arXiv:2303.08945v2 [math.CO] 9 Jan 2024

凸几何的维数概念

KOLJA KNAUER 和 WILLIAM T. TROTTER

Abstract. 设 X 是一个有限集合。若由 X 的子集构成的族 P 满足以下条件，则称其为以 X 为底集的 *convexgeometry*：(1) $\emptyset$, $X \in P$；(2) 对任意 A, $B \in P$，均有 $A \cap B \in P$；(3) 若 $A \in P$ 且 $A \neq X$，则存在元素 $\alpha \in X - A$，使得 $A \cup \{\alpha\} \in P$。凸几何是非空集合族，因此具有定义良好的 VC 维数。文献中还专门为这类结构定义了第二个参数，称为凸维数。按包含关系赋予偏序后，凸几何也是一个偏序集；对于这个更大的类别，又定义了四种维数参数，分别称为 Dushnik-Miller 维数、布尔维数、局部维数和分数维数。对于这六种维数参数中的每一对，我们都考察是否存在一个无限的凸几何类，使得其中一个参数有界而另一个无界。

1. Statement of Results

本文的主要目标是研究一类特殊偏序集的维数概念，这类偏序集称为凸几何，定义为有限底集上某些集合系统的包含序。我们所考虑的维数概念包括凸维数、VC 维数、Dushnik-Miller 维数、布尔维数、分数维数和局部维数，分别记作 cdim(P)、vcdim(P)、dim(P)、bdim(P)、ldim(P) 和 fdim(P)。我们还将研究一个相关的偏序集参数，称为标准示例数，记作 se(P)。当 P 是一个凸几何时，以下不等式已知成立或容易验证：

(1) $\text{cdim}(P) \geq \text{dim}(P) \geq \max\{\text{vcdim}(P), \text{bdim}(P), \text{fdim}(P), \text{ldim}(P), \text{se}(P)\}$，见命题 3.9；(2) $\text{se}(P) \geq \text{vcdim}(P)$，除非 $\text{vcdim}(P) = 2$ 且 $\text{se}(P) = 1$，见观察 3.4。

对于熟悉维数概念和 凸几何的读者，我们在此陈述本文的结果。动机、定义和必要的预备材料将在第 2 节和第 3 节中介绍。证明见第 4 至第 8 节，最后我们将在第 9 节对尚未解决的开放问题作一些评论。

我们的首个结果揭示了 Dushnik-Miller 维数与凸维数之间的差异。

定理 1.1. 若 $n \geq 3$，则存在一个凸几何 P_n，使得 $\dim(P_n) = 3$，且 $\text{cdim}(P_n) = n + 1$。

下一个结果表明，前一定理中对 Dushnik-Miller 维数的界无法进一步改进。

Date: 2023年3月15日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 06A07, 05C35。
Key words and phrases. 凸几何，偏序集合，维数，标准例。

定理 1.2. 若 P 是凸几何且$\dim(P) \leq 2$，则$\mathrm{cdim}(P) = \dim(P)$。

尽管存在 VC 维数为 2 且标准极数为 1 的凸几何，但我们证明这两个参数本质上相同。

定理 1.3。 如果 P是一个凸几何，那么 $\mathrm{vcdim}(P) = \mathrm{se}(P)$ 除非 $\mathrm{vcdim}(P) = 2$ 且 $\mathrm{se}(P) = 1$。

下一个结果排除了前一定理中的例外情形。

定理 1.4。 如果 P是一个凸几何且 $\mathrm{se}(P) = 1$，那么 $\mathrm{cdim}(P) \leq 2$。

下一个结果将凸维数、Dushnik-Miller 维数、布尔维数和局部维数与 VC 维数和分数维数区分开来。在陈述这一结果时，我们使用缩写 $[n]$ 表示 $\{1, \ldots, n\}$，其中 n是一个整数；为便于本文后续讨论，我们令 $[n] = \emptyset$ （当 $n < 1$时）。此外，我们用 lg n表示 n 的以 2 为底的对数，而 n 的自然对数记作 log n。

定理 1.5. 若 k 和 n 是满足 $1 \leq k \leq n - 2$的整数，则存在一个凸几何 $P(k, n)$，其底集为 $[n]$，且满足：

(1) $\mathrm{vcdim}(P(k,n)) = \mathrm{se}(P(k,n)) = k + 1$. (2) $\mathrm{fdim}(P(k,n)) < 2^{k+1}$.
(3) 对固定的 $k \geq 1$，当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{bdim}(P(k,n)) \to \infty$。(4) 对固定的 $k \geq 1$，当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{ldim}(P(k,n)) \to \infty$。(5) $\dim(P(1,n)) = 1 + \lfloor \lg\ n \rfloor$，且 $\dim(P(k,n)) \leq (k+1)2^{k+2} \log\ n$。(6) $\mathrm{cdim}(P(k,n)) = \binom{n-1}{k}$。

特别地，对于固定的 $k \geq 1$，$\dim(P(k,n)) \to \infty$当 $n \to \infty$时，而 $\mathrm{se}(P(k,n))$为常数，也就是说，凸几何不是维数有界的。

定理 1.5 中最有趣且最为人熟知的情形是 $P(1, n)$。不过，我们认为，将 $P(1, n)$ 视为更大族 $P(k, n)$ 的一员也普遍值得关注。特别是，这表明 $P(1, n)$ 的性质并非低 VC 维数或标准例数所致。

2. Convex Geometries and Partially Ordered Sets

偏序集（我们更喜欢简称偏序集）是配备了二元关系 $\leq$ 的集合 P，其中 $\leq$ 具有自反性、反对称性和传递性。我们假设读者熟悉偏序集的基本概念，包括：覆盖关系、序图（也称哈斯图）；链和反链；子偏序集；极大点和极小点；同构偏序集；以及线性扩张。我们还假设读者熟悉有限格的基础知识，包括零元、单位元、交和并。

在 [15], Edelmann 和 Jamison 引入了一类他们称为凸几何的偏序集。正如 [15], 所指出的，这类偏序集已被多位作者研究，而且许多组合对象天然具有凸几何的序结构。例如，树的子树 [12], 偏序集的凸子集 [5],无环有向图的凸子图 [31], 传递定向有向图的传递定向子图 [7], 定向拟阵的凸集 [26], 以及更多例子，详见 [15]。

正如 [15], 所指出的，文献中关于凸几何的记号和术语并不统一。举一个例子，它们也曾被称为

反拟阵，例如 Korte、Lov´asz 和 Schrader [25]就曾这样称呼。因此， [15], 提出了一个统一的凸几何框架，我们将在很大程度上沿用他们的框架。

设 X 是一个有限非空[1] 集合。底集为 X 的凸几何是一个由 P 的子集构成的族，满足以下三个性质：

(1) $\emptyset$, $X \in P$。（基性质 y)
(2) 若 A 且 $B \in P$，则 $A \cap B \in P$。（交性质)
(3) 若 $A \in P$，且 $A \neq X$，则存在 $\alpha \in X - A$ 使得 $A \cup \{\alpha\} \in P$。（扩张性质）

关于凸几何的更多背景信息（包括若干等价定义），请读者参阅 [15] 和 [16] 。

本文特别关注凸几何的两个特殊情形。第一个例子是，当 L 是有限非空集合 X 上的线性序时，我们由 L得到凸几何 P，其中 $|P| = 1 + |X|$，具体做法是将 P取为 L的所有初始段组成的集合；也就是说，若 $|X| = n$ 且 $L = \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$，则 P由空集以及 X中形如 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$的子集组成，其中 $i \in [n]$。这些简单的例子称为线性几何。

第二个例子是，当 X 是有限非空集合，且 P 由 X的所有子集组成时， P 是一个凸几何。文献中对此特殊情形有多种称呼，其中布尔代数和子集格是两种常见称呼。为强调 $|X|$ 与 $|P|$之间的关系，我们将此特殊情形记作 $P = \mathbf{2}^n$，其中 $n = |X|$。

作为集合族，凸几何按包含关系构成偏序，因此是一个偏序集。当 P 是凸几何时， P 对交封闭，但一般而言， P 不对并封闭。尽管如此，凸几何是一个格。空集是零元，而底集 X 是单位元。对于集合A, $B \in P$，我们有：

$$A \wedge B = A \cap B, \quad \text{and}$$
$$A \vee B = \cap\{C \in P : A \cup B \subseteq C\}.$$

虽然我们会引用涉及一般偏序集的结果，但我们特别关注的是凸几何这一类。

3. Concepts of Dimension

当 P 是偏序集时，我们有时会用简写形式 $a \leq_P b$ 代替 P中的 $a \leq b$ 。此外，当 a 和 b 是 P中互不相同且不可比较的元素时，我们记作 $a \parallel_P b$ 。由于我们的重点主要在于组合性质，而且对于两个同构偏序集，我们研究的所有参数都取相同的值，因此当 P和 Q 是同构偏序集时，我们称$P = Q$ 。本着同样的精神，若 P 的某个子偏序集与 Q 同构，我们就说 P 包含Q 。

为了引出凸几何子类的定义，我们先从更广泛的偏序集类别中的四种维数概念谈起。我们将考察的第一个维数概念，是 Dushnik 和 Miller [14]定义的经典参数。当 $t \geq 1$ 时，偏序集 P 的线性扩张序列 (L_1、.....、 L_t) 若满足对所有 x, $y \in P$， $x \leq_P y$ 当且仅当 $x \leq y$，则称其为 P的实现子

[1]一些作者允许底集 X 为空集，因此族 $\{\emptyset\}$ 也构成一个凸几何。这个特殊情形几乎没有什么值得讨论的，因此我们只考虑非空底集。

在 L_i 中，对所有 $i \in [t]$ 均成立。 P 的*Dushnik-Miller* 维数记作 dim(P)，是满足 P 存在大小为 t 的实现子的最小正整数 t 。遵循关于这一参数的大量文献中的惯例，今后将简称为维数。

对于每个 $t \geq 2$，标准例子 S_t 都是一个高度为 2 的偏序集，其极小元为$a_1, \ldots,$ a_t，极大元为 $b_1, \ldots, b_t$，并且当$1 \leq i, j \leq t$ 且 $i \neq j$ 时， $a_i < b_j$ 在 S_t 中成立。正如 [14], 中所指出的，对于所有 $t \geq 2$，dim(S_t) $= t$ 。偏序集 P 的 标准示例数记作 se(P)：当 P 不包含标准例子 S_2 时，定义其为 1；否则，se(P) 等于使得 P 包含标准例子 S_t 的最大 $t \geq 2$ 。显然，对于所有偏序集 P，dim(P) $\geq$ se(P)。

一方面，不等式 dim(P) $\geq$ se(P) 可能远非紧确；例如，在标准示例数为 1 的偏序集类中（即广为研究的区间序类 [19,36]），存在维数任意大的偏序集。另一方面，在极端情况下，当 $P = \mathbf{2}^n$ 是一个布尔代数且 $n > 2$ 时，我们有 $n =$ dim(P) $=$ se(P)。事实上， S_n 是由 P 中所有大小为 1 的子集和 $n-1$ 所诱导的。另一方面，对于 $i \in [n]$ ，定义 L_i 为相对于排序 $i < i+1 < \cdots < n < 1 < \cdots < i-1$ 对 $\mathbf{2}^n$ 作字典序排序，则容易看出，($L_1, \ldots, L_n$) 是 P 的一个实现子。

如果存在一个函数 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对每个 $P \in \mathbb{P}$，dim(P) $\leq$ f(se(P)), 则称偏序集类 $\mathbb{P}$ 是维数有界的。我们指出图论中一个类似的问题。虽然存在色数任意大的无三角形图，但有一些有趣的图类，其色数可以由最大团大小限定。这类图称为χ有界的。

Blake、Hodor、Micek、Seweryn 和 TROTTER [10] 刚刚解决了一个已有 40 多年历史的猜想，他们证明了具有平面覆盖图的偏序集类是维数有界的。随着阅读的深入，读者会逐渐体会到，他们的结果如何引出了本文探讨的许多问题。对于不熟悉偏序集维数概念的读者，近几篇研究论文（包括 [9,20,29],）以及综述论文 [37] 中都提供了简明的概述。

当 P是一个偏序集时，我们用 Inc(P) 表示 P 中所有满足 $a \parallel_P b$的不同元素对 (a, b) 构成的集合。显然，以下陈述等价：(1) Inc(P) $= \emptyset$ ；(2) P 是链；(3) dim(P) $= 1$。当 Inc(P) $\neq \emptyset$且 $t \geq 2$时， P的线性扩张序列 ($L_1, L_2, \ldots, L_t$) 是 P的实现子，当且仅当对于每个 (a, b) $\in$Inc(P)，都存在某个 $i \in [t]$ 使得 $a > b$ 在 L_i中。

当 S 是 Inc(P) 的非空子集时，若存在 P 的一个线性扩张 L ，使得对于任意 $(a, b) \in S$，都有 $a > b$ 在 L 中，我们就称 S 是可逆的。相应地，当 Inc(P) $\neq \emptyset$ 时，dim(P) 是满足 Inc(P) 可由 t 个可逆集覆盖的最小整数 $t \geq 2$。

现在设 P 是一个非链偏序集。若一对 (a, b) $\in$Inc(P) 满足（1） $x <_P a$ 时 $x <_P b$ ；且（2） $b <_P y$ 时 $a <_P y$ ，则称其为临界对。 P 的所有临界对组成的集合记作 crit(P)。当且仅当对于每个 (a, b) $\in$crit(P)，都存在某个 $i \in [t]$ 使得 $a > b$ 属于 L_i 时，由 $L_1, \ldots, L_t$ 个 P 的线性扩张构成的序列是 P 的实现子。因此，di m(P) 是使 crit(P) 能被 t 个可逆集覆盖的最小整数 $t \geq 2$。

再设 P 是一个非链偏序集，并设 $k \geq 2$。Inc(P) 中有序对组成的序列 ((a_1, b_1) $\ldots$, (a_k, b_k)) 称为 P 中的一个交错环，如果对于所有 $i \in [k]$, $a_i \leq_P b_{i+1}$ 。正如术语所示，这一条件成立

循环地成立，即我们还要求 $a_k \leq_P b_1$。若对于所有 $i,\ j \in [k],\ a_i \leq_P b_j$ 当且仅当 $j = i+1$ 时成立，则称交错环 $((a_1,\ b_1)\ldots,\ (a_k,\ b_k))$ 是严格的。众所周知，$\mathrm{Inc}(P)$ 的非空子集 $S \subseteq$ 是可逆的，当且仅当 P 中不存在完全由 S 中的有序对组成的严格交错环。此外，我们注意到，当 $((a_1,\ b_1)\ldots,\ (a_k,\ b_k))$ 是严格交错环时，集合 $\{a_i\colon\ i \in [k]\}$ 和 $\{b_i : i \in [k]\}$ 都是 k 元反链。

设 P 是一个偏序集，并设 $\mathcal{R} = (L_1, \ldots, L_t)$ 是定义在 P 的底集上的一列线性序（这些线性序不一定是线性扩张）。对于 P 中一对不同元素 (x, y)，通过令 $q(i) = 1$（若 $x < y$ 属于 L_i）；否则令 $q(i) = 0$，来确定一个长度为 t 的 0–1 查询字符串 $q = q(x, y, \mathcal{R})$。若存在一个由长度为 t 的比特串构成的集合 τ，使得对于 P 中每一对不同元素 (x, y)，$x <_P y$ 当且仅当 $q(x, y, \mathcal{R}) \in \tau$，则称序列 $\mathcal{R}$ 是 P 的布尔实现器。Ne˘set˘ril 和 Pudl´ak 在 [30], 中定义了 P 的布尔维数，记为 $\mathrm{bdim}(P)$，它是使得 P 存在大小为 t 的布尔实现器的最小正整数 t。对于每个偏序集 P，总有 $\mathrm{bdim}(P) \leq \dim(P)$，因为实现子 $\mathcal{R} = (L_1, \ldots, L_t)$ 是一个布尔实现器，其中 $\tau = \{q\}$；这里 q 是一个长度为 t 的比特串，且对所有 $i \in [t]$ 都有 $q(i) = 1$。另一方面，容易验证，若 $t \geq 2$ 且 S_t 是一个标准例子，则 $\mathrm{bdim}(S_2) = 2$；$\mathrm{bdim}(S_3) = 3$；并且对所有 $t \geq 4$，$\mathrm{bdim}(S_t) = 4$。关于布尔维数的最新研究成果，请参阅 [28], [18] 和 [38] 。

设 P 是一个偏序集。若线性序 M 是 P 的某个子偏序集的线性扩张，则称其为 P 的部分线性扩张，简称 ple。若 M_i 中包含 $x \leq y$，则存在某个 $i \in [m]$；并且若 $(x, y) \in \mathrm{Inc}(P)$，则存在某个 $j \in [m]$，使得 M_j 中包含 $x > y$。满足以下条件的 P 的 ple 序列 $(M_1, \ldots, M_m)$ 称为 P 的局部实现器：（1）每当 $x \leq_P y$ 时，.....；（2）每当.....。根据 Ueckerdt[2], 的定义，P 的局部维数记为 $\mathrm{ldim}(P)$，是满足以下条件的最小 r：存在 P 的局部实现器 $(M_1, \ldots, M_m)$，使得对每个 $x \in P$，满足 $x \in M_i$ 的 $i \in [m]$ 的不同取值至多有 r 个。同样，显然 $\mathrm{ldim}(P) \leq \dim(P)$，因为实现子也是局部实现器。此外，容易证明，若 $t \geq 2$ 且 S_t 是标准例子，则对所有 $t \geq 3$，$\mathrm{ldim}(S_2) = 2$，且 $\mathrm{ldim}(S_t) = 3$。有关局部维数的最新结果，请参阅 [11], [23] 和 [2]。特别是，[2] 对比了迄今为止我们定义的三种维数概念。

值得注意的是，布尔维数和局部维数彼此之间都不存在上界，正如 [38] 中证明的以下结果所示：

(1) 存在一个常数 C，使得若 $\mathrm{ldim}(P) = 3$，则 $\mathrm{bdim}(P) \leq C$。(2) 对每个 $t \geq 4$，都存在一个偏序集 P，使得 $\mathrm{ldim}(P) = 4$ 且 $\mathrm{bdim}(P) \geq t$。(3) 对每个 $t \geq 3$，都存在一个偏序集 P，使得 $\mathrm{bdim}(P) = 3$ 且 $\mathrm{ldim}(P) \geq t$。

设 P 是一个偏序集，$\mathcal{E}(P)$ 是 P的所有线性扩张构成的集合。的分数实现器是一个函数 f，它为 $\mathcal{E}(P)$ 中的线性扩张赋予非负实数，并满足：对于任意 $(x, y) \in \mathrm{Inc}(P)$，$\sum\{f(L)\colon\ L \in \mathcal{E}(P)\ x > y$属于 $L\} \geq 1$。按照 Felsner 和 Trotter [17], 的定义，P的分数维数记作 $\mathrm{fdim}(P)$，是满足 $t \geq 1$的最小正实数 t，使得存在一个分数实现器 f，并且满足 $\sum\{f(L)\colon\ L \in \mathcal{E}(P)\} = t$。现在有 $\mathrm{fdim}(P) \leq \dim(P)$，因为我们可以令 f 为一个 0–1 函数：对 P的实现子中的线性扩张赋值 1，对所有其他线性扩张赋值 0。很容易验证，对所有 $t \geq 2$，$\mathrm{fdim}(S_t) = t$。另一方面，

[2]T. Ueckerdt 在于波兰举行的 2016年序与几何研讨会上提出了局部维数这一概念。

一个有趣的练习是证明，如果 $\mathsf{se}(P) = 1$，那么 $\mathsf{fdim}(P) < 4$。关于分数维数的更多信息和结果，请参阅 [17] 和 [6] 。

对于上一节讨论的凸几何的两个特殊情形，我们首先注意到，若 P 是线性几何，则 $\mathsf{dim}(P) = \mathsf{bdim}(P) = \mathsf{ldim}(P) = \mathsf{fdim}(P) = \mathsf{se}(P) = 1$。布尔代数的情况则更为复杂。若$P = \mathbf{2}^n$ 是布尔代数，则

(1) $\mathsf{dim}(P) = \mathsf{fdim}(P) = n$，见 [27],; (2) $\mathsf{se}(P) = n$，除非 $n = 2$，且在这种情况下 $\mathsf{se}(P) = 1$; (3) $\mathsf{bdim}(P) = \Omega(n/\log n)$，且 $\mathsf{bdim}(P) < n$，见 [13]。(4) $\mathsf{ldim}(P) = \Omega(n/\log n)$，且 $\mathsf{ldim}(P) < n$ 是否成立尚未解决，见 [23]。

3.1. VC-维数。 现在我们讨论另外两个为凸几何定义、但一般不适用于偏序集的维数参数。其中第一个适用于任意非空集合族。

设 X 是一个有限集合， F 是 X 的非空子集族。F 的 VC-维数 记作 $\mathsf{vcdim}(F)$, 定义如下。若不存在满足条件的元素 $\alpha \in X$，使得存在集合 A, $A' \in F$ 满足 $\alpha \in A$ 和 $\alpha \notin A'$，则令 $\mathsf{vcdim}(F)$ 为 $= 0$；否则，令 $\mathsf{vcdim}(F)$ 等于满足以下条件的最大 $t \geq 1$： 存在 t 元子集 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$，使得对于每个集合 $S \subset [t]$, 都存在集合 $A = A(S) \in F$，满足 $\alpha_i \in A$ 当且仅当 $i \in S$。注意，如果 P 是线性凸几何，则 $\mathsf{vcdim}(P) = 1$。此外，如果 P 是布尔代数 $\mathbf{2}^n$，则 $\mathsf{vcdim}(P) = n$。

接下来的两个定理都在 [15], 中得到证明，它们清楚地表明布尔代数在讨论凸几何时所起的关键作用。为了陈述定理，请回忆：对于偏序集 P中的元素 x、y，其区间为 $[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$。

定理 3.1 (布尔性质)。设 P 是一个凸几何， X 和 Y 是 P 中的两个不同元素，满足 *(1)* $Y \neq \emptyset$; 以及 *(2)* X 是 P中所有被 Y在 P中覆盖的集合的交集。那么， P 的区间 $[X, Y]$ 同构于布尔代数 $\mathbf{2}^m$，其中 m 是 P中被 Y 覆盖的集合的数量。

现在设 Q 是一个有限格。自然会想到，是否存在一个凸几何 P，使得 $P = Q$。接下来的定理在 [15], 中得到证明，它给出了答案。

定理 3.2。设 Q 是一个有限格。那么存在一个凸几何 P，使得P 与偏序集 Q 同构，当且仅当对于 Q 中每个满足 $y \neq 0$的 y，若 x 是 Q中所有被 y 覆盖的元素的交，那么 Q 中的区间 $[x, y]$ 与布尔代数 $\mathbf{2}^m$同构，其中 m 是 Q 中被 y覆盖的元素个数。

在文献中，若有限格 Q 满足定理 3.2 中的性质，就称其为交分配的 。因此，凸几何的研究可以转化为交分配格的研究。这些格的一个重要性质是它们是分级的，也就是说，任意两个可比较元素之间的所有极大链长度相同。

受前面的讨论启发，我们给出以下定义。设 Q 是一个有限偏序集，并且设 $y \in Q$。我们用 $\mathsf{dd}(y, Q)$ 表示 y 在 Q 中的下度，即 $\mathsf{dd}(y, Q)$ 是 Q 中被 y 覆盖的元素个数。当然，当且仅当 y 是 Q 的极小元素时，$\mathsf{dd}(y, Q) = 0$。接着，我们用 $\mathsf{maxdd}(Q)$ 表示对所有元素 $y \in Q$ 取 $\mathsf{dd}(y, Q)$ 所得的最大值。

当 P 是一个凸几何时，如果 $d = \text{maxdd}(P)$，那么定理 3.1 现在蕴含 P 包含布尔代数 $\mathbf{2}^d$。因此，$\dim(P) \geq \text{vcdim}(P) \geq \text{maxdd}(P)$。下一个定理在 [1] 中证明，并表明这个不等式是紧的。

定理3.3。当 P 是凸几何时，$\text{vcdim}(P) = \text{maxdd}(P)$。

由于我们的一些证明直接利用了图示和最大下度的具体值，为了保持全文一致，我们作如下约定：

> 从现在起，我们将用最大下度而非 VC 维数来表述结果；请读者记住，在研究凸几何时，最大下度与 VC 维数完全相同。

对偶地，当 Q 是有限偏序集且 $x \in Q$时，我们将 Q中 x 的上度定义为 $\text{ud}(x, Q)$，即覆盖 x的 Q 中的元素个数。此外，$\text{maxud}(X)$是对所有 $x \in Q$取 $\text{ud}(x, Q)$ 所得的最大值。我们很快就会看到，即使最大下度为 2，最大上度也没有上界。

最后，我们简要指出引言中提到的一条观察：

观察 3.4。设 P是一个凸几何，则 $\text{se}(P) \geq \text{maxdd}(P)$ 除非$\text{maxdd}(P) = 2$ 且 $\text{se}(P) = 1$。

证明。若 $\text{maxdd}(P) = d \geq 3$，则由定理 3.1 可知，存在一个包含于 P 的布尔代数 $\mathbf{2}^d$。因此，根据 $d = \text{se}(\mathbf{2}^d) \leq \text{se}(P)$。□

3.2. **凸维数**。凸几何的第二个维数参数借鉴了（Dushnik-Miller）维数的设定。当 X 是凸几何 P的底集，$|X| = n$，且 $L = \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$是$X$上的线性序时，若对每个 $i \in [n]$，$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$ 都是 P中的集合，我们就称 L 为相容的。X 上的相容线性序与 P中的极大链之间存在自然的一一对应。

设 X 是一个有限集合，设 $t \geq 1$，并设 (P_1、.....、 P_t) 是一个凸几何序列，其中每个凸几何的底集都是 X。定义 P 为 X 的子集族：

$$P = \{A_1 \cap \cdots \cap A_t : A_i \in P_i \text{ for all } i \in [t]\}.$$

则 P 是一个凸几何，我们记作 $P = P_1 \vee \cdots \vee P_t$。此外，给定一个凸几何 P，若取 P 中极大链所关联的线性几何，定义序列 (P_1、.....、 P_t)，则 $P = P_1 \vee \cdots \vee P_t$。这些观察引出了以下定义。

设 P 是一个凸几何，且 X 是 P 的底集。若线性几何序列 (P_1、.....、 P_t) 中每个几何的底集都是 X，则称其为 P 的凸实现，如果 $P = P_1 \vee \cdots \vee P_t$。$P$ 的凸维数记为 $\text{cdim}(P)$，它是满足以下条件的最小正整数 t：P 有一个大小为 t 的凸实现 (P_1、.....、 P_t)。

我们先做一个初等观察。设 $n \geq 2$，设 $L_1 = 1 < 2 < \cdots < n$，并设 $L_2 = n < \cdots < 2 < 1$。如果 Q_1 和 Q_2 分别是由 L_1 和 L_2 确定、底集为 $[n]$ 的线性几何，并且 $P = Q_1 \vee Q_2$，那么 $\text{cdim}(P) = \dim(P) = \text{maxdd}(P) = 2$，而 $\text{maxud}(P) = n$。

在有限格 Q 中，满足 $\text{ud}(y, Q) = 1$ 的元素 y 称为交不可约元素。这一术语反映了这样的性质：若 $y = w \wedge z$，那么

w 和 z 中必有一个是 y。以下定理给出了凸维数一个非常有用的等价定义，证明见 [15]。

定理 3.5. 设 P 是一个凸几何。那么，$\mathrm{cdim}(P)$ 是由 P的交不可约元确定的 P 子偏序集的宽度。

接下来，我们简要介绍一些初等结果，为后续更具实质性的论证提供支持。

命题 3.6. 设 Q 是一个有限格。如果 $(x,y) \in \mathrm{crit}(Q)$，那么 $\mathrm{dd}(x,Q) = \mathrm{ud}(y,Q) = 1$。

证明. 我们证明 $\mathsf{dd}(x,Q) = 1$。关于 $\mathsf{ud}(y,Q) = 1$ 的论证是对偶的。反设 $\mathsf{dd}(x,Q) \geq 2$。那么，Q 中存在不同的元素w 和 z，使得 x 在 Q中覆盖 w 和 z。由于 (x,y) 是一个临界对，且 $w <_Q x$，我们知道 $w <_Q y$。同理，我们有 $z <_Q x$，因此 $z <_Q y$。由于 Q 是一个格，且 $\{x,y\}$ 是一个反链，我们知道 $\{w,z\} \leq_Q w \vee z \leq_Q x \wedge y <_Q \{x,y\}$。然而，这些不等式意味着 w 和 z 都不被 x覆盖。由此矛盾，证明得证。□

当 Q 是有限格，且 y 是 Q 的交不可约元时，我们用 $\mathsf{uc}(y, Q)$ 表示 Q 中唯一覆盖 y 的元素。若 Q 中的元素 x 满足 $\mathsf{dd}(x, Q) = 1$，则称其为 Q 的**并不可约元素**。在这种情况下，我们用 $\mathsf{dc}(x, Q)$ 表示 Q 中唯一被 x 覆盖的元素。下面的结果表明，在凸几何 P 中，P 的交不可约元集合与 P 的临界对集合之间存在自然的一一对应。

命题 3.7。设 P 是一个凸几何，P 中的 B 是交不可约元，令 $Y = \mathrm{uc}(B,P)$，并令 $\{\alpha\} = Y - B$。则以下陈述等价:

(1) $A = \cap\{U \in P : \alpha \in U\}$.
(2) $(A,B) \in \mathrm{crit}(P)$.

证明。假设 $A = \cap\{U \in P\colon\ \alpha \in U\}$。我们证明 $(A,\ B)$ 是一个临界对。首先，由于 $\alpha \in A$ 且 $\alpha \notin B$，我们知道 $A \not\subset B$。若存在元素 $\beta \in A - Y$，则 $A \cap Y \subsetneq A$，这与 A 的定义矛盾。因此我们得出 $A \subset Y$。此外，若对于某个 $V \in P$ 有 $V \subsetneq A$，则 $\alpha \notin V$。由于 $Y = B \cup \{\alpha\}$，我们得出 $V \subset B$。现在假设 B 是某个 $W \in P$ 的真子集。那么，由于 B 是交不可约元，我们有 $Y \subseteq W$。这意味着 $A \subset W$。这些观察表明 $(A,\ B)$ 是一个临界对。

现在假设 $(A,\ B)$ 是一个临界对。我们证明 $A = \cap\{U \in P\colon\ \alpha \in U\}$。由于 $B \subsetneq Y$，必有 $A \subseteq Y$。然而，$Y = B \cup \{\alpha\}$，因此我们得出$\alpha \in A$。现在假设存在一个集合 $U \in P$，满足 $\alpha \in U$ 且 $U \subsetneq A$。那么$U \not\leq_P B$，这与 $(A,\ B)$ 是临界对的假设矛盾。我们得出 $A = \cap\{U \in P\colon\ \alpha \in U\}$。□

命题 3.8。设 Q 是一个有限偏序集。若 $t = \mathrm{se}(Q) \geq 2$，则 Q 包含标准例子 S_t 的一个副本，其标记满足：对于所有 $i \in [t]$，$(a_i, b_i) \in \mathrm{crit}(Q)$。
证明。在 Q 中包含的所有标准例子 S_t 的副本中，选择一个使下列总和最小的副本:

$$\sum_{i \in [t]} |D_Q[a_i]| + |U_Q[b_i]|.$$

显然，对于每个 $i \in [t]$，(a_i, b_i) 都是 Q 中的临界对。 □

命题 3.9. 设 P 是一个凸几何。那么

$$\mathrm{cdim}(P) \geq \dim(P) \geq \max\{\mathrm{maxdd}(P), \mathrm{se}(P), \mathrm{bdim}(P), \mathrm{fdim}(P), \mathrm{ldim}(B)\}.$$

证明。如第 3 节所述，对于每个偏序集 P，不等式 $\dim(P) \geq \mathrm{se}(P), \mathrm{bdim}(P), \mathrm{fdim}(P), \mathrm{ldim}(B)$ 均成立。对于 $\dim(P) \geq \mathrm{maxdd}(P)$，注意到根据定理 3.2，偏序集 P 包含一个维数为 $\mathrm{maxdd}(P)$ 的布尔代数。现在令 J 为 P 中交不可约元的集合，即 J 是所有满足 $\mathrm{ud}(B, P) = 1$ 的集合 B 组成的集合。根据定理 3.5，我们知道 $\mathrm{cdim}(P)$ 是子偏序集 J 的宽度。若 $\mathrm{cdim}(P) = s$，则可知存在链 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$，它们覆盖 J 中的所有集合。对于每个 $i \in [s]$，令 S_i 由所有满足 $B \in \mathcal{C}_i$ 的临界对 (A, B) 组成。每个这样的集合 S_i 都是可逆的，因为它不可能包含严格交替环。因此 $\dim(P) \leq s$。□

4. 分离维数与凸维数

命题 3.9 断言，若 P 是凸几何，则 $\mathrm{cdim}(P) \geq \dim(P)$。若 P 是线性几何或布尔代数 $\mathbf{2}^n$，则 $\mathrm{cdim}(P) = \dim(P)$。更一般地，对于分配格，这个等式也成立，见 [16]。不过，这个不等式并非总是紧的：[16] 中的图 1 展示了一个凸维数为 4、但（Dushnik-Miller）维数为 3 的凸几何。

自然会想到，维数和凸维数能否分离，也就是说，是否存在一个凸几何族，使得维数有界而凸维数无界。现在我们将给出肯定的答案。本节余下部分构成了定理 1.1 的证明。

对于 $n \geq 3$，用 Q_n 表示形如 $[i] \times [j] \times [k]$ 的集合，其中 $i \in [2]$ 且 $j, k \in [n]$。容易看出，Q_n 的维数至多为 3。取 Q_n 的字典序排序 L_1，L_2，L_3，其中每一种排序都按照三个坐标的一种不同循环次序对 Q_n 进行字典序排序。

将由所有形如 $[2] \times [j] \times [k]$ 的集合组成的 Q_n 的子偏序集记为 P_n，其中对所有 $j, k \in [n]$，但仅对满足 $j + k \leq n + 1$ 的那些 j，$k \in [n]$ 取值。作为 Q_n 的子偏序集，$\dim(P_n)$ 也有 ≤ 3。

注意，P_n 既包含空集，也包含全集 $[2] \times [n] \times [n]$。此外，它显然对交运算封闭，并且每个元素都可以通过添加 2 来扩展；否则，也可以添加在第一或第二个坐标上缺失的任意其他元素 α。由此可知，P_n 构成一个凸几何。由于 $\mathrm{maxdd}(P_n) = 3$，根据命题 3.9，我们知道 $\dim(P_n) \geq 3$。因此，$\dim(P_n) = 3$。

最后，注意到 $u(Y, P_n) = 1$ 恰好对应于形如 $[2] \times [n] \times [k]$、$[2] \times [k] \times [n]$（其中 $1 \leq k < n$）以及 $[1] \times [j] \times [k]$（其中 $j + k = n + 1$）的子集。此外，后一类集合构成了一个大小为 $n + 1$ 的最大反链。根据定理 3.5，我们有 $\dim(P_n) = n + 1$。

由此可知，我们得到一个无限的凸几何族 $\{P_n : n \geq 3\}$，其 $\dim(P_n) = 3$，且 $\mathrm{cdim}(P_n) = n+1$。因此，我们为凸几何这一类对象区分了维数与凸维数。

我们在图 1 中展示了 P_6 作为 Q_6 的子偏序集时的序图。

5. Convex Geometries with Dimension 2

上一节构造的族引出了以下问题：在维数为 2 的凸几何中，凸维数是否有上界？在

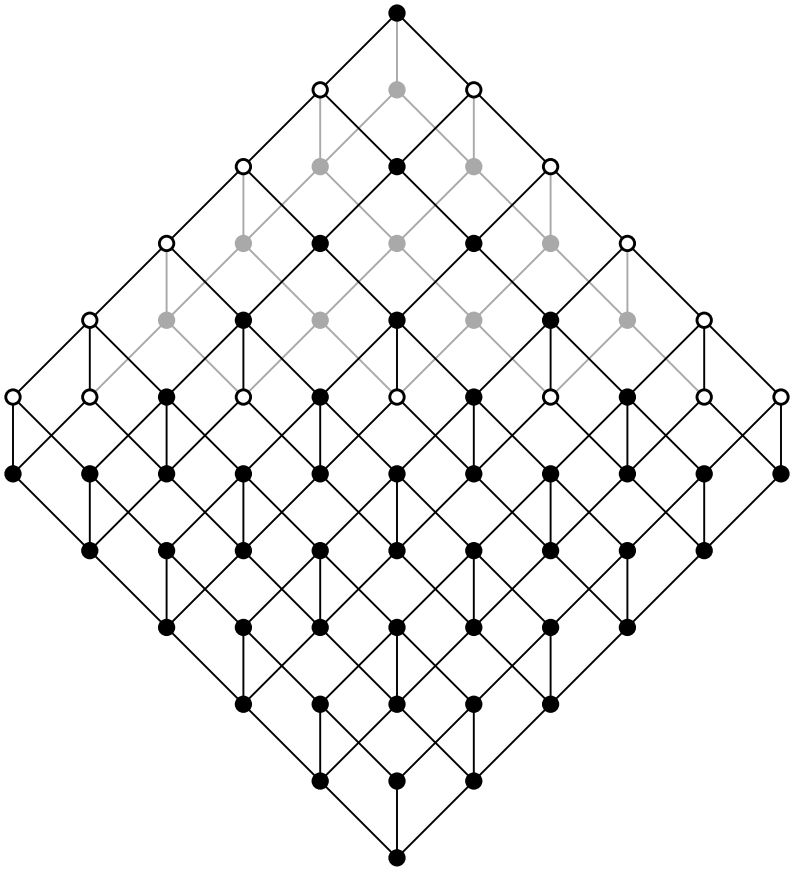


FIGURE 1. 对于 $n \geq 3$，我们展示了一个三维偏序集 Q_n 及其子偏序集 P_n ，后者由移除灰色点得到。于是 P_n是一个凸几何，而白色点构成了 P_n的交不可约元集合。

本节中，我们给出肯定的答案。事实上，我们证明，当 $\dim(P) \leq 2$ 时，$\text{cdim}(P) = \dim(P)$，这一论证构成了定理 1.2 的证明。若 $\dim(P) = 1$，则该结论显然成立，因此我们固定一个满足 $\dim(P) = 2$ 的凸几何 P。

我们的论证需要用到 K. Baker 提出的一个尚未发表、但如今已广为人知的结果：有限格的 Dushnik-Miller 维数至多为 2，当且仅当其序图是平面的。回顾一下，如果一个偏序集的序图可以在平面上绘制（遵循序图的所有规则），且没有边交叉，那么就称该偏序集是平面的。我们在图2左侧展示了一个具有平面序图的二维凸几何。

利用 Baker 的结果，我们取 P 的序图的平面绘图。由于 P 是格， P 中有一条定义良好的极大链，构成图中的左边界。此外， P 中也有一条定义良好的极大链，在这两幅图中构成右边界。这两条边界链

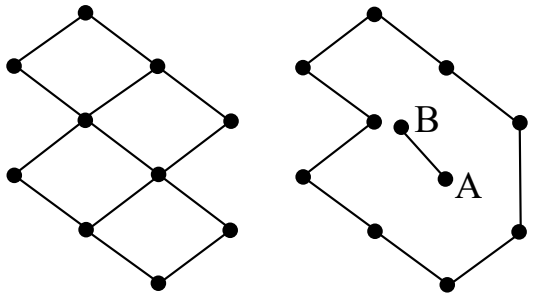


FIGURE 2. 左侧展示的是一个凸几何，其序图是平面图。请注意，最大下度为 2，并且每个内部面都是菱形。右侧示意了一个内部元素在上度为 1 时的样子。我们将证明这是不可能的。

可能相交。无论如何， P 中任何不在这两条链上的元素都位于绘图的内部 。

命题5.1. 图中的内部面都是菱形。

证明。 由于 P 是一个格，每个面 F 都有唯一的最大元素，记作 1_F。此外， F 有唯一的最小元素，记作 0_F。设A, B是被 1_F覆盖的 F的顶点。根据布尔性质，我们知道元素 $A \cap B$ 被 A 和 B覆盖，因此 F是由 $\{1_F, A, B, A \cap B\}$中的元素构成的菱形。□

命题5.2. 如果 A 位于图形内部，那么 下度$(A, P) \geq 2$,

证明。 参照图2右侧的示意图，反设 A 位于图形内部，且 $\mathsf{ud}(A, P) = 1$。令 B 为 P 中唯一覆盖 A 的元素。此外，令 e 为图形中的一条边，其端点为 A 和 B 。平面上属于 e 的所有点（ B 除外）都位于图形内部。这意味着 e 是两个内部面 F 和 F' 的边界边，且这两个面除了边 e 的端点外没有其他公共点。

注意，不可能有 $B = 1_F$ 和 $B = 1_{F'}$，因为这将要求 $\mathsf{dd}(B, P) \geq 3$。不失一般性，我们可以假设 $B \neq 1_F$。由于 F 是一个菱形，这迫使 $B = 0_F$ 成立。进而，这迫使 $\mathsf{ud}(A, P) \geq 2$。矛盾由此完成了该断言的证明。□

为完成该定理的证明，我们只需注意到， P 中所有上度为 1 的元素所构成的 P 子偏序集，其宽度至多为 2，因为这些元素都位于图中的两条边界链上。

6. STANDARD EXAMPLE NUMBER AND MAXIMUM DOWN DEGREE

我们已经指出，当 P是底集为 X的凸几何时，$\mathsf{se}(P) \geq \mathsf{maxdd}(P)$，但 $\mathsf{maxdd}(P) = 2$ 的情况除外。如果 $\mathsf{maxdd}(P) = 2$，则可能有 $\mathsf{se}(P) = 1$；当 P是布尔代数 $\mathbf{2}^2$时，情况正是如此。这引出了一个问题：是否存在某个凸几何 P，使得 $\mathsf{se}(P) > \mathsf{maxdd}(P)$?

我们的回答是否定的。本节的结果构成了定理 1.3 的证明。

我们用反证法，假设 P 是一个满足 $\mathsf{se}(P) > \mathsf{maxdd}(P)$ 的凸几何。于是 $\mathsf{se}(P) \geq 2$。选取 P 中的一个标准例子 S_n，其元素标记为 $\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{B_1, \ldots, B_n\}$，使得对于所有 $i,\ j \in [n]$，$A_i \subseteq B_j$ 当且仅当 $i \neq j$。根据命题 3.8，我们还可以假设，对于每个 $i \in [n]$，$(A_i,\ B_i)$ 都是一个临界对。由命题 3.6 可知，对于每个 $i \in [n]$，$\mathsf{dd}(A_i,\ P) = \mathsf{ud}(B_i,\ P) = 1$。

对于每个 $i \in [n]$，令 Y_i 为 P中覆盖 B_i 的唯一元素。由于 $|Y_i - B_i| = 1$，存在唯一的元素 $\alpha_i \in X$ 使得 $Y_i = B_i \cup \{\alpha_i\}$。由于 $(A_i,\ B_i)$ 是一个临界对，且 $B_i \subsetneq Y_i$，我们知道 $A_i \subset Y_i$。由于 $A_i \parallel_P B_i$，这迫使 $\alpha_i \in A_i - B_i$。

现在令 X_i 为 P 中唯一被 A_i 覆盖的集合。由于 $(A_i,\ B_i)$ 是一个临界对，我们知道 $X_i \subset B_i$。这就要求 $X_i = A_i - \{\alpha_i\}$。也就是说，α_i 是 A_i 中唯一不属于 B_i 的元素。

现在令 $Y_0 = A_1 \vee \cdots \vee A_n$。此外，对于每个 $i \in [n]$，令 $B_i' = Y_0 \cap B_i$。那么 B_i' 是 P 的一个元素，并且 $\alpha_i \in A_i - B_i'$。此外，对于每个满足 $j \neq i$ 的 $j \in [n]$，A_j 是 B_i 和 Y_0 的子集。因此，$A_j \subset B_i'$。由此可知，$\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{B_1', \ldots, B_n'\}$ 中的集合确定了 P 的一个子偏序集，该子偏序集与 S_n 同构。特别地，$\{B_1', \ldots, B_n'\}$ 中的集合在 P 中构成一个含有 n 个元素的反链。

对于每个 $i \in [n]$，令 $Y_i' = B_i' \cup \{\alpha_i\}$。于是有：

$$(1) \quad Y_i' = B_i' \cup \{\alpha_i\} = (Y_0 \cap B_i) \cup \{\alpha_i\} = (Y_0 \cup \{\alpha_i\}) \cap (B_i \cup \{\alpha_i\}) = Y_0 \cap Y_i.$$

由于 Y_0 和 Y_i 是 P的元素，因此 Y_i'是 P的元素。此外，根据其定义，显然 Y_i' 覆盖 B_i'。

断言 6.1。若 $i,\ j \in [n]$，则 $A_j \subset Y_i'$。

证明。若 $j \neq i$，则 $A_j \subset B_i' \subset Y_i'$。若 $j = i$，由于 $A_i \subset Y_i$ 和 $A_i \subset Y_0$，由 (1) 可得 $A \subset Y_i'$。□

命题 6.2。若 $i \in [n]$，则 $Y_0 = Y_i'$。

证明。第一个断言意味着对于所有 $i \in [n]$，都有 $Y_0 \subseteq Y_i'$。若 $i \in [n]$，则根据 B_i' 的定义可得 $B_i' \subseteq Y_0$。由于 Y_i'覆盖 B_i'，我们得出 $Y_0 = Y_i'$。□

我们现在已经证明，元素 Y_0 覆盖了 $\{B_1', \ldots, B_n'\}$ 的所有元素。这意味着 $\mathsf{maxdd}(P) \geq \mathsf{dd}(Y_0,\ P) \geq n$。进而，我们有 $\mathsf{maxdd}(P) \geq n$。有了这一观察，证明便完成了。

7. Convex Geometries with Standard Example Number 1

我们现在知道，若 P 是凸几何，则 $\mathsf{se}(P) = \mathsf{maxdd}(P)$，除非 $\mathsf{se}(P) = 1$ 且 $\mathsf{maxdd}(P) = 2$。本节将证明，若 P 是凸几何，且 $\mathsf{se}(P) = 1$，则 $\dim(P) = \mathsf{cdim}(P) \leq 2$。本节给出了定理 1.4 的证明。

我们固定一个凸几何 P，满足 $\mathsf{se}(P) = 1$。若 $\mathsf{maxdd}(P) = 1$，则 P 是一条链，结论显然成立。因此，我们可以假设 $\mathsf{maxdd}(P) = 2$，从而 $\dim(P) \geq 2$。

令 J 表示由交不可约元确定的 P 的子偏序集。则 $\mathsf{cdim}(P) = \mathsf{width}(J)$。若该命题不成立，则 J 中存在一个含 3 个元素的反链$\{B_1, B_2, B_3\}$。对于每个 $i \in [3]$，令 Y_i 为 P 中唯一覆盖 B_i 的元素。由于 $\mathsf{maxdd}(P) = 2$，我们可以假设 $Y_1 \neq Y_2$。由于 P 不包含

S_2，则 $B_1 <_P Y_2$ 或 $B_2 <_P Y_1$。注意，由于 P 是格，不可能两个不等式同时成立，因此不失一般性，我们可以假设$B_1 <_P Y_2$ 且 $B_2 \|_P Y_1$。

那么，由于 Y_1 是唯一覆盖 B_1的元素，我们有 $Y_1 <_P Y_2$，并且存在一个被 Y_2 覆盖的元素 Z_1 ，使得 $Y_1 \leq_P Z_1$。布尔性质进一步表明，存在一个被 Z_1 和 B_2 覆盖的元素 X 。此外，由于 P 是分级的且 $B_1 \|_P B_2$，如果 $Y_1 <_P Z_1$，那么 B_1，$Y_1 \|_P X$，并且 $\{B_1, Y_1, B_2, X\}$决定了 S_2。由此可得 $Y_1 = Z_1$。

注意，$\{B_3, Y_3\} \cap \{B_1, Y_1, B_2, Y_2, X\} = \emptyset$成立，因为任何公共点都会导致出现不存在的可比关系，或下度大于二的情况。此外，注意 Y_1，Y_2，Y_3 必须按某种顺序构成一条链：否则，若对于 $i = 1$，2 有 $Y_3 \|_P Y_i$，那么由于 Y_i 覆盖 B_i，可得 $Y_3 \|_P B_i$ ，从而与 B_3一起构成一个 S_2 。现在，由于 Y_2 覆盖 Y_1 ，且 Y_1 的下度已经为二，因此必有 $Y_2 < Y_3$。设 $Y_2 \leq Z_2 < Y_3$ 被 Y_3覆盖。布尔性质进一步表明，存在一个被 Z_2 和 B_3覆盖的元素 W 。由于 Y_2 的下度已经为二，且 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 是反链，因此必有 $Y_2 < Z_2$。由于 P是分级的，Y_2 不可能大于 W。由于 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 是反链，B_3 不可能大于 B_2。因此，$\{Y_2, B_2, B_3, W\}$ 诱导出 S_2的一个副本。矛盾完成了证明。

8. 从另外四个参数中分离出三个参数

我们已指出，当 P 是凸几何时，dim(P) $\geq$maxdd(P)。我们还注意到，如果 P 是布尔代数 $\mathbf{2}^n$ 或线性几何，那么 dim(P) =maxdd(P)。请注意，这些参数在前两节讨论的凸几何中也相同。现在自然会问，是否存在一类凸几何，其最大下度有界，但维数无界。下面我们将给出肯定的答案。事实上，我们将构造一个无限的凸几何族，使得：(1) 最大下度、分数维数和标准示例数有界；而 (2) 凸维数、维数、布尔维数和局部维数无界。

本节余下部分将证明定理 1.5。为方便读者，我们给出九个陈述，其中包括定理中的陈述。设 k 和 n 为满足 $1 \leq k \leq n-2$ 的整数。我们证明，存在一个子集族 $P(k,\ n)$，它由 $[n]$ 的子集构成，并满足以下性质：

1. $P(k, n)$ 是一个底集为 $[n]$ 的凸几何。2. 如果 $1 \leq k < k' \leq n-2$，那么 $P(k, n)$ 是 $P(k', n)$ 的子偏序集。3. cdim($P(k, n)$) $= \binom{n-1}{k}$。4. maxdd($P(k, n)$) $= k+1$。5a. dim($P(1, n)$) $= 1 + \lfloor \lg\ n \rfloor$，5b. dim($P(k, n)$) $\leq (k+1)2^{k+2}$log n。6. se($P(k, n)$) $= k+1$。7. 对于固定的 $k \geq 1$，bdim($P(k, n)$) $\to \infty$ as $n \to \infty$。8. 对于固定的 $k \geq 1$，ldim($P(k, n)$) $\to \infty$ as $n \to \infty$。9. fdim($P(k, n)$) $< 2^{k+1}$。

我们先给出 $P(k, n)$ 的定义。随后证明该定理的九个陈述均成立。

设 k 和 n 是满足 $1 \le k \le n-2$ 的整数。集合 $A \subseteq [n]$ 属于 $P(k,n)$，当且仅当满足以下性质：

成员资格。若 $|A| = k+i-1$，则 $[i-1] \subseteq A$。

按照约定，当 $i-1 \le 0$ 时 $[i-1] = \emptyset$，我们注意到，只要 $A \subset [n]$ 且 $|A| \le k$，就有 $A \in P(k, n)$。另一方面，$\{1,2,3,6,11\}$ 和 $\{1,2,6,10,11\}$ 属于 $P(3, 12)$，而 $\{1,3,6,10,11\}$ 不属于。

下一个结果是陈述 1。

命题 8.1。族 $P(k,n)$ 是一个底集为 $[n]$ 的凸几何。

证明。根据定义，$P(k, n)$ 是 $[n]$ 的一个子集族。现在我们证明 $P(k, n)$ 满足基、交和扩展性质。首先，我们注意到 $\emptyset$ 和 $[n]$ 满足隶属要求，因此二者都属于 $P(k, n)$。因此，$P(k, n)$ 满足基性质。

设 $A, B \in P(k, n)$。我们证明 $A \cap B \in P(k, n)$。若 A 和 B 中一个是另一个的子集，则结论显然成立，因此我们可以假设二者互不包含。若 $|A \cap B| \le k$，则结论 $A \cap B \in P(k, n)$也显然成立，因此我们可以假设存在某个 i，使得 $|A \cap B| = k+i-1$ 且 $2 \le i \le n-k+1$。于是$|A| \ge k+i-1$ 且 $|B| \ge k+i-1$，所以 $[i-1] \subset A$ 且 $[i-1] \subset B$。因此，$[i-1] \subset A \cap B$。由此，$A \cap B \in P(k, n)$。综上，我们证明了 $P(k, n)$ 满足交性质。

最后，令 $A \in P(k,n)$，其中 $A \ne X$。先假设 $|A| \le k$。如果 $1 \notin A$，那么 $A \cup \{1\} \in P(k,n)$。如果 $1 \in A$，那么对于每个 $\alpha \in [n] - A$，$A \cup \{\alpha\} \in P(k,n)$。现在假设对于某个满足 $2 \le i \le n-k+1$ 的 i，有 $|A| = k+i-1$。那么 $[i-1] \subset A$。由于 $A \ne [n]$，我们知道 $i \le n-k$。如果 $i \notin A$，那么 $A \cup \{i\} \in P(k, n)$。如果 $i \in A$，那么对于每个 $\alpha \in [n]-A$，$A \cup \{\alpha\} \in P(k,n)$。根据这一观察，我们已证明$P(k,n)$满足扩张性质。因此，$P(k,n)$是一个底集为 $[n]$ 的凸几何。□

子族 $\{P(1,n) : n \ge 3\}$ 将在后续论证中发挥重要作用。我们在图3中展示了 $P(1,5)$，并指出 $P(1,4)$ 与 [16]中图2所示的是同一个凸几何。

下一个结果是陈述 2，它有助于解释我们为何关注子族 $\{P(1,n) : n \ge 3\}$。

命题 8.2。若 $1 \le k < k' \le n-2$，则 $P(k,n)$ 是 $P(k',n)$ 的子偏序集。

证明。设 $A \in P(k,n)$，并假设 $|A| = k'+i-1$。那么 $|A| = k+(k'-k)+i-1$。由于 $A \in P(k,n)$，我们必有 $[k'-k+i-1] \subset A$。由于 $k'-k > 0$，这意味着 $[i-1] \subset A$。因此，$A \in P(k',n)$。□

令 $J(k,n)$ 表示所有形如 $[i-1] \cup B$ 的集合所组成的族，其中 i 和 B 满足以下要求：

(1) $i \in [n]$ 和 $B \subset [n]$。(2) 对每个 $j \in B$，$i < j$。(3) $|B| \le k$。(4) 若 $|B| < k$，则 $B = \{j \in [n] : i+1 \le j \le n\}$。

命题8.3. 若 $1 \le k \le n-2$，则 $J(k,n)$ 是 $P(k,n)$的所有交不可约元组成的集合。

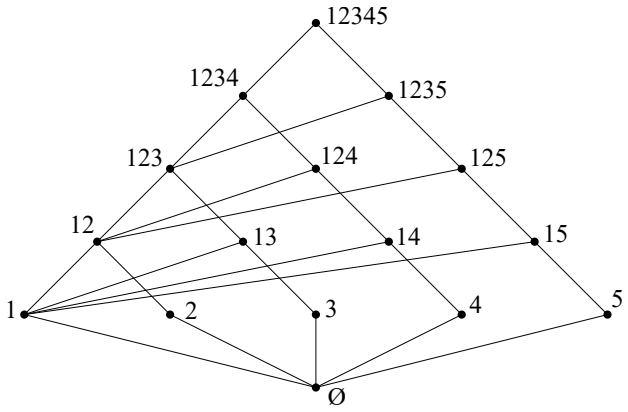


FIGURE 3. 我们说明凸几何 $P(1,5)$。在图中，集合以不带花括号和逗号的形式表示。虽然这些结论可由下文给出的一般性论证推出，读者或许也会乐于验证：$\mathrm{cdim}(P(1,5)) = 4$，$\dim(P(1,5)) = \mathrm{bdim}(P(1,5)) = \mathrm{fdim}(P(1,5)) = 3$，且 $\mathrm{se}(P(1,5)) = \mathrm{maxdd}(P(1,5)) = 2$。

证明。显然，$J(k,n)$ 中的所有集合都满足隶属要求，且属于 $P(k,n)$。还需注意，$J(k,n)$ 中的所有集合大小均至少为 k。

我们注意到，如果 $A = [i-1] \cup B$ 属于 $J(k,n)$ 且 $|B| < k$，那么 $|A| = n-1$，并且$[n]$是 $P(k,n)$ 中唯一覆盖 A 的元素。另一方面，如果 $A = [i-1] \cup B$属于 $J(k,n)$ 且 $|B| = k$，那么覆盖 A 的 P 中唯一元素是 $A' = [i] \cup B$。由此，我们验证了 $J(k,n)$ 的所有元素都是交不可约的。

反过来，假设 A是 $P(k,n)$的交不可约元。显然$n > |A|$，因为整个集合不是交不可约元。若 $|A| = n-1$，设为$A = [n] - \{i\}$，则 $A = [i-1] \cup B$，其中 $B = \{j \in [n] : \ i+1 \le j \le n\}$。由于 $P(k,n)$的隶属要求迫使 $[n-k-1] \subset A$，我们有 $i \ge n-k$和$|B| \le k$。这意味着 $A \in J(k,n)$。

若 $k \le |A| \le n-2$，记作 $|A| = k+i-1$，其中 $1 \le i \le n-k-1$。那么根据 $P(k,n)$的隶属要求，我们有 $[i-1] \subseteq A$。若 $i \notin A$，则$A = [i-1] \cup B$，其中 $|B| = k$。因此，$A \in J(k,n)$。另一方面，若 $i \in A$，则对于所有 $j \in [n] - A$，A 都被 $A \cup \{j\}$ 覆盖。假设 $|A| \le n-2$，则意味着$\mathrm{ud}(A, P(k,n)) \ge 2$，这与 A是交不可约元相矛盾。

最后请注意，$|A| \ge k$，因为如果 $|A| < k$，那么对于每个 $\alpha \in [n-k]$，A 都被 $A \cup \{\alpha\}$ 覆盖。根据定义 $k \le n-2$，我们得到 $\mathrm{ud}(A, P(k,n)) \ge 2$，这与 A 是交不可约元相矛盾。因此，我们已经考虑了所有情况，证明完成。□

在本节余下部分，当我们说 $A = [i-1] \cup B$ 是交不可约时，也意味着 i 和 B 满足属于 $J(k,n)$ 的成员资格要求。

下一个结果是陈述 3。

命题 8.4. 若 $1 \le k \le n-2$，则 $\mathrm{cdim}(P(k,n)) = \binom{n-1}{k}$。

证明。令 $J = J(k,n)$。于是集合 $w = \binom{n-1}{k}$。$P(k,n)$ 中所有大小为 k 的交不可约元所成的集合 $\mathcal{A}$ 是 J 中的一个反链。注意，k 元集合 $A \subset [n]$ 属于 J 当且仅当 $1 \notin A$。由此可知，J 的宽度至少为 $|\mathcal{A}| = w$。

为证明 $\mathsf{width}(J) \leq w$，我们构造一个由 w 条链覆盖 J 的明确方案。设 B 是 $[n]$ 的一个 k 元子集，且满足 $1 \notin B$，并令 $j = \mathsf{min}(B)$。于是 $j \geq 2$，而 $\{[i-1] \cup B$ 中的集合：$1 \leq i \leq j-1\}$ 在 $J(k, n)$ 中构成一条大小为 $j-1$ 的链。显然，$J(k, n)$ 中的每个元素都恰好包含在一条这种形式的链中。□

下一个结果蕴含陈述 4。

命题 8.5。设 A 是 $P(k,n)$ 中的一个非空集合。那么 $\mathrm{dd}(A, P(k,n)) = 1$ 当且仅当 A 是一个单元素集。此外，$\mathrm{maxdd}(P(k,n)) = k+1$。

证明。显然，单元素集 $A = \{i\}$ 满足 $\mathsf{dd}(A, P(k,n)) = 1$，因为 A 所覆盖的唯一集合就是 $\emptyset$。现在设 A 是 $P(k,n)$ 中满足 $|A| \geq 2$ 的一个集合。若 $|A| \leq k+1$，则对于每个 $\alpha \in A$，A 都覆盖 $A - \{\alpha\}$。由于该偏序集是分级的，A 不可能再覆盖其他元素。因此，$\mathsf{dd}(A, P(k,n)) = |A|$；根据假设，该值介于 2 和 $k+1$ 之间。现在假设对于某个满足 $3 \leq i \leq n-k+1$ 的 i，有 $|A| = k+i-1$。那么根据 $P(k,n)$ 的定义以及它是分级的这一事实，A 覆盖 $A - \{\alpha\}$ 当且仅当 $\alpha \in A$ 且 $\alpha \geq i-1$。由此可得 $\mathsf{dd}(A, P(k,n)) = k+1$。根据这一观察，命题第一条陈述的证明便完成了。此外，我们已证明，对于所有 A，$\mathsf{dd}(A, P(k,n)) \leq k+1$，并且该等式也能取到。因此，$\mathsf{maxdd}(P(k,n)) = k+1$。□

根据命题 3.6 和 3.7，我们注意到，$J(k, n)$中的交不可约元集合与 $P(k, n)$的临界对集合之间存在一一对应。利用所有单元素集都属于 $P(k, n)$这一事实，可知 $P(k, n)$的临界对由所有形如$(\{i\}, [i-1] \cup B)$的对组成，其中$[i-1] \cup B$是 $P(k, n)$的交不可约元。

下面的命题旨在强调这一点。它是由一一对应规则直接得出的结论。

命题 8.6. 设 $A = [i-1] \cup B$ 和 $A' = [j-1] \cup C$ 是 $P(k,n)$ 的交不可约元，且满足 $i \leq j$。再设(X, Y) 和(X', Y') 分别是与 A 和 A' 相关联的 $P(k,n)$ 的临界对。那么$((X, Y), (X', Y'))$ 是一个大小为2 的严格交替环，当且仅当 $i < j$ 和 $j \in B$。

下一个命题只复杂了一点点。

命题 8.7。设 $m \geq 2$，并设 $(A_1, \ldots, A_m)$ 是 $P(k,n)$ 中交不可约元的一个序列。对于每个 $j \in [m]$，令 (X_j, Y_j) 为与 A_j 相关联的临界对。若序列 $(((X_1, Y_1) \ldots, (X_m, Y_m))$ 是一个严格交替环，则则 $m = 2$。

证明。对于每个 $j \in [m]$，令 $A_j = [i_j - 1] \cup B_j$。于是 $(X_j, Y_j) = (\{i_j\}, A_j)$。由于这个交替环是严格的，$\{i_1, \ldots, i_m\}$ 中的元素互不相同。如有必要，经过重新标记，我们可以假设对于所有 $j = 2, \ldots, m$，$i_1 < i_j$。

由此可知，对于每个 $j = 2, \ldots, m$，$X_1 = \{i_1\} \subset [i_j - 1] \subset A_j = Y_j$。同样，由于这个交替环是严格的，这就要求 $m = 2$。□

如果 $1 \leq k \leq n-2$ 和 t 是正整数，那么由 $[t]$ 的子集构成的序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 称为 (k, n)-区分序列，如果对于每个交不可约元 $A = [i-1] \cup B \in J(k,n)$，都存在一个元素 $\alpha \in Y_i$，使得当 $j \in B$时 $\alpha \notin Y_j$。

命题 8.8。 如果 $1 \le k \le n-2$，$\dim(P(k,n))$ 是满足以下条件的最小正整数 t： 存在一个由 $[t]$的子集构成的(k,n)-区分序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$。

证明。首先，假设 $\dim(P(k,n)) = t$。我们证明存在一个由 $[t]$ 的子集构成的序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$，它是 (k,n)- 区分的。令 $S_1, \ldots, S_t$ 为可逆集，它们覆盖 $P(k,n)$ 的所有临界对。对于每个 $i \in [n]$，令 Y_i 由所有满足以下条件的 $\alpha \in [t]$ 构成：存在一个临界对 $(X,Y) = (\{i\}, [i-1] \cup B)$ 被分配给 S_α。我们断言 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 是 (k,n)-区分的。为此，任取 $P(k,n)$ 的一个交不可约元 $[i-1] \cup B$。则存在某个 $\alpha \in [t]$，使得临界对 $(X,Y) = (\{i\}, [i-1] \cup B)$ 被分配给 S_α。我们断言，对于所有满足 $j \in B$ 的 j，都有 $\alpha \notin Y_j$。若此断言不成立，则存在一个交不可约元 $[j-1] \cup C$，使得临界对 $(X', Y') = (\{j\}, [j-1] \cup C)$ 也被分配给 S_α。然而， $i < j$ 和 $j \in B$ 意味着 $((X,Y), (X',Y'))$ 是一个严格交替环，这与 S_α 可逆的事实相矛盾。由此可知，序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 如所断言，是 (k,n)-区分的。

反过来，设 t 是一个正整数，且存在一个由 $[t]$ 的子集组成的序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$，该序列是 (k,n)-区分的。我们证明 $\dim(P(k,n)) \le t$。为此，对每个 $\alpha \in [t]$，令 S_α 由所有临界对 $(X,Y) = (\{i\}, [i-1] \cup B)$ 组成，使得 $\alpha \in Y_i$，并且当 $j \in B$ 时 $\alpha \notin Y_j$。根据命题 8.6 和命题 8.7，对每个 $\alpha \in [t]$，集合 S_α 都是可逆的，因此 $\dim(P(k,n)) \le t$。□

现在，我们确定族 $\{P(1,n) : n \ge 3\}$ 中每个凸几何的维数确切值。以下结果即为陈述 5a。

命题 8.9。如果 $n \ge 3$，那么 $\dim(P(1,n)) = 1 + \lfloor \lg n \rfloor$。

证明。令 $t = \dim(P(1,n))$ 且 $s = 1 + \lfloor \lg n \rfloor$。那么存在一个由 $[t]$ 的子集构成的 $(1,n)$-区分序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$。当 $1 \le i < j \le n$ 时，不可约交集集 $[i-1] \cup \{j\}$ 要求 $Y_i - Y_j \ne \emptyset$。特别地，这要求 $Y_i \ne Y_j$ 和 $Y_i \ne \emptyset$。不可约交集集 $[n-1]$ 要求 $Y_n \ne \emptyset$。至此，我们已证明序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 中的集合彼此不同且非空。这要求 $t \ge s$。

反过来，考虑由 $[s]$ 的所有子集构成、按包含关系偏序的族。令 $m = 2^s$，并考虑布尔代数 $\mathbf{2}^s$ 的任意线性扩张 L。然后令 $(Y_1, \ldots, Y_m)$ 为 L 的对偶。注意 $Y_1 = [s]$ 和 $Y_m = \emptyset$。由于假设 $n < 2^s = m$，子序列 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 中的最后一个集合 Y_n 非空。因此，这个序列是 $(1,n)$-区分序列。事实上，对于所有$i \in [n]$，我们有 Y_i 含有一个元素 α（因为 $Y_i \ne \emptyset$），它不属于任何一个 Y_j（对于 $j > i$）（因为 Y_j 不包含 Y_i，这是由于 L 是线性扩张）。因此，根据命题 8.8， $t \le s$。□

以下结果即陈述 5b。证明是对概率方法的一个初等应用。

命题 8.10。对于 $2 \le k \le n-2$，维数$(P(k, n)) \le (k+1)2^{k+2}$ 对数 n。

证明。令 $t = \lfloor (k+1)2^{k+2} \log n \rfloor$。接着考虑由 $[t]$ 的随机子集组成的序列 $\sigma = (Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n)$，也就是说，对于每一对满足 $i \in [n]$ 和 $\alpha \in [t]$ 的 (i, α)，我们以概率 $1/2$ 将 α 指派给集合 Y_i。不同配对的指派相互独立。σ 不满足 (k, n)-区分序列的概率至多为：

$$n^{k+1}(1 - \frac{1}{2^{t+1}})^t. \tag{2}$$

简单计算可知，对于指定的 t 值，式 (2) 小于 1。因此，存在一个 $(k,\ n)$-区分序列 $\sigma = (Y_1,\ \ldots\ldots,\ Y_n)$。这意味着 $\dim(P(k,\ n)) \leq t$。□

结论 6 可由定理 1.3 推出。不过，还有一种直接证明，更能揭示这些几何的结构。

命题 8.11。若 $1 \leq k \leq n-2$，$\mathrm{se}(P(k,\ n)) = k+1$。

证明。对于每个 $i \in [k+1]$，令 $(X_i,\ Y_i)$ 为临界对 $(\{i\},\ [i-1] \cup \{i+1, \ldots, i+k\})$。那么，$\{X_1, \ldots, X_{k+1}\}$ 和 $\{Y_1, \ldots, Y_{k+1}\}$ 中的元素构成标准例子 S_{k+1}。这表明 $\mathrm{se}(P(k,\ n)) \geq k+1$。

现在假设 $P(k,\ n)$ 包含一个大小为 $k+2$ 的标准例子。那么，存在一个由 $P(k,\ n)$ 的临界对构成的序列 $((X_1,\ Y_1) \ldots, (X_{k+2},\ Y_{k+2}))$，使得每当 $1 \leq i < j \leq k+2$ 时，成对的 $(X_i,\ Y_i)$ 和 $(X_j,\ Y_j$ 构成标准例子 S_2 的一个副本。对于每个 $j \in [m]$，令 $X_j = \{i_j\}$ 和 $Y_j = [i_j - 1] \cup B_j$。于是，$\{i_1, \ldots, i_{k+2}\}$ 中的元素两两不同。重新标记后，可假设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+2}$。那么，对于 $j = 2, \ldots, k+2$，有 $i_j \in B_1$。这不可能，因为 $|B_1| \leq k$。矛盾由此完成证明。□

接下来的两个结果是陈述 7 和 8。在证明中，当我们写作$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ 是 $[n]$的一个 m 元子集时，意指 $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$。读者会注意到，我们的证明运用了拉姆齐理论，并借鉴了 [2]中的思想。

命题 8.12. 对于固定的 $k \geq 1$，$\mathrm{bdim}(P(k,n)) \to \infty$ 当 $n \to \infty$。

证明。根据命题 8.2，只需证明 $k = 1$时的情形。我们假设存在一个整数 $t \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{bdim}(P(1,n)) \leq t$，并在 t足够大时推出矛盾。令 $\mathcal{R} = (L_1, \ldots, L_t)$为 $P(1,n)$ 的一个布尔实现器。

现在令 $\{i_1, i_2, i_3\}$ 为 $[n]$的一个 3 元子集。那么，$A = [i_1 - 1] \cup \{i_2\}$和 $B = [i_2 - 1] \cup \{i_3\}$ 是 $P(k,n)$的交不可约元。此外，$A \parallel B$属于 $P(1,n)$。查询字符串 $q(A,B,\mathcal{R})$是一个长度为 t的比特串，因此我们定义了 $[n]$ 的 3 元子集上的一种着色，共使用 2^t 种颜色。由此可知，只要 n 足够大，就存在[n]的一个 4 元子集 $H = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$，使得 H 的每个 3 元子集都被赋予相同的颜色。令$A = [i_1 - 1] \cup \{i_2\}$、$B = [i_2 - 1] \cup \{i_3\}$ 和 $C = [i_3 - 1] \cup \{i_4\}$。由此可得 $q(A,B,\mathcal{R}) = q(B,C,\mathcal{R})$。这意味着 $q(A,C,\mathcal{R}) = q(A,B,\mathcal{R})$。这是一个矛盾，因为根据 $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$，我们有 $A \subseteq C$，因此 $A < C$属于 $P(1,n)$。□

命题 8.13。固定 $k \geq 1$，$\mathrm{ldim}(P(k,n)) \to \infty$ 当 $n \to \infty$。

证明。鉴于命题 8.2，只需在 $k = 1$ 时证明该结果。我们假设存在一个整数 $t \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{ldim}(P(1,n)) \leq t$，并试图导出矛盾，前提是 n 相对于 t 足够大。令 $\mathcal{R} = (L_1, \ldots, L_m)$ 为 $P(1,n)$ 的一个局部实现器，使得 $P(1,n)$ 中的每个元素在该列表中至多出现于 t 个不同的扩展中。

对于 $[n]$的每个 4 元子集 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$，我们考虑交不可约元 $A = [i_1 - 1] \cup \{i_3\}$ 和交不可约元 $B = [i_2 - 1] \cup \{i_4\}$。于是 $A \parallel B$ 属于 $P(1,\ n)$。令 s 为 $[m]$ 中满足 $A > B$ 属于L_s的最小整数。于是，存在唯一确定的一对整数 $(r,\ r')$，它们属于 $[t]$，使得 A 的第 r 次出现属于 L_s，而 B 的第 r' 次出现属于 L_s。

现在，我们用 t^2 种颜色给 $[n]$ 的 4 元子集着色。由此可知，如果 n 足够大，那么就存在一个 7 元子集 $H=\{i_1,\dots,i_7\}$，使得 H 的每个 4 元子集都被赋予相同的颜色，记作 $(r,\ r')$，其中 $r,\ r'\in[t]$。

令 $A=[i_1-1]\cup\{i_4\}$、$B=[i_2-1]\cup\{i_5\}$、$C=[i_3-1]\cup\{i_6\}$ 和 $D=[i_5-1]\cup\{i_7\}$。令 s 为 $[m]$ 中满足 $A>B$ 属于 L_s 的最小整数。利用集合 $\{i_1,i_2,i_4,i_5\}$，我们知道 A 的第 r 次出现位于 L_s，而 B 的第 r' 次出现位于 L_s。利用集合 $\{i_1,i_3,i_4,i_6\}$，我们知道 C 的第 r' 次出现也位于 L_s，其中 $A>C$ 在 L_s 中。利用集合 $\{i_2,i_3,i_5,i_6\}$，我们知道 B 的第 r 次出现位于 L_s，其中 $B>C$ 在 L_s 中。这迫使 $r=r'$。

利用集合 $\{i_3,i_5,i_6,i_7\}$，我们得出 C 中的出现次数 r 位于 L_s 中 D 的出现次数 r 之上。这迫使 $A>D$ 属于 L_s，这与 $A<D$ 属于 $P(1,\ n)$ 矛盾。这个矛盾完成了证明。□

本节的最后一个结果是命题 9。

命题 8.14。若 $1\le k\le n-2$，则 $\mathrm{fdim}(P(k,\ n))<2^{k+1}$。

证明。我们通过构造一个合适的分数实现子 f，证明 $\mathrm{fdim}(P(k,\ n))<2^{k+1}$。

设 $m=2^n$，并设 $\sigma=(Z_1,\dots,Z_{m-1})$ 为 $[n]$ 的非空子集的一个列表。列表中各集合的顺序任意。于是，对每个 $\alpha\in[m-1]$，都存在 $P(k,n)$ 的一个线性扩张 L_α，它反转所有形如 $(\{i\},[i-1]\cup B)$ 的临界对，其中 $i\in Z_\alpha$ 和 $j\notin Z_\alpha$，当且仅当 $i<j$ 和 $j\in B$。具体而言，若 $Z_\alpha=\{i_1\dots,i_\ell\}$，排序 $[i_1-1]\cup B_{i_1},1,\dots,[i_1-1]\cup B_{i_1,r},\{i_1\}$，$[i_2-1]\cup B_{i_2,1}\dots\{i_\ell\}$ 尊重 $P(k,n)$ 的可比关系，因为集合 B 与 Z_α 不相交。因此，L_α 可以取为任何尊重此排序的线性扩张。

然后我们为每个 $\alpha\in[m-1]$ 设定 $f(L_\alpha)=2^{k+1}/m$。此外，对于 $P(k,\ n)$ 的所有其他线性扩张，我们设定 $f(L)=0$。

现在我们证明 f 是 $P(k,\ n)$ 的一个分数实现器。我们只需证明：若 $C,\ D\in P(k,\ n)$ 且 $C\parallel_{P(k,n)}D$，则下列不等式成立：

$$s(C,D)=\sum\{f(L_\alpha):\alpha\in[m-1],C>D\text{ in }L_\alpha\}\ge 1. \tag{3}$$

取一个临界对 $(X,\ Y)$，使得 $X\le C$ 属于 $P(k,\ n)$，且 $D\le Y$ 属于 $P(k,\ n)$。若 $\alpha\in[m-1]$ 且 $X>Y$ 属于 L_α，则 $C>D$ 属于 L_α。由此可知，我们只需证明每个临界对都满足不等式 (3)。

令 $(X,\ Y)=(\{i\},\ [i-1]\cup B)$ 为一个临界对。那么，序列 σ 中包含 i 但不包含 j 的集合数量（当 $i<j$ 且 $j\in B$ 时）恰好为 $2^{n-|B|-1}$，而该值至少为 2^{n-k-1}。由此可得

$$s(X,Y)\ge 2^{n-k-1}\cdot\frac{2^{k+1}}{m}=1$$

此外，我们注意到

$$\sum_{i=1}^{m-1}f(L_i)=2^{k+1}\frac{m-1}{m}<2^{k+1}.$$

我们得出，$\mathrm{fdim}(P(k,\ n))<2^{k+1}$。 □

9. Open Problems

一般而言，对于偏序集，标准例子的布尔维数和局部维数有界，而维数无界。正如先前所指出的，[38]中给出的构造表明，布尔维数和局部维数都不能由另一个维数来界定。然而，对于凸几何，我们尚无法将维数与布尔维数或局部维数中的任何一个区分开来。此外，我们也无法在任一方向上区分布尔维数和局部维数。值得注意的是，对于分配格这一特殊类，维数与凸维数相同，见 [15]。然而，分配格的交不可约元所成偏序集的宽度很大，会迫使存在一个很大的布尔子代数，进而导致布尔维数 [13] 和局部维数 [23]都很大。因此，在分配格上不可能区分这些参数。另一方面，文献中已经确定了许多其他特殊的凸几何类，我们想知道其中是否有一些具有能够帮助回答这些问题的性质。

对于上一节讨论的凸几何族 $\{P(k,n);\ 1 \le k \le n-2\}$，我们精确确定了 $\dim(P(1,n))$ 的值。当 $k \ge 2$ 时，我们认为不太可能得到 $\dim(P(k,n))$ 的精确公式。不过，应当存在一个形如 $c2^k \log n$ 的下界，其中 c 是正常数。

我们猜想，上界 $\mathrm{fdim}(P(k,n)) < 2^{k+1}$ 是渐近紧的，即对每个 $\epsilon > 0$，当 n 足够大时，$\mathrm{fdim}(P(k,n)) > 2^{k+1} - \epsilon$。

分数维数是维数的线性规划松弛。尽管本文主体部分没有研究局部维数的线性规划松弛，但它有一个自然的形式，称为分数局部实现。精确定义请参见 [33] 。我们想知道，凸几何 $P(k,n)$ 的分数局部维数是否总是严格小于其分数维数。

凸几何最初源于对欧几里得空间中有限点集的凸子集进行抽象；事实上，每个定义在 $[n]$ 上的凸几何 P 都可以用 $\mathbb{R}^d$ 中的点集表示。这类表示所需的最小 d 受 $\min(n,\ \mathrm{cdim}(P))$ 的界定，见 [22,32]。通过 $\mathbb{R}^d$ 中的超平面排列进行表示似乎也是可行的 [4]。这种欧几里得维数与其他维数概念之间有什么关系？

最后，我们认为，VC 维数的概念可以推广到一般偏序集 P：它可以定义为所有包含序与 P 同构的集合系统中 VC 维数的最小值。这个参数与其他维数概念有什么关系？这个问题与关于偏序集嵌入布尔代数的丰富文献有关，见 [3, 35, 39]。根据布尔性质，对于凸几何，这一概念与我们先前定义的 VC 维数一致。其他具有自然布尔代数嵌入、因而可定义 VC 维数的类，包括 Bj¨orner、Edelman 和 Ziegler [8] 所研究的定向拟阵，以及更一般的定向拟阵复形的顶胞图（若干相关问题见 [24, 第 7 章 6]）。

致谢。KK 得到西班牙研究署资助，资助项目包括 RYC-2017-22701、PID2019-104844GB-I00、PID2022-137283NB-C22，以及卓越研究与开发中心和单位 Severo Ochoa 与 Mar´ıa de Maeztu 计划（CEX2020-001084-M）；同时还得到法国国家研究署通过 DAGDigDec 项目 ANR-21-CE48-0012 提供的资助。

References

[1] H.-J. Bandelt、V. Chepoi、A. Dress 和 J. Koolen, 《偏斜集的组合学》, 《欧洲组合学杂志》 27（2006）, 669–689。[2] F. Barrera-Cruz、T. Prag、H. C. Smith 和 W. T. Trotter, 《比较 Dushnik-Miller 维数、布尔维数和局部维数》, *Order* **37**（2020）, 243–269。[3] 《偏序集饱和的多项式上界》, P. Bastide、C. Groenland、M.-R. Ivan 和 T. Johnston, *arXiv:2310.04634*, （2023）。[4] V. Chepoi、J. Chalopin 和 K. Knauer, 《凸几何理想的欧几里得实现》（准备中）。[5] G. Birkhoff 和 M. K. Bennett, 《偏序集的凸性格》。 *Order* **2**, 223-242（1985）。[6] C. Bir´o、P. Hamburger 和 A. P´or, 《分数维数可移除对猜想的证明》, *Electron. J. Comb.* **21**（2013）, P1.63。[7] A. Bj¨orner, 《关于拟阵、群和交换语言》, *Matroid theory (Szeged, 1982)*, 《Colloq. Math. Soc. J ´anos Bolyai》, 40, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1985, 25–60。[8] A. Bj¨orner、P. H. Edelman 和 G. M. Ziegler, 《具有区域格的超平面排列》, *Discr. Comput. Geom.*, 5（1990）, 263–288。[9] H. S. Blake、P. Micek 和 W. T. Trotter, 《布尔维数与维数有界性：具有零元的平面覆盖图》, 已投稿, 预印本见 arXiv:2206.06942。[10] H. S. Blake、J. Hodor、P. Micek、M. Seweryn 和 W. T. Trotter, 《具有平面覆盖图的偏序集维数有界》, 准备中。[11] B. Bosek、J. Grytczuk 和 W. T. Trotter, 《平面偏序集的局部维数无界》, *Electron. J. Comb.* **27**（2020）, P4.28。[12] G. Boulaye, 《树中的子树与连通类之间的同态》, *Theory of Graphs Interational Symposium* 1967 47 50 （）, –。[13] M. Bria´nski 、 J. Hodor 、 H. La 、 P. Micek 和 K. Michno, 《布尔格的布尔维数》, 已投稿, 预印本见 arXiv:2307.16671。[14] B. Dushnik 和 E. W. Miller, 《偏序集》, *Amer. J. Math.* **63**（141）, 600–610。[15] P. H. Edelman 和 R. E. Jamison, 《凸几何理论》, *Geom. Dedicata* **19**（1987）, 247–270。[16] P. H. Edelman 和 M. E. Saks, 《凸几何的组合表示与凸维数》, *Order* **5**（1988）, 23–32。[17] S. Felsner 和 W. T. Trotter, 《关于偏序集的分数维数》, *Discrete Math.* **136** 1994 101 117 （）, –。[18] S. Felsner 、 T. M ´ ´ *Combinatorica* **40** 2020 655 677 eszaros 和 P. Micek, 《布尔维数与树宽》, （）, -。[19] P. C. Fishburn, 《无差异区间不等的非传递无差异》, *J. Math. Psych.* **7**（1970）, 144-149。[20] 《树宽与维数》, G. Joret、P. Micek、K. D. Milans、W. T. Trotter、B. Walczak 和 R. Wang, 《树宽与维数》, *Combinatorica* **36**（2016）, 1055-1079。[21] G. Joret、P. Micek 和 V. Wiechert, 《稀疏性与维数》, *Combinatorica* **38**（2018）, 1129-1148。[22] K. Kashiwabara、M. Nakamura 和 Y. Okamoto, 《抽象凸几何的仿射表示定理》。 *Comput. Geom.*, 30(2)（2005）, 129-144。[23] J. Kim、R. R. Martin、T. Masaˇrik、W. Shull、H. Smith、A. Uzzell 和 Z. Wang, 《关于差图与偏序集的局部维数》, *Eur. J. Comb.* **86**（2020）, 103074。[24] K. Knauer, 《定向拟阵及其他：复形、部分立方体与角》, *Habilitation Thesis* ´ 215 2021 , 艾克斯-马赛大学, 页码, （）。[25] Bernhard Korte、L. Lov´asz 和 R. Schrader, 《贪婪拟阵》, *Algorithms and Combinatorics*, 4。柏林等地：施普林格出版社。viii, 211页。（1991）。[26] M. Las Vergnas, 《定向拟阵中的凸性》, *J. Comb. Theory Ser. B*, 29（2）, （1980）, 231–243。[27] Utz Leimich、Klaus Reuter, 《布尔格子集及笛卡尔积子集的分数维数》, *Discrete Math.* **201**（1999）, 157–170。[28] T. M ´ ´ *Order* **37** 2020 287 298 eszaros、P. Micek 和 W. T. Trotter, 《布尔维数、连通分支与块》, （）, –。[29] P. Micek 和 V. Wiechert, 《拓扑子式与维数》, *J. Graph Theory*（2017 86, 295 314）–。

[30] J. Ne˘set˘ril 和 P. Pudl´ak，关于 *Irregularities of Partitions* 偏序集布尔维数的一则注记，载于，*Algorithms and Combinatorics* **8**，G. Halasz 和 V. T. Sos 编，施普林格，柏林（1989年），137–140。[31] L. Pfaltz，有向图中的凸性， *J. Comb. Theory Ser. B* **10**（1971年），143–152。[32] M. Richter 和 L. G. Rogers，凸几何嵌入及凸维数的一个上界， *Discrete Math.*，**340(5)**（2017年），1059-1063。[33] H. C. Smith 和 W. T. Trotter，分数局部维数， *Order* **38**（2021年），329–350。[34] N. J. Streib 和 W. T. Trotter，平面覆盖图偏序集的维数与高度，*Eur. J. Comb.* **35**（2014年），474–489。[35] W. T. Trotter，有限偏序集在超立方体中的嵌入， *Discrete Math.* **12(2)**（1975年），165-172。[36] W. T. Trotter，关于区间序和区间图的新视角。载于 *Surveys in Combinatorics* 1997，（伦敦），伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社**241**，剑桥，1997年，237-286。[37] W. T. Trotter，偏序集的维数与图的色数，载于 *50 Years of Combinatorics* 2019 ，*Graph Theory and Computing*，F. Chung 等编，Chapman and Hall（），73–96。[38] W. T. Trotter 和 B. Walczak，布尔维数与局部维数，*Discrete Math.* **61** 2017 1047 1053 *Electronic Notes in* （），–。

[39] M. Wild，保覆盖序嵌入布尔格， *Order* **9**（1992年），209–232。Universitat de Barcelona, Departament de Mathemátiques i Informática, Gran Viade les Corts Catalanes, 585, 08007 Barcelona, Spain*Email address*: kolja.knauer@gmail.comSchool of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332,U.S.A.*Email address*: wtt.math@gmail.com