arXiv:2303.08963v1 [math.GT] 15 Mar 2023

双曲3维流形中双曲链环补空间的闭测地线长度界

BUDDHA DEV GHOSH

ABSTRACT. 设 M 是一个体积为 V 的紧双曲三维流形。设 L 是一个链环，且 $M \setminus L$ 是双曲的。本文针对 M中的任意双曲链环 L，建立其 n^{th} 最短闭测地线长度的上界，该上界是 $M \setminus L$中 V 的对数函数。我们的工作补充了 Lakeland 和 Leininger [9] 关于最短闭测地线长度上界的研究。

1. INTRODUCTION

本文主要关注为紧致双曲三维流形的双曲链环补空间中的 n^{th} 最短闭测地线长度给出上界。我们回顾一下，黎曼流形中的 $geodesic$ 是一条局部最短曲线，而黎曼 n 流形 M 的最短周期是 M上的最短闭测地线。本文始终将讨论限制在 $n = 3$ 的情形。有限体积双曲 3-流形是一个截面曲率恒定为 -1 的完备黎曼三维流形。我们的研究尤其受到 William Thurston 的几何化猜想 [16], 的启发，该猜想由 Grig- ory Perelman 基于理查德·汉密尔顿[4, 11, 8]提出的计划证明。此外，William Thurston 证明了双曲化定理，即瑟斯顿双曲化定理。该定理指出，具有非空环面边界的紧三维流形，其内部存在完备双曲结构，当且仅当它是不可约、边界不可约、无环面且无环带的[16]。由此，William Thurston 开创了对 S^3中纽结的重要分类。作者证明， S^3 中的纽结 K 是双曲的，当且仅当K 既不是环面纽结，也不是卫星纽结[16]。有了这些著名的纽结分类结果，我们便能直观地了解如何识别非紧双曲三维流形。更有趣的是，这些结果还导出了无穷多个具有环面边界的紧三维流形，其内部允许有限体积的完备双曲度量。这些双曲三维流形基本上是纽结补空间 S^3；它们称为尖点双曲3-流形。下一节将详细讨论尖点双曲3-流形及其几何提升，即上半空间模型中的高球图或尖点图。黎曼几何的一项重要研究内容是黎曼流形中的测地线。1983 年，Mikhael Gromov [10] 证明，若 M 是一个 n维黎曼流形，则存在某个普适常数，使得 M 包含一条闭测地线 γ，满足

2010 数学主题分类。57N10, 57M50 , 53C22 , 57M.关键词和短语。双曲三维流形、测地线、最短闭测地线长度。

$$\text{length}(\gamma) \leq \text{const}_n(\text{Vol}(M))^{\frac{1}{n}}.$$

设 M 为紧致双曲三维流形， L 为 M中的双曲链环。本文的贡献是为紧致双曲三维流形的双曲纽结补空间中 n^{th} 最短闭测地线的长度给出上界。

尖点双曲3-流形是一类非常特殊的黎曼流形，我们可以借助其高球图或尖点图的几何性质，研究闭测地线的几何性质。本文主要关注如何借助高球图，给出紧双曲三维流形的双曲纽结补空间中所有闭测地线长度的上界。

我们的研究主要受到 Adams和Reid 的工作双曲流形的最短周期 3-流形 的启发。该文中，作者为一类带尖点双曲三维流形的最短周期长度建立了一个通用上界；这类流形由不承认任何负曲率黎曼度量的三维流形的纽结补空间构成。这里我们陈述 Adams和Reid 的结果，该结果在本文的研究背景中起着至关重要的作用。

定理1.1。 $[1,$ 定理1。$1\ ]$ ***(Adams*和*Reid)*** 若 M 是一个不承认任何负曲率黎曼度量的闭可定向三维流形，那么对于任意双曲链环 $L \subset M$， $M \setminus L$ 的最短闭测地线长度小于或等于7。$3553\ldots$.

现在回顾一下，对于给定的带尖点双曲三维流形 M，尖点密度定义为总尖点体积与该流形双曲体积之比。更准确地说，

$$\text{the cusp density} = \frac{\text{cusp volume}}{\text{volume of the hyperbolic link complemets}}. \tag{1.1}$$

根据 B¨or¨oczky 的超球堆积结果，$[6]$ 众所周知，任何非紧致有限体积双曲三维流形或三维轨形的尖点密度都必须落在区间 (0，0。853，$\ldots$] 内（见 $[14, 2]$），其中 $0.853\cdots = \dfrac{\sqrt{3}}{2v_0}$，而 $v_0 =$是正则理想双曲四面体的体积。八字结补空间 $[6]$, 达到最高尖点密度，其极大尖点体积为 $\sqrt{3}$ ，最大体积为 2。02988...。因此，对于任意一个体积为 V 的尖点双曲3-流形，其尖点体积不超过 C_0V，其中$C_0 = 0.853\cdots = \dfrac{\sqrt{3}}{2v_0}$。

在此背景下，我们回顾 Lakeland 和 Grant[9]于2014年得到的结果。作者给出了最短闭测地线长度的一个上界：已证明，若 M 是一个体积为 V 的闭、可定向三维流形，并且假设 L 是 M 中的一个双曲链环，那么 $M \setminus L$ 的最短闭测地线长度有上界 log((√2(C_0V)$^{2/3} + 4\pi^2$)$^2 + 8$)。作者指出，为了给出更一般的表述，若 M 不允许存在双曲结构，则假设$V = 0$。特别地，现在将 $V = 0$ 代入上述表达式，可得最短闭测地线长度的上界约为 7.3566..，而对于非双曲情形，Adams 和 Reid 已在定理 (1.1) 中证明了这一结果。此外，令 $C_0 = \frac{\sqrt{3}}{2v_0}$，其中 v_0 是正则理想四面体的体积。

在本文中，Vol(M) 表示流形 M 的体积。

定理 1.2. [9, 定理 1.2] 若 M 是一个闭合可定向的 3 维流形，且 $V = \mathrm{Vol}(M)$，那么对于任意双曲链环 $L \subset M$， $M \setminus L$ 的最短闭测地线长度为

$$\log\left[\left(\sqrt{2}(C_0V)^{2/3} + 4\pi^2\right)^2 + 8\right]. \tag{1.2}$$

我们回顾闭三维流形中双曲纽结或链环补内最短闭测地线长度的上界，其中这些闭流形不容许任何负曲率黎曼度量 [15]。从前面的讨论可以清楚地看出，紧致双曲三维流形中双曲链环补的最短闭测地线上界尚不为人所知。本文着重于将 Lakeland 和 Grant 在 (1.2) 中给出的最短周期界推广为紧致双曲三维流形的纽结补中最短闭测地线长度的上界。下面给出本文的主要结果:

定理 1.3。 若 M 是一个可定向紧致双曲3-流形，且 L 是 M中的双曲链环， M 的体积为 V。设 l_n 表示 $M \setminus L$中最短闭测地线的长度 n^{th}，则

$$l_n \leq \log\left[n^2\left(\sqrt{2}\,(C_0V)^{2/3} + 4\pi^2\right)^2 + 8\right]. \tag{1.3}$$

注 1.4. 需要注意的是，上述关于 M 中n^{th} 最短闭测地线长度的上界(1.3) 是对定理 *1.2* 中所述最短周期上界的推广；具体而言，若在(1.3)中令 $n = 1$，便可得到(1.2)中的界。

证明的方法主要基于对双曲三维流形 $M \setminus L$的尖点图（horoball 图）的一些基本几何观察。我们实际上是在尖点图中构造可数无穷多个测地线，它们是流形 $M \setminus L$中闭测地线的提升。接着，我们求出这一可数无穷个闭测地线组成的集合的长度，最后给出流形中最短闭测地线长度的上界。式（1.3）中新上界的关键在于，这些上界是用紧致双曲三维流形的体积表示的。

我们将在下一节介绍一些与讨论相关的辅助结果。掌握这些技术细节后，我们将在最后一节证明主要结果。

2. Preliminaries

双曲三维空间有几种模型。本文将始终采用上半空间模型。在此模型中，双曲三维空间定义为上半空间中的点集，即 $\mathbb{H}^3 = \{(z,\ t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} :\ t > 0\}$ 配备黎曼度量

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}. \tag{2.1}$$

$\mathbb{H}^3$ 的边界由 $\partial\mathbb{H}^3 = \{(z,\ t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 定义: $t = 0\} \cup \{\infty\}$。对于上述度量， $\mathbb{H}^3 = \{(z,\ t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 中的所有测地线 $t > 0\}$ 均为垂直直线和半圆

与 $\mathbb{H}^3$ 的边界垂直。完整的测地平面都是垂直平面和与 $\mathbb{H}^3$ 的边界正交的半球。

定义 $Iso^+(\mathbb{H}^3)$ 为 $\mathbb{H}^3$ 上所有保向等距变换的集合。若从 $PSL(2,\mathbb{C})$ 取一个 Möbius 变换，则它可以唯一延拓为 $\mathbb{H}^3$ 的一个保向等距变换。

设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{C})$，且 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的延拓为 $T\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$

$$T(z,t) = \begin{cases} \left(-\dfrac{\overline{z+d/c}}{c^2(|z+d/c|^2+t^2)} + \dfrac{a}{c}, \dfrac{t}{c^2(|z+d/c|^2+t^2)} \right) & c \neq 0 \\ \left(\dfrac{a}{c}(z+b/a), \left|\dfrac{a}{d}\right| t \right) & c = 0 \end{cases}. \tag{2.2}$$

每个保向 Möbius 变换都有一个从 $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ 到 $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ 的唯一连续延拓，其在 $\mathbb{H}^3$ 上的限制是关于上述度量 ds^2 的等距变换。反过来，关于同一度量 $\mathbb{H}^3$ 的每个等距变换都可以通过这种方式得到 [5,定理 9.8]。

因此，不失一般性，我们可以假设 $Iso^+(\mathbb{H}^3) = PSL(2,\mathbb{C})$ 和 $PSL(2,\mathbb{C})$ 通过 Möbious 变换作用于 $\mathbb{H}^3$ 的边界。

如果一个三维流形具有截面曲率恒为 -1 的完备黎曼度量，则称其为双曲流形。若 Γ 是 $PSL(2,\mathbb{C})$ 的子群，且它是 $PSL(2,\mathbb{C})$ 的离散子群，则称其为克莱因群 。

这里我们将陈述一个重要定理，它揭示了完备双曲三维流形的几何不变量与拓扑不变量之间的联系。

定理 2.1. [13,定理 6.1]（*Mostow-Prasad* 刚性）。若 M_1^n 和 M_2^n 是有限体积的完备双曲 n 流形，且 $n > 2$，则基本群之间的任意同构 $\phi\colon \pi_1(M_1^n) \mapsto \pi_1(M_2^n)$ 均可由唯一等距变换实现。

现在，若 M 是有限体积的完备双曲三维流形，则根据 Mostow-Prasad 刚性定理，具有恒定 -1 曲率的黎曼度量是唯一的，即几何不变量就是拓扑不变量。子群 Γ 是 $PSL(2,\mathbb{C})$ 的离散子群，当且仅当其在 $\mathbb{H}^3$ 上的作用适当不连续。

任意双曲3-流形均可由商空间 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 得到，其中 Γ 是一个作用于 $\partial\mathbb{H}^3$ 上、通过 Möbius 双奥比乌斯变换作用的无挠克莱因群。设 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ 为一个双曲3-流形，则 Γ 同构于 $\pi_1(M)$。设 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ 为非紧致且具有有限体积的三维流形。设 M 由有限个与 $T^2 \times [0.\infty$ 同胚的尖点组成。在 $\mathbb{H}^3$ 中，尖点的提升是一个可数的、互不相交的 hor 球集合，它们覆盖 $\mathbb{H}^3$ 中的尖点。hor 球在 $\mathbb{H}^3$ 上 Γ 的作用下等价。

包含尖点的双曲3-流形称为尖点双曲3-流形。设 M 是一个尖点双曲3-流形。现在我们连续扩大尖点，直到它们与自身相切。因此我们无法再继续扩大；这称为极大尖点。若一个尖点不存在包含它的更大尖点，则称其为极大的；当且仅当该尖点在一个或多个点处与自身相切时，便会出现这种情况。 M 中极大尖点的提升是 $\mathbb{H}^3$ 中可数无限多个内部互不相交、且具有某些切点的 hor 球集合

，这些切点位于它们的边界上。每个 hor 球都在上半空间的边界处与之相切于一点。这些点称为 hor 球的中心。将 hroballs 的内部投影到 M，得到 M 中尖点的管状邻域。我们选取 ∞ 中的点作为覆盖极大尖点的 hor 球的中心，并将其记为 $\mathbb{H}_\infty$。我们将归一化，使得 $\mathbb{H}_\infty$ 的边界为平面 $t=1$，且投影区域 $t>1$ 是 M 中尖点的管状邻域。中心位于 $\partial\mathbb{H}^3$ 且与平面 $t=1$ 相切的 hor 球称为满尺寸 horoball。

现在，对于极大尖点图中的一个给定尖点双曲3-流形，必定存在一个等距变换 γin Γ，使得 $\gamma(H_0)=H_\infty$。在 $\partial\mathbb{H}^3$中，也就是在 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$中，$\gamma(0)=\infty$。若我们利用上述公式 (2) 将其延拓为 $\mathbb{H}^3$ 中的莫比乌斯变换 M¨，则可得 γ 对应的等距圆半径为 1。因此，该等距变换必定具有如下形式

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } |c|=1\ . \tag{2.3}$$

2.1. 测地谱。设 M 为有限体积双曲三维流形。则存在一个无挠克莱因群 Γ，使得 M 与 $\mathbb{H}^3/\Gamma$同胚。此外，Γ 与 $\pi_1(M)$同构。由于 Γ是离散的，因此 $\pi_1(M)$是可数无限集。因此，$\pi_1(M)$中的每个自由同伦环类都包含唯一的闭测地线代表元。因此，闭测地线的数量是可数的。M 中的闭测地线长度构成 $\mathbb{R}$的一个离散子集。设$L=\{l_1,l_2,\ldots,l_n,\ldots\}$为 M中所有闭测地线长度构成的集合。由于 L 是离散的，我们可以按递增顺序排列长度谱，如 $l_1\le l_2\le$、$\cdots\le l_n$、.....。因此，M 的最短闭测地线长度为 l_1。

设 M 是至少有一个尖点的完备双曲三维流形。设 $M=\mathbb{H}^3/\Gamma$，其中 Γ是 $PSL(2,\ \mathbb{C})$ 的离散子群，且同构于 $\pi_1(N)$。我们可以共轭 Γ，使得 ∞ 的稳定子（记作 Γ_∞）成为 Γ 的抛物子群，且同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。若 l 是最小平移长度，则我们总可以取 Γ_∞ 的一个生成元为

$$\beta=\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在本文中，我们始终假设 $0\in\partial\mathbb{H}^3$ 和 $\infty\in\partial\mathbb{H}^3$ 是 Γ的抛物不动点。

2.2. 德恩填充。设 M 是一个边界为环面分支 ∂M 的三维流形，该分支同胚于环面 T^2，因此 $\pi_1(\partial M)$ 同构于群 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。设 a和 b是 $\pi_1(\partial M)$ 的两个生成元，即 $\pi_1(\partial M)=\langle a,b\rangle$。设 s是边界环面 ∂M 中的一条本质简单闭曲线的同伦类，因此 $s=a^mb^n$, s 也称为 ∂M 上的斜率。现在设 $P=S^1\times D^2$为一个实心环面，μ 为 ∂P的子午线。通过沿 s进行德恩填充，将 P 粘到 M 上，并按如下方式识别 $\phi:\partial P\to\partial M$，使得 $\phi(\mu)=s$，从而得到一个闭合的 $3-$ 流形，记作 $M(s)$。更准确地说，$M(s)=M\sqcup P/x\sim\phi(x)$。假设 M有 k个互不相交的环面边界分支，设 $s_1,s_2,\ldots,s_k$ 为对应边界分支的斜率。沿斜率$s_1,s_2,\ldots,s_k$进行德恩填充，记作 $M(s_1,s_2,\ldots,s_k)$。

设 M 是带有尖点 C 的双曲三维流形，则 C 的边界具有欧几里得结构。设 s 是 C 边界中的任意一条本质简单闭曲线，那么 s 同伦于一条长度定义良好的测地线，该长度称为 $slope\ length$。

设 M 是带有尖点 $3-$、C_1、C_2、.....、C_k 的双曲流形。德恩填充后，流形 $M(s_1$、s_2、.....、$s_k)$ 并不总能成为闭双曲三维流形；它是否为双曲流形取决于 s_1、s_2、.....、s_k 的斜率长度。下面的定理给出了 $M(s_1$、s_2、.....、$s_k)$ 为双曲流形的充分条件，该定理称为格罗莫夫–瑟斯顿 2π 定理，陈述如下：

定理 2.2. [1, 定理 2.1]*(2π-Theorem)* 设 M 是一个具有 n 个尖点的带尖点双曲三维流形。设 C_1、C_2、.....、C_k是 M的 n 个尖点对应的互不相交的尖点环面，并设 s_i 是 C_i上的一个斜率，由一条测地线 α_i 表示；对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$，该测地线在 C_i 上的欧几里得度量下的长度大于 2π。那么 $M(s_1$、s_2、.....、$s_k)$ 具有一个负曲率度量。

这一斜率长度界在 2π 定理中后来被 Ian Agol[3] 和 Marck Lacknby [12]分别独立地从 2π 改进至 6。

在 [17, 定理 6.5.6],中，William Thurston 证明了以下定理。

定理 2.3. 若 M 是具有尖点 C的双曲三维流形，且 s 是 ∂C 上的一个斜率，使得$M(s)$ 是双曲的，则

$$\mathrm{Vol(M)} > \mathrm{Vol(M(s))}.$$

在最后一节中，我们将运用上述定理来阐释主要结果（1.3）。

设 M 是具有有限个尖点环面的双曲 3-流形，则双曲德恩填充流形的体积下界由 D. Futer 等人[7]的以下定理给出。

定理 2.4. [7,定理 1。1]

设 M是一个带有尖点的完备有限体积双曲流形。假设 $C_1, C_2, \ldots, C_n$是互不相交的嵌入尖点，其在 C_j 上带有斜率s_j，且 s_j 在∂C_j 上的测地线代表元长度严格大于 2π。记最小斜率长度为 l_{min}，则德恩填充流形 $M(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ 是双曲的，且

$$\mathrm{Vol}\left(M(s_1, s_2, \ldots, s_n)\right) \geq \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l_{min}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{Vol}(M).$$

本节最后，我们给出了 Lakeland 和 Leininger [9]的两个定理。稍后我们将运用这些定理证明主要结果，相关定理陈述如下：

定理 2.5。 [9, 引理 3。1] $PSL(2$ 中一个迹的模有上界 R 的双曲元，其平移长度至多为 $log(R^2 + 4)$。

定理 2.6。 [9, 引理 3。3] 假设克莱因群 Γ 是无挠的，并且将 Γ_∞ 视为在 $\mathbb{C}$ 上通过平移作用时（或者等价地，将其视为在 Γ_∞ 中作用），其余面积至多为 V_c
关于 H_∞)，并且最小抛物平移长度 $l > 2\pi$，那么 $2\pi < l \leq \sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}}$。

现在我们掌握了足够的信息来证明主定理。因此，在下一节中我们将证明主要结果。

3. Proof of the Main Result

在阐述主要结果之前，我们先证明一些引理。利用这些引理，我们将证明主要结果。以下引理基于对双曲3-流形尖点的 horoball 图的一些基本几何观察而得以证明。

引理 3.1. 设 Γ 是一个无挠克莱因群，具有一个抛物子群 Γ_∞，该子群固定 ∞ 处的点，且同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。我们可以令 Γ_∞ 作用于 H_∞，使得 H_∞/Γ_∞ 与 T^2 同胚，并令最小抛物平移长度为 $l>2\pi$。此外，令 Γ_∞ 在我们令 Γ_∞ 作用于 H_∞ 时的余面积至多为 V_c。再令 Γ 包含一个形如.....的元素

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & -\frac{1}{c}\\ c & 0\end{pmatrix},\ where\ |c|=1,\ and\ |a|\ is\ the\ minimal\ for\ all\ \gamma\in\Gamma\ with\ \gamma(0)=\infty, \tag{3.1}$$

那么，以下情况之一成立：

(1) 如果 $|a|>2$，那么对于每个 $n\geq 1$，都存在一个双曲元 α_n，使得

$$|tr(\alpha_n)|\leq\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+\frac{V_c^2}{l^2}} \tag{3.2}$$

(2) 如果 $|a|\leq 2$，那么对于每个 $n\geq 1$，都存在一个双曲元 α_n，使得

$$|tr(\alpha_n)|\leq\sqrt{l^2n^2+4} \tag{3.3}$$

证明。在进入主要证明 1st 之前，我们先考察一些观察结果。根据假设，V_c 是极大尖点面积，因此尖点体积为 $\frac{V_c}{2}$。我们回顾一下群的等距变换群 Γ 在点 $\overline{p_0}\in\mathbb{H}^3$ 处的狄利克雷域（这里 Γ 作用于 $\mathbb{H}^3$）定义为 $\Delta_\Gamma(p_0)=\{p\in\mathbb{H}^3:\ d_{hyp}(p,p_0)\leq d_{hyp}(p,\gamma(p_0))\forall\gamma\in\Gamma\}$。令 Δ 为 Γ_∞ 在点 0 处的狄利克雷域。根据假设，$|a|$ 是所有 $\gamma\in\Gamma$、所有$\beta\in\Gamma_\infty$的最小迹模，$\beta\gamma(0)=\infty$，因此 $\frac{a}{c}\in\Delta$。

（1）的证明：由于 l 是 Γ_∞ 中某个抛物基所对应的最小平移长度，因此我们可以用矩阵在 Γ 中表示这一抛物等距变换

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

and

$$\beta^{\pm n}\gamma=\begin{pmatrix}a\pm ncl & -\frac{1}{c}\\ c & 0\end{pmatrix},\ \text{where } |c|=1 \tag{3.5}$$

现在我们断言，$\beta^{-n}\gamma$ 和 $\beta^n\gamma$ 不可能同时为抛物型；若存在自然数 k，使得 $\beta^k\gamma$ 和 $\beta^{-k}\gamma$，那么 $tr(\beta^{-k}\gamma)=a-ncl$ 为 2 或 -2，且 $tr(\beta^k\gamma)=a+ncl$为 2 或 -2。

现在，如果 $a - kcl = 2$

$a + kcl = 2 \Longrightarrow kcl = 0$，这与假设矛盾。现在，如果 $a - kcl = -2 a + kcl = -2 \Longrightarrow kcl = 0$，这也与假设矛盾。

现在，如果 $a - kcl = 2$

$a + kcl = -2 \Longrightarrow a = 0$，这与假设矛盾，因为 Γ 不包含任何椭圆元素。

因此，我们可以得出结论：对于每个 $n \geq 1$ ， $\beta^{-n}\gamma$ 或 $\beta^{n}\gamma$ 中必有一个是双曲型。因此，对于所有 $n \geq 1$，我们可以在 $\beta^{n}\gamma$和 $\beta^{-n}\gamma$ 之间任选一个，从而构造出一个由双曲型 α_n 组成的序列。因此，我们可以构造一个双曲元序列，其迹模要么 $|a - ncl|$ ，要么 $|a + ncl|$。

根据上述讨论，我们可以构造一列互不相同的双曲元 α_n，使得 $\alpha_n^{-1}(0) = 0$ 且 $\alpha_n(\infty) = \frac{a}{c} + ncl$ 或 $a - ncl$。现在， α_n 的迹模等于 α_n 的等距圆圆心与 α_n^{-1} 之间的距离。令 Δ 为 Γ 在 0 处的狄利克雷域，且 $\gamma(\infty) = \frac{a}{c}$ 位于该狄利克雷域内。现在，对每个 n ， α_n^{-1} 的等距圆圆心为 $\frac{a}{c} + nl$ 或 $\frac{a}{c} - nl$ ，而 α_n 的等距圆圆心为 0。因此，对每个 n ， α_n^{-1}与 α_n 的等距圆圆心之间的最大距离由坐标 $-(n - \frac{1}{2})l + i\frac{1}{2}\frac{2V_c}{l}$或 $(n - \frac{1}{2})l + i\frac{1}{2}\frac{2V_c}{l}$给出。

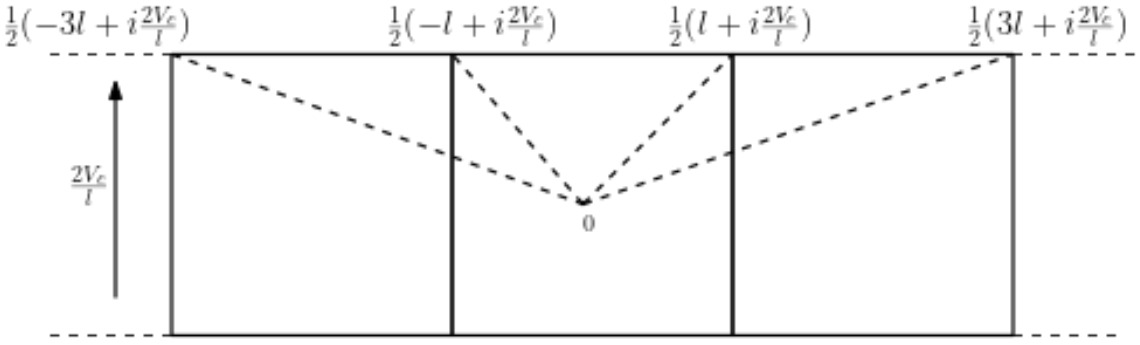

FIGURE 1. 虚线表示等距圆圆心的位置向量，这些位置向量的模限定了双曲元α_n的迹模。

因此，我们得到

$$|tr(\alpha_n)| \leq \sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 l^2 + \frac{V_c^2}{l^2}} \tag{3.6}$$

（2）的证明：为证明第二部分，我们考虑不同元素的序列 $\beta^n\gamma$，对所有使乘积成立的 $n \geq 1$

$$\beta^n\gamma = \begin{pmatrix} a+ncl & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } |c| = 1. \tag{3.7}$$

现在，$|tr(\beta^{\pm n}\gamma)| = |a \pm ncl| \geq |nl| - |a| > 2$（因为 $l > 2\pi$ 和 $|a| \leq 2$），因此对所有 $n \geq 1$, $\beta^n\gamma$ 都是双曲型。（这里注意，也可以取所有 $n \geq 1$的 $\beta^{-n}\gamma$ ）

设 $\alpha_n = \beta^n\gamma$，α_n 和 α_n^{-1}的等距圆圆心分别为 $\alpha_n^{-1}(\infty) = 0$和 $\alpha_n(\infty) = \frac{a}{c} + nl$。在这种情况下，我们将等距圆的圆心移动了 nl的距离。现在，α_n 的迹是点 $\alpha_n^{-1}(\infty) = 0$ 与点 $\alpha_n(\infty) = \frac{a}{c} + nl$之间的距离。由于$|\frac{a}{c}| \leq 2$，应用勾股定理，我们可以对每个 $n \geq 1$给出 α_n的迹模界。

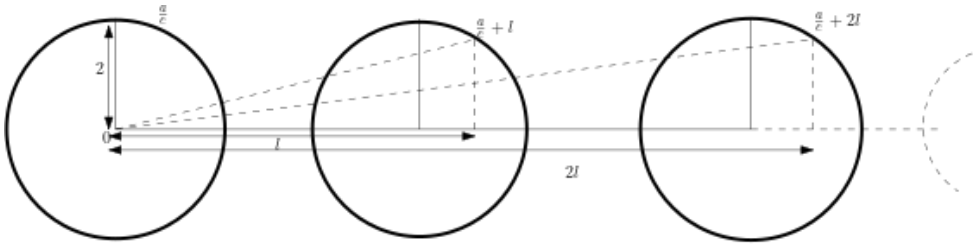

FIGURE 2. 迹模小于 $\beta^n\gamma$ $\sqrt{l^2n^2+4}$。

因此，$|tr(\beta^n\gamma)| \leq \sqrt{l^2n^2+4}$。

□

引理3.2。设 M 是一个至少有一个尖点的有限体积双曲三维流形，并设$M = \mathbb{H}^3/\Gamma$，其中 Γ 是 $PSL(2,\mathbb{C})$的离散子群。假设在一个极大尖点环面中，存在一条非平凡曲线，对应于长度为 $l > 2\pi$的抛物等距变换。那么对于每个$n \geq 1$，我们都可以用 $\sqrt{l^4n^2+4}$给出双曲元的迹模的上界。

证明。设 $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$， Γ 是 $\pi_1(M, b)$ 的忠实表示的像，其中 b 是 M 中极大尖点切点处的基点，而 Γ 是 $PSL(2,\mathbb{C})$的离散子群。设 H_0和 H_∞是中心分别位于$(0,0,0)$和无穷远处的hor 球。我们调整极大尖点，使得这些hor 球 H_0与 H_∞的切点位于$(0,0,1)$。 b 在覆盖投影下的原像包含点$(0,0,1)$。设 x_1 是子午曲线 c（基于 b）在超球面 H_∞上的提升，其起点为$(0,0,1)$，终点为$(l,0,1)$。

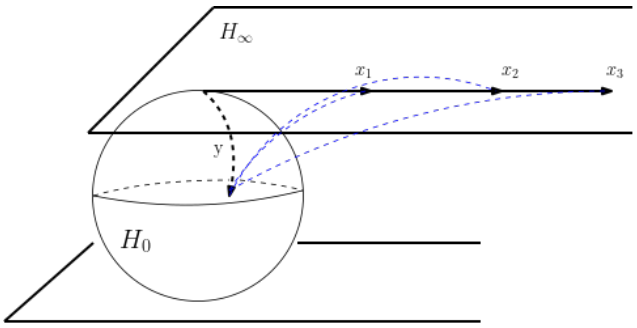

FIGURE 3. H_0 位于 0 处的 horoball， H_∞ 位于 ∞ 处的 horoball，蓝色虚线是穿过提升 x_n 和 y 端点的测地线。

在完整大小的 horoball H_0 的边界上，还有 c 的另一个提升 y。此提升 y 的起点相同，为 $(0, 0, 1)$，终点则是 H_0 边界上的某个 p'。令 β 和 γ 分别为路径 x_1 和 y 在 Γ 中对应的抛物等距变换。现在我们可以对 Γ 作共轭，使得 0 和 ∞ 成为 β 和 γ 的抛物不动点。因此，我们可以将等距变换 β 和 γ 取为：

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{where l is the minimal parabolic length} \tag{3.8}$$

$$\text{and} \tag{3.9}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \text{where } \omega \text{ is a complex number} \tag{3.10}$$

现在我们考虑 $n \geq 1$ 的乘积

$$d_{\pm n} = (\beta^{-1})^{\pm n}\gamma = \begin{pmatrix} 1 \pm nl\omega & nl \\ \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

那么，对于每个 $n \geq 1$、 d_{-n} 和 d_n，二者不可能同时为抛物型。因此，对于每个 n， d_{-n} 或 d_n 中必有一个是双曲型。所以，对于每个 n，我们总能得到一个双曲元，其迹模为 $|2 + nl\omega|$ 或 $|2 - nl\omega|$。

现在设 x_n 是与抛物元素 β^n 对应的提升。如果 x_n与 y 之间的角为 $\frac{\pi}{2}$，且乘积 $(\beta^{-1})^n\gamma$ 是双曲型的，那么与这些乘积对应的测地线长度最大。由于我们给出的是最短 n^{th} 闭测地线的上界，不失一般性，可以假设 x_n 之间的角的绝对值

以及 y 在 (0，0，1) 处的角为 $\pi/2$。因此，当 x 与 y 垂直时，我们可以选取等距变换 $\beta^{-1}\gamma$，并将抛物等距变换 β 和 γ 表示为

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ il & 1 \end{pmatrix}$$

现在，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$(\beta^{-1})^n\gamma$ 彼此不同，且均为双曲型，如 $|tr(\beta^{-1})^n\gamma)| > 2$。没有　　w

$$\alpha_n = (\beta^{-1})^n\gamma = \begin{pmatrix} 1+inl^2 & nl \\ il & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $|tr(\alpha_n)| = \sqrt{l^4n^2+4}$，于是对于每个 $n \geq 1$，我们都可以给出双曲元的迹模上界 $\sqrt{l^4n^2+4}$。□

这里我们注意到，与双曲元 $(\beta^{-1})^n\gamma$ 对应的闭测地线彼此不同，因此我们可以按照 $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \ldots\ldots$ 对相应闭测地线的长度谱进行排序。其中 l_1 是最短闭测地线长度，l_2 是第 2nd 短的闭测地线长度，l_3 是第 3rd 短的闭测地线长度……。

下一个引理是引理 [9, 引理 3.3]的推广。本引理的证明技巧取自 [9]。

引理 3.3. 设 $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ 是一个非紧致的有限体积双曲3 流形，其中Γ 是 $PSL(2,\mathbb{C})$ 的离散子群，且 $N = M \setminus L$，其中 M 是一个闭的可定向3流形，L 是 M 中的双曲链环，并且 $\mathrm{Vol}(N) = V$。那么对于每个 $n \geq 1$，Γ 都含有一个双曲型元，其迹模小于或等于

$$\sqrt{2n^2V_c^{\frac{4}{3}}+4},\ where\ V_c = C_0V.$$

证明。考虑函数序列 $S_n(l) = minT_n(l)\ AR_n(l)$,

其中

$$T_n(l) = \sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 l^2 + \frac{V_c^2}{l^2}},\ \text{and} \tag{3.11}$$

$$AR_n(l) = \sqrt{n^2l^4+4}\ \text{where}, 2\pi < l \leq \sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}} \tag{3.12}$$

为使证明更简便，我们选取函数序列

$$s_n(x) = min\{a_n(x), t_n(x)\}, \tag{3.13}$$

其中

$$a_n(x) = n^2x^2+4,$$
$$t_n(x) = \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 x + \frac{V_c^2}{x}$$

并且，如 $4\pi^2 > 1$，不失一般性地，我们可以假设 $1 < x \leq \sqrt[4V_c]{3}$。　　—

Let

$$f_n(x) = a_n(x) - t_n(x) = \frac{n^2x^3 + 4x - (n - \frac{1}{2})^2x^2 - V_c^2}{x}, \text{ where } 1 < x \leq \frac{4V_c}{\sqrt{3}}.$$

假设

$$g_n(x) = n^2x^3 + 4x - (1 - \frac{1}{2})^2x^2 - V_c^2, \tag{3.14}$$

导数

$$g_n'(x) = 3n^2x^2 - 2(n - \frac{1}{2})^2x + 4, \tag{3.15}$$

并且 $g_n'(x) > 0$ 每个 $n \geq 1$。因此，对于每个 $n \geq 1$， g_n 都是严格递增函数，并且$g_n(0) < 0$, 所以 g_n 有唯一的实根，记作 x_n。由于每个 g_n 的首项系数均为正，这意味着 $x_n > 0$。

因此，对于每个 $n \geq 1$，以及 $x > x_n$,

$$g_n(x) > 0 \implies a_n(x) > t_n(x), \quad \forall\, n.$$

现在，我们声称，对于 $n \geq 1$， $x_n < \sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}$。

考虑

$$\begin{aligned}
&a_n(\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}) - t_n(\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}) \\
&= 2n^2V_c^{\frac{4}{3}} - (n - \frac{1}{2})^2\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}V_c^{\frac{4}{3}} + 4 \\
&= (2n^2 - \frac{1}{\sqrt{2}})V_c^{\frac{4}{3}} - (n - \frac{1}{2})^2\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}} + 4 \\
&\geq V_c^{\frac{2}{3}}\left(\left(2n^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}n^2 + \sqrt{2}n - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 4 \geq 0 \text{ (as } V_c > 1).
\end{aligned}$$

由此得证。因此 $a_n(x_n) < a_n(\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}})$。同样，有两种可能：要么$x_1 \leq 1$ ，要么 $x_1 > 1$; 还可以很容易验证， $x_n \leq x_1$ 所有 $n \geq 1$。现在，若 $x_1 \leq 1$ ，则，$a_n(x) > t_n(x)$ 对所有 $x \in (1, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}]$。

因此,

$$s_n(x) = t_n(x), \text{ for all } x \in \left(1, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right] \text{ and for all } n \geq 1.$$

$$\implies s_n(x) \leq a_n(\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}) \text{ for all } x \in \left(1, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right] \text{ and for all } n \geq 1 \qquad (\text{ as } \sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}} > 1)$$

对于最坏情况，我们可以假设，对于所有 $n \geq 1$, $x_n \in \left(1, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right]$

$$s_n(x) = a_n(x), \text{ for all } x \in (1, x_n] \text{ and for all } n \geq 1.$$

$$s_n(x) = t_n(x), \text{ for all } x \in \left(x_n, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right] \text{ and for all } n \geq 1.$$

现在，对于每个 $n \geq 1$，以及所有 $x \in$ （1，x_n],

$$s_n(x) = a_n(x) \leq a_n(x_n) \leq a_n(\sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}) \text{ (As } x_n < \sqrt{2}V_c^{\frac{2}{3}}) \tag{3.16}$$

对于每个 $n \geq 1$ t_n，都是一个凸函数。t_n 的最小值对于每个 n 都在点 $\frac{2V_c}{2n-1}$ 处。随着 n 增大，$\frac{2V_c}{2n-1}$ 的值会减小。因此有两种可能：t_n 的最小值属于 $\left(x_n, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right]$，或不在区间 $\left(x_n, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right]$内。这两种情况

$$t_n(x) \leq max\left\{t_n(x_n), t_n\left(\frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right)\right\} \text{ all } n \geq 1.$$

现在可以很容易地验证，对于 $\left(x_n, \frac{4V_c}{\sqrt{3}}\right]$中的所有 $n \geq 1$，$t_n(x) \leq a_n(\sqrt{2V_c^{\frac{2}{3}}})$。 □

注 3.4. 此外，根据引理（*3.1*）的情形，我们还得到了双曲元的一个上界：对于每个 $n \geq 1$, $r_n(l) = \sqrt{l^2n^2+4}$。对于每个 $n \geq 1$ 和 $2\pi < l \leq \sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}}$，这是关于 l 的增函数。因此，对于每个 $n \geq 1$，$r_n(l) \leq \sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}n^2+4}$；根据上述引理（*3.3*），对于每个 $n \geq 1$，我们也有一个包含 n^{th} 个双曲元的迹模界。现在，

$$\sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}n^2+4} \leq \sqrt{2n^2V_c^{\frac{4}{3}}+4} \iff V_c \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

并且已经是 $V_c \geq \pi^2\sqrt{3}$。因此，我们从引理 *3.3* 得到的界已经是最佳界。

现在设 $M \setminus L = \mathbb{H}^3/\Gamma_L$ 和 $x = \text{Vol}(M \setminus L)$，对于$M$ 中的不同双曲链环 L，我们会得到不同的 x。因此，上述 3.3 中关于 $M \setminus L$体积的双曲元迹模的表达式，将产生关于 x的函数序列。因此，该函数序列为 $F_n(x) = \sqrt{2n^2C_0^{4/3}x^{4/3}+4}$，对于每个$n \geq 1$和 $2\pi < x \leq \sqrt{\frac{4V_c}{\sqrt{3}}}$，它都是递增的。

利用 D. Futer 等人的下述定理 (2.4)，得到另一个双曲型迹模优化函数序列。

定理 3.5。设 $M \setminus L$ 是一个完备有限体积非紧双曲流形。令 M 表示沿每个边界环面上指定的斜率进行填充后得到的闭流形，每个斜率的长度至少为 2π，其中最小长度记为 l_{min}。那么 M 是双曲的，并且

$$\text{Vol}(M) \geq \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l_{min}}\right)^2\right)\text{Vol}(M \setminus L).$$

通过求解不等式，并利用定理中给出的事实，我们得到 t

$$l_{min} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{\mathrm{Vol}(M \setminus L)}\right)^{2/3}}}. \tag{3.17}$$

因此，根据（2.3），最小抛物长度受一个关于 x 的函数限制，其中 $x > V$，我们有

因此，最终我们得到

$$l_{min} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{x}\right)^{2/3}}} \tag{3.18}$$

现在对每个 n 应用引理（3.2），我们可以用 $\sqrt{l^4n^2+4}$来限制 Γ_L 中的双曲元的迹模。因此，迹模也受递减函数限制。

$$G_n(x) = \sqrt{\frac{16\pi^4n^2}{(1-(V/x)^{2/3})^2}+4}. \tag{3.19}$$

现在，我们准备在下一节给出主要结果，即定理（1.3）的证明。

3.1. **定理（1.3）的证明**。 .

根据上述讨论，我们得到两组序列函数，对每个自然数 n

$$F_n(x) = \sqrt{2n^2C_0^{4/3}x^{4/3}+4}, \tag{3.20}$$

and

$$G_n(x) = \sqrt{\frac{16\pi^4n^2}{(1-(V/x)^{2/3})^4}+4}. \tag{3.21}$$

现在注意，对于每个 n， $F_n(x)$ 是递增的，而 $G_n(x)$ 是递减函数。如果这两个函数有一个公共值，那么每个 n 值都应是唯一的。将公共值代入 $F_n(x)$（由于对于每个 n， $F_n(x)$ 都是递增的），即可得到每个 n 对应的双曲元迹模的上界。现在，对于每个 n，令两者相等，我们得到

$$F_n(x) = G_n(x)$$
$$\implies x = \left(V^{2/3} + \frac{4\pi^2}{\sqrt{2} C_0^{2/3}} \right)^{3/2}$$

现在应用定理 (2.5)，我们得到 n^{th} 测地边界，其上界为

$$\begin{aligned} l_n \leq \log(F_n(x)^2 + 4) &= \log \left[2n^2 C_0^{4/3} \left(V^{2/3} + \frac{4\pi^2}{\sqrt{2} C_0^{2/3}} \right)^2 + 8 \right] \\ &= \log \left[n^2 \left(\sqrt{2} \left(C_0 V \right)^{2/3} + 4\pi^2 \right)^2 + 8 \right]. \end{aligned}$$

□

4. Acknowledgment

作者谨此感谢印度古瓦哈提印度理工学院数学系的支持。

References

[1] Adams, Colin C.; Reid, Alan W.：双曲三维流形的最短闭测地线，《剑桥哲学学会数学学报》128，第1期（2000年），103–110。[2] Adams, Colin，双曲三维流形的尖点密度，《爱丁堡数学学会学报》（第二辑）45，第2期（2000年），277–284。[3] Agol, Ian，例外德恩填充的界，《几何与拓扑》4（2000年），431–449。[4] Bruce Kleiner 和 John Lott，关于 Perelman 论文的笔记，《几何与拓扑》12（2008年），第5期，2587–2855。[5]Bonahon, Francis，《低维几何：从欧几里得曲面到双曲纽结》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛；高等研究院（IAS），普林斯顿，新泽西州。49，第2866931卷（2009年），xvi +384[6] B¨or¨oczky, K（1978）。常曲率空间中的球体堆积，《匈牙利科学院数学学报》32，第3–4期（1978年），243–261。[7] Futer, David、Kalfagianni, Efstratia 和 Purcell, Jessica S，德恩填充、体积与琼斯多项式，《微分几何杂志》78（2008年），第3期，429–464。http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1207834551[8] de Freitas, Izabella 和 Ramos，几何中的几何化，《当代数学》50（2022年），76–138。[9] G. S. Lakeland, C. J. Leininger，双曲三维流形的最短闭测地线与德恩手术，《代数几何与拓扑》14（3）（2014年），1441–1460。[10] Gromov, Mikhael，黎曼流形的填充，《微分几何杂志》18（1983年），第1期，1–147。[11] Grisha Perelman，里奇流的熵公式及其几何应用，预印本，2002年，39页。[12] M. Lackenby，词双曲德恩手术，预印本，https://arxiv.org/abs/math/9808120，（1998年）。[13] Purcell, Jessica S.，《双曲结理论》，数学研究生丛书，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，[2020]，©2020。xviii+369 页。ISBN：978-1-4704-5499-9[14] R. Meyerhoff，双曲三维空间中的球体堆积与体积，《赫尔维蒂数学评论》61（1986年），271–278

[15] S. Palaparthi，双曲链环补空间中的闭测地线长度，《纯粹与应用数学国际期刊》，**83**（2013年）45–53。[16] William P. Thurston，三维流形、克莱因群与双曲几何，《美国数学学会通报》（新系列）**6**（1982年），第3期，357–381。[17] William P. Thurston，三维流形的几何与拓扑，《普林斯顿大学数学系讲义》，1979年。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, Guwahati, 781039,India电子邮箱地址：ghosh176123006@iitg.ac.in, budo2012dec@gmail.com