应于将$\mathcal{P}$ 转换为一个幸福度为常数的等价 portalgon 的问题。这正是我们在第 5 节研究的问题。根据上述结果，自然的做法是尝试构造 $\mathcal{P}$ 的内蕴德劳内三角剖分。遗憾的是，目前尚不清楚能否高效地完成这一任务（即能否在 n 和 h 方面给出保证）。我们的第三个主要结果表明，对于一类受限的 portalgon，我们可以给出这样的保证。具体而言，如果输入的 portalgon 只有一个门户、 n 个顶点，且幸福度为 h，那么我们可以在 $O(n + \log h)$ 时间内构造一个幸福度为常数的等价 portalgon。

2 定义与观察

门户多边形。 我们将一个*portalgon*$\mathcal{P}$定义为一对（$\mathcal{F}$ P），其中$\mathcal{F}$是由若干简单多边形组成的集合，这些多边形称为片段，而 P 是门户的集合。门户 是一个无序对$e = (e^-, e^+)$，其元素是来自$\mathcal{F}$中某个或某些片段的有向、互异且长度相等的边。我们将 e^- 和 e^+ 称为门户边，见图 1(c)，并要求每条门户边恰好属于一个门户。如果 p^- 是 e^-上的一点，那么 p^+ 表示 e^+上的对应点。

令 n 为$\mathcal{P}$各片段中的顶点总数，令 m 为门户边的数量；门户的数量为 $m/2$。注意，$m \le n$。我们分别用 n_F和 m_F表示片段 $F \in \mathcal{F}$ 中的顶点数和门户边数。

如果沿着片段的公共门户边将这些边“粘合”起来，那么 portalgon$\mathcal{P}$ 就描述了一个曲面（带边界的二维流形） $\Sigma = \Sigma(\mathcal{P})$，见图 1。具体而言， Σ 是从$\mathcal{P}$ 出发，对集合$\mathcal{F}$ 中的对应门户边上的点进行识别后得到的空间。我们可以将 Σ写成商空间 $(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) / \sim$，其中 $\sim$是将对应门户边 e^- 和 e^+粘合起来的等价关系。

片段图。 portalgon $\mathcal{P} = (\mathcal{F}\ P)$ 会导出一个（多重）图，我们称之为片段图 G，它对应于$\mathcal{P}$（见图4）。每个片段 $F \in \mathcal{F}$ 都是 G中的一个节点；当且仅当存在一个门户 e，使得 e^- 位于 F_1 中且 e^+ 位于 F_2中，或反之时， F_1 和 F_2 之间才有一条连接。请注意，连接 F_1 和 F_2的门户可能不止一个。

路径与最短路径。路径 π 是一个连续函数，它将区间 $[0, 1]$ 映射到 Σ，其中 $s = \pi(0)$ 和 $t = \pi(1)$。对于两点 $p = \pi(a)$ 和 $q = \pi(b)$，

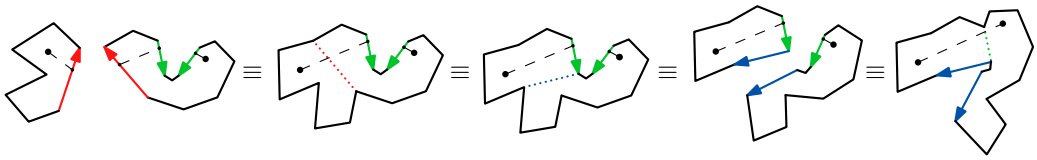


图 5 五个等价的 portalgon，以及同一对点之间的最短路径。

我们用 $\pi[p,q]$ 表示将 π 限制在区间 $[a,b]$上的函数。$\mathcal{P}$的片段将π 分割为一组 Π 极大的非空子路径 $\pi_1,..,\pi_z$，其中每条子路径（的像）都包含在单个片段内。确切地说，对于每个片段 F，π （的像）与 F 的交集是极大子路径的集合，而 Π 是所有片段 F[1]对应集合的并集。我们将 π 的长度定义为其各条子路径长度之和，并将 $d(s,t)$定义为 $s \in \Sigma$ 与 $t \in \Sigma$ 之间所有路径长度的下确界。我们继承了各片段中度量的性质：$d(s,t) = 0$ 当且仅当 $s = t$。由此可得，d 也是一个度量。此外，(Σ, d)是一个测地空间。

注意，若 π 是 s 与 t 之间的一条最短路径，则每条子路径 π_i 都是一条折线路径，其顶点要么是 π_i 的端点，要么是包含 π_i 的片段的顶点。此外，当 π 穿过一个门户时，路径不会转弯（否则我们可以再次在局部缩短它）。由此可知，最短路径 π 也是一条折线路径，并且可以唯一地描述为以下交替序列：顶点（s、t 或 portalgon 顶点）$s = v_1$、E_1、v_2，……，E_k、$v_{k+1} = t$，以及路径所穿过的门户边序列。我们将这种路径描述称为路径的**组合表示**，并将这些序列的总长度称为 π 的**复杂度**。在本文余下部分，我们用 $\pi(s, t)$ 表示 s 与 t 之间任意一条复杂度最低的最短路径。正如我们之前所观察到的（见图 2(b)），一条最短路径仍可能多次与同一条门户边相交，因此最短路径的复杂度可能无法用 n 和 m 限定。

等距变换。度量空间 X和 Y之间的映射 $f\colon X \to Y$称为等距变换，如果对于所有 $x, x' \in X$，都有 $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$。如果存在点 x的一个开邻域 U_x，使得 f 在 U_x 上的限制是等距变换，则称 f在点 x处是**局部等距映射**。

等价 portalgon。给定一个 portalgon$\mathcal{P}$，还有许多其他 portalgon 描述同一个曲面 Σ。例如，我们总可以将一个片段的一条弦变成门户，从而把该片段切分成两个更小的片段；或者，在不会造成重叠的前提下，沿着一个门户粘合两个片段，见图 5。更正式地说，如果存在它们之间的双射等距映射（也就是说，对于任意一对点 $s, t \in \mathcal{P}$，它们在$\mathcal{P}$ 和$\mathcal{Q}$ 中的距离相同），则称两个 portalgon $\mathcal{P}$ 和$\mathcal{Q}$ 等价，记作$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$。

幸福度。我们的最终目标是：对于给定的输入 portalgon，找到一个与之等价的 portalgon，使其所有最短路径的复杂度都有界。为此，我们引入*happy portalgon*这一概念，具体来说，就是 portalgon 的一个幸福片段。

令 $\mathcal{P} = (\mathcal{F}, P)$ 为一个 portalgon，令 $F \in \mathcal{F}$为 $\mathcal{F}$ 中的一个片段，并令 $\Pi(p, q)$ 表示 $p, q \in \Sigma$ 之间所有最短路径的集合。我们将 $c(X)$ 定义为连通

[1] 请注意，如果 π 经过$\mathcal{P}$ 的一个顶点，而该顶点出现在多个门户中，那么 Π 就包含一些子路径，其像仅由一个点组成，也就是该顶点本身。稍后我们会将注意力限制在复杂度最小的路径上，这样就能去除这类单点路径。

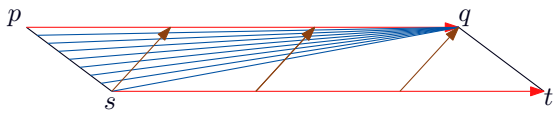


图 6 一个简单的 h-happy portalgon，其中一条最短路径的复杂度为 $\Omega(hm)$，因为它穿过 s $\Omega(m)$ 条门户边（蓝色门户边），每条各穿过 $\Omega(h)$ 次。

分量的数量，其中 X。片段 F 的幸福度 $\mathcal{H}(F) = \max_{p,q\in\Sigma} \max^{\pi\in\Pi(p,q)} {}^{c}(F \cap \pi)$ 定义为任意一对点 $p, q \in \Sigma$ 之间的最短路径 π 经过该片段的最大次数。$\mathcal{P}$ 的幸福度定义为 $\mathcal{H}(\mathcal{P}) = \max_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{H}(F)$，即所有片段中的最大幸福度。当 $\mathcal{H}(\mathcal{P}) \le h$ 时，我们称该 portalgon 是 h-幸福的。此外，我们有时会称一个幸福的 portalgon 为“幸福的”，即使没有给出 h 值，也表示它是 $O(1)$-幸福的。

▶**引理1**。设 $P = (F\ P)$ 是一个 h-*happy portalgon*，且 $P' = (F', P')$ 是 P 的一个三角剖分。P' 的幸福度至多为 h；也就是说，P' 是一个 h-*happy portalgon*。

注意，如果 $\mathcal{P}$ 有 n 个顶点和 m 个门户，那么它的任意三角剖分 $\mathcal{P}'$ 都由 n 个顶点和 $O(m+n)$ 个门户组成。对于一个 h-happy portalgon，最短路径每条门户至多穿过 $h-1$ 次；这一事实意味着以下结论。

▶**引理2**。设 P 是一个 h-*happy portalgon*，且 s 和 t 是 P 中的两个点。$\pi(s,t)$ 之间的一条最短路径的复杂度为 $O(n+hm)$。在最坏情况下，此界是紧的。

证明。$\pi(s,t)$ 的顶点有以下几种：(i) s 或 t 本身，(ii) P 的顶点，或 (iii) $\pi(s,t)$ 与门户边相交的点。$\pi(s,t)$ 上只有两个类型 (i) 的顶点。最短路径至多经过 P 的每个顶点一次；因此，类型 (ii) 的顶点至多有 n 个。最后，由于 P 是 h-happy，$\pi(s,t)$ 与每个片段 $F \in$ F 至多相交 h 次。在没有门户的片段中，若一条链有 $\Omega(n)$ 个凹顶点，则很容易得到复杂度为 $\Omega(n)$ 的最短路径。使用图 6 所示的 portalgon 可以得到 $\Omega(hm)$ 这一项。对于任意 h，我们都可以选择红色门户的长度，使该 portalgon 满足 h-happy。◀

最短路径图。给定一个 portalgon $\mathcal{P}$、一个源点 $s \in \Sigma$ 和一个区域 $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$，$s$ 的最短路径图 $\mathrm{SPM}_{\mathcal{X}}(s)$ 是对 $\mathcal{X}$ 的细分，将其划分为极大连通区域，使得对于区域 $R \in$ 内部的所有点 q，$\mathrm{SPM}_{\mathcal{X}}(s)$ 中从 s到 q 的最短路径都是唯一的，并且具有相同的组合结构，即经过 $\mathcal{P}$ 的相同顶点序列和门户边。注意，$\mathrm{SPM}_{\mathcal{X}}(s)$ 的复杂度取决于曲面 $\Sigma = \Sigma(\mathcal{P})$ 的表示，也就是 portalgon $\mathcal{P}$。因此，对 $\mathcal{P}$ 的更改可能会影响 $\mathrm{SPM}_{\mathcal{X}}(s)$ 的复杂度。例如，将 $\mathcal{P}$ 的面细分会增加 $\mathrm{SPM}_{\mathcal{X}}(s)$ 的复杂度。因此，当 Σ 固定时，一个重要问题是找到表示它的良好 portalgon（即一个使 $\mathrm{SPM}(s) = \mathrm{SPM}_{\Sigma}(s)$ 具有较低复杂度的 portalgon）。

内蕴德劳内三角剖分。portalgon 的三角剖分是一个等价 portalgon，其顶点集相同，且所有片段都是三角形。特别地，在所有此类三角剖分中，内蕴德劳内三角剖分满足：对于三角剖分中的任意一条内部边，与该边相邻的两个三角形 t 和 t' 中，不与该边相邻的角 t 和 t' 之和至多为 180 度 [4]。

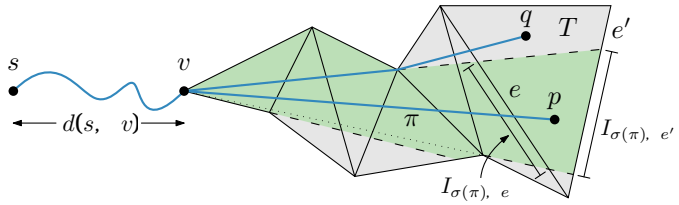


图7 路径 π 从点 s 到点 p 在三角形 T 中的长度为 $d(s,\ v) + \|p - v\|$。 π 的签名定义了区间 $I_{\sigma(\pi),\ e}$ 和 $I_{\sigma(\pi),\ e'}$，它们位于 T 的边 e 和 e' 上；此外还定义了距离函数 $d_{\sigma(\pi)}$，该函数由 T 中通往点 q 的路径示出。

3 Portalgon 中的最短路径

本节将介绍如何计算三角剖分的 h-happy portalgon $\mathcal{P}$ 中源点 s 的最短路径图 $\mathrm{SPM}_{\mathcal{P}} := \mathrm{SPM}_{\mathcal{P}}(s)$。根据引理1，任意 h-happy portalgon 都可以通过对其片段进行三角剖分，并将所得对角线替换为门户，转化为三角剖分的 h-happy portalgon。为便于描述，我们假设任意两个三角形至多有一条公共边，并且 s 是三角剖分的一个顶点。我们还可以将每个三角形细分为 $O(1)$ 个 h-happy 三角形来实现这一点。

对于一条从源点 s出发的路径 π，将其签名记为 $\sigma(\pi)$，定义为它经过的顶点和门户组成的序列。请注意，路径可能同时经过一个顶点和一个门户（或多个与该顶点相接的门户）。在这种情况下，我们通过将顶点排在门户之前，并按照路径在避开顶点的微小扰动下经过各门户的顺序排列门户，来打破序列中的平局（扰动方式保持一致）；其中，我们始终将路径起点扰动到与 s相接的一个固定三角形 T_s 内。

如果 π 是从源点 s 到三角形 T内一点 p 的最短路径，且 v 是 $\sigma(\pi)$上的最后一个顶点，那么 π的长度为 $d(s,v) + d(v,p)$，其中 $d(v,p)$可以表示为如下线段的长度。我们认为 T 局部等距地嵌入在欧几里得平面中，并通过展开 π 在 v之后经过的片段，可以在平面中得到 v 的一个副本，以及 π 在 v之后经过的门户和三角形的副本；见图7。这些副本在平面中的位置仅取决于$\sigma(\pi)$（而不取决于 p 或 π 本身）。于是， $d(v,p)$就是平面中 v和 p 的副本之间的欧几里得距离，并且连接这些副本的线段会经过 $\sigma(\pi)$在 v之后经过的所有门户的展开副本。设 e 是 T的一条边，并将 $I_{\sigma(\pi),e}$ 定义为 e 上满足线段 vp 经过 $\sigma(\pi)$在 v 之后经过的所有门户的展开副本的点 p 所构成的区间。对于 T中的一点 q，定义

$$f_{\sigma(\pi)}(q) = \begin{cases} d(s,v) + \|\overline{vq}\| & \text{if the segment } \overline{vq} \text{ passes through } I_{\sigma(\pi),e}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 $d_{\sigma(\pi)}(q)$ 为从 s 到 q 且签名为 $\sigma(\pi)$ 的路径的长度下确界。这个下确界不一定能由具有相同签名的路径取得，但总能由一条路径取得；该路径可能在 $\sigma(\pi)$ 的最后一个顶点之后绕过其他顶点，因此这些顶点会被插入其签名中。我们称这样的签名可约化为 $\sigma(\pi)$。注意，如果 $f_{\sigma(\pi)}(q)$ 有限，那么 $f_{\sigma(\pi)}(q) = d_{\sigma(\pi)}(q)$。如果 π 是从 s 到 p 的一条最短路径，那么 π 的长度为 $f_{\sigma(\pi)}(p)$。对于 T 的一个门户 e，令 $f_{\sigma(\pi)|e}\colon e \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 为 $f_{\sigma(\pi)}$ 在 e 上的点的限制。

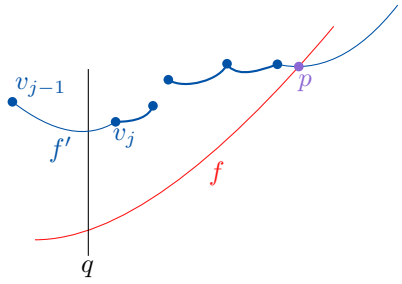


图 8 在 NextVertex(f, q) 查询中，我们在每条下包络线上找到 $\text{env}_i(q)$，并沿着每条下包络线 env_i（以深蓝色显示）游走 env_i，以找到第一个交点 p，即 f 与 env_i的交点。粗蓝色线段env_i 始终被 f支配，因此我们将其删除。

3.1 用于维护下包络的数据结构

设 F 是一组 m 部分连续函数，每个函数都定义在单个区间上，并且任意一对函数最多相交两次。我们描述一种数据结构，用于存储 F 的下包络 env_F，并支持以下操作：

NextLocalMinimum(δ): 报告 env_F 中大于 δ的最小局部最小值。**NextVertex(f, q):** 给定一个函数 $f \in F$，它在点 q处实现 env_F，找到（如果存在）

最低端点 (v, δ')，它是包含 env_F的线段的端点，且该线段包含 $(q, f(q))$，满足 $\delta' > f(q)$。**Insert(f):** 向 F中插入一个新函数。

我们构建了一种简单的静态数据结构，支持 NextLocalMinimum 和NextVertex 操作，并通过对数方法 [3]将其转化为高效的仅支持插入的数据结构。在静态结构的实现中，这两种查询操作实际上可能会修改静态结构，从而保证高效的摊还查询时间。

我们使用 $O(\log m)$ 静态数据结构表示 env_F。每个这样的静态数据结构存储一组函数 2^i 中某个子集 F_i 的下包络 env_i。具体来说，它存储：

(i) 一棵二叉搜索树，包含 env_i 中（某个子集的）区间，并按照其左端点的 x 坐标排序；(ii) 一个有序列表，包含 env_i 上的局部极小值，并按照递增的 y 坐标排序。

现在，我们可以轻松回答 **下一个局部最小值** 查询，耗时 $O(\log^2 m)$：对于每个已存储的下包络（共$O(\log m)$ 个），我们在局部极小值列表中进行二分查找，找到值大于 δ的最小极小值，并报告其中最小的一个。

为回答 NextVertex(f, q) 查询，我们实质上要计算包含 (q, δ) 的 env_F 线段的端点，并报告其中值大于 δ 的最左端点。为找到该线段的右端点，我们执行以下操作（左端点的查找方式对称）。对于 $O(\log m)$ 个静态结构中的每一个，我们在 env_i 的顶点上进行二分搜索，以找到包含点 q 的区间 $[v_{j-1}, v_j]$，以及在该区间内构成 env_i 的函数 f'。随后，我们沿着 env_i 游走，找到其右侧与 env_i 相交的第一个交点 p（见图 8）。具体而言，我们计算 f 与 f' 的交点；如果区间 $[q, v_j]$ 内存在这样的交点，我们就找到了点 p。否则，我们继续搜索（游走）下一个区间 $[v_j, v_{j+1}]$。如果到达某个左端点严格低于 f 的区间，我们就可以停止游走（这种情况下，env_i 上不存在交点）。在这次游走中遇到的所有区间 $[v_{j-1}, v_j]$，若 f 在整个区间内都低于 f'，则它们永远不会出现在 env_F 上（因为 f 永远不会

被删除）。因此，我们将从 env_i 中删除这些区间。这使我们能够界定所有查询中沿 env_i 包络线游走所花费的总时间。因此，查询的运行时间为 $O(\sum_{i=0}^{O(\log m)} |\text{env}_i| + \ell) = O(\log m \log |\text{env}_F| + \ell) = O(\log^2 m + \ell)$，其中 ℓ 是这次游走中删除的区间总数。

最后，为了处理 Insert(f) 操作，我们创建一个新的静态数据结构下包络结构 env_0，仅表示单元素集合 $F'_0 = \{f\}$。如果某时有两个静态数据结构分别表示集合 F_i 和 F'_i，且它们的大小相同 2^i，我们就用一个表示大小为 2^{i+1} 的新集合 $F'_{i+1} = F_i \cup F'_i$ 的数据结构替换它们。我们可以通过合并这两个已有结构来构造这个数据结构：也就是说，我们可以同时扫描 env_i 和 env'_i，在时间 $O(|\text{env}_i| + |\text{env}'_i| + |\text{env}'_{i+1}|) = O(|\text{env}'_{i+1}|)$ 内创建合并后的新包络线。在合并过程中，我们可以标记仍然是局部极小值的局部极小值。然后，我们可以在线性时间内合并已标记局部极小值的有序列表。

接下来，我们证明，在一系列 m 次插入过程中所创建的下包络中的区间总数至多为 $O(|\text{env}_F| \log m) = O(\lambda_4(m) \log m)$，其中 $\lambda_4(n)$ 是由 n 个符号构成的四阶 Davenport-Schinzel 序列的最大长度。因此，摊销插入时间为 $O((\lambda_4(m)/m) \log m)$。

▶**引理 3.** 在对 F 进行一系列 m 插入操作后，所创建的 i 包络线 $O(\lambda_4(m) \log m)$ 中的区间总数为▶。

证明。 考虑最终结构中的函数集合 F_j，我们将集合中函数产生的所有区间数界定为 F_j，即 $O(\lambda_4(2^j) \log m)$。由此可知，所创建区间的总数至多为 $\sum_{j=0}^{O(\log m)} O(\lambda_4(2^j) \log m) = O(\lambda_4(2^{O(\log m)}) \log m) = O(\lambda_4(m) \log m)$，证毕。

显然，由 F_0 产生的区间至多有一个。对于由 F_j 中的函数产生的所有区间（其中 $j > 0$），它们是在我们将 env_i 和 $\text{env}'_i 0 \le i < j$ 合并为 env_{i+1} 时创建的。将从 env_i 和 env'_i 创建区间的代价计入 env_{i+1} 中的区间。由此可知，最终所有代价都计入 env_j 中的区间。此外，env_j 中的每个区间最多被计入 $O(j) = O(\log m)$ 次。由于 env_j 至多包含 $O(\lambda_4(2^j))$ 个区间，结论得证。◀

由于每个区间最多只能删除一次，因此我们得到以下结果：

▶ **引理 4。** 我们可以在一个数据结构中维护一组部分函数的下包络线 env_F，其中任意两条函数曲线至多相交两次 F，且满足：任意一系列 f 操作 m **插入** 操作以及 k **下一个局部最小值**和 **NextVertex** 查询所需的时间至多为 $O(k \log^2 m + \lambda_4(m) \log m)$。

3.2 限制在边上的最短路径图

我们首先计算 s 的最短路径图，并将其限制在 portalgon 的边上。与早期工作 [22, 23] 一样，我们传播距离为 δ、来自 s 的点所形成的波前，同时让 δ 从 0 变化到 ∞。不过，将其视为一组同时运行的扫描线算法会更加方便。对于每条门户边 e，我们将一条高度为 δ 的水平线向上扫描，穿过“沿 e × 的位置—距 s 的距离”空间（见图 9），同时构建扫描线 e 下方的最短路径图。主要的挑战是如何及时计算下一个事件——即扫描线上方距离函数下包络线中的第一个顶点。

对于每个连接两个片段 T_A 和 T_B 的门户 e，我们维护以下信息：

10 Portalgon 中的最短路径

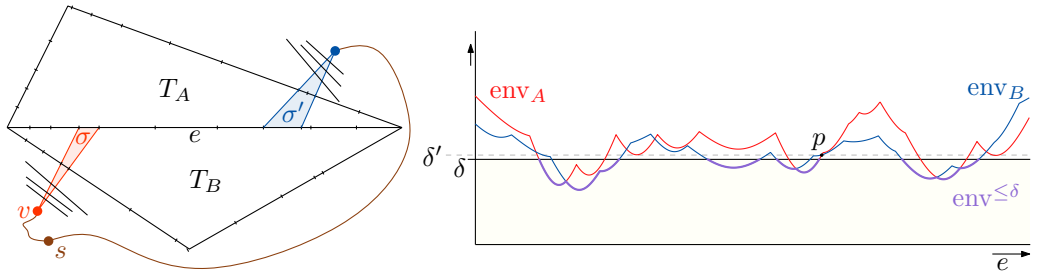


图 9 计算边的最短路径图时所维护的信息。

1. 设 $S_A(e,\ \delta)$（分别为 $S_B(e,\ \delta)$）是从 s 到 T_A（分别为 T_B）边界上各点的最短路径签名集合，其中签名的最后一个元素不是 e，且路径长度至多为 δ。我们通过存储区间 $I_{\sigma,\ e}$、最后一个顶点（其展开副本）v 在 σ上的位置，以及 $d(s,\ v)$，以隐式方式表示每个签名 $\sigma \in S_A(e,\ \delta) \cup S_B(e,\ \delta)$，从而能够在常数时间内计算 $f_{\sigma|e}$。为恢复最短路径图，我们还会存储一个指向 σ 上前一条边（如果有）的对应数据的指针。

2. 我们将函数 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 的下包络存储在引理 4 的数据结构中，其中 $f_{\sigma|e}$ 遍历签名 $\sigma \in S_A(e,\delta)$。基于 S_B，我们对称地定义并存储 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$。

3. 令 $\mathrm{env}(e,\delta)$ 表示函数 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 和 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 的下包络。我们只维护 $\mathrm{env}(e,\delta)$ 位于扫描线下方的部分，记作 $\mathrm{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$。直观而言，$\mathrm{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 是最短路径图$_e$ 中距离 δ 内、以 s 为起点的部分。我们将其存储在沿边排列的断点所构成的平衡二叉搜索树中。请注意，其中一些断点可能位于扫描线上，因此会随着扫描线连续移动。

4. 我们维护一棵二叉搜索树 $\mathrm{env}^{=\delta}(e,\delta)$，按沿扫描线的顺序存储 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 和 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 与扫描线的交点。对于每个这样的交点，我们存储实现该交点的、来自 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 或 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 的函数。

5. 最后，我们维护一组与边 e有关的事件。我们将所有边的事件汇总到一个全局优先队列中，并利用它推进扫描线算法，前进到下一个相关值。对于边 e，我们存储满足以下条件的值 $\delta' > \delta$：

   a. δ' 对应于函数 $f_{\sigma|e}$ 的一个极小值，其中 $\sigma \in S_A(e,\delta) \cup S_B(e,\delta)$；b. δ' 对应于 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 或 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 的一个顶点，特别是当前出现在 $\mathrm{env}^{=\delta}(e,\delta)$ 中的某条边的一个端点；或 c. δ' 对应于 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 上的函数 $f_{\sigma|e}$ 与 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 上的函数 $f_{\sigma'|e}$ 之间的交点，其中 $f_{\sigma|e}$和 $f_{\sigma'|e}$是 $\mathrm{env}^{=\delta}(e,\delta)$ 中相邻的元素。

   对于每个事件，我们还会记录其类型及相应的函数。

注意，$\mathrm{env}^{\leq\infty}(e,\infty) = \mathrm{env}(e,\infty)$。在展示如何维护上述所有信息之前，我们先说明这些信息确实对应于最短路径图。

▶ **引理 5.** $\mathrm{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 编码了长度为 $\leq\delta$、到达边 e上各点的最短路径。

[2] 为提高效率，我们根据路径的签名一致地打破平局，从而在符号层面确保最短路径的唯一性。

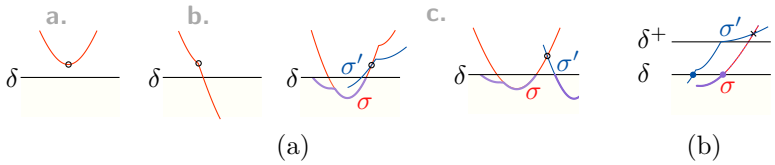


图10 (a) 不同的事件类型：a. env_A 或 env_B中的局部极小值；b. env_A 或 env_B的断点；以及两个 c 类型的事件：env_A 和 env_B的首次交点。(b) 当 $f_{\sigma|e}$ 和 $f_{\sigma'|e}$ 在时间 δ^+成为 $\text{env}^{=\delta}$ 中的邻点时，我们将检测 env_A 和 env_B 之间的交点。

证明。对于任意点 $q \in e$，从 s 到 q的最短路径 π（由于平局判定而唯一）要么从 T_A 到达，要么从 T_B到达。如果 π 的长度至多为 δ，那么 $\sigma(\pi)$ 就出现在 $S_A(e,\delta)$ 或 $S_B(e,\delta)$ 中，因此 $f_{\sigma(\pi)|e}(q)$ 位于下包络 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 上或其上方。反过来，下包络 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 上函数值有限的任意点都对应一条长度为该函数值的路径，因此 $f_{\sigma(\pi)|e}(q)$ 确实位于下包络 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 上。◀

对于 $\delta = 0$ 和任意一条边 e，如果 T_A 不包含 s，我们将 $S_A(e,0)$ 初始化为空；否则，将其初始化为一个仅含单个序列的集合，该序列由 s 以及 T_s 和 T_A之间、绕着 s 的边组成（不包括 e）。我们对称地初始化 S_B。据此，env_A 和 env_B 最初都是至多包含一个函数的下包络，其中 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 为空，除非 $s \in e$。因此，与 e 相关的事件优先队列至多包含一个事件：$\text{next}(e,0)$ 是 s 到 e 在 T_A 或 T_B 内部的距离（如果 s 位于 T_A 或 T_B中），否则为 ∞。接下来需要论证，随着 δ 增加，我们能够正确地维护这些信息。

注意，我们的事件使我们能够正确检测到首次出现 $\delta' > \delta$ 的时间，此时 $\text{env}^{\leq\delta'}(e,\delta)$ 在组合意义上与 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\delta)$ 不同，前提是 $S_A(e,\delta)$ 和 $S_B(e,\delta)$ 保持不变。特别地，任何局部最小值 $\text{env}(e,\delta)$ 都是 $\text{env}_A(e,\delta)$ 或 $\text{env}_B(e,\delta)$ 的局部最小值；而 $\text{env}(e,\delta)$ 的任何顶点，要么是 $\text{env}_A(e,\delta)$ 或 $\text{env}_B(e,\delta)$ 的顶点，要么是 $\text{env}_A(e,\delta)$ 与 $\text{env}_B(e,\delta)$ 的交点。函数 $\text{env}_A(e,\delta)$ 与 $\text{env}_B(e,\delta)$ 只能在时间 δ' 相交，此时 $f_{\sigma|e}(e,\delta)$ 和 $f_{\sigma'|e}(e,\delta)$ 在某个时间 $\delta < \delta'$ 于扫描线上相邻。

事件处理。在某个事件（无论类型如何）发生时，$\text{env}_A(e,\ \delta)$ 和 $\text{env}_B(e,\ \delta)$ 的函数与扫描线相交的顺序会改变。因此，我们通过移除并插入与该事件相关的适当函数来更新 $\text{env}^{=\delta}(e,\ \delta)$，并确保发现任何其他事件。

对于每个新插入的函数 $f_{\sigma|e} \in \text{env}_A(e,\delta)$，若其与扫描线相交于点 (q,δ)，我们使用 $\text{NextVertex}(f_{\sigma|e}, q)$ 查询，找到扫描线将越过 $\text{env}_A(e,\delta)$ 的一个顶点时所对应的下一个 b 类事件。对于任何函数$f_{\sigma'|e} \in \text{env}_B(e,\delta)$，我们也使用类似的查询。

此外，对于任何函数 $f_{\sigma|e} \in \text{env}_A(e,\delta)$，若其沿扫描线的顺序有一个新的邻居 $f_{\sigma'|e} \in \text{env}_B(e,\delta)$，我们就计算这两个函数是否在扫描线上方相交；若相交，则在事件队列中创建一个新的 **c 类**事件。对于$f_{\sigma|e} \in \text{env}_B(e,\delta)$ 的情况，我们也采用类似的处理方式。此外，我们会移除不再相邻的函数对应的所有 **c 类**事件。

如果此事件是 $\text{env}_A(e,\delta)$ 的一个局部最小值，我们就调用 $\text{env}_A(e,\delta)$ 上的 NextLocalMinimum，提取扫描线上方的下一个局部最小值。我们对 $\textbf{env}_A(e,\delta)$的局部最小值也采用类似的处理方式。$\text{env}_B(e,\delta)$。

最后，作为该事件的结果，$\text{env}^{\leq\delta}(e,\ \delta)$ 中可能出现了一个新函数，例如 $f_{\sigma'|e}$ fro m $\text{env}_B(e,\ \delta)$。因此，我们将它插入 $\text{env}^{\leq\delta}(e,\ \delta)$，并传播由边 σ' 扩展的

12 Portalgon 中的最短路径

，进入集合 $S_B(e',\ \delta)$ 中，即与 T_A 相邻的另外两条边 e' 。因此，我们使用 **插入** 调用，将一个新函数插入 $\mathrm{env}_A(e',\ \delta)$ (如果它尚未存在)，并在 $\mathrm{env}_A(e',\ \delta)$ 上调用以确保更新下一个局部最小值。**下一个局部最小值**(δ) 调用

将 $f_{\sigma'|e'}$ 插入 $\mathsf{env}_A(e',\delta)$ 时，它可能已经与距离空间中的扫描线相交；也就是说，可能存在一个点区间 $q' \in [a',b']$ ，使得其中的点位于 e' 上，并且满足 $f_{\sigma'|e'}(q') \le \delta$。因此，我们将 $f_{\sigma'|e'}$ 与扫描线的至多两个交点（a' 和 b'）插入 $\mathsf{env}_=(e',\delta)$，进而更新由这些新交点引发的至多八个 b 类和 c 类事件（每类四个）。

不过请注意，我们的不变量保证：对于区间 $[a',b']$ 上满足 $f_{\sigma'|e'}(q') \le \delta$ 的任意点 q' ，实际上都有 $\mathsf{env}^{\le\delta}(e',\ \delta)(q') \le f_{\sigma'|e'}(q')$，因此 $\mathsf{env}^{\le\delta}(e',\ \delta)$ 保持不变（因而不会触发进一步更新）。

▶ **引理 6.** 对于任意点 $q' \in [a',b'] \subseteq e'$ ，我们有 $\mathrm{env}^{\le\delta}(e',\delta)(q') \le f_{\sigma'|e'}(q')$。

证明。反设存在一点 $q' \in [a',b']$ ，使得 $f_{\sigma'|e'}(q')$ <$\mathsf{env}^{\le\delta}(e',\delta)(q')$。此外，令 q' 为 portalgon 所有边上的此类点中最近的点；也就是说， $f_{\sigma'|e'}(q') = d(s,q') = \delta_1 \le \delta$（因此，对于任意 $\delta_0 < \delta_1$，函数 $\mathsf{env}^{\le\delta}(e,\delta_0)$ 都能正确表示（任意）边 e 上的最短路径图）。令 q 为最短路径 $\pi(\sigma')$ 与 e 相交的点，该子路径 π_0 的长度为 $f_{\sigma'|e}(q) = \delta_0$ <δ_1。根据子路径最优性， π_0 是一条最短路径，因此 $\delta_0 = d(s,q)$。于是我们有 $\mathsf{env}^{\le\delta}(e,\delta_0) = f_{\sigma'|e}(q)$。然而，由此可知， σ' 已经在“时间” δ_0 被插入到 $S_A(e',\delta_0) \subseteq S_A(e',\delta)$ 中。因此，$\mathsf{env}^{\le\delta}(e',\ \delta)(q') \le \mathsf{env}_A(e',\delta)(q') \le f_{\sigma'|e'}(q')$，从而得到矛盾。◀

▶ 注 7. Mitchell、Mount 和 Papadimitriou [22]使用了类似的整体算法。他们定义了一种 T_A-**自由** 路径，它们从 T_B到达边 e 。他们证明，这些路径的行为与“真正的”最短路径足够相似，因此可以显式维护最短 T_A-自由路径和 T_B-自由路径的集合。不幸的是，所使用的一些论证仅在最短路径至多穿过一次门户边时成立（也就是说，当 portalgon 是 1-快乐时）。对于加权区域问题，Mitchel 和 Papadimitriou 通过将 T_A-**自由** 路径的概念扩展为局部 T_A-**自由** 路径 [23]，展示了如何处理这一问题。然而，当亏格可能非零时，尚不清楚如何界定此类路径的数量。

相较之下，我们 σ 仅在能够保证 σ会生成一条通往 T_B 边上某点的最短路径时，才将签名 σ 插入 $S_B(e,\ \delta)$中，而不是在它生成一条通往该边的局部最短 T_B-自由路径时就插入。由此，我们可以通过将集合$S_B(e,\ \delta)$的规模归因于实际最短路径图中的区间，来限制这些集合的大小。

分析。 令 $k = |$最短路径图$_{\partial\mathcal{P}}|$ 表示限制在边上的最短路径的复杂度。我们首先证明，对于$\mathcal{P}$ 的所有边，事件总数为 $O(\lambda_4(k))$. 首先计算固定边 e上的事件数。

注意，对于任意 δ, $S_A(e,\delta) \subseteq S_A(e,\infty)$，因此，类型 a. 的每个事件都是函数 $f_{\sigma|e}$ 的最小值，其中 $\sigma \in S_A(e,\infty) \cup S_B(e,\infty)$。由于每个函数都是单峰的，因此至多贡献一个最小值，所以类型 a. 的事件总数为 $O(k_A + k_B)$，其中$k_A = |S_A(e,\infty)|$ 且 $k_B = |S_B(e,\infty)|$。

▶ **引理 8**。 类型 **b.** 对应于 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$中顶点的事件总数， δ遍历所有取值时为 $O(\lambda_4(k_A))$。

证明。 对于每个签名 $\sigma \in S_A(e,\ \infty)$，考虑 δ时，此时 σ被加入到 $S_A(e,\ \delta)$中。现在将每个函数 $f_{\sigma|e}(q)$ 限制在 $f_{\sigma|e}(q) \ge \delta$的定义域上。这实际上将其拆分为

$f_{\sigma|e}$两个函数。令 F'表示由此得到的 $O(k_A)$ 个函数的集合，并令 $\mathrm{env}_{F'}$为其下包络。由此可知，该下包络的复杂度为 $O(\lambda_4(k_a))$ [25]。

对于每个事件**b.** 对应于$\mathrm{env}_A(e,\ \delta)$，对于某个值 δ，扫描线经过顶点 $v=(q,\ \delta)$，该顶点属于$\mathrm{env}_A(e,\ \delta)$。我们声称 v也是$\mathrm{env}_{F'}$的一个顶点。扫描线至多经过这样的顶点一次，因此此类事件的数量至多为 $O(\lambda_4(k_a))$。

由于 v是 $\mathrm{env}_A(e,\ \delta)$ 的一个顶点，因此它是 F' 中某个函数（的图像）的端点。接下来，我们证明 $\mathrm{env}_A(e,\ \delta)(q) \le \mathrm{env}_{F'}(q)$，因此 v也必定位于 $\mathrm{env}_{F'}$ 上。

对于任意时间 δ 和任意点 q，我们有 $\mathrm{env}_A(e,\delta) \le \mathrm{env}_{F'}(q)$：反设 $f'_{\sigma|e}(q) = \mathrm{env}_{F'}(q) = \delta_2 < \mathrm{env}_A(e,\delta)$。因此，$\sigma$在某个时间 $\delta_1 \le \delta_2$ 被加入到 $S_A(e,\infty)$ 中。然而，这样一来 $\sigma \in S(e,\delta)$，从而 $\mathrm{env}_A(e,\delta) \le f_{\sigma|e}(q) = \delta_2$。矛盾。因此我们有 $\mathrm{env}_A(e,\delta) \le \mathrm{env}_{F'}(q)$，证明完毕。◀

根据引理 8（以及针对 env_B 的对称结论），b. 类事件的数量至多为 $O(\lambda_4(k_A)+\lambda_4(k_B))$。每个 c. 类事件都会产生 $\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\delta)$ 的一个顶点，因此也会产生最短路径图$_e$的一个顶点。因此可得，e 上的事件总数为 $O(\lambda_4(k_A)+\lambda_4(k_B))+|$最短路径图$_e$ $|$。

只有当存在一条通往另一条边e'（属于 T_B）的最短路径时，签名 σ 才会出现在 $S_B(e,\ \delta)$ 中。由于每条这样的边 e' 至多会传播到四条边（属于与 e' 相邻的两个三角形），因此可得 $\sum_{e\in\partial\mathcal{P}}(|S_A(e,\delta)|+|S_B(e,\ \delta)|) = O(|$最短路径图$_{\partial\mathcal{P}}$ $|)$。因此，所有边 e上的事件总数为 $O(\lambda_4(k))$，如所述。

对于每条边 e，在任意时间 δ，$\mathrm{env}^{=\delta}(e,\ \delta)$ 的大小至多为 $O(|\mathrm{env}_A(e,\ \delta)|+|\mathrm{env}_B(e,\delta)|)$，因为每个函数与扫描线最多相交两次。此外，正如上文所述，所有边e上的所有这些函数 $\mathrm{env}_A(e,\ \delta)$、$\mathrm{env}_B(e,\ \delta)$、$\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\ \delta)$ 的大小至多为 $O(\lambda_4(k))$。

为了处理边 e 上的事件，我们对事件队列(s)、$\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\delta)$ 和 $\mathrm{env}^{=\delta}(e,\delta)$ 执行常数次更新操作，并在 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 和 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 上调用常数次 Insert、NextLocalMinimum 和 NextEvent。由此可知，前述操作仅需 $O(\log k)$ 时间；根据引理 4，对所有边上的 $\mathrm{env}_A(e,\delta)$ 和 $\mathrm{env}_B(e,\delta)$ 执行操作的总成本为 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$。因此，我们可以在 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$ 时间内计算最短路径图$_{\partial\mathcal{P}}$。

最短路径图 $\mathrm{SPM}_{\partial\mathcal{P}}$ 的复杂度上界。现在我们证明 $|$最短路径图$_{\partial\mathcal{P}}$ $| = k = O(n^2h)$。

▶ **引理 9**。对于边 e 上依次排列的任意三个点 p_1、q、p_2，以及任意签名 σ，若 $S_A(e,\delta)$，且 $d_{\sigma|e}$ 在 p_1 和 p_2 处都位于 $\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\delta)$ 上，但在 q 处不在其上，则不存在任何签名 $\tau\in S_A(e,\delta)$，使得 $d_{\tau|e}$ 在 q 处位于 $\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\delta)$ 上。对 $\sigma\in S_B(e,\delta)$ 也有对称性质。

证明。我们对签名 σ 的长度进行归纳法来证明这一点。如果 σ 仅由 s 构成，且 e 是与 s 相接的一条边，那么 $d_{\sigma|e}$ 就是沿着 e 从 s 出发的距离。不失一般性，假设 q 位于 e 的线段 sp_1 上（否则交换 p_1 和 p_2）。如果存在如上所述的签名 τ，那么 $d_{\tau|e}(p_2) \le d_{\tau|e}(q) + qp_2 < d_{\sigma|e}(q) + qp_2 = d_{\sigma|e}(p_2)$，这将与 $d_{\sigma|e}$ 在 p_2 处位于 $\mathrm{env}^{\le\delta}(e,\ \delta)$ 上相矛盾。

当 σ 仅由 s 构成，但 e 是 T_s 中与 s 不相接的那条边时，这种情况是[3] 所述情况的较简单版本；后者中 σ 不仅仅是 s，因此我们省略此情形。

现在考虑 σ 不仅由 s 构成的情形。设 π_1 和 π_2 分别是从 s 到 p_1 和 p_2 的最短路径，其签名化简为 σ。那么 π_1 的长度为 $d_{\sigma|e}(p_1)$，而 π_2 的长度为

[3] 因为它会迫使 $p'_1 = q' = p'_2 = s$。

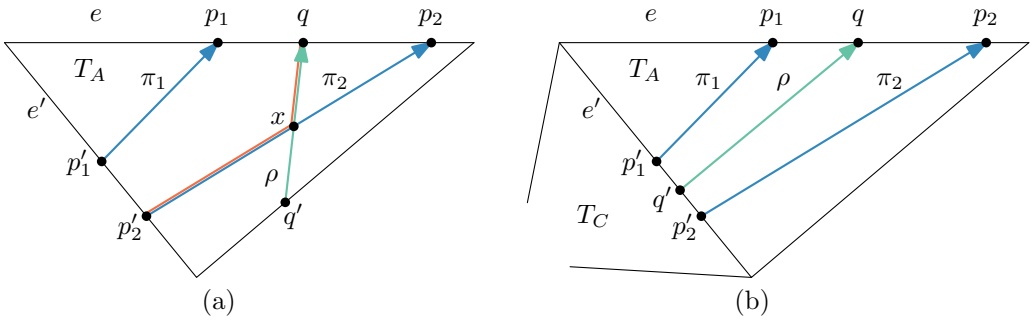


图 11 引理 9 的情形。图中仅显示了 π_1、 ρ 和 π_2 的最后几段线段。

$d_{\sigma|e}(p_2)$。设 e' 是这些路径在（ e 之前）经过的最后一条边，并设 p'_1 和 p'_2 分别是它们与 e' 的最后一个交点。现在，反设存在如上所述的签名 τ 。设 ρ 是对应的路径，从 s 到 q ，长度为 $d_{\tau|e}(q)$，其签名化简为 τ。根据引理 5， π_1、 π_2 和 ρ 都是最短路径。

见图 11 (a)。如果 ρ 在点 x 处与 $\overline{p'_1p_1}$ 或 $\overline{p'_2p_2}$ 相交，那么我们可以替换 π_1 或 π_2 在 x 之后的部分，从而得到一条从 s 到 q 、长度至多为 kρk 的路径，其签名可化简为 σ，这与 $d_{\sigma|e}(q) > d_{\tau|e}(q)$ 矛盾。由于 ρ 不与 $\overline{p'_1p_1}$ 或 $\overline{p'_2p_2}$ 相交， ρ 必须在 q' 处进入 T_A ；点 q' 位于 e' 上，且在 p'_1 与 p'_2 之间，见图 11 (b)。令 T_C 为与 e' 相邻的第二个三角形。令 σ' 和 τ' 为 $S_C(e', \delta)$ 中的签名，使得 $d_{\sigma'|e'}(p'_1)$、 $d_{\sigma'|e'}(p'_2)$ 和 $d_{\tau'|e'}(q')$ 位于 $\mathsf{env}(e', \delta)$ 上（这样的签名确实存在，因为 π_1、 π_2 和 ρ 到 p'_1、 p'_2 和 q' 为止的子路径都是长度至多为 δ 的最短路径）。由于 $d_{\tau|e}(q) < d_{\sigma|e}(q)$，我们有 $d_{\tau'|e'}(q') < d_{\sigma'|e'}(q')$，因此 $d_{\sigma'|e'}$ 在 q' 处不位于 $\mathsf{env}^{\leq\delta}(e', \delta)$ 上。根据归纳法，不存在任何签名 $\tau'' \in S_C(e', \delta)$ 使得 $d_{\tau''|e'}$ 在 q' 处位于 $\mathsf{env}^{\leq\delta}(e', \delta)$ 上，但 τ' 就是这样一个签名，矛盾。◀

▶ **引理 10.** $^{\leq\delta}\mathrm{enve}(\,\delta)$ 的复杂度为 $O(|S_A(e, \delta) \cup S_B(e, \delta)|)$。

证明。令 Γ 为 $S_A(e, \delta) \cup S_B(e, \delta)$ 中签名 σ 构成的序列；沿着 e 从左向右遍历时，这些签名对应的距离函数$f_{\sigma|e}$ 会出现在 $\mathsf{env}^{\leq\delta}(e, \delta)$ 上。我们证明，任意长度为 $c + 2$ 的连续子序列 Γ'（取自 Γ ）都包含一个此前未出现在 Γ 上的签名，其中 $c = O(1)$ 是任意一对函数 $f_{\sigma|e}$ 和 $f_{\sigma'|e}$ 相交的次数。注意，如果一个连续子序列包含至少两个来自 $S_A(e, \delta)$（或来自$S_B(e, \delta)$）的签名，那么根据引理 9，后一个签名此前不可能出现在 Γ 上。另一方面，如果 Γ' 在每个 $S_A(e, \delta)$ 和 $S_B(e, \delta)$ 中至多包含一个签名，那么 Γ' 的长度至多为某个 $f_{\sigma|e}$ 和 $f_{\sigma'|e}$的下包络复杂度，而该复杂度至多为$c + 1 = O(1)$。因此， Γ的长度，从而 $\mathsf{env}^{\leq\delta}(e, \delta)$ 的复杂度为$O(|S_A(e, \delta) \cup S_B(e, \delta)|)$。◀

▶**引理 11.** 对于一个 h-*happy portalgon*，限制在边上的最短路径图的复杂度为 $O(n^2h)$。

证明。最短路径图（限制在边上）的复杂度对应于$\mathrm{env}(e, \infty)$ （对所有边 e求和）的总复杂度。根据引理 10，该复杂度与 $S_A(e, \infty) \cup S_B(e, \infty)$中出现的签名数量呈线性关系。对于一个 σ 对应于某条边上一个点的签名 e， σ 的最后一个元素是 e，因此，不同边上的点具有不同的签名。因此，最短路径图的复杂度受签名总数限制。

我们通过考察这些签名的前缀树，来界定最短路径签名的总数。任意一条边在任意一条最短路径的签名中最多出现 h 次，因此，任意此类签名的长度为 $O(nh)$。因此，前缀树的深度为 $O(nh)$。

注意，前缀树中的任意节点都有 $O(1)$ 个子节点：一个前缀对应唯一的三角形，且只能通过追加与该三角形相邻的有限多个顶点或边之一来扩展。

我们证明，只有 $O(n)$ 个节点有多个子节点。由于平局判定，任意顶点 v都对应唯一的最短路径，因此前缀树中只有一个以 v 结尾的签名。我们还证明，对于任意边为 e、 e_1 和 e_2的三角形 T_A ，至多存在一个以 e 结尾的前缀 σ ，使得 σe_1 和 σe_2 都是最短路径的前缀。设 p_1 和p_2 是 e 上的点，分别对应签名为 σe_1 和 σe_2的最短路径。根据引理 9，进入 T_A 且位于 p_1 和 p_2 之间的最短路径（因此，它们都出现在 $S_B(e, \infty)$ 中，其中$T_B \neq T_A$ 是与 e相邻的另一个三角形）都具有签名 σ。

现在反设存在另一个签名 σ' ，使得 $\sigma' e_1$ 和 $\sigma' e_2$ 都是最短路径的前缀。那么，同理，这些路径会从点 p_1' 和 p_2' 进入 T_A ，而这两点之间的签名为 σ'。因此，线段 p_1p_2 和 $p_1'p_2'$ 内部不相交，但这意味着签名为 σe_1 和 $\sigma' e_2$ 的最短路径，或签名为 σe_2 和 $\sigma' e_1$ 的最短路径必定相交，这是不可能的。

由此可知，前缀树中只有 O（n）个节点有多个子节点。由于所有节点的度数都是常数，前缀树只有 O（n）个叶节点。结合其O（nh）的深度，所有最短路径上的签名总数为 O（n^2h）。◀

由此我们得到以下结果。

▶**引理 12**。 设 P 是一个具有 n 个顶点和 m 个门户的三角剖分 h-*happy portalgon*，且 s 是给定的源点。 s 的最短路径图 最短路径图$_{\partial\mathcal{P}}(s)$ 的复杂度为 $k = O(n^2h)$ ，并且可以在 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$ 时间内计算出来。

3.3 扩展到内部

现在，我们将三角形边界上的最短路径图 最短路径图$_{\partial T}$ 扩展为整个三角形的最短路径图 T T。当 最短路径图$_{\partial T}$ 由 m 个区间组成时，最短路径图$_T$的复杂度为 $O(m)$，并且可以在 $O(m\log\ m)$ 时间内计算得到，例如可使用 Mitchell 等人的 Build-Subdivision算法 [22, 引理 8。2]。将此方法应用于门户多边形中的所有三角形，可得以下结果。

▶**定理 13**。 设 P 是一个经过三角剖分的 h-*happy portalgon*，具有 n 个顶点和 m 个门户，并给定一个源点 s 。 s 的最短路径图 最短路径图$_{\mathcal{P}}(s)$ 的复杂度为$k = O(n^2h)$，并且可以在 $O(\lambda_4(k)\log^2 k)$ 时间内计算得到。

4 happy portalgon 的存在性

在本节中，我们证明，对于每个 portalgon，都存在一个与之等价的 $O(1)$-happy portalgon；具体而言， Σ 的内蕴德劳内三角剖分 [4] $\mathcal{T}$ 会诱导出一个 happy portalgon，其片段对应于$\mathcal{T}$ 的三角形。生成的 portalgon 的片段数量可能多于原始 portalgon，但其总复杂度仍为线性。虽然我们的证明是构造性的，但其运行时间可能没有上界。

4.1 内蕴德劳内三角剖分

设$\mathcal{T}$是一个三角剖分的 portalgon[4]，其曲面为 Σ；令 V 为 Σ的顶点集合。直观而言，Σ 的内蕴德劳内三角剖分中，两个顶点 $u, v \in V$ 之间存在一条（直）边，当且仅当存在一个圆，其边界上有 u 和 v，且当我们“展开” Σ时，该圆内不含 V 的其他顶点；例如，可以像第3节中那样，通过识别$\mathcal{T}$的边来展开。

$\hat{}$ 为了简化几何论证，我们从 Σ 推导出一个单连通空间 Σ。我们可以将 $\hat{\Sigma}$ 视为 $\Sigma \setminus V$ 的万有覆盖，并在相应的 $\hat{}$ 位置重新插入顶点。更正式地说，我们可以通过考虑 $\mathbf{T}$ 的有向片段图 G 来定义 Σ。对于 $\mathbf{T}$ 的任意门户 e，我们用 $T_{e^-}, T_{e^+} \in \mathbf{F}$ 表示分别包含相应门户边的三角形（G 的节点）；G 有一条从 T_{e^-} 到 T_{e^+} 的连接 $\dot{e}$，以及一条从 T_{e^+} 到 T_{e^-} 的连接 $\dot{e}^{-1}$。我们称 $\dot{e}$ 和 $\dot{e}^{-1}$ 互为逆连接。在 G 中，从三角形 T 到三角形 T' 的游走是由 G 中的连接组成的序列（当 $T = T'$ 时可以为空），其中 T 是第一条连接的源节点，第 $(i+1)$ 条连接的源节点是第 i 条连接的目标节点，且最后一条连接的目标节点是 T'。对于从 T 到 T' 的游走 w，我们记作 $w\colon T \to_G T'$；如果一条游走包含两条连续且互为逆连接的连接，则称其为有回溯的。任取一个根三角形 T_0；对于游走 $w\colon T_0 \to_G T$，令 T_w 为目标三角形 T 的一个副本，通过沿着它们的公共门户展开 $T_0, T_1, \ldots, T_w$，将其放置在欧几里得平面上。令 $\hat{\mathbf{F}} = \bigsqcup\{T_w \mid T \in \mathbf{F},\ w\colon T_0 \to T, w \text{ 无回溯}\}$ 为所有以 T_0 开始的游走的目标三角形对应的欧几里得三角形的不交并。现在可以将 Σ 定义为 $\hat{\mathbf{F}}/\!\sim$：对于任意两条游走 w 和 w'，若 w' 是从 w 中移除最后一条 $\hat{}$ 连接后得到的，则 $\hat{\sim}$ 沿着与 w 的最后一条连接相对应的边，将 $T_{w'}$ 与 T_w 粘合起来。令 $q\colon \Sigma \to \Sigma$ 为将 Σ 中的点映射到 Σ中对应点的 $\hat{}$ 映射。若 $g = q \circ \hat{g}$，则映射 $\hat{g}\colon X \to \Sigma$ 是映射 $g\colon X \to \Sigma$ 的提升。任意路径 $\pi\colon [0,1] \to \Sigma$ 在 $\hat{\Sigma}$ 中都有一个提升 $\hat{\pi}$。

存在一个映射 $f\colon \hat{\Sigma} \to \mathbb{R}^2$，其在 $\hat{\Sigma}$ 的任意三角形上的限制都是等距变换，在任意一对相邻三角形上的限制都是单射。我们可以将 f 视为展开 $\hat{\Sigma}$，使其平铺在平面上，并且除顶点处外处处局部等距（顶点是曲率的唯一来源），见图 12。

▶ **观察 14**。令 $B_r(x,y) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - (x,y)\| < r\}$ 为平面上以 (x,y)为中心、半径为 r 的开圆盘。若 $f^{-1}(B_r(x,y))$ 的一个分量 U不包含任何顶点，则 f 在 U 的闭包上的限制是等距变换。

对于 $\hat{\Sigma}$的一个三角形 T，令 $D(T)$ 为由 $f(T)$ 的外接圆围成的开圆盘，并令 $C(T)$ 为 $f^{-1}(D(T))$ 中包含 T内部的分量的闭包。若三角形 $\hat{\Sigma}$ 中的一个三角形 T 满足：$C(T)$的内部不包含与T 相邻的三角形的任何顶点，则称该三角形为德劳内 三角形。当且仅当 $\hat{\mathcal{F}}$ 中的所有三角形都是德劳内三角形时，Σ 的内蕴德劳内三角剖分 为$\mathcal{T}$。引理 15 将平面中德劳内三角剖分的一条著名性质推广了。

▶ **引理 15** (Bobenko 等人 [4])。若$\hat{T}$ 是$\hat{\Sigma}$的内蕴德劳内三角剖分，则对于任意 $T \in \hat{T}$，$C(T)$ 的内部不包含任何顶点。

结合观察 14 和引理 15，可得以下推论，另见图 13。

[4] 为便于本节论证，我们假设给定的是一个三角剖分 portal 多边形；注意，任何 portalgon 都可以通过对其片段进行三角剖分，并将所得对角线替换为门户，轻松转化为三角剖分 portal 多边形。

ˆ▶**推论16.** 对于 Σ 的内蕴德劳内三角剖分中的任意三角形 T， f 在 $C(T)$ 上的限制是单射，且最短路径与 $C(T)$ 相交于直线段。

▶ **推论17**。 对于ˆΣ的内蕴德劳内三角剖分中的任意三角形 T， $\partial f(C(T))$是 $\partial D(T)$的若干弦与圆弧的并，其中每条弦都是一条边界边。

4.2 内蕴德劳内三角剖分皆幸福

现在，我们可以证明本节的主要结果了：任意 portalgon 的内蕴德劳内三角剖分都具有常数级幸福度。

设$\mathcal{T}$是 Σ的一个内蕴德劳内三角剖分。我们希望界定最短路径 π 与该三角剖分的边相交的次数。为此，设 π是 Σ上两个给定点之间的一条最短路径，并假设在所有此类路径中，π与 Σ的边交叉次数最少。这里，我们将与一条边的交点分量计作与该边的一次交叉。

现在，考虑三角剖分中连接两个顶点 u 和 v 的一条任意边 e ，并设 m 为其中点。我们将证明 π 与 e 相交的次数至多为常数。反设 π 与 e 至少相交7次。如果π 与 e 的一个交点分量既不是横截交点，也不包含顶点，那么由推论16可知， π 是 e的一条线段，因此 π 只有一次边交叉。如果一个非横截交点包含 e的两个顶点，那么 π 包含 e ，因此与 e 仅相交一次。因此， π 与 e 的每个非横截交点都恰好包含 e的一个顶点，因而包含 π的起点或终点。因此， π 与 e 至多发生两次非横截相交。

为界定与 e 的交点总数，我们分析提升$\hat{e}$ 附近局部邻域中ˆπ 的几何。任意固定一个与 e 关联的三角形 T，并考察对应提升ˆT（它与$\hat{e}$关联）中$\hat{e}$ 的邻域 $C(\hat{T})$。根据推论16，将 f 限制在 $C(\hat{T})$上是一个等距变换，因此 $f(\mathrm{Im}(\hat{\pi}) \cap C(\hat{T}))$是一条直线线段。令$p_i$ 为 π 与 e 的第 i个交点（或非横截交点的顶点），并定义 λ_i使得 $\pi(\lambda_i) = p_i$。 令$\hat{e}_i$ 为包含ˆ$\pi(\lambda_i)$的 e 的一个提升，并令ˆp_i、ˆT_i、ˆu_i、ˆm_i、ˆv_i 分别为与$\hat{e}_i$关联的 p_i、 T、 u、 m、 v的提升，见图14（左）。令 $D_i := D(\hat{T}_i)$，并令 f_i为 f 在 $C_i := C(\hat{T}_i)$上的限制。令 c_i 为 D_i的中心，即$f(\hat{T}_i)$的外心。

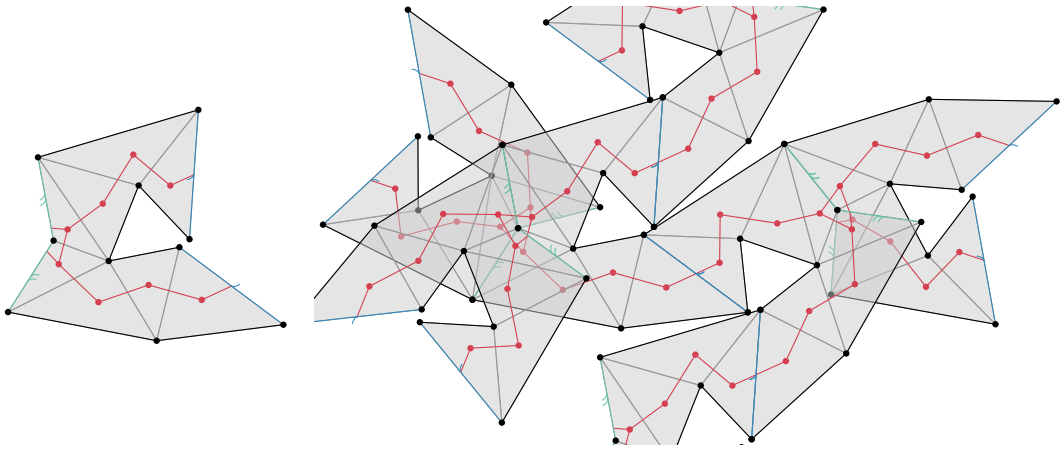


图 12 Σ （左）和 ˆΣ 的局部区域（右）。ˆΣ 的对偶图是一棵无限树（红色）。

18 Portalgon 中的最短路径

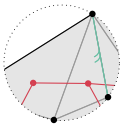


图 13 虽然 f 通常并非单射，但对于德劳内三角剖分中的三角形 T， f 在 $C(T)$ 上的限制是单射，且其内部不包含该三角剖分的任何顶点。

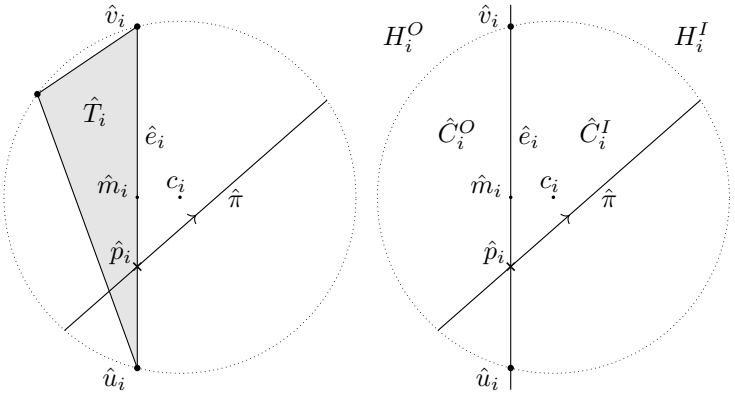


图 14 π 与 e 的交叉 p_i 是向内的。

定义 H_i^I 和 H_i^O 为由经过 $f(\hat{e}_i)$ 的直线界定的两个半平面，使得 H_i^I 包含 c_i（若 $c_i = f(\hat{m}_i)$，则任意将这两个半平面标记为 H_i^I 和 H_i^O）。我们分别称 H_i^I 和 H_i^O 为 $\hat{e}_i$ 的内侧和外侧半平面，并定义 $C_i^I := f_i^{-1}(H_i^I)$ 为 $\hat{e}_i$ 的内侧分量，定义 $C_i^O := f_i^{-1}(H_i^O)$ 为 $\hat{e}_i$ 的外侧分量。

如果 p_i 是非横截交点，或者 $\hat{\pi}$ 从 C_i^O 到 C_i^I 与 $\hat{p}_i$ 相交（见图 14 右图），则称交叉 p_i 向内。

令 s 为 e 从 u 到 m 的线段。不妨假设 π 与 e 的（至少七个）交叉中，至少有四个位于 s 上（否则重新标记 u 和 v）。

▶ **引理 18.** 对于 π 与 s 的任意向内交叉 p_i， p_j 与 $j > i$ 的交叉均不位于 s 在 u 与 p_i 之间的线段上。

证明。假设存在矛盾：对于某个 $j > i$， p_j 位于 e 上介于 u 和 p_i 之间的线段上。设 Z 是以 $f(\hat{m}_i)$ 为中心、以 $f(\hat{e}_i)$ 为直径的开圆盘。路径 $\hat{m}_i \hat{\ }^{e_i} \hat{p}_i \hat{\ }\pi \hat{\ } \hat{p}_j \hat{\ }^{e_j} \hat{u}_j$ 比 s 短，因此线段 $f(\hat{p}_j \hat{\ }^{e_j} \hat{u}_j)$ 位于 Z 内部。注意， $H_i^I \cap Z$ 完全位于 D_i 内，因此其内部不包含 C_i^I 的任何顶点，尤其是 $\hat{u}_j$ 不在 C_i^I 中。此外，任何进入 C_i^I 内部的路径，若不离开 Z 或不与 $\hat{e}_i$ 的内部交叉，就无法离开它（因为 $\hat{e}_i$ 是 C_i^I 与 $\hat{\Sigma} \setminus C_i^I$ 的唯一公共边界，且位于 Z 内部）。然而，路径 $\hat{p}_i \hat{\ }\pi \hat{\ } \hat{p}_j \hat{\ }^{e_j} \hat{u}_j$ 进入并离开 C_i^I，却没有离开 Z。路径 $\hat{p}_i \hat{\ }\pi \hat{\ } \hat{p}_j$ 不会反复与 $\hat{e}_i$ 交叉，因此 $\hat{e}_j$ 上介于 $\hat{p}_j$ 和 $\hat{u}_j$ 之间的线段必定与 $\hat{e}_i$ 交叉，所以 $\hat{e}_j$ 与 $\hat{e}_i$ 的内部交叉。但这与三角剖分的边内部互不相交相矛盾。◀

如果 p_i 在 π 上不是向内的，那么它在 π 的反向上就是向内的。由此可得推论 19。

▶**推论 19。** 如果 p_i 与 s 的某个交叉 π 不是向内的，那么 p_h 与 $h < i$ 的所有交叉都不在线段 s 上，且位于 u 与 p_i 之间。

引理 18 表明，对于 s 与 π 的交点序列 p_i，沿 s 从 u 到 p_i 的距离函数只有一个局部最小值。因此，存在一个至少包含

三个交叉点 p_h、 p_i 和 p_j （$h < i < j$）的子序列，它们是 π 与 s 的交叉点，并且 p_i 位于 p_h 和 p_j 之间。不失一般性，假设沿 s 从 u 到 p_h、 p_i 和 p_j 的距离依次增大（另一种情况可通过考虑 π 的反向情况得出）。此时，我们观察到：

▶ **观察 20**。 $f(\hat{}m_i) \neq c_i$

证明。 反设 $f(\hat{}m_i)$ 是 c_i。在这种情况下，我们任意地标记了 H_i^I和 H_i^O，而另一种标记方式告诉我们，从 u到 p_h、 p_i和 p_j 的距离必须是递减而非递增的；但如果它们起初是递增的，这便不可能成立（交换标记方式不会改变从 u出发的距离）。◀

根据推论 19， p_i 是一次向内交叉。我们说明后续交叉在 C_i 内可能出现的位置受到怎样的限制。定义 D_i' 为与 D_i同心的圆盘，其边界经过 $f(\hat{}m_i)$。任何经过 D_i'的 D_i 弦，其长度至少与 e一样。令 $e_h := f(\hat{e}_h) \cap D_i$。我们观察到：

▶**引理 21**。 e_h不能与 D_i'的闭包相交。

证明。 令 R_i（图 16（左）中阴影部分）为 $D_i' \cup f(\hat{}e_i)$ 的凸包内部。由于 C_i 没有内部顶点， e 的任何提升都不会与 $f_i^{-1}(R_i)$ 相交，见图 16（左）。为与图示相符，不失一般性地假设 $f(\hat{e}_i)$ 垂直，且 $f(\hat{}u_i)$ 位于底部， H_i^O位于左侧。

后续交点 p_j of π 与 e 位于 e 的线段上，且该线段介于 p_i 和 m 之间，这一事实限制了 π 与 p_i 相交时的角度。事实上， $f \circ \pi$ 必须在下一个交点出现之前离开 R_i，并且 $\hat{}p_i$ 到 $\hat{}p_j$ 的距离小于 $f(\hat{}p_i)$ 到 $f(\hat{}m_i)$ 的距离。图 16（中）展示了 $\hat{}p_j$ 可能的位置。关键的是，包含 $f(\hat{}\pi \cap C_i)$ 的 D_i 的弦（记作 π）不会与 D_i' 相交。

由于 $f(\hat{}m_i) \neq c_i$， D_i有两条弦经过 $f(\hat{}p_i)$，且与 D_i'相切。其中一条弦是 $f(\hat{e}_i)$，另一条弦（称为 ω）有一个端点（称为 w）位于 H_i^O内部。由于 π 与 D_i'不相交，点 $f(\hat{}p_h)$ 位于经过 w 和 $f(\hat{}p_i)$ 的直线上或其上方。因此， e_h 是 D_i 的一条弦，且它不能与 D_i' 的闭包相交。◀

我们将通过证明以下结论，推翻最初的假设：

▶**引理 22.** 如果 π 与 e 相交至少7 次，那么 e_h 必定与 D_i'的闭包相交。

证明。 令 $q \in \partial D_i$ 为 e_h 上距离 $f(\hat{}u_h)$ 最近的点。我们将分析 q可能的位置。令 d_i 为从 $f(\hat{}p_i)$ 到 $f(\hat{}u_i)$ 的距离。令 B_i 为半径为.....的圆盘

d_i 以$f(\hat{}p_i)$为中心，因此 B_i 与 $\partial D_i \cap H_i^O$在连接 w 和$f(\hat{}u_i)$的弧（图 16 中标记为 α）处相交。令 b 为 H_i^O内部 π 与 ∂B_i的交点。令 B_h 为以 $f(\hat{}p_h)$为中心的圆盘，其边界与 b相交，因此 $B_h \subseteq B_i$。令 $d_s(\cdot,\cdot)$表示沿着 s的距离，则 q 位于 B_h 中，因为

$$d(q, f(\hat{p}_h)) \leq d_s(u, p_h) = d_s(u, p_i) - d_s(p_i, p_h) \leq d_s(u, p_i) - d(f(\hat{p}_h), f(\hat{p}_i)) = d(b, f(\hat{p}_h)).$$

因此， q 位于弧上（称其为 γ），该弧是 B_h 与 $\partial D_i \cap H_i^O$的交点。此弧位于 $f(\hat{}u_i)$与 w之间的弧上。令 γ_0为 γ上最接近 w的点， γ_1为最接近 $f(\hat{}u_i)$的点，

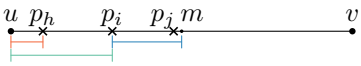


图 15 π 与 s 的一列交叉点子序列 p_h, p_i, p_j，它们到 u 的距离依次递增。

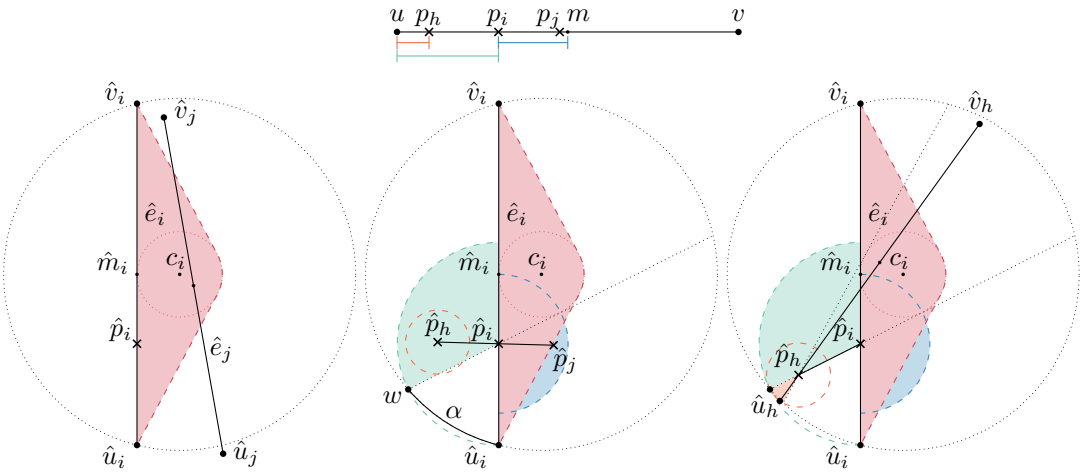


图 16 （左）不存在与 C_i 的阴影区域 R_i 内部相交的 e 的提升。（中）$\hat{}p_j$ 位于蓝色区域，$\hat{}p_h$ 位于绿色区域。（右）$\hat{u}_h$ 不可能位于 C_i 的内部。

并令$\gamma_{\frac{1}{2}}$为 γ的中点，见图 17。经过$\gamma_{\frac{1}{2}}$和 $f(\hat{}p_h)$的直线通过 D_i'的中心 c_i，因此弦 e_h 与经过 c_i 的垂直线相交于 c_i处或其下方。

我们区分两种情况，首先考虑 q 位于 γ 上 γ_0 与 $\gamma_{\frac{1}{2}}$ 之间的弧上的情形。注意，e_h 是 D_i 的弦，它经过 q 和 $f(\hat{}p_h)$。由于 $f(\hat{}p_h)$ 位于 ω 上或其上方，从 q 到 $f(\hat{}p_h)$ 的 e_h 线段要么与 ω 重合，要么从下方与 ω 相交，因此 e_h 的剩余部分要么与 ω 重合，要么位于 ω 上方。特别地，e_h 位于 ω 与 D_i'相切的点上方。然而，任何同时经过 c_i 上方或其上的直线都必须与 D_i' 相交，因此，如果 q 位于 γ 上 γ_0 与 $\gamma_{\frac{1}{2}}$ 之间的弧上，那么 e_h 就与 D_i' 相交。

q位于$\gamma_{\frac{1}{2}}$和 γ_1之间的弧上时，可通过关于经过 $f(\hat{}p_h)$和 c_i的直线反射后，D_i'、$f(\hat{}p_h)$ 和 γ 的对称性得出。因此，弦 e_h 与D_i'相交。◀

根据引理 22，弦 e_h 与 D_i'相交，这就产生了矛盾。由此我们得出，π与 e 至多相交六次。我们将上述讨论总结为以下定理。

▶ **定理 23**。设 P 是一个有 n 个顶点的 *portalgon*。存在一个 *portalgon* $P' \equiv P$，它有$O(n)$ 个顶点，并且是 $O(1)$- 幸福的。

5 让 portalgon 幸福起来

本节研究片段成为幸福片段的条件，并提出一种方法，将不幸福片段重新排列为与之等价的幸福片段。

我们首先指出，原则上，第 4 节中的方法是构造性的。然而，其运行时间取决于将片段的初始三角剖分重新配置为内蕴德劳内三角剖分所需的边翻转次数，而该次数可能无法用输入复杂度表示。能否以其他方式计算内蕴德劳内三角剖分，仍是一个开放问题。我们注意到，如果输入三角形的最小角有下界，则边翻转次数可以得到上界 [18]。

本节余下部分将分析在没有此类最小角界限时我们能做些什么。本节的主要结果是，对于片段图中至多包含一个环的任意 portalgon，我们都可以将其约化为仅有

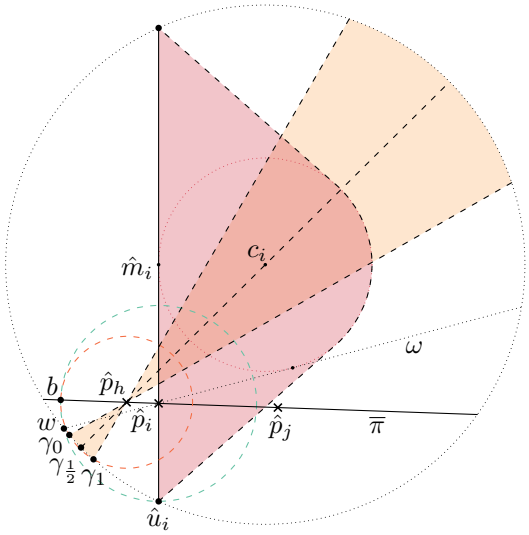


图 17 任何一条经过 D_i through $f(\hat{}p_h)$ 且经过 γ 的弦都会与 D_i' 相交。

一个片段和一个门户的 portalgon；通过重新排列，我们可以使其所有片段的幸福度都为常数（定理 45）。

我们先介绍一个有用的简单观察。

▶**观察 24.** 任何至多有一条门户边 e 的片段 F 都是 2-愉悦的。

证明。反设 F 不是 2-愉悦的。那么必定存在两个点p、 $q \in$ P，使得 $\pi(p,q)$ 至少与 e 相交三次，因此 $\pi(p,q)$ 中存在一条子路径 $\pi(r,s)$，满足： r 和 s 位于 e, $\pi(r,s) \subseteq F$ 上，并且 $\pi(r,s)$ 包含一个位于 F 内部的点。根据三角不等式， rs 比 $\pi(r,s)$ 短。矛盾。◀

现在我们考虑只有一个门户的情形，并给出一种构造性结果，说明如何计算一个等价的 happy portalgon。首先，我们关注较简单的情形，即两条门户边平行。在附录5.2中，我们将这一结果推广到非平行边。我们还将在那里指出，如果两条边之间的角至少为某个常数，那么该片段已经是 happy 的。因此，近似平行情形最值得关注。

5.1 单个门户、平行边

5.1.1 分析

单个门户的片段的幸福度取决于两个（平行）门户边的位移。两个门户边 e^-, e^+ 的位移可以定义为分别经过 e^- 和e^+的起始顶点、垂直于门户边的两条垂线之间的距离。以下不失一般性地假设门户是水平的，因此位移 Δ 就是门户边起始顶点的 x坐标之差。此外，令 v 表示 e^- 和 e^+之间的垂直距离。

▶ **引理 25.** 设 F 是一个恰有两条门户边 e^-, e^+ 的片段，且它们平行a且属于同一个门户。如果 e^-, e^+ 的位移 Δ 为0，则该片段是2-幸福的。

证明。 设 F 是一个具有两条平行门户边的片段 e^-，e^+ 位移为 $\Delta = 0$，并回想一下， e^- 和 e^+ 都假设为水平的。

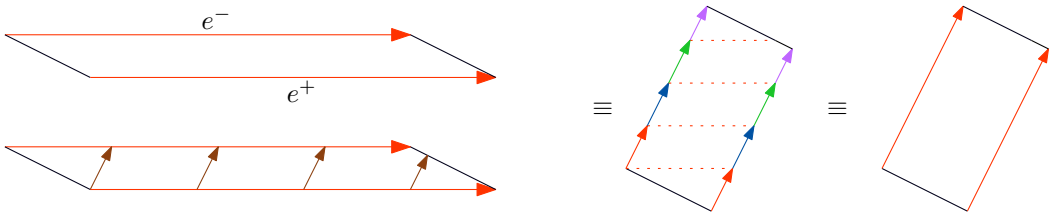


图18 左：一个包含两条平行边且位移非零的片段。中：沿垂直射线切割该片段后的结果，得到一个带有多个门户的新片段，它与一个带有单个门户且位移为零的片段等价（右）。

假设有两个点 p，$q \in F$，它们之间的最短路径两次穿过 e^-（因此也穿过e^+），分别在点 r 和 s处。考虑最短路径上从r^+ 到 s的子路径。这段子路径的长度至少为 $|r^+s|$。由于 e 和 e' 平行，且 $\Delta = 0$、$\triangle rr^+s$ 在 r 处构成直角，r^+s 是其斜边，因此 $|r^+s| > |r^-s|$。于是，沿着 e 从 r 走到 s 会更短，这就导出了矛盾。因此，F 是2-愉悦的。◀

如果 $\Delta \neq 0$，一个片段可能是良好的，也可能不是，这取决于其他若干因素：门户的长度、门户边之间的距离，以及 F 的边界是否会造成干扰。下面我们介绍一种方法，将不良片段转换为等价且良好的 portalgon。

总体思路是沿着一条直线切割 F，这条直线的方向与经过门户的两个起始顶点的直线正交，从而创建一个新的门户。

首先，我们介绍 F 为平行四边形时的情形；我们将它的两条平行门户边称为 e^- 和 e^+。

不失一般性，假设 e^- 位于 e^+ 上方，且 e^- 的起点位于 e^+ 的左侧。在这种情况下，与门户起点方向正交的直线的斜率为 $z = -\Delta/v$。我们从 e^+ 最左侧的顶点出发，沿斜率为 z 的射线向 F 内部发射，直到射线碰到边界。每当射线穿过门户时，我们就沿这条射线“切割”，在射线上创建一个新门户。这样会得到若干较小的片段，随后我们沿原始门户的各个部分将它们重新粘合，组成一个片段。所得片段是一个矩形 F'。图 18 展示了这一过程。注意，根据 z 的定义，这个新片段 F' 的位移为零。因此：

▶**引理 26.** 对于任意具有两条平行门户边的平行四边形，都存在一个等价的平行四边形，它具有 $\Delta = 0$，因此是2-幸福的。

请注意，对于具有两个平行门户且位移非零的片段，存在唯一一个位移为零的等价片段，它是沿垂直射线切割得到的片段。然而，如果 F 不是平行四边形，那么将新得到的较小片段拼接在一起时，可能会得到一个非简单多边形。因此，我们可能无法将 F 变换为单个等价的 h-幸福片段，如图19所示。在这种情况下，沿垂直射线切割会产生一个非简单片段。

▶**观察27.** 存在一个具有两条水平门户边的片段，使得不存在具有 $\Delta = 0$的等价的单个片段。

幸运的是，我们可以将任何具有两条平行门户边的片段转换为常数个 h-幸福片段。首先，我们做一个有用的观察。

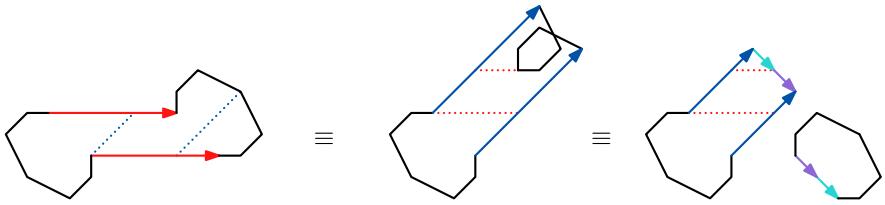


图19 一个片段（左）的示例：沿垂直射线切割的技术会产生一个非简单多边形（中）。不过，使用另一个片段即可解决这一问题（右）。

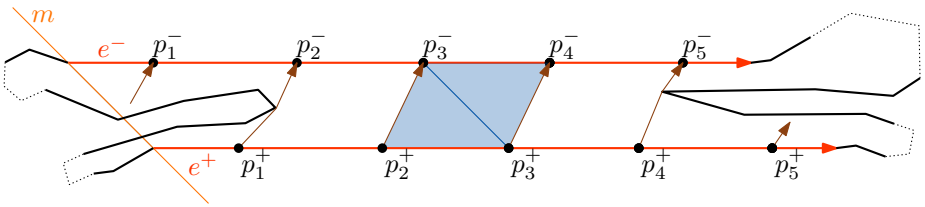


图20 引理28证明示意图； π 以棕色显示。线段 $p_3^- p_3^+$ 与 m 平行，并完全位于该片段内。

▶**引理28**。 考虑一个具有两个水平门户 e^- 和 e^+的片段 F 。令 m 为经过 e^- 和 e^+起点的直线。如果不存在一条与 m 平行的线段，其端点分别为 e^- 上的一点和 e^+ 上的一点，且其内部位于 F 的内部，那么 F 就是5-幸福的。

证明。假设 F 不是 5-幸福的。那么，存在一条最短路径 π ，它与 F 的交集由至少六个连通分量组成，因此 π 至少穿过该门户五次，交于点 p_1、……、p_5。见图20。由于 π 是一条最短路径，这些分量不可能共享顶点（否则我们可以直接缩短这条路径）。由此可知， $\pi(p_2^+, p_3^-)$必定是一条线段（否则，如果它包含来自 F的顶点，该顶点就会与 $\pi(p_1^+, p_2^-)$ 或 $\pi(p_3^+, p_4^-)$共享）。同理， $\pi(p_3^+, p_4^-)$必定是一条线段。此外， $\pi(p_2^+, p_3^-)$与 $\pi(p_3^+, p_4^-)$平行，因此 $p_2^+ p_3^- p_4^- p_3^+$是一个空平行四边形。注意，由于 p_3^- 和 p_3^+ 是对应点（即孪生点），它们之间的线段与 m具有相同的斜率。因此，存在一条与 m 平行的线段，其内部位于 F内。
◀

如果存在一条平行于 m 、包含在 F 中并连接 e^- 与 e^+ 的线段，那么特别地，也存在这样一条最左侧线段和一条最右侧线段（此处我们将 F 视为闭集）。这些线段与门户边的各部分共同构成一个空的平行四边形。令 Z 为此平行四边形，它由两条水平边和两条平行于 m 的边围成。

▶ **观察 29.** 设 F 为一个简单片段， ab 为 F 内的一条线段。最短路径 π 的一个连通分量 $\pi \cap F$ 与 ab 至多相交于一条线段。

特别地，观察 29 意味着， $\pi \cap F$ 的一个极大分量的两个端点 p 和 q 不能位于同一条门户边 e 上，除非 $\pi(p, q) = pq$。

▶**引理 30.** 设 *P* 是一个 *portalgon*，它有一个包含 n 个顶点的片段 F ，以及一个门户，其边彼此平行。存在一个与 *P* 等价的 5-*happy portalgon* P' ，它至多由三个片段组成，且总复杂度为 $O(n)$。

证明。 不失一般性，假设两个门户边 e^- 和 e^+ 均为水平且方向从左向右。现在我们论证，当 F 中没有三个顶点共线时，

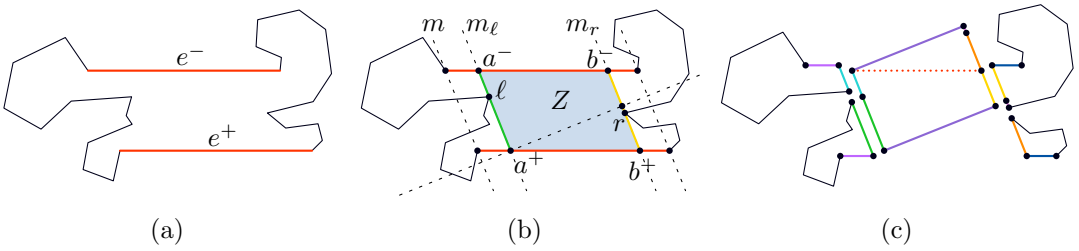


图 21 (a) 含有两个平行 portal 的片段 F。(b) 直线 m_ℓ 和 m_r 分别与 e^- 和 e^+ 相交于 a^-, a^+，定义了一个平行四边形 $Z = a^-b^-a^+b^+$，它将 F 分割成至多七个子片段。(c) 得到的 5-幸福片段集合。请注意，通过将 m_ℓ 稍微向右平移、将 m_r 稍微向左平移，可以减少片段的数量。

并且 F 尚未达到 5-幸福，我们可以将 F 分成至多七个 4-快乐片段，总复杂度为 $O(n)$。参见图 21。最后，我们将说明如何在仍保持 4-快乐的情况下，将片段数量减少到三个，即使不满足一般位置假设也是如此。

令 m 为经过 e^- 和 e^+ 起点的直线。根据引理28，如果不存在 m 的平移，使其与 F 的交集包含一条连接 e^- 和 e^+ 的线段，那么 F 已经是 5- 幸福。令 m_ℓ 为此类 m 中最左侧的平移，令 m_r 为最右侧的平移；m_ℓ 包含 F 的一个顶点 ℓ，而 m_r 包含 F 的一个顶点 r（可能 ℓ 或 m 是 e^- 或 e^+ 的端点）。令 a^- 和 a^+ 分别为 m_ℓ 与 e^-、e^+ 的交点，令 b^- 和 b^+ 分别为 m_r 与 e^-、e^+ 的交点。我们从 F 中切出平行四边形 $Z = a^-b^-a^+b^+$，将 F 分割成至多七个片段（因为根据一般位置假设，a^-a^+ 和 b^-b^+ 各自至多包含两个凹顶点）。现在，我们使用引理 26 将 Z 转化为一个 2-愉悦片段。令 T 和 B 分别为包含 e^- 和 e^+ 起点的片段。我们证明 T 是 4-愉悦的。证明 B 是 4-愉悦的论证是对称的。对于包含 e^- 和 e^+ 端点的片段，结论也相同。其他任何片段（如果存在）都只包含一条门户边，因此根据观察 24，它们都是 2-愉悦的。

考虑最短路径 $\pi = \pi(s,\ t)$ 的极大连通分量，其中 F。根据观察 29，这样的分量要么：(i) 包含 s，(ii) 包含 t，或 (iii) 将 e^- 上的一点 p_i 与 e^+ 上的一点 q_i 相连。同样根据观察 29，每个这样的分量与 a^-a^+ 至多相交一次，因此每个这样的分量与 T 至多相交一次。

现在，我们根据 p_i 是否位于 T 中 e^- 的那一部分上，以及 q_i 是否位于 B 中 e^+ 的那一部分上，将类型 (iii) 分量进一步分为三类。

如果 p_i 位于 T 之外，那么观察 29 表明，$\pi(p_i,\ q_i)$ 与 T（的内部）完全不相交，因为 $\pi(p_i,\ q_i)$ 将不得不与 $a\ell$ 相交两次。

如果 p_i 位于 T 中且 q_i 位于 B 中，那么观察 29 表明，$\pi(p_i,\ q_i)$ 包含点 ℓ。因此，与 T 相交的此类分量至多有一个。

如果 p_i 位于 T 中，而 q_i 位于 B之外，那么对于 e上的某个点 t^-，有 $q_i = t^+$。如果从 t^- 开始的分量再次属于类型 (iii)（即 $t^- = p_{i+1}$），则它不能与 B 相交，因为这将意味着 $\pi(p_{i+1}, q_{i+1})$ 与 $\pi(p_i, q_i)$ 相交。它也不能与 T相交（因为 q_{i+1} 位于e^+ 上，它必须与 $a\ell$ 相交两次）。对于$\pi(p_j, q_j)$ 上满足 $j > i$ 的任何分量，同样的论证也成立。因此，只有当 $\pi(p_i, q_i)$ 是最后一个类型 (iii) 的分量时，它才与 T 相交。显然，这样的分量只有一个。

由此可知，$\pi \cap F$ 中只有四个分量与 T 相交，并且每个这样的分量都只在一个连续子路径上与 T 相交。因此，T 是 4-幸福的。

我们得出结论：得到的 portalgon $\mathcal{P}'$ 是 4-快乐的，与 $\mathcal{P}$ 等价，并且最多有

七个片段（请注意，如果 m_ℓ 上有两个凹顶点，且 m_r 上有两个凹顶点，就会有七个片段）。此外，$\mathcal{P}$ 的每个顶点最多出现在 $\mathcal{P}$ 的 $O(1)$ 个片段中′, ，因此$\mathcal{P}'$ 的复杂度为 $O(n)$。

最后请注意，（在分割 F 之前）我们实际上可以将Z 的左右两侧向内移动任意小的 ε（特别是小于 Z中任意两条不相邻边之间最小距离的量）。由此可知， F 现在只分割成三个片段，其中两个已经是 4-愉悦的。我们像之前一样，将剩余的片段（平行四边形 Z）变换为一个 2-愉悦的平行四边形。这样，我们得到三个片段，总复杂度为 $O(n)$)，即使 F 包含三个或更多共线顶点。◀

5.1.2 计算

前面的分析导出了一个算法，下面我们将对此进行说明。接下来请回忆， z是与经过门户边两个起点的直线正交的一条直线的斜率。

▶**引理 31.** 设 F 是一个具有两条平行门户边的平行四边形，我们可以在 $O(1)$ 时间内计算出一个与之等价的2-愉悦平行四边形 F' 。

证明。 根据引理 26，存在一个平行四边形 F' 等价于 F 且其位移为零，因此是2-愉悦。现在的主要任务是计算这样一个等价片段。

要计算新的等价片段 F'，我们可以显式生成射线 ρ，并计算它与门户边的交点，沿射线追踪，直到它碰到片段的一条非门户边。见图 22(a)。然而，这样做的运行时间会随此类交点的数量线性增长。我们可以利用这一情形的几何特性，直接计算得到的片段。

令 b_l 为连接 e^- 和 e^+左端点的线段，并以类似方式定义连接 e^- 和 e^+右端点的线段 b_r 。见图 22(b)。我们注意到，由于射线 ρ 与 b_l正交，射线到达片段的一条边之前的总长度，等于分别经过 b_l 和 b_r的两条平行线之间的距离 $|\rho|$ 。见图 22(b)。沿射线切割并将各部分粘合后，零位移保证所得形状是一个矩形。该矩形以 b_l 为底边，高度等于射线到达 t 之前的长度， $|\rho|$。只需考虑 e^- 和 e^+的支撑直线，并求它们与经过 b_l端点的两条正交直线的交点，即可在 $O(1)$ 时间内计算出该矩形；参见图 22(b) 中的虚线矩形。这四条直线的四个交点构成矩形的顶点，该矩形就是等价的 2-愉悦 portalgon。◀

接下来讨论片段不是平行四边形的情况。

▶**引理 32.** 设 F 是一个包含两条水平门户边 e^- 和e^+的简单片段， z 是一个斜率。在 $O(n_F)$ 时间内，我们可以计算出斜率为 z 、一个端点位于 e^- 且另一个端点位于 e^+的最左线段 s_ℓ 和最右线段 s_r ；若不存在这样的线段，则报告此情况。

证明。不失一般性，假设门户边 $e^- = pq$ 和 $e^+ = st$ 的方向均从左向右，且 e^- 位于 e^+上方。令 S 为由 e^- 和e^+定义的平行四边形，并令 X 表示 F边界的一部分，不包括 e^-的内部，且与 S相交的 e^+，即 $X = S \cap (\partial F \setminus (e^- \cup e^+ \setminus \{p, q, s, t\}))$。由于 F是简单的，X是由多边形链组成的集合。根据端点的不同，链分为三类：如果链的端点位于 S的左边界 ps 上，则其类型为 L ；如果端点位于 —

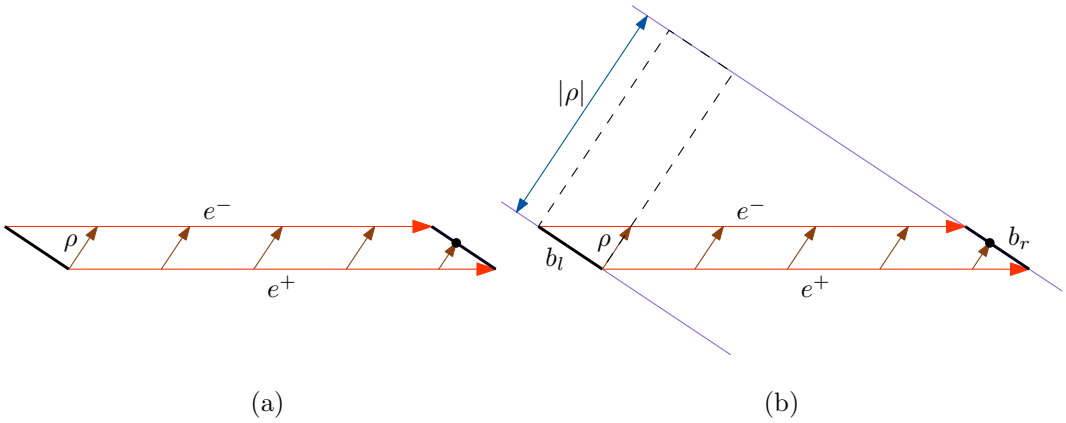


图 22 两个平行门户的切割过程。(a) 初始情况。(b) 得到的 happy portalgon 是虚线所示的矩形。

S的右边界 qt 上，则其类型为 M；如果一个端点位于 ps 上，另一个端点位于 qt上，则其类型为 M。显然，如果存在任何类型为 M的链，则线段 s_ℓ 和 s_r 不存在。

注意，如果 s_ℓ 存在，它包含 F 上一条类型为 L 的链上的一个顶点。具体而言，令 ℓ 为这类链上的顶点，使得经过 ℓ 且斜率为 z 的直线 m_ℓ 最靠右（注意，由于所有斜率为 z 的直线彼此平行（且 $z \neq 0$），因此可以明确地确定其顺序）。线段 s_ℓ 包含 ℓ。类似地，如果 s_r 存在，它包含一条类型为 R 的链上的顶点 r，且该链的直线 m_r 最靠左。

最后，注意如果 s_ℓ 存在，直线 m_ℓ 必须位于直线 m_r 的左侧。反过来，如果 m_ℓ 不在 m_r 的左侧，则 s_ℓ 不存在。

通过遍历 F 的边界，我们可以在线性时间内计算出 X 中的链及其类型。计算 ℓ 和 r 同样可以在线性时间内完成。给定 ℓ 和 r 后，我们便可以判断 s_ℓ 和 s_r 是否存在；如果存在，还可以在常数时间内将它们计算出来。◀

▶**引理 33.** 设 $P = (F\ P)$ 是一个有 n 个顶点且仅有一个门户的 *portalgon*，其边彼此平行。可以在 $O(n)$ 时间内计算出一个等价的 2-愉悦 *portalgon* P'，它有 $|F| + 6$ 个片段，总复杂度为 $O(n)$。

证明。 我们利用引理 32 和引理 31，实现引理 30 的构造性证明。至多存在一个具有两条门户边 F 的片段 e^-，且 e^+这两条边彼此平行。我们使用引理 32 找出两条平行线段，其端点分别位于 e^- 和 e^+上。若不存在这样的线段，F 就已经是 2-愉悦的，证明完毕。否则，它们会定义一个平行四边形Z，将 F 分割成至多七个部分，其中一个部分就是 Z 它本身。根据引理 32，计算Z 需要线性时间，实际分割也同样如此。接着，我们使用引理 31，在 Z 时间内将其转换为一个 2-愉悦平行四边形 $O(1)$。除 Z 之外的所有片段都已经是 2-愉悦的。◀

5.2 单个门户，任意边

我们将第 5 节的结果推广到非平行边。大多数论证都类似。

5.2.1 分析

对于两条不平行的门户边，情况并没有太大变化。首先，我们分析哪些方向确实会造成问题。门户边之间的

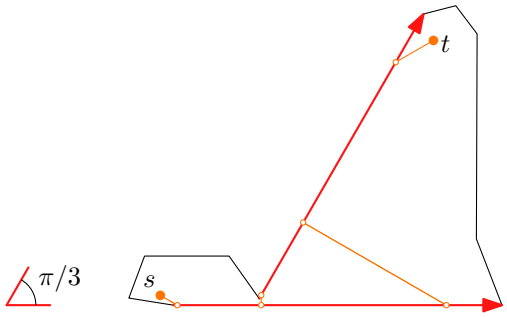


图 23 $\alpha = \pi/3 < \pi/2$ 最短路径（橙色所示）穿过p门户三次的示例。

夹角（定义为其对应支撑直线的夹角）与最短路径可以使用该门户边的次数之间存在明确的关系。

▶ **观察 34.** 两个门户边之间夹角为 $\alpha > 0$ 的片段是 $(b\pi/\alpha c + 1)$-快乐的。

证明。 每次迭代中，最短路径相对于某个门户的角度会增加 α，或者每次迭代都会减少 α。因此，如果经过 $\lfloor \pi/\alpha \rfloor$ 次迭代后，最短路径再次穿过该门户，那么它在片段内部经过的角度将超过π ，这是不可能的。因此，不可能再进行更多迭代。由此可知，最短路径在该片段中最多有 $(\lfloor \pi/\alpha \rfloor + 1)$ 个连通分量。◀

值得指出的是，只要角度 $\alpha < \pi/2$，就可以构造这样一种情形：最短路径穿过门户三次。示例见图 23，其中我们让非水平门户的起点几乎接触水平门户；橙色路径即为一条最短路径。

对于较小的 α，情况看起来与平行边的情况十分相似，但也存在一些重要差异。令 Δ 为门户的位移，现将其定义为两条门户边的起始顶点在门户边的角平分线 上的投影之间的距离，其中角平分线是这些边的支撑直线所成角的角平分线。

以下结果推广了引理 25。

▶ **引理 35。** 设 F 是一个恰有两条门户边 e^-、e^+ 的片段，且这两条边属于同一个门户。若 e^-、e^+ 的位移为0，则该片段是2-快乐的。

证明。设 F 是一个有两条门户边 e^-、e^+ 的片段，且满足 $\Delta = 0$。不失一般性，假设相关的角平分线是水平的，且 e^- 位于 e^+上方。参见图 24。设有两点 p、$q \in F$，其最短路径两次穿过 e，分别经过点 r 和 s，顺序为 r^-、r^+、s^-、s^+。考虑这条最短路径从r^+ 到 s^- 的部分。由于 $\Delta = 0$，这条路径的长度至少为 $|r^+s^-|$。然而，从 r^+ 沿 e^+ （即 $|r^+s^-| > |r^+s^+|$）到达 s^+ 必定更短，因此产生矛盾。◀

▶ **引理 36。** 设 F 是一个四边形，其中两条相对的边是孪生门户边。那么 t存在一个片段 F'，与 F 等价，且满足 $\Delta = 0$。

证明。 我们按照引理 26 中相同的方式进行，不同之处在于，现在我们发射的射线方向还取决于 α 门户边之间的角度。不失

28 Portalgon 中的最短路径

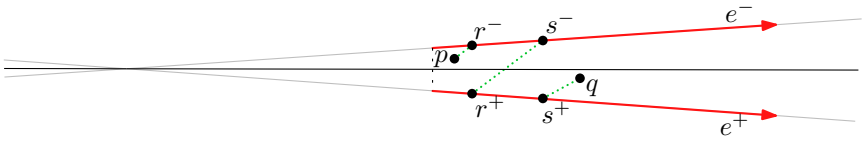


图 24 引理 35 的证明。零位移意味着 $|r^+s^-| > |r^+s^+|$。

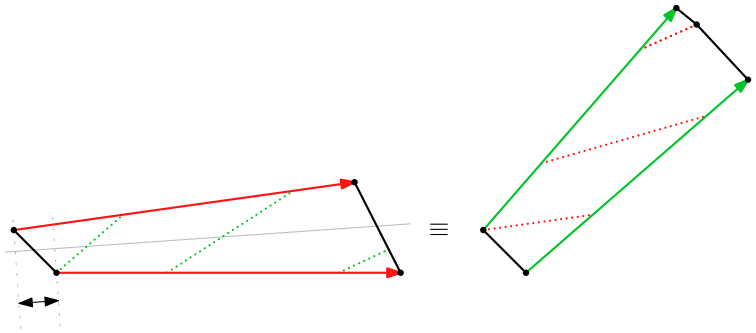


图25（左）一个具有非零位移 Δ 的四边形片段；（右）一个与之等价且位移为零的片段。

一般性，假设 e^+ 是水平的， e^- 位于 e^+ 上方，且它从 e^+ 左侧开始。令 z 为沿着与门户起点正交的方向的直线斜率，并令 α_z 为它与水平方向所成的角。我们从 e^+ 的最左侧顶点出发，沿斜率为 $\alpha_z - \alpha/2$ 的方向发射一条射线。我们考察这条射线，直到它首次碰到 F 的边界。每当射线穿过门户时，我们就沿着这条射线“切割”，并沿其创建一个新门户。这样会得到若干个较小的片段，随后我们沿着原门户的各个部分将它们重新拼接成一个片段 F'。图25展示了示意图。根据构造， F' 的位移为零。◀

在证明本节的主要结果之前，我们还需要最后一个引理，它与引理28类似。

▶**引理37**。 考虑一个片段 F，它有两个门户 e^- 和 e^+。如果不存在点 p 属于 e，使得线段 p^-p^+ 的内部位于 F 的内部，那么 F 就是 5-快乐的。

证明。 证明过程与引理28的证明几乎完全相同。

假设 F 不是5-幸福。不失一般性，设 e^- 位于 e^+上方，且 e^- 起始于 e^+左侧。那么存在一条最短路径 π，它与 F 的交集由至少六个连通分量组成，因此 π 至少五次穿过门户，交点为 p_1、……、p_5。由于 π 是最短路径，这些分量不能共享顶点（否则我们可以直接缩短路径）。由此可知， π(p_2^+、 p_3^-)必须是一条线段（否则，若它包含 F中的一个顶点，该顶点就会与 π(p_1^+、 p_2^-)或 π(p_3^+、 p_4^-)共享）。类似地， π(p_3^+、 p_4^-)也必须是一条线段。因此，$p_2^+p_3^-p_4^-p_3^+$是一个空四边形。于是，线段 $p_3^-p_3^+$的内部包含于F中。◀

在这种情况下，下面的推论会很有用。

▶**推论 38**。 设 P 是仅有一个片段 F 且恰有一个门户的 *portalgon*，并且门户边之间的角平分线是水平的。如果 P 不是 5-幸福的，那么存在一条连接两条门户边的竖直线段，其内部位于 F 内。

证明。 不失一般性，假设门户边彼此发散，且 e^- 在e^+上方，而 e^- 起点位于 e^+的左侧。引理37的证明保证存在一个空四边形 $p_2^+p_3^-p_4^-p_3^+$。空四边形的四个顶点从左到右依次为 p_2^+、p_3^-、 p_3^+、 p_4^-。此外，水平角平分线结合 e^- 起点位于 e^+左侧这一事实，可以推出 p_3^-严格位于 p_3^+的左侧。因此，从 p_3^+向上延伸的竖直线段的内部位于空四边形的内部，因此也位于 F内。◀

▶**引理 39.** 设 P 是一个 *portalgon*，其中有一个包含 n 个顶点的片段 F，以及一个门户。存在一个与 P' 等价的 5-幸福 *portalgon*，它由至多三个片段组成，且总复杂度为 $O(n)$。

证明。 不失一般性，假设 e^+ 是水平的， e^- 位于 e^+上方，并且其起点位于 e^+左侧。和之前一样，我们考虑两条从左向右定向的门户边。

现在我们说明，当 F 中没有三个顶点共线，且 F 尚未达到 5-幸福时，可以将 F 分割成至多七个 4-快乐片段，其总复杂度为 $O(n)$。最后，我们说明如何在仍保持 4-幸福的情况下，将片段数量减少到三个，即使不满足一般位置假设也可以做到。

根据引理37，如果不存在完全包含在 F 中的 p^-p^+ 形式的线段，那么 F 已经是 5-幸福的。设 m_ℓ （分别为 m_r）是最左侧（分别为最右侧）的此类线段； m_ℓ 包含 F 的一个顶点 ℓ，而 m_r 包含 F 的一个顶点 r （可能 ℓ 或 m 是 e^- 或 e^+ 的端点）。设 a^- 和 a^+ 分别是 m_ℓ 与 e^- 、 e^+ 的交点；设 b^- 和b^+ 分别是 m_r 与 e^- 、 e^+ 的交点。我们从 F 切下四边形 $Z = a^-b^-a^+b^+$，从而将 F 分割成至多七个片段（因为根据一般位置假设， a^-a^+ 和b^-b^+ 各自至多包含两个凹顶点）。接下来，我们用引理 36 将 Z 转换为一个 2-愉悦片段。设 T 和 B 分别是包含 e^- 和 e^+ 起点的片段。我们说明 T 是 4-幸福的。关于 B 是 4-幸福的论证是对称的。对于包含 e^- 和 e^+ 端点的片段，情况也相同。其他片段（若存在）只包含一条门户边，因此根据观察 24，它们都是 2-愉悦的。

考虑一条最短路径 $\pi = \pi(s,\ t)$ 的极大连通分量，其中 F。根据观察 29，这样的分量要么：(i) 包含 s；(ii) 包含 t；要么 (iii) 将 p_i （位于 e^- 上）与 q_i （位于 e^+ 上）连接起来。同样根据观察 29，每个这样的分量与 a^-a^+ 至多相交一次，因此每个这样的分量与 T 至多相交一次。

我们现在进一步将 (iii) 类分量分为三种类型，具体取决于 p_i 是否位于 e^- 在 T 中的那一段上，以及 q_i 是否位于 e^+ 在 B 中的那一段上。

若 p_i 位于 T 之外，则观察 29 意味着 $\pi(p_i,\ q_i)$ 完全不与 T （的内部）相交，因为 $\pi(p_i,\ q_i)$ 必须与 $a\ell$ 相交两次。

若 p_i 位于 T 中且 q_i 位于 B 中，则观察 29 意味着 $\pi(p_i,\ q_i)$ 包含点 ℓ。因此，与 T 相交的这种类型的分量至多有一个。

若 p_i 位于 T 内，但 q_i 位于 B 外，则对于 e 上的某个点 t^-，有 $q_i = t^+$。若从 t^- 开始的分量又属于类型 (iii)（即 $t^- = p_{i+1}$），则它不能与 B 相交，因为这将意味着 $\pi(p_{i+1}, q_{i+1})$ 与 $\pi(p_i, q_i)$ 相交。它也不能与 T 相交（因为 q_{i+1} 位于e^+ 上，它就必须与 $a\ell$ 相交两次）。对于 $\pi(p_j, q_j)$ 上满足 $j > i$ 的任意分量，同样的论证也成立。因此，只有当 $\pi(p_i, q_i)$ 是最后一个类型 (iii) 分量时，它才会与 T 相交。显然，这样的分量只有一个。

由此可知， $\pi \cap F$ 中只有四个分量与 T 相交，且每个这样的分量都只在一个连续子路径上与 T 相交。因此， T 是 4-满足的。

我们得出结论：所得到的 portalgon $\mathcal{P}$' 是 4-幸福的，与 $\mathcal{P}$ 等价，且至多包含七个片段。此外，$\mathcal{P}$ 的每个顶点最多出现在 $O(1)$ 个片段中

$\mathcal{P}'$, 的，因此$\mathcal{P}'$ 的复杂度为 $O(n)$。

最后请注意，（在分割 F 之前）我们实际上可以将 Z 的左右两侧向内移动任意小的 ε（特别是小于 Z 中任意两条不相邻边之间的最小距离）。由此可知， F 现在只分割成三个片段，其中两个已经是 4-愉悦的。我们像之前一样，将剩余的片段（平行四边形 Z）变换为 2-愉悦的平行四边形。这样我们得到三个片段，总复杂度为 O（n），即使 F 包含三个或更多共线顶点也是如此。◀

5.2.2 计算

在本节中，我们关注$\mathcal{P}$ 仅由一个含有一个门户的片段组成的情况 .

▶ **引理 40**。 设 $P = (F\ P)$ 是一个具有 h 个顶点、一个片段和一个门户的 n-愉悦门户多边形。可以在 $O(n+h)$ 时间内计算出一个等价的5-愉悦门户多边形 P'，它有3 个片段，总复杂度为 $O(n)$。

证明。 我们沿用引理 39 中的方法，将片段分为三部分：左、中、右，使得：(i) 左右两部分的复杂度为 $O(n)$，但它们已经是 4-快乐的；(ii) 中间部分的复杂度为 $O(1)$，并且允许 h 次门户穿越（因为 $\mathcal{P}$ 是h-快乐的）。于是，追踪射线穿过左右两部分的代价（通过反复计算第一个交点）为 $O(n)$，而追踪射线穿过中间部分的代价为 $O(h)$。

剩下要说明的是如何计算这个划分。

我们对该片段进行常数次刚性变换，使两个门户边之间的角平分线呈水平，门户边彼此发散，且上方门户边的起点位于下方门户边起点的左侧。注意，所需的变换会保留最短路径。

由此可知，连接左侧端点的线段斜率为负，因此我们发出的射线斜率为正。令 p_i 为射线“进入”片段的 i^{th} 点（即位于底边处），令 q_i 为射线“离开”片段的 i^{th} 点（即位于顶边处）。

我们观察到， p_{i+1} 位于 q_i右侧。起初，这是因为射线的斜率为正。由于顶部门户的起点位于底部门户起点的左侧，因此每个进入点都位于紧邻其前一个出口点的右侧。每次穿过门户后，射线的斜率都会减小，并趋近于零。因此，射线与任意一条垂直线最多只交叉一次。

根据推论 38，我们知道，如果该片段还不是 5-幸福的，那么两条门户边之间存在一条完全包含在其中的竖直线段。因此，我们可以假设情况如此。然后，我们可以沿两条竖直线段切割该片段：一条穿过从左侧“伸入”由两条门户边界定的四边形中的最右侧点，另一条穿过从右侧伸出的最左侧点。

我们可以通过计算由两条门户边界定的沙漏来求出这些点（即计算连接最左侧和最右侧门户端点的最短路径）。这需要 $O(n)$ 时间。◀

通过避免显式追踪中间片段中的射线，我们可以改进之前的运行时间。

▶ **引理 41.** 设 $P = (F\ P)$ 是一个 h-*happy portalgon*，具有 n 个顶点、一个片段和一个门户。可以在 $O(n+\log h)$ 时间内，计算出一个等价的5-*happy portalgon* P'，它具有3 个片段，总复杂度为 $O(n)$。

证明。根据引理 40，我们在 $O(n)$时间内将 portalgon 拆分成三部分。中间部分是唯一可能尚未 happy 的部分，因此我们必须对其应用引理 36 中的过程。具体来说，就是追踪射线穿过中间部分。为此，可以应用 Erickson 和 Nayyeri 在 [11], 环形射线发射背景下提出的引理 7.1，在 $O(1+\log k)$ 时间内追踪射线穿过中间部分，其中 k表示射线与门户之间的交点数。为完整起见，我们在此描述一种更直接、能得到相同结果的过程。考虑一条从 p 到 q 、多次经过门户 e 的最短路径。给定最短路径与门户边 e^-的一个交叉点，可以通过平移和旋转的复合，计算出射线接下来与 e^+ 交叉的点 e^+ 。因此，这可以表示为矩阵乘法。为了计算最短路径最后一次与 e交叉的位置，我们需要确定对应于射线最后一次完整穿过片段的幂次 k 。我们确实不知道 k，但可以通过指数搜索在 $O(\log k)$ 时间内找到它。我们还需要知道射线的总长度，才能实际构造新的片段；不过，我们可以将 M^k 应用于起点，然后直接测量距离来得到总长度（无需知道各个部分的长度）。最后，由于 P 是 h-happy，因此有 $k = O(h)$，由此即可得到结果。◀

一个有趣的开放问题是，对 h 的依赖是否根本就是必要的。

5.3 基于片段图分析的推广

回顾一下，我们将 portalgon P 的片段图 G 定义为这样一个图：每个片段对应一个节点；如果某个门户的门户边分别出现在这两个片段中，则这两个片段之间有一条连接；参见图4。[5]

现在我们来说明，如何将一个 portalgon 化简为一个更简单的 portalgon，以便将其转化为一个 2-愉悦的 portalgon；具体而言，我们证明，如果原始 portalgon 的片段图至多包含一个环，那么只需考虑重新配置一个带有一个门户的单个片段。

由于根据观察 24，任何仅有一条门户边的片段都是 2-愉悦的，因此最简单的非平凡情形是 portalgon 中的每个片段都有两条门户边。事实上，否则我们可以直接移除叶节点。

▶**引理 42.** 设 P 是一个 *portalgon*， G 是它的片段图。设 G' 是从 G中移除所有叶节点后得到的图。当且仅当 P 是 *happy* 的时候，对应的 *portalgon* P' 才是 *happy* 的。

证明。 设 F 是 G中的一个叶子片段； F 通过某个门户 $\mathcal{P}$ 与 e的其余部分连通。根据观察 24， F 总是 happy 的。此外，由于没有最短路径会两次穿过 e ，因此对于 X 中的任何其他片段，$\mathcal{P}$ 是 happy 的，当且仅当在移除$\mathcal{P}$ 中的 F 并将 e替换为一条边界边后， X 是 happy 的。◀

现在我们说明，在重新排列剩余的 portalgon 后，总能安全地将叶节点放回去。

▶**引理 43。** 设 P 是一个复杂度为 n 、幸福度为 h的任意 *portalgon*， F是一个无关的片段，带有一条门户边 e，复杂度为 m。设 S 是一组边界边

[5] 对于片段图，我们使用术语节点和连接，以区别于片段本身的顶点和边。

其均属于 P，总长度为 $|e|$。那么，将 S 中的边变为门户边，并将它们连接到 e 的片段后，我们得到的 *portalgon* P' 具有复杂度 $O(n+m)$，幸福度为 h。

证明。 要讨论复杂度，注意到 S 中的边数至多为 $O(n)$，而我们将门户边 e 切割成 $|S|$ 块，因此显然得到的复杂度为 $O(n+m)$。

要讨论幸福度，注意到任何一条最短路径至多两次穿过 e。将 e 切割成更小的门户后，情况仍然如此。因此，我们仍然可以应用观察 24。◀

如果 G 没有更多叶节点，它必定包含至少一个环。现在我们来说明，如果 G 是一个环，那么可以将其重新排列成一个 happy portalgon。

▶**引理 44。** 设 P 是一个 *portalgon*，G 是其片段图。如果 G 是一个环，那么要么 P 是 *5*-幸福，要么存在一个由单个片段构成的 *portalgon* P'，使得 P' 是幸福的当且仅当 P 是幸福的。

证明。 假设我们有一列片段 F_1，F_2，……，F_k，满足 F_i 通过门户 F_{i+1} 与 e_i 相连，且 $e^-{}_i$ 位于 F_i 中，而 $e^+{}_i$ 位于 F_{i+1}中；最后 F_k 通过门户 F_1与 e'相连。我们可以沿着 e_i 门户粘合这些片段，得到一个仅剩 F' 的单个（但不一定是简单的）片段 e'。

如果 F'是简单的，我们就完成了。如果 F'不是简单的，我们考虑两种情况：要么可以通过切除“口袋”使 F'变得简单（任何最短路径都不会多次经过这些口袋），要么无法做到，因为某条最短路径在万有覆盖$\hat{\Sigma}$中存在自相交。对于第一种情况，我们可以使 F' 变得简单；对于第二种情况，我们论证 F' 已经是5-幸福的。现在我们将这两种情况形式化；为此，我们考虑沙漏 H，它由所有经过F' 内部、连接点 p^- 和 p^+ 的最短路径的并集构成，其中 $p \in e'$遍历所有点。

1. 假设 H 是简单的。我们论证 $F' \setminus H$ 是一组简单多边形（“口袋”），它们通过一条连接与 H 相连；因此，我们可以将它们切除并变成独立的片段，使其成为片段图中的叶节点。根据引理 42，我们可以忽略它们，从而剩下一个只有一个门户的简单片段，正如所需。
2. 假设 H 不是简单的。那么不存在点 $p \in e'$ 使得 p^- 能看到 p^+；因此，根据引理37，F' 已经是5-幸福的。

该结果由此得出。 ◀

现在我们可以证明本节的主要结果了。

▶**定理 45.** 设 P 是一个具有 n 个顶点、片段图为 G 的 h-幸福门户多边形，且 G 至多包含一个简单环。我们可以将 P 转换为一个等价的 *5*-快乐门户多边形 P'，其总复杂度为 $O(n)$，所需时间为 $O(n+\log h)$。

证明. 我们将通过一系列门户多边形 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{P}_i$ 进行转换，并将$\mathcal{P}_i$ 对应的片段图记为 G_i。

- 设$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$ 是原始 portalgon，$G_1 = G$ 是其片段图。首先，我们通过迭代应用引理 42，
- 计算出一个没有叶节点的新图 G_2。由此得到的 portalgon $\mathcal{P}_2$ 与$\mathcal{P}$具有相同的幸福度。由于 G 至多包含一个环，因此 G_2 要么是一个环，要么是空图。如果它是空图，根据引理 42，$\mathcal{P}$ 原本就已经是 happy；此时我们中止并返回$\mathcal{P}$。

- 如果 G_2 由一个环组成，那么根据引理 44，$\mathcal{P}_2$ 要么已经是 happy，要么我们可以创建一个仅由单个片段组成的 portalgon $\mathcal{P}_3$，使得$\mathcal{P}_3$ 与$\mathcal{P}$具有相同的幸福度。对于第一种情况，根据引理 42，$\mathcal{P}$ 也原本就已经是 happy，因此我们再次中止并返回$\mathcal{P}$。对于第二种情况，我们得到一个只有一个片段和一个门户的 portalgon $\mathcal{P}_3$。我们应用引理 41，找到一个等价的 5-幸福 portalgon $\mathcal{P}_4$，其总复杂度为 $O(n)$，耗时 $O(n + \log h)$。最后，通过迭代添加回我们在开始时从 G 中移除的任意叶节点，创建 portalgon $\mathcal{P}_5$。根据引理 43，$\mathcal{P}_5$ 的复杂度仍为 $O(n)$，且$\mathcal{P}_5$ 的幸福度与$\mathcal{P}_4$,相同，也就是说，至多为 5。

我们返回 $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_5$。 ◀

参考文献

1 Pankaj K. Agarwal、Boris Aronov、Joseph O'Rourke 和 Catherine A. Schevon。《多面体的星形展开及其应用》。SIAM 计算杂志，26(6)：1689–1713，1997。doi:10.1137/S0097539793253371。2 Boris Aronov 和 Joseph O'Rourke。《星形展开的无重叠性》。离散与计算几何，8(3)：219–250，1992。3 Jon Louis Bentley 和 James B Saxe。《可分解搜索问题 I：静态到动态转换》。算法杂志，1(4)：301–358，1980。4 Alexander I Bobenko 和 Boris A Springborn。《单纯形曲面上的离散拉普拉斯–贝尔特拉米算子》。离散与计算几何，38(4)：740–756，2007。5 Vincent Borrelli、Saïd Jabrane、Francis Lazarus 和 Boris Thibert。《三维空间中的平坦环面与凸积分》。美国国家科学院院刊，109(19)：7218–7223，2012。doi:10.1073/pnas.1118478109。6 Jindong Chen 和 Yijie Han。《多面体上的最短路径》。Int. J. Comput. Geom. Appl.，6(2)：127–144，1996。doi:10.1142/S0218195996000095。7 Valve Corporation。《传送门》，2007。电子游戏。8 Yu. D. Burago、V. A. Zalgaller（编）。《几何学 III：曲面理论》。Springer 出版社，1993。9 H Ellison。《永远的边缘之城》，1967。《星际迷航》第1季第28集。10 Jeff Erickson。《Ernie 的三维煎饼：分片线性曲面上的最短路径》，2006。2023年3月14日。URL：https://3dpancakes.typepad.com/ernie/2006/03/shortest_paths_.html。11 Jeff Erickson 和 Amir Nayyeri。《在三角剖分曲面上追踪压缩曲线》。Discret. Comput. Geom.，49(4)：823–863，2013。doi:10.1007/s00454-013-9515-z。12 Leonidas Guibas 和 John Hershberger。《简单多边形中的最优最短路径查询》。计算机与系统科学杂志，39(2)：126–152，1989。doi:https://doi.org/10.1016/0022-0000(89)90041-X。13 Leonidas Guibas、John Hershberger、Daniel Leven、Micha Sharir 和 Robert E. Tarjan。《三角剖分简单多边形内部可见性与最短路径问题的线性时间算法》。Algorithmica，2(1)：209–233，1987。doi:10.1007/BF01840360。14 John Hershberger 和 Subhash Suri。《平面中欧几里得最短路径的最优算法》。SIAM 计算杂志，28(6)：2215–2256，1999。15 Biliana Kaneva 和 Joseph O'Rourke。《Chen 和 Han 的最短路径算法的一种实现》。URL：http://cs.smith.edu/~jorourke/Papers/shortest.ps.gz。16 Stephen Kiazyk、Sébastien Loriot 和 Éric Colin de Verdière。《三角剖分曲面网格最短路径》。URL：https://doc.cgal.org/latest/Surface_mesh_shortest_path/index.html。17 Francis Lazarus 和 Florent Tallerie。《平坦环面的通用三角剖分》。CoRR，03 2022。URL：https://arxiv.org/abs/2203.05496。

34 Portalgon 中的最短路径

18 Yong-Jin Liu、Chun-Xu Xu、Dian Fan 和 Ying He。《德劳内网格的高效构建与简化》。ACM 图形学汇刊，34(6)：1–13，2015。 doi:10.1145/2816795.2818076。19 A.D. Milka。《具有非负曲率多面体度量的多维空间 I》。Ukrain. Geom. Sb.，5(6)：103–114，1968。俄文。20 Joseph S. B. Mitchell。《平面障碍物之间最短路径的新算法》。数学与人工智能年刊，3(1)：83–105，1991年3月。 doi:10.1007/BF01530888。21 Joseph S. B. Mitchell。《最短路径与网络》。载于 Jacob E. Goodman、Joseph O'Rourke 和 Csaba D. Toth 编，《离散与计算几何手册》第三版，第811–848页。Chapman and Hall/CRC，2017。22 Joseph S. B. Mitchell、David M. Mount 和 Christos H. Papadimitriou。《离散测地线问题》。SIAM J. Comput.，16(4)：647–668，1987。 doi:10.1137/0216045。23 Joseph S. B. Mitchell 和 Christos H. Papadimitriou。《加权区域问题：在加权平面细分中寻找最短路径》。J. ACM，38(1)：18–73，1991。 doi:10.1145/102782.102784。24 Yevgeny Schreiber。《真实多面体上最短路径的最优时间算法》。Discret. Comput. Geom.，43(1)：21–53，2010。 doi:10.1007/s00454-009-9136-8。25 Micha Sharir 和 Pankaj K Agarwal。《Davenport-Schinzel 序列及其几何应用》。剑桥大学出版社，1995。26 A. Wachowski 和 L. Wachowski。《黑客帝国》，2003。华纳兄弟电影。27 Haitao Wang。《平面中欧几里得最短路径的新算法》。载于第53届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，STOC 2021，第975–988页，美国纽约州纽约市，2021。计算机协会。 doi:10.1145/3406325.3451037。28 Haitao Wang。《重探平面障碍物之间的最短路径》。载于 Dániel Marx 编，《2021年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2021，线上会议，2021年1月10日至13日，第810–821页。SIAM，2021。 doi:10.1137/1.9781611976465.51。29 Shi-Qing Xin 和 Guo-Jin Wang。《改进 Chen 和 Han 的离散测地线问题算法》。ACM Trans. Graph.，28(4)，2009年9月。 doi:10.1145/1559755.1559761。