arXiv:2303.09006v2 [math.AG] 3 Apr 2024

沿适当态射的主丛拉回

INDRANIL BISWAS 和 PETER O'SULLIVAN

Abstract. 我们研究主丛沿适当满射态射拉回后的性质，其中态射的定义域和值域可以是特征 0 的代数闭域上的概形，也可以是复解析空间。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 特征 0 的代数闭域上的概形 5 4. 复解析空间 16 致谢 26 参考文献 27

1. Introduction

已有研究表明 [BD22，引理 4。2] 对于连通紧复流形上的约化结构群主丛，若其结构群可约化为有限子群，则称其几乎平凡；该主丛几乎平凡，当且仅当它沿适当满射态射的拉回几乎平凡。另一方面，若 X 是一个在特征 0 的代数闭域上适当的连通概形，则已有研究表明 [O'S19，命题 15。5] 约化结构群主丛在 X 上几乎极小，即其结构群不能约化为任何有限指数的约化子群，当且仅当它沿有限局部自由满态射 $f\colon X' \longrightarrow X$ 的拉回几乎极小。本文证明，当 X 正规时，对任意适当满射态射 f，上述几乎极小性结论均成立。此外，若 X' 连通，且 f 在基本群上诱导满同态，那么 f 会给出双射，将 X 上给定主丛的、具有约化结构群的主子丛的同构类对应到其沿 f拉回所得主丛的相应同构类。本文还证明了这些结果的复解析类比，其中尤其包含上述几乎平凡性结论。

为了更精确地描述这些结果，我们先从代数情形入手。设 k 是特征 0 的代数闭域，X 是 k上的概形。若 G 是 k上的仿射代数群，回忆一下，X 上的主 G丛是指一个 X 上的概形 P，并带有 G 在 X 上的右作用，作用于 P，使得在 ′的 étale 拓扑下局部地，P与 $X \times_k G$ 在 X 上同构，其中 G 通过右平移作用。若 G_1 是 G的 k子群，则 P的主 G_1子丛是指 P的一个闭子概形 P_1，使得 G 在 P 上的作用限制为 G_1 在 P_1 上的作用，且 P_1 是 X上的主 G_1丛。若两个 P 的主 G_1子丛作为 X上的主 G_1丛同构，则称它们同构。任何这样的同构都由主 G丛 P的唯一自同构诱导。本文主要关注结构群为约化群（不一定连通）的主子丛，以及这类子丛的同构类在沿适当满射态射拉回时的行为。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14L30；次要分类号：18F15、18B40、32L05。*Key words and phrases.* 几乎极小约化；群胚；张量范畴；拉回。

结构群为约化群的主丛若不含结构群严格更小的主子丛，则称为极小主丛。在此背景下，这类主丛之所以重要，是因为在对 X施加适当条件时，对于任意约化 k子群 $G_1 \subset G$，一旦已知 G 的某个约化 k子群 G_0，使得 P 具有一个极小主 G_0子丛，那么主 G丛 P 在 X 上的主 G_1子丛的同构类便完全确定。具体来说，若 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个剩余域为 k的亨泽尔局部 k代数，则 P的主 G_1子丛的同构类由一个有限集 (3.3) 参数化；该有限集仅依赖于 G、G_0 和 G_1，而不依赖于 X 或 P。这由下文的定理 3.3 得出；当 $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ 时，该定理等价于 Bogomolov 的一个结果 [Bog94，第 401 页，定理 2.1]。

现在假设 X 是局部诺特且正规，并设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个适当满射态射。那么，P 有约化结构群的主子丛，当且仅当其沿 f 的拉回 f^*P 也有约化结构群的主子丛（见下文定理 3.7）。进一步假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部。鉴于上述结果，沿 f 拉回 P 的约化 G_1 主 G_1 子丛同构类的问题，可归结为极小主丛的拉回问题。这样的拉回未必是极小的：例如，任何具有有限结构群的主丛，沿有限 ´étale 覆盖拉回后都会变成平凡丛。不过，它总是几乎极小的（见下文定理 3.10）。可以证明，f 可分解为一个适当满射态射 $X' \longrightarrow X_1$，它在基本群上诱导满射，随后接一个有限 ´étale 态射 $X_1 \longrightarrow X$（见下文定理 3.7 后的段落）。进一步假设 $X_1 = X$，或者等价地，对 X 的每个连通 ´étale 覆盖 Z，f^*Z 都是连通的。那么 f^* 保持极小主丛；事实上，对每个约化 k 子群 $G_1 \subset G$，它都会诱导一个双射，将 P 的主 G_1 子丛同构类映到 f^*P 的主 G_1 子丛同构类（见下文定理 3.11）。由此可得一个推论：若 G 是约化的，则 X 上的两个主 G 丛 P_1 和 P_2 同构，当且仅当 f^*P_1 和 f^*P_2 同构（见下文推论 3.12）。

现在考虑复解析情形。给定一个复李群 J，我们定义复解析空间上的主 J-丛、闭复李子群 J_1 在 J 中的主 J_1-子丛，以及这类主 J_1-子丛之间的同构，定义方式与代数情形类似。我们只考虑那些代数的复李群 J，即 J 是与域 $\mathbb{C}$上的仿射代数群 G 相关联的复李群 $G_{\rm an}$。若存在这样一个约化的 G，则称 J 为约化的。对于约化的 J，复解析空间上的极小和几乎极小主 J-丛定义与代数情形相同。对于非空复解析空间 X，$\mathbb{C}$-代数 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$是亨泽尔局部环且剩余域为 $\mathbb{C}$，当且仅当每个 X 上的全纯函数在 $X_{\rm red}$ 上的限制都是常数 [（BO21，引理 2.1], ）；特别地，当 X 约化时，当且仅当 $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$。于是，我们分别得到定理 3.3、3.7、3.10、3.11 和推论 3.12 的复解析类比，即定理 4.7、4.11、4.13、4.14 和推论 4.15。几乎平凡性结果[（BD22，引理 4.2] ）例如可由定理 4.13 与定理 4.7 的等价形式——推论 4.8——推出。

定理 3.3是本文大多数代数情形结果所依赖的定理，它是 [O'S19，推论 139], 的一个特例；该推论是从群胚的相应结果 [O'S19，推论 12.11(i)]推导而来的；另一种方法见注 3.2 。这里我们直接使用 [O'S19，推论 12.11(i)]，但首先回顾主丛与传递仿射群胚之间众所周知的对应关系。代数情形中另一个取自 [O'S19] 的结果是命题 3.6，它是[O'S19，推论 1014]的一个特例。

定理 4.7 是定理 3.3 的解析类比，其证明应用了 [AK02], [O'S05] 和 [O'S19], 所证明的张量范畴分裂定理，以及从表示范畴到向量丛范畴的主丛与张量函子对应关系的解析形式。这一对应关系的代数形式广为人知；若愿意，也可以用几乎完全相同的论证证明定理 3.3 。命题4.10 是命题3.6 的解析类比，其证明是自成一体的，并不依赖于 [O'S19]。同样，命题 3.6 也可以用几乎完全相同的论证证明。一旦定理4.7 和命题 4.10 得以确立，解析结果的证明便与代数结果的证明几乎完全相同，因此从略。

在代数情形和解析情形中，关于沿态射拉回主丛的结果$f\colon X' \longrightarrow X$ 均以更一般的形式证明，其中满足以下两个条件之一：(a) 或(b) 关于 f

成立（见定理3.7 和4.11），其中(b) 对应于上述条件： f 是适当且满射的。每种情形下，首先在条件(a)下证明所需结果，然后利用下一节给出的引理，推导出条件(b) 下的结果。

2. Preliminaries

回顾一下，若一个环化空间 X 对每个点 $x \in X$ 的茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是整环，且在其分式域中整闭，则称其为正规。若 X 是一个环化空间，且对每个 $x \in X$，$\mathcal{O}_{X,x}$ 都是整环，则称 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 是无挠的，如果对每个 $x \in X$， $\mathcal{F}_x$ 都是无挠的 $\mathcal{O}_{X,x}$-模。

引理 2.1. 设 X 是一个局部诺特正规概形， $\mathcal{F}$ 是一个无挠的相干 $\mathcal{O}_X$-模。那么， X 有一个开子概形 U，其补集处处余维至少为二，且 $\mathcal{F}$ 在 U 上的限制是局部自由的。

证明。对于那些使 $\mathcal{F}_x$ 成为自由$\mathcal{O}_{X,x}$-模的 $x \in X$，其集合 U 是 X中的开集，并且 $\mathcal{F}$ 在 U 上的限制是局部自由的。若 $x \in X$ 的余维至多为一，则$\mathcal{O}_{X,x}$ 要么是一个域，要么是一个离散赋值环，因此 $x \in U$，因为 $\mathcal{F}_x$ 是无挠的。□

引理 2.2. 设 X 是一个局部诺特正规概形， X' 是一个既约不可约概形，并设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个适当满射态射。则 X 有一个开子概形 U，其补集处处余维至少为二，使得 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 在 U 上的限制是一个局部自由的 $\mathcal{O}_U$-模。

证明。 由于 f 是满射且 X 是约化的，自然同态 $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$ 的核是平凡的。这说明 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是无挠的 $\mathcal{O}_X$-模，因为它的每个茎都是一个整环。所需结论现在由引理 2.1 得出。 □

设 R 是一个交换环，且 M 是一个有限表示的 R-模。若

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是 M的一个有限表示，回顾一下，对每个整数 $r \geq -1$，我们有 R 的一个理想，它由定义 $R^n \longrightarrow R^m$ 的 $m \times n$ 矩阵的（$m-r$）个 $\times$ （$m-r$）子式生成（若 $0 \leq r < m$）；当 $r = -1$ 时，该理想定义为 0；当 $r \geq m$时，则定义为 R 。对于整数 r，这个 R 的理想实际上独立于表示的选择（对每个 r []，见 Stacks 项目，标签 07Z8]。它是 R的一个有限生成理想，即 M的第 r个 Fitting 理想 $\mathrm{Fitt}_r(M)$，其构造与沿交换环的同态$R \longrightarrow R'$ 进行的扩张相容。我们有

$$\mathrm{Fitt}_r(M) \subset \mathrm{Fitt}_{r'}(M)$$

对于 $r \leq r'$。如果 Z_r 是由 $\mathrm{Fitt}_r(M$定义的谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 的闭子概形，那么对于 $r \geq 0$ 从 T 到谱 $\mathrm{Spec}(R)$ 的概形态射，若且唯若将与 M 相关联的拟凝聚层拉回到 T 后是秩为 r [局部自由的，则该态射经由子概形 $Z_{r-1} - Z_r$ 分解。，标签 05P8]。

设 X 是一个环化空间，且 $\mathcal{O}_X$ 是凝聚的；设 $\mathcal{F}$ 是一个凝聚的 $\mathcal{O}_X$-模。那么，对于 $x \in X$，环 $\mathcal{O}_{X,\,x}$ 的理想 $\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F}_x)$ 是 $\mathcal{O}_X$ 的凝聚理想 $\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F})$ 的茎。事实上，若 $\mathcal{F}$ 在 X 的开子集 U 上有一个有限表示，则 $\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F})$ 在 U 上的限制由定义该表示的矩阵的相应子式生成。

引理 2.3. 设 X 是一个正规复解析空间， $\mathcal{F}$ 是一个无挠凝聚 $\mathcal{O}_X$-模。那么， X 有一个开子空间 U，其补集是处处余维至少为二的解析子集，并且 $\mathcal{F}$ 在 U 上的限制是局部自由的。

证明。 我们不妨假设 X 非空且连通，因此不可约 [GR84，9.1。2]。令 r为满足以下条件的最小非负整数：

$$\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F}) \neq 0.$$

对于每个 $x \in X$，记 $Z(x)$ 为 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 中由理想 $\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F})_x$of $\mathcal{O}_{X,x}$ 定义的闭子概形，并记 $U(x)$ 为 $Z(x)$ 的补集。于是， $U(x)$ 是 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 的最大开子概形，在该子概形上，与 $\mathcal{F}_x$ 相关联的拟凝聚层 $\mathcal{F}_x$ 的限制是秩为

秩为 r 的局部自由层。对每个 $x \in X$，$\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F})_x \neq 0$，因为 X 是约化且不可约的 [GR84, 9.1.1]。因此，对每个 x，$U(x)$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 中稠密，因为 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 是约化且不可约的。由此可得，$U(x)$ 是 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 的最大开集，使得 $\mathcal{F}_x$ 在其上的限制是局部自由的。$\widetilde{\ }$由于 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 是正规概形且 $\mathcal{F}_x$ 是无挠的，引理 2.1 因而表明，对每个 x，$Z(x)$ 的余维至少为二。

记 Z 为由 $\mathrm{Fitt}_r(\mathcal{F})$ 定义的 X 的闭解析子空间，记 U 为 Z 的补集。由于 $Z(z)$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\,z})$ 中的余维至少为二，因此 Z 在每个 $z \in Z$ 处的余维至少为二。因此，U 具有所需性质，因为 $x \in U$ 当且仅当 $U(x) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\,z})$，且 $U(x) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\,z})$ 当且仅当 $\mathcal{F}_x$ 是一个自由的 $\mathcal{O}_x$-模。□

引理 2.4. 设 X 为正规复解析空间，X' 为约化且不可约的复解析空间，并设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个适当满射态射。则 X 有一个开子空间 U，其补集是处处余维至少为二的解析子集，并且将 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 限制到 U 后得到一个局部自由的 $\mathcal{O}_U$-模。

证明。令 $X' \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X$ 为 f 的 Stein 分解。于是 f_1 是有限的，且 $f_{1*}\mathcal{O}_{X_1} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是同构。用 X_1 替换 X' 后，我们便可假设 f 是有限的。记 X'' 为 X' 的正规化，并记 $f'\colon X'' \longrightarrow X$ 为 f 与自然投影 $X'' \longrightarrow X'$ 的复合。于是 f' 是有限且满射的，并且我们有一个 $\mathcal{O}_X$-模的单态射

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow f'_*\mathcal{O}_{X''}.$$

对于任意 $x \in X$，f' 下 x 的邻域的原像构成 x 上方 f' 的纤维 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 的邻域基。因此，$f'_*\mathcal{O}_{X''}$ 在 x 处的茎为

$$(f'_*\mathcal{O}_{X''})_x = \mathcal{O}_{X'',x_1} \oplus \mathcal{O}_{X'',x_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{X'',x_n},$$

其中每个 $\mathcal{O}_{X'',x_i}$ 都是有限的 $\mathcal{O}_{X,x}$-代数。由于 X'' 不可约，且 f' 有限且满射，X 和 X'' 都是等维的（见 [GR84, 9.1.3]），维数相同，为 [GR84, 5.4.1]。因此，f' 是开映射 [GR84, 5.4.3],，故每个 $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'',x_i}$ 都是整环之间的单射同态。由此可得 $f'_*\mathcal{O}_{X''}$，进而 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是无挠 $\mathcal{O}_X$-模。所需结论现由引理 2.3 得出。□

例如参见 [GW10，6。45] 引理2.5 以及 [GR84，7.4。2]引理2.6。

引理 2.5. 设 X 是一个局部诺特正规概形，并设 $j\colon U \longrightarrow X$ 是一个开子概形的嵌入，其补集处处具有至少二的余维。那么自然同态 $\mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_U$ 是一个同构。

引理 2.6. 设 X 是一个正规复解析空间，并设 $j\colon U \longrightarrow X$ 是一个开子空间的嵌入，其补集是一个处处具有至少二的余维的解析子集。那么$\mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_U$ 是一个同构。

设 X 是一个环化空间，且 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{O}_X$-模。上同调群 $H^1(X, \mathcal{F})$可与集合 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$等同，该集合由 $\mathcal{O}_X$ 被 $\mathcal{F}$扩张的同构类组成。拉回同态

$$i_{\mathcal{F}} : H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X', f^*\mathcal{F})$$

沿环化空间的态射 $f\colon X' \longrightarrow X$ 得到的便是扩张的拉回。I f

$$j_{\mathcal{F}'} : H^1(X, f_*\mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X', \mathcal{F}')$$

是 $i_{f_*\mathcal{F}'}\colon H^1(X, f_*\mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X', f^*f_*\mathcal{F}')$ 后接由沿余单位 $f^*f_*\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'$ 推前所给出的上同调同态；再结合 $i_{\mathcal{F}}$ 的自然性以及 f_* 和 f^* 的三角恒等式，便得到一个分解

$$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, f_*f^*\mathcal{F}) \xrightarrow{j_{f^*\mathcal{F}}} H^1(X', f^*\mathcal{F}) \tag{2.1}$$

$i_{\mathcal{F}}$的，其中第一个箭头是沿单位 $\mathcal{F} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{F}$ 推前所给出的。此外，对于每个 $\mathcal{F}'$，$j_{\mathcal{F}'}$ 都是单射，理由如下：若 $\mathcal{E}$ 是由 $f_*\mathcal{F}'$ 扩张 $\mathcal{O}_X$ 得到的扩张，且 $\mathcal{E}'$ 是沿 $f^*f_*\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'$ 对 $f^*\mathcal{E}$ 作推前所得的扩张，那么 $\mathcal{E}'$ 的一个分裂 $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{F}'$ 通过与 $f^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ 的复合 $f^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}'$ 及伴随关系，定义了 $\mathcal{E}$ 的一个分裂 $\mathcal{E} \longrightarrow f_*\mathcal{F}'$。

引理 2.7. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个环化空间态射，并且 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是一个有限型局部自由 $\mathcal{O}_X$-模。假设 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 的秩在 X 上处处可逆。那么，对于任意有限型局部自由 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{W}$，拉回同态

$$i_{\mathcal{W}} : H^1(X, \mathcal{W}) \longrightarrow H^1(X', f^*\mathcal{W})$$

是单射。

证明。 由于 $j_{f^*\mathcal{W}}$ 是单射，在将 $i_{\mathcal{W}}$ 按照（2.1）分解后，只需证明单位

$$\eta_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{W}$$

具有左逆。

推前 $f_*f^*\mathcal{W}$ $f^*\mathcal{W}$具有 $f_*\mathcal{O}_X$-模的结构。因此， $\eta_{\mathcal{W}}$分解为

$$\mathcal{W} \xrightarrow{u\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{W}} f_*\mathcal{O}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{W} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{W}, \tag{2.2}$$

其中 $u\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是 $\mathcal{O}_X$-代数的单位， $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 且第二个箭头是 $f_*\mathcal{O}_X$-模态射。在 X 上局部地论证可知， （2.2）中的第二个箭头是同构。由于 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是有限型局部自由的，我们有一个 $f_*\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ 的 $\mathcal{O}_X$-模迹态射。它与 u 的复合是 $\mathcal{O}_X$ 上的自同态，其等于 r 在 $f_*\mathcal{O}_{X'}$中的秩。由于 r 是可逆的，故 u ，从而 $u\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{W}$ 具有左逆。 □

3. Schemes over an algebraically closed field of characteristic 0

在本节中， k 始终表示一个特征 0 的代数闭域。

设 G 是一个仿射代数 k-群。所谓定义在 k-概形 X 上的主 G-丛，是指一个概形P X ，连同 G 在 P 上的一个右作用，并且该概形在 X之上；使得在 étale 拓扑下局部地， P 是平凡的，即同构于 $X\times_k G$ ，其中 G 通过右平移作用。定义在 X 上的主 G-丛之间的态射，是指它们的底层概形之间定义在 X 上的一个态射，且与G的右作用相容。每个这样的态射都是同构。沿着 k-概形的态射$f\colon X' \longrightarrow X$ 拉回 P 所得的 f^*P ，连同 G 在 X'上的典范右作用，是定义在 X'上的主 G-丛。

给定仿射代数 k-群的一个 k-同态 $h\colon G \longrightarrow G'$ 以及定义在X上的一个主 G-丛 P，存在一个定义在 X 上的主 G'-丛 P' 以及一个定义在 X 上的态射 $l\colon P \longrightarrow P'$ ，使得

$$l(pg) = l(p)h(g)$$

对于 P中的点 p和 G中的点 g，有序对 (P', l) 在唯一同构意义下唯一。有序对 (P', l)，或简称主 G'-丛 P' ，称为沿 h对 P 的推前。对于任意 $g' \in G'(k)$，若 $h'\colon G \longrightarrow G'$ 是由 $g \longmapsto g'h(g)g'^{-1}$定义的共轭态射，则 (P', l') 是沿 h'对 P 的推前，其中 l' 是 l 经 g'^{-1}右平移所得。

设 G_1 是 G的仿射 k-子群。 P的主 G_1-子丛定义为 P的闭子概形 P_1，满足 G 在 P上的作用限制为 G_1 在 P_1 上的作用，且 P_1 是X上的主 G_1-丛。沿包含映射 $G_1 \hookrightarrow G$ 对 P_1 的推前于是为 P。若P的两个主 G_1-子丛作为 X上的主 G_1-丛同构，则称它们同构。根据推前的唯一性，任何此类同构都是 X 上的主 G-丛 P的唯一自同构的限制。

我们不要求约化代数的 k-群是连通的。设 G_1 是 G 的一个约化 k-子群。那么商 G/G_1 是仿射的。若 P 是定义在一个 k-概形 X 上的主 G-丛，则商 P/G_1 存在，并且在 X 上 étale 局部同构于 $X\times_k(G/G_1)$。特别地， P/G_1 是 X 上的仿射概形。此外， P 是定义在 P/G_1 上的主 G_1-丛，并且它是将主 G-丛 P 拉回到 P/G_1 后所得丛的一个主 G_1-子丛。给定 P/G_1 在 X 上的一个截面，我们可以将这个主 G_1-丛拉回到 X。这在 P/G_1 在 X 上的截面集合与 P 在 X 上的主 G_1-子丛集合之间建立了一个双射。 P/G_1 的构造与拉回可交换。

G上主 G-丛 P 的自同构群概形 $\mathrm{Aut}_G(P)$ 同样存在，并且在 X 上 ´étale 局部同构于 $X\times_k G$。

命题3.1 如下所述，几乎可由定义直接推出；采用适当的定义后，该命题对 k 任意域都成立。相比之下，诸如下文的定理3.11 和4.14 ——

对 X 和 X'施加条件，但对 f 的条件较宽松——则更难证明，而且只适用于子丛的同构类。

命题 3.1. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个 k-概形之间的态射，且 $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是一个同构。设 G 是一个仿射代数 k-群，$G_1 \subset G$ 是一个约化 k-子群。那么，对于 X 上的任意主 G-丛P，沿着 f^*P 到 P 的投影作拉回，定义了从 P 的主 G_1-子丛集合（分别是同构类集合）到 f^*P 的主 G_1-子丛集合（分别是同构类集合）的一个双射。

证明. 根据上述内容，只需证明：对于任意在 X 上仿射的概形 Z，沿着 f 作拉回，定义了从 Z 的截面集合到 f^*Z 的截面集合的一个双射。事实上，取 $Z = P/G_1$ 将得到所需的子丛集合结果，而取 $Z = \mathrm{Aut}_G(P)$ 则可得到同构类的相应结果。 □

对于拟凝聚交换 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathcal{R}$，我们有 $Z = \text{谱}(\mathcal{R})$。$Z$ 的一个截面可识别为一个 $\mathcal{O}_X$-代数态射 $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X$，而 f^*Z的一个截面可识别为一个 $\mathcal{O}_X$-代数态射$\mathcal{R} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$。因此，截面的拉回由与 $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$复合给出。□

定理 3.3 将由以下内容推导得出：[O'S19，推论 12.11(i)] 利用主丛与传递仿射群胚之间的对应关系，我们接下来将回顾这一对应关系。证明定理 3.3的另一种方法见注 3.2。

设 X 是一个 k-概形。回忆一下，X 上的群胚是一个 k-概形 K，带有一个源 k-态射 d_1和一个目标 k-态射 d_0，二者均从 K 到 X，并配有一个单位 $X \longrightarrow K$ 和一个复合

$$\circ : K \times_{d_1, X, d_0} K \longrightarrow K$$

它满足结合律，以 $X \longrightarrow K$ 为左、右单位，并且存在逆元。因此，给定的 k-概形中的 X 和K 的点分别构成群胚的对象和箭头，也就是说，构成一个每个态射都是同构的范畴。群胚在 X 上的态射 $K \longrightarrow K'$ 是一个 k-概形的态射，它与 K 和 K'的源、目标、单位及复合相容。X 上的群胚 K 的子群胚是 K 的一个闭子概形 K'，使得K 的群胚结构在 K'上诱导出群胚结构。

源 和群胚 K 在 X 上的目标态射 d_1 和 d_0 是一个态射的分量

$$(d_0, d_1) : K \longrightarrow X \times_k X \tag{3.1}$$

在 k上。于是，d_0和 d_1之下的 $X \times_k X$ 的对角线 X 的原像是一个在X上的群概形 K^{diag}。$X \times_k X$ 的对角线 X 上的 K^{diag} 的任意截面 v，通过共轭作用，都会诱导出 X上的 K 的一个自同构：

$$K \xrightarrow{\sim} K, \quad w \longmapsto v(d_0(w)) \circ w \circ v(d_1(w))^{-1}. \tag{3.2}$$

称一个 X 上的群胚是仿射的（分别称为有限型的），如果 (d_0, d_1) 中的态射是仿射的（分别是有限型的）。对于 X 非空，称一个 X 上的仿射有限型群胚是传递的，如果 (d_0, d_1) 是满射且光滑的。

X 上的主丛构成一个范畴，其对象是形如 (G, P) 的对，其中 G 是一个仿射代数的k-群，且 P是一个 X上的主 G-丛；从 (G, P) 到 (G', P') 的态射是一个对 (h, l)（事实上，它完全由 l 确定），其中 h 是一个 k-同态 $G \longrightarrow G'$，而 l 是一个 X上的态射，使得 (P', l) 是 P 沿 h 的推前。当 X非空时，我们可以如下定义一个函子 $\mathrm{Iso}_{-}(-)$，将此范畴映到 X上的有限型传递仿射群胚范畴。在群胚 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 中，一个 Z 概形 k的点 x_1 作为源、x_0 作为目标，它们是 Z上的主 G-丛之间的同构$P_{x_1} \xrightarrow{\sim} P_{x_0}$。态射 $\mathrm{Iso}_h(l)$ 从 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 到 $\mathrm{Iso}_{G'}(P')$，将 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 中位于 (x_0, x_1) 上的点 $v : P_{x_1} \xrightarrow{\sim} P_{x_0}$ 映到唯一的点

$$v' : P'_{x_1} \xrightarrow{\sim} P'_{x_0}$$

在 (x_0, x_1) 上与 $\mathrm{Iso}_{G'}(P')$ 同构，使得

$$v'(l(p)) = l(v(p))$$

p 上方每个点 P（位于 x_1 上）。

主丛与 X 上的传递仿射群胚之间的联系，在 X 有一个 k-点 x 时最容易描述。此时，我们可以考虑由二元组 (G, P) 构成的范畴，其中配备了 P 在 x 上方的一个 k-点；态射则是保持 x 上方 k-点的态射。函子 $\mathrm{Iso}_{-}(-)$ 给出了从该范畴到 X 上有限型传递仿射群胚范畴的一个等价，其拟逆将 K 送到 (G, P)，其中 G 是 K 在 (x, x) 上方的纤维，P 是 $X \times x$ 在 K 中的原像；x 上方的 k-点是 $P_x = G$ 的单位，而 G 在 P 上的右作用由复合给出。

为描述任意非空 X 的情形，若存在一个 $g' \in G'(k)$（必然唯一），使得对于 G 的点 g 和 P 的点 p，有 $h'(g) = g'h(g)g'^{-1}$ 且 $l'(p) = l(p)g'^{-1}$，则称从 (G, P) 到 (G', P') 的两个态射 (h, l) 和 (h', l') 共轭。于是，$\mathrm{Iso}_{-}(-)$ 给出了一个等价，将由对 (G, P) 和态射的共轭类组成的范畴等价到有限型 X 上的传递仿射群胚。事实上，全忠实性可由以下事实看出：满足 $\mathrm{Iso}_h(l)$ 是从 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 到 $\mathrm{Iso}_{G'}(P')$ 的给定态射的 (h, l)，构成一个 k-概形的 k-点；该概形在 G 的共轭作用下单纯传递。这可由对任意使 X 有一个 k'-点的 k 的扩张 k' 作忠实平坦下降得到。本质满射性可利用以下条件证明（参见 O'S19，引理 5.1 及其前一段）[O'S19, Lemma 5.1 and the paragraph preceding it]：有限型 K 上的传递仿射群胚 X，当且仅当存在一个单纯传递的 K-概形 [O'S19, p. 21]，才具有 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 的形式，其中 (G, P) 是某个对。由于 k 是代数闭的，这个条件由 [O'S19, Lemma 7.3] 满足。

群概形 Iso 的截面 $\mathrm{Iso}_G(P)^{\mathrm{diag}}$ 在 $X \times_k X$ 对角线上的 G 主丛 P 在 X 上的自同构。由这样的截面诱导的共轭作用 v 是 Iso 的自同构 $1_G(v)$，即 $\mathrm{Iso}_G(P)$（见（3.2））。

群胚 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 在 X 上的传递仿射子群胚全都具有形式 $\mathrm{Iso}_{G'}(P')$，其中 G' k 是 G 的子群，且 P' G' 是 P 的主子丛。此外，$\mathrm{Iso}_{G'}(P') = \mathrm{Iso}_G(P)$ 当且仅当 $G' = G$。

设 K 是有限型传递仿射群胚 K，其基底为 X。那么 K^{diag} 是定义在 X 上的有限型光滑群概形。仿照 [O'S19], 的说法，若 K 约化，即 K^{diag} 的纤维均为约化的；若进一步 极小约化，即对每个 $K' = K$ 的约化传递仿射子群胚 K' K。

设 G 是一个约化代数 k-群，P 是 k-概形 X 上的主 G-丛。若只有在 $G' = G$ 时，P 才存在由 G' 这个约化 k-子群所定义的主 G'-子丛，则称 P 是极小的。X 上的群胚 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 是约化的，当且仅当 G 是约化的。若此条件成立，则 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 是极小约化的，当且仅当 P 是极小的。沿满射 k-同态推前 X 上的极小主 G-丛，所得丛仍是极小的。

定理 3.3 下文讨论的是 $H = X$、$k = \overline{k}$ 和 F 以及 F' 均为 [O'S19，推论 139] 的有限型情形。它等价于 k 代数闭、$H = X$ 且 K 为 [O'S19，推论 12.11(i)], 中的有限型情形，我们将在此由此推导。

注 3.2. 定理 3.3 也可以用与其解析类比——定理 4.7——类似的方法证明。为此，首先需要证明定理 4.6 的代数类比。这可以通过在定理 4.4 的证明中将引理 4.6 替换为其代数类比来完成；这一结果在坦纳范畴理论中广为人知。定理 4.6 的代数类比等价于以下情形：k 是代数闭的，且 $H = K$ 是 [O'S19 定理 12.5(ii)] 中的极小约化判据。定理 3.3 可以从中推出，方式与从定理 4.6 推出定理 4.7 的方式相同。

定理 3.3. 设 X 是一个 k-概形，并设 G_0 和 G 是具有 G_0 约化性的仿射代数 k-群。设 P_0 是 X 上的一个极小主 G_0-丛，且 h_1 和 h_2 是从 G_0 到 G 的 k-同态。假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个剩余域为 k 的亨泽尔局部 k- 代数。那么，P_0 沿 h_1 和 h_2 的推前同构，当且仅当 h_1 和 h_2 共轭。

证明。“若”部分在上文已经证明，且不需要对 G_0 或 X 作任何条件限制。

反过来，假设沿 h_1 和 h_2 对 P_0 的推前同构。那么，对于某个覆盖 X 的主 G-丛 P，存在 l_1, $l_2 : P_0 \longrightarrow P$，使得 (h_1, l_1) 和 (h_2, l_2) 是从 (G_0, P_0) 到 (G, P) 的态射。根据 [O'S19，推论 12.11(i)], $\mathrm{Iso}_{h_2}(l_2)$ 是 $\mathrm{Iso}_{h_1}(l_1)$ 在从 $\mathrm{Iso}_{G_0}(P_0)$ 到 $\mathrm{Iso}_G(P)$ 的截面 v $\mathrm{Iso}_G(P)^{\mathrm{diag}}$ 下的共轭。于是

$$\mathrm{Iso}_{h_2}(l_2) = \mathrm{Iso}_{1_G}(v) \circ \mathrm{Iso}_{h_1}(l_1) = \mathrm{Iso}_{h_1}(v \circ l_1).$$

因此，$(h_1, v \circ l_1)$ 和 (h_2, l_2) 共轭，进而 h_1 和 h_2 也共轭。 □

设 G 是一个有限 k-群。那么， X 上的任意主 G-丛 P 都是有限 ´étale 的，而 P 的任意主子丛都是 P的开闭子概形。

设 G 有限且 X 连通。那么， P 是至多 d 个连通分支的不交并，其中 d 是 G的阶。 P 的任意连通分支 P_0 都是 P的一个主 G_0-子丛，其中 G_0 是 G 中在 P上的右作用下将 P_0 映入自身的那些点组成的子群。由此可知， P 是极小的，当且仅当它是连通的。此外，若 G_i 是 G的子群，且对于 $i = 0$， P_i 是 P 的主 G_i-子丛，1，且 $P_0 \subset P$ 是极小的，则存在一个元素$g \in G(k)$，使得 G_1 包含 gG_0g^{-1} ，且 P_1 包含 P_0g^{-1}。

推论3.4 下文表明，对于任意仿射代数 k-群G，只要要求 k-子群 G_i 为约化群，对X施加更严格的条件，并且只要求在同构意义下共轭，也有类似的共轭结论。推论 $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ 3.4 中3.4 的情形是 Bogomolov 的一项结果 [Bog94，第 401 页，定理 2。1]。

推论 3.4. 设 X 是一个 k-概形， G 是一个仿射代数 k-群，且 P 是 X 上的一个主 G-丛。对于 $i = 0$, 令 1，设 G_i 是 G 的一个约化 k-子群，且 P_i 是 P 的一个主 G_i-子丛，并满足P_0 极小。假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个剩余域为 k 的亨泽尔局部 k-代数。那么存在一个元素 $g \in G(k)$，使得 G_1 包含 gG_0g^{-1} ，且 P_1 包含一个与 P_0g^{-1} 同构的主 gG_0g^{-1}-子丛。

证明。设 G' 是 $G_0 \times_k G_1$ 的约化 k-子群，且 $P_0 \times_X P_1$ 有一个极小的主G'-子丛 P'。对于 $i = 0$，1，记 h_i: $G' \longrightarrow G_i$ 为投影 $G_0 \times_k G_1 \longrightarrow G_i$到 G' 的限制。于是 P_i 是 P' 沿 h_i 的推前。由于 P_0 是极小的， h_0 是满射。

若 e_i： $G_i \longrightarrow G$ 是嵌入，则 P是 P' 沿 $e_i \circ h_i$ 的推前，其中 $i = 0$，1。根据定理 3.3，$e_1 \circ h_1$ 因此是 $e_0 \circ h_0$ 经某个 $g \in G(k)$ 共轭所得。于是 G_1 包含 gG_0g^{-1}，并且h_1 分解为

$$G' \xrightarrow{h_0} G_0 \longrightarrow gG_0g^{-1} \longrightarrow G_1.$$

由此可知， P_1 是 P_0g^{-1} 沿着将 gG_0g^{-1} 嵌入 G_1 的映射所得的推前。因此， g 具有所需的性质。□

设 P 是 X 上的一个主 G-丛。我们有 G 在 P 上的作用，其中对于 G 中的点 g 和 P 中的点 p，有 $gp = pg^{-1}$。若 G 的一个表示为 V，则在 X 上作 étale 局部论证可知，存在一对由一个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{V}$ 以及一个 G-等变同构组成，该同构从 V 拉回到 P，并映至 $\mathcal{V}$ 拉回到 P；此对象在唯一同构意义下唯一。我们将此 $\mathcal{V}$ 记作

$$P \times_k^G V.$$

这是通常与 V 相关联的 $\mathcal{O}_X$-模，其构造是将 $P \times_k V$ 中的点 (pg, v) 与 (p, gv) 等同。若 V 是维数为 n 的有限维对象，则 $P \times_k^G V$ 是 X 上处处秩为 n 的向量丛。 $P \times_k^G V$ 的构造关于 P、 G 和 V 具有函子性，并且与拉回相容。类似地，我们定义

$$P \times_k^G Z$$

对于 Z，这是一个仿射 G-概形。例如，若 G' 是 G 的一个约化 k-子群，则 P/G' 可通过取 $Z = G/G'$ 得到；而 $\mathrm{Aut}_G(P)$ 则通过取 $Z = G_{\mathrm{conj}}$ 得到，其中 k-群 G 由 G 通过共轭作用作用。

对每个秩为 n 的 X 上的向量丛 $\mathcal{V}$，都关联着一个主 GL_n 丛

$$\underline{\mathrm{Iso}}_X(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{V})$$

X 上由秩为 n 的常值向量丛 $\mathcal{O}_X^n$ 到 $\mathcal{V}$ 的同构所构成的丛。于是我们得到一个函子 $\mathrm{Iso}_X(\mathcal{O}_X^n, -)$，它将 X 上秩为 n 的向量丛及其间的同构映到 X 上的主 GL_n 丛。这是一个等价，其拟逆为

$$- \times_k^{\mathrm{GL}_n} k^n,$$

其中， k^n 是 GL_n 的标准 n 维表示。通过取由那些保持 $\mathcal{O}_X^n$ 的标准直和分解 $\mathcal{O}_X^r \oplus \mathcal{O}_X^s$ 与给定的直和

分解 $\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$ 相容的同构所构成的子丛，其中 $\mathcal{V}'$ 的秩为 r， $\mathcal{V}''$ 的秩为 s，我们得到一个双射：从 $\mathcal{V}$ 的这类分解到 $\mathrm{Iso}_X(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{V})$ 的结构群从 GL_n 约化到 $\mathrm{GL}_r \times_k \mathrm{GL}_s$。

设 P 是 X 上的主 G 丛。若 V 是 G 的有限维表示，并且 P' 是将 P 沿与 V 对应的 k-同态 $G \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ 推前所得的向量丛（选取其一组基后），则有一个同构

$$P \times_k^G V \xrightarrow{\sim} P' \times_k^{\mathrm{GL}_n} k^n.$$

因此， $P \times_k^G V_1$ 与 $P \times_k^G V_2$ 同构，当且仅当将 P 沿分别与 V_1 和 V_2 对应的 k-同态 $G \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ 推前所得的向量丛同构。

推论 3.5. 设 X 是一个 k-概形， G 是一个约化代数 k-群，且 P 是 X 上的极小主 G 丛。假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个亨泽尔局部 k-代数，其剩余域为 k。则以下两条成立：

(1) 对于 G 的任意有限维表示 V， X 上的向量丛 $P \times_k^G V$ 不可分解，当且仅当 V 不可约。(2) 对于 G 的任意两个有限维表示 V_1 和 V_2， X 上的向量丛 $P \times_k^G V_1$ 和 $P \times_k^G V_2$ 同构，当且仅当 V_1 和 V_2 同构。

证明。（1）若 V 由 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}_n$定义，则对 G、 G_0 和 G_1 分别应用推论 3.4，其中取 GL_n、 $\rho(G)$ 和 $\mathrm{GL}_r \times_k \mathrm{GL}_s$ 。此外，分别用 P 沿 ρ 和 $G \longrightarrow \rho(G)$ 的推前替换 P 和 P_0，并用 P 到 $\mathrm{GL}_r \times_k \mathrm{GL}_s$ 的约化替换 P_1。于是推论 3.4 可证得（1）。

(2) 对 3.3 应用定理，将 P 沿 k-同态 $G \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ 所定义的表示 V_i 的推前。 □

设 X 是一个 k-概形， G 是一个仿射代数 k-群， P 是 X 上的一个主 G-丛，且它具有一个结构群为约化群的主子丛。那么存在 G 的一个约化 k-子群 G_0 ，使得 P 具有一个极小主 G_0-子丛 P_0。设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个亨泽尔局部k-代数，其剩余域为 k。那么对 G 的每个约化 k-子群 G_1， P 的主 G_1-子丛的同构类集合可如下描述。记 $T_G(G_0, G_1)$ 为 G 中从 G_0 到 G_1 的输运子。那么

$$T_G(G_0, G_1)^{-1}$$

是 G 的闭子概形，由满足 $t^{-1}G_0 t$ 包含于 G_1 的那些点 t 组成。中心化子 $Z_G(G_0)$ 在 G 中的 G_0 对 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 通过复合给出一个作用：左侧为 G_1 ，右侧为 k。对于每个 k-点 $t \in T_G(G_0, G_1)^{-1}$，我们有一个主 G_1-子丛

$$P_0 t G_1$$

它是 G 的子丛，由 $P_0 t \times_k G_1$ 在 P 上的右作用 $P \times_k G \longrightarrow P$（来自 G）的像给出。它是包含主 $t^{-1}G_0 t$–子丛 $P_0 t$ 的唯一主 G_1-子丛，并且是 P_0 沿着将 g_0 映到 $t^{-1}g_0 t$ 的 k-同态 $G_0 \longrightarrow G_1$ 的推前。我们有

$$P_0 t G_1 \;=\; P_0 t' G_1$$

对于 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 的 k-点 t 和 t'，当且仅当

$$t' = t g_1$$

对于某个 k-点 g_1 的 G_1。根据定理3.3， $P_0 t G_1$ 和 $P_0 t' G_1$ 同构，当且仅当将 k-ho- 态射 $G_0 \longrightarrow G_1$ 映至 g_0 和 $t^{-1}g_0 t$ ，并映至 $t'^{-1}g_0 t'$ 的态射彼此共轭；因此，当且仅当

$$t' = z t g_1$$

其中 g_1 k-点属于 G_1 ，而 k-点属于 G 中 G_0 的中心化子 $Z_G(G_0)$。根据推论 3.4， P 的每个主 G_1-子丛都同构于某个 k-点 t 对应的 $P_0 t G_1\,(G_0, G_1)^{-1}$。因此， P 的主 G_1-子丛的同构类由以下集合参数化

$$Z_G(G_0)(k) \backslash T_G(G_0, G_1)^{-1}(k) / G_1(k), \tag{3.3}$$

对应于 t 中 $T_G(G_0,\ G_1)^{-1}(k$对应于 P_0tG_1 的同构类。集合（3.3）仅取决于 G、 G_0 和 G_1。

由于 G_0 是约化的， k 从 G_0 到 G_1 的同态所构成的 k-概形 $\mathrm{Hom}_k(G_0, G_1)$ 存在 [O'S10, Proposition 1.3.3(i)], ，并且是不交并，由若干开仿射子概形组成；这些子概形在 G_1 [O'S10, Proposition 1.3.3(ii)] 的共轭作用下是齐性的。从 k-概形 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 到 $\mathrm{Hom}_k(G_0, G_1)$ 的态射将 t 映到 $g_0 \longmapsto t^{-1}g_0t$ ，且与 $Z_G(G_0)$ 和 G_1 的作用相容，其中 ~~$Z_G(G_0)$~~ 在 $\mathrm{Hom}_k(G_0, G_1)$ 上的作用是平凡的。因此，它诱导出一个嵌入

$$Z_G(G_0)(k)\backslash T_G(G_0, G_1)^{-1}(k)/G_1(k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(G_0, G_1)/G_1(k)$$

映射（3.3）到模共轭的 k-同态集合中，其像为那些 $G_0 \longrightarrow G_1$与嵌入 $G_1 \longrightarrow G$ 复合后共轭于嵌入 $G_0 \longrightarrow G$的等价类。由此可知， T_G（G_0， G_1）$^{-1}$是有限不交并，由若干开 k-子概形组成，且在 Z_G（G_0）$\times_k G_1{}^{\mathrm{op}}$作用下稳定，并且该作用在其 k-点（Z_G（G_0）$\times_k G_1{}^{\mathrm{op}}$）（$k$）上是传递的。特别地，集合（3.3）是有限的。

由一般平坦性， $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 在 $\mathrm{Hom}_k(G_0, G_1)$ 上平坦，因此也在其上光滑，因为任何 k-点上的纤维都同构于 $Z_G(G_0)$。因此， $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 在 k 上光滑，进而是约化的。由此可知， $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 是有限个开齐性（$Z_G(G_0) \times_k G_1{}^{\mathrm{op}}$）子概形的不交并。具体而言，若 t 是 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$的一个 k-点，则从 $Z_G(G_0) \times_k tG_1$ 到 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 的复合态射诱导出一个同构；该同构与 $Z_G(G_0)$ 和 G_1的作用相容，并且

$$Z_G(G_0) \times_k^{Z_{tG_1t^{-1}}(G_0)} tG_1 \tag{3.4}$$

映到包含 t 的开齐性子概形。

设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是 k-概形之间的一个态射，且 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$也是一个亨泽尔局部 k-代数，其剩余域为 k。对于某个约化 k-子群 G'_0， G 存在一个极小主 G'_0-子丛P'_0，它是 f^*P_0的子丛。若 f^*P的主 G_1-子丛的同构类也按与上述类似的方式参数化，只需将 G_0 和 P_0 分别替换为 G'_0 和 P'_0，那么映射

$$Z_G(G_0)(k)\backslash T_G(G_0, G_1)^{-1}(k)/G_1(k) \longrightarrow Z_G(G'_0)(k)\backslash T_G(G'_0, G_1)^{-1}(k)/G_1(k) \tag{3.5}$$

由 $T_G(G_0, G_1)^{-1}$ 到 $T_G(G'_0, G_1)^{-1}$ 的嵌入所定义的映射，对应于沿 f拉回同构类。特别地，若 f^*P_0 是极小的，则 $G'_0 = G_0$ 且（3.5）是双射，因此对于 G的每个约化 k-子群 G_1 ，沿 f 拉回定义了一个双射，将 P的主G_1-子丛的同构类映到 f^*P的主 G_1-子丛的同构类。

设 X 是一个非空连通适当的 k-概形。那么 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$是一个有限局部 k-代数。尽管下文不会用到，但可以显式描述给定主丛 P 在 X上的、具有约化结构群的主子丛集合，以及该集合到此类子丛同构类集合的纤维化，并说明纤维对 X 和 P的依赖关系。这需要规范群的半直积分解，我们先简要回顾一下。若 G 是一个仿射代数的 k-群，且 P 是一个主 G-丛，那么对任意仿射 G-概形 Z ，由 $P \times_k^G Z$ 在 X上的截面构成的 k-概形$\underline{H}^0(X, P \times_k^G Z)$，即 $P \times_k^G Z$ 从 X 到 k的 Weil 限制，存在且是有限型仿射概形[（O'S19，命题 14.2]）。特别地，若 G' 是一个仿射代数的k-群，且 G 通过群自同构作用于其上，那么

$$\underline{H}^0(X, P \times_k^G G')$$

是一个仿射代数的 k群，其李代数为 $H^0(X,\ P \times_k^G \mathfrak{g}')$，其中 $\mathfrak{g}'$ 是 G'的李代数。它包含一个 k子群，即 k子群 G'^G ，它由 G' 在 G下的不变量构成。设 G 是约化的，且 P是极小的。那么根据[O'S19，定理 14，5] 我们有一个半直积分解

$$\underline{H}^0(X, P \times_k^G G') = U_G(P, \mathfrak{g}') \rtimes_k G'^G \tag{3.6}$$

其中[O'S19，引理 14。4] $U_G(P,\ \mathfrak{g}')$ 是 k的正规幺幂 $\underline{H}^0(X,\ P \times_k^G G')$ 子群，特征如下：它是唯一的连通 k子群，其李代数为理想

$$^{\mathrm{rad}}H^0(X, P \times_k^G \mathfrak{g}')$$

$H^0(X, P \times_k^G \mathfrak{g}')$的，其中对于任意 $\mathcal{O}_X$-模， $\mathcal{V}$ 表示配对右侧的核$_{\mathrm{rad}}H^0(X, \mathcal{V})$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_X) \otimes_k H^0(X, \mathcal{V}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow k,$$

其中，第一个箭头由求值定义，第二个箭头是到剩余域的投影。进一步，$_{\mathrm{rad}}H^0(X,\mathcal{V})$ 关于 $\mathcal{V}$ 具有函子性，因此 $U_G(P,\mathfrak{g}')$ 关于 G' 也具有函子性。如果 G' 也是约化的，那么 G'^G 是约化的，并且 $U_G(P,\mathfrak{g}')$ 是 $\underline{H}^0(X,P\times_k^G G')$ 的幺幂根基。

现在设 G 是一个仿射代数的 k-群，P 是 X 上的一个主 G-丛，而 G_1 是 G 的一个约化 k-子群。那么 G/G_1 是一个有限型仿射 G-概形，并且 k-概形

$$S_{G_1}(P)=\underline{H}^0(X,P/G_1)=\underline{H}^0(X,P\times_k^G(G/G_1))$$

的主 G_1-子丛所构成的概形存在，且为有限型仿射概形。k-群

$$A_G(P)=\underline{H}^0(X,\underline{\mathrm{Aut}}_G(P))=\underline{H}^0(X,P\times_k^G G_{\mathrm{conj}})$$

的 P 的 G-自同构所构成的概形也存在，且为有限型仿射概形，其中 $A_G(P)$ 在 $S_{G_1}(P)$ 上的作用由 G_{conj} 在 G/G_1 上的作用给出。假设 $S_{G_1}(P)$ 非空。那么 $S_{G_1}(P)$ 有一个 k-点。令 s 为这样一个 k-点，它对应于 P 的主 G_1-子丛 P_1。s 在 $A_G(P)$ 作用下的稳定子是 $A_G(P)$ 的 k-子群 $A_{G_1}(P_1)$。因此我们有一个浸入

$$A_G(P)/A_{G_1}(P_1)\longrightarrow S_{G_1}(P) \tag{3.7}$$

的 $A_G(P)$-概形，它将基底 k-点 $A_G(P)/A_{G_1}(P_1)$ 映到 s。若 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_1$ 分别是 G 和 G_1的李代数，则（3.7）在基底 k-点和 s 处的切空间上诱导出 k-线性映射

$$H^0(X,P_1\times_k^{G_1}\mathfrak{g})/H^0(X,P_1\times_k^{G_1}\mathfrak{g}_1)\longrightarrow H^0(X,P_1\times_k^{G_1}\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1).$$

由于 G_1 是约化的，从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 的投影是 G_1表示范畴中的一个截面。因此（3.7）在基底 k-点处的切空间上诱导出同构，进而在每个 k-点处也诱导出同构。这说明浸入（3.7）是开浸入。因此，$S_{G_1}(P)$ 是 $A_G(P)$ 作用下有限个开轨道的不交并。

设 G_0 是 k的一个约化子群，且 G 具有一个极小的主 P-子丛 G_0。那么 P_0中 $S_{G_1}(P)$ 在 $A_G(P)$ 作用下的轨道由有限集（3.3）参数化；位于 k-点 t 在 $T_G(G_0,G_1)^{-1}$ 的类上方的轨道，包含对应于 k的 P_0tG_1-点。我们有一个半直积直和分解

$$A_G(P)=\underline{H}^0(X,P_0\times_k^{G_0}G_{\mathrm{conj}})=U_{G_0}(P_0,\mathfrak{g})\rtimes_k Z_G(G_0)$$

形如（3.6）。的稳定子是 k 的点，属于 $S_{G_1}(P)$，且该点对应于 P_0tG_1 是 k 子群

$$A_{G_1}(P_0tG_1)=\underline{H}^0(X,P_0\times_k^{G_0}tG_{1\mathrm{conj}}t^{-1})=U_{G_0}(P_0,t\mathfrak{g}_1t^{-1})\rtimes_k Z_{tG_1t^{-1}}(G_0),$$

$A_G(P)$ 的，其中嵌入保持半直积直和分解。此外，$U_{G_0}(P_0,t\mathfrak{g}_1t^{-1})$ 是 $A_{G_1}(P_0tG_1)$ 的幺幂根基，因为 tG_1t^{-1} 是约化的。由 $T_G(G_0,G_1)^{-1}$ 的开轨道的结构（3.4），$Z_G(G_0)$-概形 $T_G(G_0,G_1)^{-1}/G_1$ 是开齐性 $Z_G(G_0)$-子概形的不交并，由（3.3）参数化；其中 k 点的稳定子 $\bar{t}$ 对应于 tG_1 的 k-子群 $Z_{tG_1t^{-1}}(G_0)$，它是 $Z_G(G_0)$ 的子群。由此可知，存在唯一的态射

$$T_G(G_0,G_1)^{-1}/G_1\xrightarrow{i}S_{G_1}(P)\xrightarrow{r}T_G(G_0,G_1)^{-1}/G_1$$

k-概形，其上 $r\circ i$ 是单位，并且保持由（3.3）给出的参数化，使得 i 与将 $Z_G(G_0)$ 嵌入 $A_G(P)$ 相结合，以及 r 与从 $A_G(P)$ 到 $Z_G(G_0)$ 的投影相结合时，分别与 $Z_G(G_0)$ 和 $A_G(P)$ 的作用相容；并且 i 将 $\bar{t}$ 送到对应于 P_0tG_1 的 k 点。r 在 $\bar{t}$ 上方的纤维，作为 $U_{G_0}(P_0,\mathfrak{g})$-概形同构于

$$U_{G_0}(P_0,\mathfrak{g})/U_{G_0}(P_0,t\mathfrak{g}_1t^{-1}),$$

且 $U_{G_0}(P_0,t\mathfrak{g}_1t^{-1})$ 是光滑群概形在$\bar{t}$ 处的纤维，定义在 $T_G(G_0,G_1)^{-1}/G_1$ 上，其限制

$$Z_G(G_0)\times_k^{Z_{tG_1t^{-1}}(G_0)}U_{G_0}(P_0,t\mathfrak{g}_1t^{-1})$$

在齐性分支 $Z_G(G_0)/Z_{tG_1t^{-1}}(G_0)$之上。

命题3.6 是以下结果的一个特例：[O'S19，推论 10。14] 其中 k 是代数闭的，$H=X$，且 G 是有限型的。其证明几乎与下文解析类比命题4.10 的证明完全相同。

命题 3.6. 设 X 是一个 k-概形，G 是一个仿射代数的 k-群，且 P 是 X 上的一个主 G-丛。那么，当且仅当函子 $P\times_k^G -$ 在 G 的有限维表示上分裂每个短正合列时，P 存在一个主 G_0-子丛，其结构群为某个约化 k-子群 G_0（它是 G 的子群）。

设 X 是一个概形，且对于每个 $x\in X$，$\mathcal{O}_{X,\,x}$ 都是整环。那么 X 的不可约分支彼此不相交。如果 X 还是局部诺特的，那么它的不可约分支集合是局部有限的，因此这些不可约分支在 X 中是开集，并且 X 是它们的不交并。

定理 3.7. 设 $f\colon X'\longrightarrow X$ 是 k-概形之间的一个态射，G 是一个仿射代数 k-群，且 P 是 X 上的一个主 G-丛。假设以下两个条件之一成立：

(a) $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是一个处处非零的有限型局部自由 $\mathcal{O}_X$-模；(b) X 是局部诺特且正规的，并且 f 是适当且满射的。

那么 P 有一个主 G_0-子丛，其结构群为 G 的某个约化 k-子群 G_0，当且仅当 f^*P doe $s.$

证明。“仅当”部分显然，即使不假设 (a) 或 (b)。为证明“如果”部分，先假设 (a) 成立。由于 $P\times^G -$ 的构造与拉回相容，根据命题 3.6，只需证明一个向量丛的短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{V}'\longrightarrow\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}''\longrightarrow 0,$$

由 P 的一个表示短正合列所关联，其中 G，若其拉回到 X' 后分裂，则该短正合列也分裂。由引理 2.7取 $\mathcal{W}=\mathcal{V}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{V}''^{\vee}$即可得出这一结论，因为分裂障碍属于 $H^1(X,\,\mathcal{V}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{V}''^{\vee})$。

现在假设 (b) 成立。则 X 是其不可约分支 X_α 的不交并 $\coprod_\alpha X_\alpha$。设 X'_α 是 X' 的一个约化不可约闭子概形，其泛点是 X_α 的泛点上方的 X' 中的一个点。为证明“如果”部分，在将 X' 替换为 $\coprod_\alpha X'_\alpha$ 后，可以假设对每个 α，$f^{-1}(X_\alpha)$ 都是约化且不可约的。将引理 2.2 应用于 X_α，则 (a) 对将 f 替换为其限制 q 后的情形成立：在 X 的某个开子概形 U 上方的 $U'\longrightarrow U$，其补集处处具有至少二的余维。根据引理 2.5，将 f 替换为包含映射 j 后，(a) 也成立：$U\hookrightarrow X$。根据假设，f^*P 因而 $(j\circ q)^*P$ 具有一个结构群为约化群的主子丛；于是，将 q 和 j 代入 f，应用 (a) 的结论，即得 (b) 所需的结果。□

设 $f\colon X'\longrightarrow X$ 是一个 k-概形的态射，且定理 3.7 的 (a) 或 (b) 条件之一成立。假设 X 非空且连通。那么 X 有一个非空的连通开子概形 U，使得 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 在 U 上的限制是有限型局部自由的，并且任意连通有限 ´etale 覆盖 X_1 在 U 上方的限制都是连通的：若 (a) 成立，我们可以取 $U=X$；若 (b) 成立，根据引理 2.2，我们可以将 X 中任意充分小的非空开子概形取作 U，因为任意 X_1 都是局部诺特且正规，因而不可约。若 X_1 是 X 的一个非空连通有限 ´etale 覆盖，且其拉回到 X' 上有一个截面，那么 f 在 U 上方的限制会经由 X_1 在 U 上方的限制 U_1 分解；因此，若 $U_1=\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$，则 $f_*\mathcal{O}_{X'}|U$ 具有 $\mathcal{R}$-模结构。于是，$f_*\mathcal{O}_{X'}|U$ 是沿 $U_1\to U$ 推前一个拟相干 $\mathcal{O}_{U_1}$-模 $\mathcal{V}$ 所得，且该模必为常秩局部自由模。于是，$f_*\mathcal{O}_{X'}|U$ 的秩 r 等于 X_1 在 X 上的次数与 $\mathcal{V}$ 的秩之积。假设 X' 也非空且连通。那么，若 x' 是 X' 的一个几何点，且 $f(x')=x$，则连续同态

$$\pi_1(X',\,x')\to\pi_1(X,\,x) \tag{3.8}$$

由 f 诱导的有限群基本群态射的像包含于 $\pi_1(X,\,x)$ 中，且指数有限并整除 r。由此可知，f 本质上唯一地分解为一个 k-态射 $X'\longrightarrow X_1$，其中 X_1 连通且诱导基本群上的满射，后接一个有限 ´étale k-态射 $X_1\longrightarrow X$。当定理 3.7 的 (b) 对 f成立时，将 f 替换为 $X'\longrightarrow X_1$后仍成立；并且，至少当 f 拟紧且拟分离时，定理 3.7 的 (a) 对 f成立的情形也类似。

引理 3.8. 设 G 是一个约化代数的 k-群，且 $G'\subset G$ 是一个约化的 k-子群。那么以下条件等价：

(a) G' 包含 G的单位连通分支；

(b) 只有有限个两两不同构的不可约表示 V 属于 G，且满足$V^{G'} \neq 0$。

证明。群 G 通过左平移与右平移作用于其坐标 k-代数 $k[G]$。条件 (a) 和(b) 均等价于右平移作用下不变量 k-代数 $k[G]^{G'}$ 有限：对于 (a)，因为 G/G' 是仿射概形，其坐标代数为 $k[G]^{G'}$；对于 (b)，则由 $k[G]$ 作为（G，G）-双模的典范分解可得。□

设 G 是一个约化代数 k-群，且 P 是 k-概形 X 上的主 G-丛。若对于 G 的某个约化 k-子群 G'，P 存在一个主 G'-子丛，则 G' 必须包含 G 的单位连通分支；满足此条件的 P 称为几乎极小。沿满射 k-同态，将 X 上几乎极小的主 G-丛推前，所得主丛仍然几乎极小。

引理 3.9. 设 X 是一个连通的 k 概形，G 是一个约化代数 k 群，且 $G_0 \subset G$ 是一个包含 G 的单位连通分支的 k 子群。设 P 是 X 上的一个主 G 丛，P_0 是 P 的一个主 G_0 子丛。那么，P 几乎极小，当且仅当 P_0 如此。

证明. “仅当”部分显然。反过来，假设 P_0 几乎极小。设 G_1 是 G 的一个约化k 子群，且 P_1 是 P 的一个主 G_1 子丛。我们要证明 G_1 包含 G 的单位连通分支 G^0。对于 $i = 0$，1 记 $\overline{G}_i$ 为 G_i 在有限 k 群 $\overline{G} = G/G^0$ 中的像。沿商映射 $G_i \longrightarrow \overline{G}_i$ 对 P_i 作推前，所得 $\overline{P}_i$ 是沿商映射 $G \longrightarrow \overline{G}$ 对 P 作推前所得 $\overline{P}$ 的一个主 $\overline{G}_i$ 子丛。此外，P_0 是在投影 $P \longrightarrow \overline{P}$ 下 $\overline{P}_0$ 的原像。

将 P_0 替换为 $\overline{P}_0$的一个极小主子丛在 P 中的原像后，我们可以假设 $\overline{P}_0$ 是极小的。对于适当的 $g \in G(k)$，分别用 gG_0g^{-1} 和 P_0g^{-1} 替换 G_0 和 P_0 后，我们还可以按照定理 3.3 后面的两个段落中的做法，假设 $\overline{G}_1$ 包含 $\overline{G}_0$ 且 $\overline{P}_1$包含 $\overline{P}_0$。于是，$\overline{P}_0$ 在光滑满射态射 $P_1 \longrightarrow \overline{P}_1$ 下的原像 $P_0 \cap P_1$ 是 P_0的一个主（$G_0 \cap G_1$）子丛。由于 P_0 几乎极小，$G_0 \cap G_1$，因此 G_1 包含 G^0，如所需。□

若 X 是一个 k-概形，且 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是亨泽尔局部 k-代数，则由 [O'S19，11.2(ii)]„ 取 $\mathcal{C}$ 为向量丛的张量范畴 Mod(X)，可知 Mod(X) 具有 Krull–Schmidt 性质，也就是说，Mod(X) 中对象的同构类在直和运算下构成的交换幺半群是自由的。X

定理 (a) 成立的情形3.7与下文定理 3.10 中的以下情形等价： [O'S19，15。5]其中 k 是代数闭的，$H = X$，且 K 是有限型；定理 3.10在此情形下的证明基本相同。

定理 3.10. 设 f： $X' \longrightarrow X$ 是一个 k-概形的态射，G 是约化代数 k-群，且 P是一个 G-主丛，底空间为 X。假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个亨泽尔局部 k-代数，其剩余域为 k。假设定理 *(a)* 或*(b)* 中的条件*3.7* 之一成立。那么，P 是几乎极小的，当且仅当 f^*P 也是如此。

证明。“若”部分显然成立，即使对 X 或 f 不加任何条件也是如此。

为证明逆向结论，设 P 是几乎极小的。先考虑定理 3.7 的 (a) 成立的情形。由于 X 连通，$f_*\mathcal{O}_{X'}$ 秩为常数 n，因此 X' 是至多由 n 个连通分支组成的不交并。将 X' 替换为这样的一个分支后，我们可以假设 X' 连通。若 k^n 是 $\mathbf{GL}_n$ 的标准 n 维表示，则存在一个定义在 X 上的主 $\mathbf{GL}_n$-丛 P_0，使得 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 同构于 $P_0 \times_k^{\mathrm{GL}_n} k^n$。设 G_1 是 $G \times_k \mathbf{GL}_n$ 的一个约化 k-子群，使得 $P \times_X P_0$ 有一个极小的主 G_1-子丛 P_1。那么，P 和 P_0 分别是 P_1 沿投影 $G_1 \longrightarrow G$ 和 $G_1 \longrightarrow \mathbf{GL}_n$ 的推前。因此，G_1 在 G 中的像包含 G 的单位连通分支，故由引理 3.9 f^*P，若 f^*P_1 是几乎极小的，则 f^*P_1 也是如此。此外，若将 k^n 视为 G_1的一个表示，则 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 同构于 $P_1 \times_k^{G_1} k^n$。因此，分别用 G_1 和 P_1 替换 G 和 P 后，我们可以假设 P 是极小的，并且存在一个同构

$$f_*\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{\sim} P \times_k^G W$$

W 的某个有限维表示 G。

设 G' 是 G 的一个约化 k 子群，且 f^*P 有一个主 G' 子丛 P'。那么，对于 G 的任意表示 V，我们有一个同构

$$f^*(P \times_k^G V) = (f^*P) \times_k^G V \xrightarrow{\sim} P' \times_k^{G'} V.$$

假设 V 不可约且 $V^{G'} \neq 0$。于是，作为 G' 的一个表示， V 有平凡直和项 k，因此 $f^*(P \times_k^G V)$ 有直和项 $\mathcal{O}_{X'}$。应用 f_* 可知， $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是

$$f_*f^*(P \times_k^G V) = (P \times_k^G V) \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{\sim} (P \times_k^G V) \otimes_{\mathcal{O}_X} (P \times_k^G W),$$

因此 $P \times_k^G W$ 是 $P \times_k^G (V \otimes_k W$ 的一个直和项。根据 X 上向量丛的 Krull–Schmidt 性质以及推论 3.5, W 因此是 $V \otimes_k W$ 的一个直和项。由于 V 不可约且 $W \neq 0$, 由此可得 V 是 $W \otimes_k W^\vee$ 的一个直和项。这表明引理 (b) 成立，因而 (a) 也成立。于是 f^*P 几乎极小。

现在考虑 (b) 满足定理 3.7 的情形。将 X' 替换为某个不可约分支的既约子概形后，我们可以假设 X' 既约且不可约。设 U 是 X 的一个开子概形，如引理 2.2所述。那么

$$H^0(U, \mathcal{O}_U) = H^0(X, \mathcal{O}_X)$$

由引理 2.5。由引理 2.5 以及将定理 (a) 的情形 3.7 应用于包含映射$U \hookrightarrow X$和上文 U的 f拉回后，我们得出， f^*P在 $f^{-1}(U)$ 上的限制几乎极小。因此， f^*P 几乎极小。□

若 X 和 X' 是非空连通的 k-概形，且 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是一个满足以下条件之一的态射： (a)或 (b) 满足定理3.7 ，则已知由 3.8式诱导的同态 f 在基本群上"几乎满射"。定理 3.11中关于连通有限 ´ étale 覆盖的拉回的条件，等价于 3.8式的满射性。

定理 3.11. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是 k-概形之间的态射。假设 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部 k- 代数。进一步假设，对于 X 的每个连通有限 ´étale 覆盖 Z， f^*Z 都是连通的，并且定理 3.7 的 (a) 或 (b) 成立。则对于任意仿射代数 k-群 G、 G 的约化 k-子群 G_1 以及 X 上的主 G-丛 P，沿 f 的拉回给出一个双射，将 P 的主 G_1-子丛的同构类集合映到 f^*P 的主 G_1-子丛的同构类集合。

证明。 如果 P 没有任何主 G_0-子丛，其中 k 是 G_0 的约化 G-子群，那么根据定理 3.7， f^*P 也没有，因此所讨论的同构类集合均为空。于是我们可以假设 P 有一个主 G_0-子丛 P_0，其中 k 是 G_0 的约化 G-子群。必要时将 G_0 替换为约化 k-子群后，我们还可以假设 P_0 是极小的。由上可知，只需证明 f^*P_0 是极小的。

设 G'_0 是 G_0 的一个约化 k-子群，且 f^*P_0 具有一个主 G'_0-子丛 P'_0。那么概形

$$f^*(P_0/G'_0) = (f^*P_0)/G'_0$$

在 X' 上有一个截面。由于根据定理 3.10， f^*P_0 几乎极小，我们知道 G'_0 包含 G_0 的单位连通分支。因此， P_0/G'_0 是 X 的一个 ´étale 覆盖。根据关于 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 的假设， X 是连通的；又由于沿 f 的拉回在 ´étale 覆盖的连通分支上诱导一个双射，故 P_0/G'_0 在 X 上有一个截面，从而 P_0 具有一个主 G'_0-子丛。因此，由 P_0 的极小性可得 $G'_0 = G_0$。这表明 f^*P_0 是极小的。□

以下例子表明，定理 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 以及 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 中类似的条件是必要的。3.11。

令 X 为仿射直线，令 $f\colon X' \longrightarrow X$ 为 X 的一个有限覆盖，使得 X' 的亏格为正。于是， X' 上存在一个非平凡线丛，因而 X' 上秩为二的平凡向量丛可以分解为两个线丛的直和，且该分解非平凡；而在 X 上不存在这样的分解。因此，若 $G = \mathrm{GL}_2$， $G_1 = \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m$，且 P 是 X 上的平凡主 G-丛，

那么 f^*P 有一个非平凡的主 G_1-子丛，因此它不同构于 P 上某个主 G_1-子丛的拉回。

推论 3.12. 设 $f: X' \longrightarrow X$ 是 k-概形之间的一个态射，且定理*3.11* 的假设均成立。

(1) 对任意约化代数的 k-群 G， X 上的两个主 G丛 P_1 和 P_2 同构，当且仅当 f^*P_1 和 f^*P_2 同构。(2) X 上的向量丛 $\mathcal{V}$ 不可分解，当且仅当 $f^*\mathcal{V}$ 不可分解。(3) X 上的两个向量丛 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 同构，当且仅当 $f^*\mathcal{V}_1$ 和 $f^*\mathcal{V}_2$ 同构。

证明。 (1) P_1 和 P_2 同构，当且仅当主（$G \times_k G$）丛 $P_1 \times_k P_2$ 在 X 上有一个主 G子丛，其中 G 沿对角线嵌入 $G \times_k G$中。因此，只需对 3.11中的 $G \times_k G$ 取 G，并对 G 取 G_1，应用定理即可。

(2) 若 $\mathcal{V}$的秩为 n，则对 $G = \mathrm{GL}_n$ 和 $G_1 = \mathrm{GL}_r \times_k \mathrm{GL}_s$ 应用定理 3.11，其中 $r + s = n$。
(3) 若 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 的秩均为 n，则将 (1) 应用于 $G = \mathrm{GL}_n$。 □

以下是关于态射 f 的一个稍强条件： $X' \longrightarrow X$ 的 k-概形，比定理 3.7(b) 中的条件稍强：

$(b)'$ X 局部诺特且正规， X' 非空，并且 f 是适当的，且满足以下条件：其在 X' 的每个不可约分支上的限制都是满射。

假设定理 3.7 的 (a) 或 $(b)'$ 成立，且 X' 连通，并且 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是剩余域为 k的亨泽尔局部概形。于是可如下看出， $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 也是剩余域为 k的亨泽尔局部概形。

首先注意，由于 X' 非空且连通， $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$具有所需性质的条件是，它的每个元素都整于 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$。若定理 (a) 的3.7 成立，则由凯莱–哈密顿定理，将 s 视为由其整体截面 $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 所定义的 s 的自同态，即可知它是整的。

现在假设 $(b)'$ 成立。先考虑 $\mathcal{N}$ 的幂零根 $\mathcal{O}_{X'}$ 是幂零的情形，即

$$\mathcal{N}^r = 0$$

对某个 r 成立。我们再次证明，在这种情形下， $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 的每个元素 s 都整于 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$。不妨假设 X' 约化，因为若 $\overline{s}$ 是 s 在 $H^0(X'_{\mathrm{red}}, \mathcal{O}_{X'_{\mathrm{red}}})$ 中的像，那么任何一个湮灭 $\overline{s}$、系数属于 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 的首一多项式的 r 次幂都会湮灭 s。若 U 是 X 的一个非空仿射开子概形，则 $f^{-1}(U)$ 是 X' 的一个诺特开子概形，并且对于 X' 的每个不可约分支 Z，它都以 $Z \cap f^{-1}(U)$ 为不可约分支。因此， X' 只有有限多个不可约分支 Z；又由于 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 嵌入到这些 Z 上的 $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ 的乘积中，我们还可进一步假设 X' 不可约。于是由引理 2.2 可知，将 f 替换为其在 X 的某个开子概形 U 上的限制 $U' \longrightarrow U$ 后，(a) 成立，且该开子概形的补集处处具有至少为二的余维。因此，由引理 2.5 以及 (a) 成立的情形可推出， s 在 U' 上的限制，从而 s 本身，也被一个系数属于 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 的首一多项式所湮灭。

现在考虑 $(b)'$ 成立的一般情形。将刚才的结论应用于把 X' 替换为结构层为 $\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{N}^r$ 的闭子概形，可得 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{N}^r)$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部概形，对每个 r都成立。因此，只需证明典范同态

$$H^0(X', \mathcal{O}_{X'}) \longrightarrow \lim_r H^0(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{N}^r)$$

是一个同构。由于 $\mathcal{N}$ 在 X' 的每个仿射开子集上的限制都是幂零的，因此可以将整体截面空间写成在 X' 的仿射开覆盖的各开子集及其交集上的截面空间的极限，再将这些极限与 $\lim_r$互换。

由上述结果可知，如果我们将定理3.11 中的假设“定理(a) 或(b) 成立”替换为稍强的假设“定理3.7 的(a) 或定理3.7 的$(b)'$ 成立”，那么假设“$H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k的亨泽尔局部 k-代数”便可

替换为"$H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部 k-代数"。事实上， X' 上的连通性条件得以满足，因为 X' 是沿着 f 拉回 X 的单位 étale 覆盖 $'$所得。

设 X 是一个 k-概形，且 $\mathcal{R}$ 是一个处处非零的有限局部自由 $\mathcal{O}_X$-代数。那么，如果 $H^0(X, \mathcal{R})$ 是局部 k-代数，则 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 也是局部 k-代数：若 $\iota : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{R}$ 是单位，且 $\mathrm{tr} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ 是迹，那么对于$a \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $a' \in H^0(X, \mathcal{R})$,

$$\mathrm{tr}(\iota(a)a') = a\,\mathrm{tr}(a'),$$

因此 ι 保持非单位。将情形归约到 X 连通且 $\mathcal{R}$ 不可分解的情况，即可得出：若 $H^0(X, \mathcal{R})$ 是有限直积局部 k-代数，则 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 也是如此。若 R_1 是一个有限自由$H^0(X, \mathcal{O}_X)$-代数，且 X_1 是 X 与 $\mathrm{Spec}(R_1)$ 在 $\mathrm{Spec}(H^0(X, \mathcal{O}_X))$ 上的纤维积，那么

$$H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = R_1,$$

$\mathcal{R}$ 到 X_1 的拉回 $\mathcal{R}_1$ 是有限局部自由且处处非零的，并且

$$H^0(X_1, \mathcal{R}_1) = H^0(X, \mathcal{R}) \otimes_{H^0(X, \mathcal{O}_X)} R_1.$$

由于如果 $H^0(X_1, \mathcal{R}_1)$ 是有限个局部 k-代数的直积，则 $H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ 也是如此，因此如果 $H^0(X, \mathcal{R})$ 是亨泽尔局部 k-代数，则 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 也是如此。

若 $f : X' \longrightarrow X$ 是 k-概形的态射，且满足定理 (a) 的条件3.7 ，则结合上文与$\mathcal{R} = f_*\mathcal{O}_{X'}$可知，若 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是亨泽尔局部 k-代数，则 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 也是如此。

若 X 是局部有限型的 k-概形，则类似于证明 [BO21 引理 2.1] 的论证表明， $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部概形，当且仅当 X 非空，且 X 上任一正则函数在 X_{red} 上的限制都是常数。因此，若 $X' \longrightarrow X$ 是局部有限型 k-概形之间的优势态射，且 $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部概形，则 $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 也是如此。

最后考虑以下比定理 (b) 中的条件更强的条件 3.7:

$(b)''$ X 是局部有限型且正规，并且 f 是适当且满射的。

由上可知，若将定理 3.11 中"定理 3.7 的 (a) 或 (b) 成立"这一假设替换为"定理 3.7 的 (a) 或 $(b)''$ 成立"，则假设"$H^0(X, \mathcal{O}_X)$ 和$H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部 k-代数"可替换为"$H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ 是剩余域为 k 的亨泽尔局部 k-代数"。

4. Complex analytic spaces

设 X 是一个复解析空间， J 是一个复李群。所谓 X 上的主 J-丛，是指一个复解析空间 P，它在 X 上方，并带有 J 在 P 上的右作用，且该作用在 X 上方，使得 P 在 X 上局部同构于 $X \times J$，其中 J 通过右平移作用。沿复解析空间之间的态射 $f : X' \longrightarrow X$ 对 P 作拉回所得的 f^*P，连同其在 X 上方的 J 的典范右作用，是一个 X' 上的主 J-丛。

给定复李群的一个同态 $h : J \longrightarrow J'$，以及一个位于 X 上的主 J-丛 P，存在一个位于 X 上的主 J'-丛 P' 和一个位于 X 上的态射 $l : P \longrightarrow P'$，使得对于 P 中的点 p 和 J 中的点 j，有 $l(pj) = l(p)h(j)$；并且，数对 (P', l) 在唯一同构意义下是唯一的。主 J'-丛 P' 是沿 h 对 P 的推前。

设 J_1 是 J 的一个闭复李子群。 P 的主 J_1-子丛定义为 P 的一个闭解析子空间 P_1，满足 J 在 P 上的作用限制为 J_1 在 P_1 上的作用，且 P_1 是位于 X 上的主 J_1-丛。若 P 的两个主 J_1-子丛作为位于 X 上的主 J_1-丛同构，则称它们同构。由推前的唯一性可知，任何这样的同构都是位于 X 上的主 J-丛 P 的唯一一个自同构的限制。

我们将复李群 J 的表示定义为复向量空间 V，连同 V 到 J 的拉回上的一个 $\mathcal{O}_J$-自同构，并满足作用通常的结合律性质。若 G 是仿射代数 $\mathbb{C}$-群，则通过沿典范态射 $G_{\mathrm{an}} \longrightarrow G$ 拉回 G 的作用，G 的任一表示都可视为其相应的复李群 G_{an} 的表示。

设 P 是 X 上的主 J-丛。我们有 J 在 P 上的作用，其中对于 J 中的点 j 和 P 中的点 p，有 $jp = pj^{-1}$。若 V 是 J 的一个表示，则在 X 上作局部讨论可知，存在一对由一个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{V}$ 以及一个 J-等变同构组成，该同构从 V 到 P 的拉回映至 $\mathcal{V}$ 到 P 的拉回；并且此对在唯一同构意义下唯一。我们将 $\mathcal{V}$ 记作

$$P \times^J V.$$

这是通常的 $\mathcal{O}_X$-模，与 V 相关联，方法是将 $P \times V$ 中的点 (pj, v) 和 (p, jv) 识别起来。如果 V 是维数为 n 的有限维空间，那么 $P \times^J V$ 处处都是秩为 n 的向量丛。$P \times^J V$ 的构造关于 P、J 和 V 具有函子性，并且与拉回相容。类似地，我们定义一个复解析空间

$$P \times^J Z$$

over X，其中 Z 是带有 J 作用的复解析空间。

若一个交换 $\mathcal{O}_X$-代数在 X 上局部同构于一个多项式 $\mathcal{O}_X$-代数（其中含有限个不定元）模去有限个截面所得的商，则称其为有限表示。有限表示的交换 $\mathcal{O}_X$-代数在取交换 $\mathcal{O}_X$-代数的有限余极限时封闭。若 $a\colon Z \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的态射，且交换 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathcal{R}$ 是有限表示的，则交换 $\mathcal{O}_Z$-代数 $a^*\mathcal{R}$ 也是有限表示的。

设 $\mathcal{R}$ 是一个有限表示的交换 $\mathcal{O}_X$-代数。那么在 X 上的复解析空间范畴中的反变函子，将带有结构态射 $a\colon Z \longrightarrow X$ 的 Z 映为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z\text{-alg}}(a^*\mathcal{R},\ \mathcal{O}_Z)$$

是可表的，我们将表示对象记为

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{R}).$$

要证明 Sp($\mathcal{R}$) 存在，只需注意到如果它在 X 上局部存在，那么它就存在；此外，如果 $\mathcal{R}$ 是一个以 n 个变量生成的多项式代数，那么 Sp($\mathcal{R}$) 是 X 上的仿射 n- 空间。因此，对于任意有限表示的 $\mathcal{R}$，Sp($\mathcal{R}$) 都存在；由于 $\mathcal{R}$ 在 X 上局部是两个多项式代数之间两个态射的余等化子，Sp 会将有限余极限映为有限极限。Sp($\mathcal{R}$) 的构造与拉回相容。如果 X 是一个点的无穷小增厚，因而是一个 $\mathbb{C}$-概形，那么 Sp($\mathcal{R}$) 就是与 Spec($\mathcal{R}$) 相关联的、定义在 X 上的复解析空间。

赋值 $\mathcal{R} \longmapsto$ Sp($\mathcal{R}$) 唯一地延拓为从有限表示的交换$\mathcal{O}_X$-代数到 X 上的复解析空间的反变函子；将其限制到 X 为无穷小的情形，可知该函子是忠实的。

回顾一下，若 G 和 G_0 是仿射代数的 $\mathbb{C}$-群，且 G_0 是约化的，那么任意复李群的同态 $G_{0\mathrm{an}} \longrightarrow G_{\mathrm{an}}$ 都具有形式 h_{an}，其中对应一个（唯一的）$\mathbb{C}$-群同态 $h\colon G_0 \longrightarrow G$。特别地，从约化代数的 $\mathbb{C}$-群到复李群的函子 $G \longmapsto G_{\mathrm{an}}$ 是全忠实的。若一个复李群同构于某个仿射代数的 $\mathbb{C}$-群 G所对应的复李群 G_{an}，则称它为代数的；若还可以取 G 为约化的，则称它为约化的。

设 J 是一个代数复李群。若记 $J = G_{\mathrm{an}}$ 为一个仿射代数的 $\mathbb{C}$-群 G，满足$G = \mathrm{Spec}(R)$，则

$$J = \mathrm{Sp}(R).$$

此外，若 R 带有由共轭作用定义的 G 的作用，则 J 在R 上的对应作用会在 J上诱导出共轭作用。于是，X 上的主 J-丛 P 的自同构在 X 上的群空间为

$$\underline{\mathrm{Aut}}_J(P) = P \times^J J_{\mathrm{conj}} = \mathrm{Sp}(\mathcal{R})$$

其中 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{O}_X$-代数 $P \times^J R_{\mathrm{conj}}$，下标共轭作用 表示 J 的作用由共轭作用定义。若 J_1 是 J的约化闭复李子群，则 G 中存在一个（唯一的）约化$\mathbb{C}$-子群 G_1，使得 $G_{1\mathrm{an}} = J_1$。于是

$$J/J_1 = (G/G_1)_{\mathrm{an}} = \mathrm{Sp}(R_1),$$

其中 $G/G_1 =$ 谱(R_1)，并且

$$P/J_1 = P \times^J J/J_1 = \mathrm{Sp}(\mathcal{R}_1),$$

其中 $\mathcal{R}_1 = P \times^J R_1$ 其中，J 对 R_1 的作用诱导出 J 在 $J/$上的左平移作用 J_1.

与代数情形一样，主丛 J_1的子丛对应于主 J丛 P 上的 X 到 P/J_1 上的截面 X。下面的命题4.1 可用与命题3.1相同的方法证明。

命题 4.1. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的一个态射，且 $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是一个同构。设 J 是一个代数复李群， $J_1 \subset J$ 是其约化闭复李子群。那么，对于任意定义在 X 上的主 J-丛 P，沿着 f^*P 到 P 的投影进行拉回，会给出从 P 的主 J_1-子丛集合（分别为同构类集合）到 f^*P 的主 J_1-子丛集合（分别为同构类集合）的一个双射。

所谓张量范畴，是指一个 $\mathbb{C}$-线性范畴，配备一个 $\mathbb{C}$-双线性张量积，以及一个单位 $\mathbf{1}$ 和满足通常相容性条件的结合约束与交换约束 [DMOS82，第 105 页，定义 1。1]。张量范畴之间的张量函子，是一个 $\mathbb{C}$-线性函子，并配有与约束相容的结构同构，从而保证单位对象和张量积在同构意义下得到保留 [DMOS82，第 113–114 页，定义 1。8]。张量函子之间的张量同构，是一个与结构同构相容的自然同构 [DMOS82，第 116 页，定义 1。12]。

设 X 是一个复解析空间。配备通常的单位、张量积及约束的 $\mathcal{O}_X$-模范畴是一个张量范畴

$$\mathrm{MOD}(X).$$

X 上的向量丛与有限型局部自由 $\mathcal{O}_X$-模等同，它们构成满张量子范畴 $\mathbf{Mod}(X)$。

设 G 是一个仿射代数的 $\mathbb{C}$-群。我们用

$$\mathrm{REP}_{\mathbb{C}}(G)$$

表示 G 的表示张量范畴，并用 $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 表示有限维表示构成的满张量子范畴。令

$$T : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X)$$

为一个张量函子，它是正合的，即作为取值于 $\mathbf{MOD}(X)$ 的函子是正合的。将 G 的表示写成其有限维子表示的滤过余极限，可知 T 可延拓为一个张量函子

$$\widehat{T} : \mathrm{REP}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{MOD}(X)$$

它从 G 的所有表示构成的范畴出发，并且是正合的且保持余极限。类似地，每个张量同构 $\theta\colon T' \xrightarrow{\sim} T$ 都唯一延拓为张量同构 $\widehat{\theta}\colon \widehat{T'} \xrightarrow{\sim} \widehat{T}$。若 Z 是 X 上的复解析空间，我们记

$$T_Z : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Z)$$

对于 T，接着沿 $Z \longrightarrow X$ 拉回； T 也同理。

当 X 是一个点时，$\mathbf{Mod}(X)$ 是有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间范畴 $\mathbf{Mod}(\mathbb{C})$，而 $\mathbf{MOD}(X)$ 是所有 $\mathbb{C}$ 向量空间构成的范畴 $\mathbf{MOD}(\mathbb{C})$。若取 T 为遗忘张量函子

$$\omega : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{C}),$$

那么 $\widehat{\omega}\colon \mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathbf{MOD}(\mathbb{C})$ 也是遗忘张量函子，并且

$$\widehat{\omega}_Z : \mathrm{REP}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{MOD}(Z)$$

将一个表示映到其底层向量空间所生成的自由 $\mathcal{O}_Z$-模。

将 G 的一个表示映到其底层向量空间，并赋予 G 的平凡作用的张量函子记作

$$E : \mathrm{REP}(G) \longrightarrow \mathrm{REP}(G).$$

于是，对于任意正合张量函子 $T\colon \mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathbf{Mod}(X)$，都有 $TE = \widehat{\omega}_X$。

我们将坐标代数 $\mathbb{C}[G]$ 视为 G的左正则表示，其中G 上的点 g 将 $\mathbb{C}[G]$ 中的 w 映到 $w(g^{-1}\text{–})$。于是，在逐点乘法下， $\mathbb{C}[G]$ 是一个交换的 G-代数。 G 对其表示 V 的作用是一个同构

$$E(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] \tag{4.1}$$

$\mathbf{REP}(G)$ 中交换代数 $\mathbb{C}[G]$ 上的模。

若 T和 T'是从 Rep$_{\mathbb{C}}(G)$ 到 Mod(X) 的张量函子，我们用 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(T', T)$ 表示定义在 X 上的复解析空间范畴上的函子，其

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(T', T)(Z) = \mathrm{Iso}^{\otimes}(T'_Z, T_Z),$$

其中 Iso$^{\otimes}$ 表示张量同构的集合。$\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(T', T)$沿 $X' \longrightarrow X$的拉回是 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_{X'}(T'_{X'}, T_{X'})$。当 X是一个点时，我们也将 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(T', T)$记作 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(T', T)$。

对于 Rep$_{\mathbb{C}}(G)$ 中任意的 V， G_{an} 的作用是 $\mathcal{O}_{G_{\mathrm{an}}}$-模 $\omega_{G_{\mathrm{an}}}(V)$ 的一个自同构。这些自同构是 $\omega_{G_{\mathrm{an}}}$ 的一个作用张量自同构的分量。由 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega)(G_{\mathrm{an}})$ 中的作用张量自同构所定义的、从由 G_{an} 表示的函子到 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega)$ 的自然变换 α，其分量为

$$\alpha_Z : G_{\mathrm{an}}(Z) \longrightarrow \mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega_Z, \omega_Z)$$

在 Z 处是满足 $\alpha_Z(g)_V$ 的映射，即 g 在 V上的作用。此外，对于 REP$_{\mathbb{C}}(G)$ 中任意的 V，$\alpha_Z(g)_V$ 是 g 在 V 上的作用。由 G_{an}的作用的结合律可知，每个 α_Z 都是一个群同态。

引理 4.2. 对任意仿射代数的 $\mathbb{C}$-群 G，函子 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega)$ 由 G_{an} 表示，其在 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega)(G_{\mathrm{an}})$ 中的泛元是作用张量自同构。

证明. 设 Z 是一个复解析空间。那么

$$\mathrm{Sp}(\widehat{\omega}_Z(\mathbb{C}[G])) = \mathrm{Sp}(\widehat{\omega}_Z(E(\mathbb{C}[G]))) = G_{\mathrm{an}\,Z},$$

，并且取上述的 α，则 $G_{\mathrm{an}\,Z}$ 的自同构 Sp$(\alpha_Z(g)^{\mathbb{C}[G]})$ 是由 g^{-1} 给出的左平移。

设 θ 是 ω_Z 的一个张量自同构。需证明，对于唯一的 $g \in G_{\mathrm{an}}(Z)$，有 $\theta = \alpha_Z(g)$。

$$\widehat{\ }\text{由于 } \theta_{E(\mathbb{C}[G])} \text{ 是单位，对态射应用 Sp } \theta$$

$$\mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} E(\mathbb{C}[G])$$

由复合 $G \times_{\mathbb{C}} G \longrightarrow G$ 诱导的交换代数范畴 REP(G) 中的态射表明，复解析空间 $G_{\mathrm{an}\,Z}$ 上方的 $\theta_{\mathbb{C}[G]}$ 自同构 Sp$(\theta_{\mathbb{C}[G]})$ 与右平移相容。因此，它是某个截面 $g\colon\ G_{\mathrm{an}\,Z}$ 给出的左平移，其中 g^{-1}，于是

$$\widehat{\theta}_{\mathbb{C}[G]} = \widehat{\alpha_Z(g)}_{\mathbb{C}[G]}.$$

对于任意 V 属于 Rep$_{\mathbb{C}}(G)$，将（4.1）的逆与 V 到 $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]$ 中的嵌入复合，该嵌入由 $1 \in \mathbb{C}[G]$ 定义，从而得到一个单态射

$$V \longrightarrow E(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]$$

在 REP$_{\mathbb{C}}(G)$ 中，从 V到若干个 $\mathbb{C}[G]$的直和。于是，对于每个 V，都有 $\theta_V = \alpha_Z(g)_V$，因此$\theta = \alpha_Z(g)$。令 V为忠实函子，便可得出 g 是唯一的。□

设 $\mathcal{R}$ 是一个有限表示的交换 $\mathcal{O}_X$-代数。若 $b : \mathrm{Sp}(\mathcal{R}) \longrightarrow X$ 是结构态射，则泛态射使 $\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{R})}$ 成为一个 $b^*\mathcal{R}$-代数。于是我们有一个张量函子 $\mathcal{M} \longmapsto \widetilde{\mathcal{M}}$，满足

$$\widetilde{\mathcal{M}} = b^*\mathcal{M} \otimes_{b^*\mathcal{R}} \mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{R})}$$

从 $\mathcal{R}$-模到 $\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{R})}$-模。此外

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R})^{\sim} = b^*\mathcal{F}$$

对于一个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$。

假设 $\mathcal{R}$ 作为一个 $\mathcal{O}_X$-模是平坦的，并且其各纤维的谱是光滑的 $\mathbb{C}$-概形。接下来说明 Sp$(\mathcal{R})$ 在 X 上是光滑的。将问题限制到 X 中各点的上述无穷小邻域后，可归结为 X 是一个点的无穷小增厚的情形。此时， X 上的概形 Spec$(\mathcal{R})$ 是光滑的，因为它是平坦的且纤维光滑，因此 Sp$(\mathcal{R})$ 是光滑的。

根据引理 4.2， G_{an}可与 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega,\ \omega)$ 认作同一对象，因而 $G_{\mathrm{an}\,X}$可与 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(\omega_X,\ \omega_X)$ 认作同一对象。对于任意从 Rep $T_{\mathbb{C}}(G)$ 到 Mod(X) 的正合张量函子，张量同构的复合由此定义了 G_{an} 在 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(\omega_X,\ T)$ 上的典范右作用。

引理 4.3。设 X 是一个复解析空间，G 是一个仿射代数的 $\mathbb{C}$-群，且 T 是一个从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathrm{Mod}(X)$ 的正合张量函子。那么函子 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(\omega_X, T)$ 是可表的，并且在 X 上是一个主 G_{an}-丛，其右作用为 G_{an} 的典范右作用。

证明。交换代数 $\mathbb{C}[G] \in \mathrm{REP}_{\mathbb{C}}(G)$ 可写为两个态射 $\widehat{}$ 之间的余等化子，这两个态射定义在 G 的有限维表示上的对称代数之间。因此，$\mathcal{O}_X$-代数 $T(\mathbb{C}[G])$ 是有限表示的。由此，我们得到一个复解析空间

$$P = \mathrm{Sp}(\widehat{T}(\mathbb{C}[G]))$$

$\widehat{}$ 在 X 上。应用 T，然后应用 $(-)^{\sim}$ 于 (4.1)，得到一个同构

$$\omega_P(V) = (\omega_X(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widehat{T}(\mathbb{C}[G]))^{\sim} \xrightarrow{\sim} (T(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widehat{T}(\mathbb{C}[G]))^{\sim} = T_P(V)$$

对于 $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$。它是张量同构在 V 处的分量

$$u : \omega_P \xrightarrow{\sim} T_P.$$

(P, u) 的构造与沿态射 $Z \longrightarrow X$ 的拉回以及张量同构 $T \xrightarrow{\sim} T'$ 相容。我们证明 P 表示函子 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(\omega_X, T)$，其泛元为 u；并且 P 是 X 上的一个主 G_{an}-丛，其右作用由 $\mathrm{Iso}^{\otimes}_X(\omega_X, T)$ 上的典范右作用定义。

首先，假设 X 是一个点，且 $T = \omega$。那么 $P = G_{\mathrm{an}}$，并且 u 是作用张量自同构。所需结论由引理 4.2 得出，因为 G_{an} 在 $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\omega, \omega)$ 上的典范右作用是右平移。

要证明任意 X 和 T 的所需结论，只需利用 (P, u) 与拉回和张量同构的相容性，证明 X 的每个点都包含在某个开子集 U 中，使得 T_U 与 ω_U 张量同构。

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$ $T(\mathbb{C}[G])$ 在 X 中任意 x 处的纤维非零，因为 T 在 x 处的纤维 T_x 是正合的，且 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ 是单态射。因此，P_x 非空。P_x 中的任意点都定义了一个从 ω 到 T_x 的张量同构，进而定义了一个从 $\widehat{\omega}$ 到 T_x 的张量同构。因此，$\widehat{\omega}(\mathbb{C}[G])$ 和 $T_x(\mathbb{C}[G])$ 是同构的 $\mathbb{C}$-代数，故 $T_x(\mathbb{C}[G])$ 的 $\widehat{}$ $\widehat{}$ 谱是光滑的。此外，$T(\mathbb{C}[G])$ 在 $\mathcal{O}_X$ 上是平坦的，因为它是 $\mathbb{C}[G]$ 的有限维子表示所成的滤过余极限：这些子表示由 V 遍历时，对应的是 X 上的 $\widehat{}$ 向量丛 $T(V)$。因此，$P \longrightarrow X$ 是光滑且满射的。由此可知，X 的任意点都包含在 X 的一个开子空间中，并且 P 在该开子空间上有截面。任一这样的截面都定义了所需的张量同构。
□

设 P 是 G_{an} 上的一个主 X-丛。那么我们有一个正合张量函子

$$P \times^{G_{\mathrm{an}}} - : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X).$$

若 $h : G \longrightarrow G'$ 是一个 $\mathbb{C}$-同态，且 P' 是 P 沿 $h_{\mathrm{an}} : G_{\mathrm{an}} \longrightarrow G'_{\mathrm{an}}$ 的推前，则复合

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G') \xrightarrow{h^*} \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{P \times^{G_{\mathrm{an}}} -} \mathrm{Mod}(X) \tag{4.2}$$

与 h 上的拉回 h^* 张量同构于 $P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} -$。

设 P 是 G_{an} 上的一个主 X-丛，且 T 是从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathrm{Mod}(X)$ 的正合张量函子。那么，G_{an} 在 P 上的作用（其中 g 作用为 $p \longmapsto pg^{-1}$）定义了一个经由 P 在 T_P 上的作用，即将 T_P 提升为 P 上的 G_{an}-等变向量丛。我们还有 G_{an} 在 ω_P 上的一个作用，它由 P 上的作用和 ω 上的典范作用给出。令

$$\theta : \omega_P \xrightarrow{\sim} T_P$$

是一个与 G_{an} 的作用相容的张量同构，也就是说，其每个分量 θ_V 都是 G_{an}-等变的。那么 θ 定义了一个张量同构

$$P \times^{G_{\mathrm{an}}} - \xrightarrow{\sim} T \tag{4.3}$$

在 V 处的分量是典范同构 $P \times^{G_{\mathrm{an}}} V \xrightarrow{\sim} T(V)$，它由 G_{an}-等变同构 θ_V 给出，该同构从 $\omega_P(V) = P \times V$ 到 $T(V)$ 在 P 上的拉回 $T_P(V)$。

引理 4.4. 设 X 是一个复解析空间，且 G 是一个仿射代数 $\mathbb{C}$-群。那么，将 P 送到 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 的函子，是从 X 上的主 G_{an}-丛范畴到正合张量函子范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)\longrightarrow \mathrm{Mod}(X)$ 的等价。

证明。 由引理 4.3可知，我们有一个函子 $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}_X(\omega_X,-)$，它将正合张量函子 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)\longrightarrow\mathrm{Mod}(X)$ 映到 G_{an} 上的主丛 X。

若 P是 X上的主 G_{an}丛，则从 $\omega_P(V)$ 到 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}V$ 在 P 上的拉回的典范同构定义了一个态射

$$P\longrightarrow \underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}_X(\omega_X,\ P\times^{G_{\mathrm{an}}}-)$$

它是 X 上的复解析空间之间的态射，并且关于 P自然。它与 G_{an}的作用相容，因此是主 G_{an}丛的同构。

设 $T:\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)\longrightarrow\mathrm{Mod}(X)$ 是一个正合张量函子。若 P 是 X上的主 G_{an}丛 $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}_X(\omega_X,T)$，且 $\theta\colon \omega_P\xrightarrow{\sim}T_P$是泛张量同构，则按定义，$G_{\mathrm{an}}$ 在 P 上的右作用是唯一的态射 $b\colon P\times G_{\mathrm{an}}\longrightarrow P$，它在 X 上，并且沿 b 拉回 θ 所得的态射，等于沿投影 $P\times G_{\mathrm{an}}\longrightarrow P$ 拉回 θ 所得的态射与沿投影 $P\times G_{\mathrm{an}}\longrightarrow G_{\mathrm{an}}$拉回 $\omega_{G_{\mathrm{an}}}$ 的作用自同构所得态射的复合。由此可知，θ 与 ω_P 和 T_P上的 G_{an} 作用相容。因此，θ 如 (4.3) 所示定义了一个张量同构

$$\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}_X(\omega_X,T)\times^{G_{\mathrm{an}}}-\ \xrightarrow{\sim}\ T.$$

它关于 T是自然的，因为 θ 在 T中是函子性的。

将 P映到 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$的函子因此有一个拟逆 $\underline{\mathrm{Iso}}^{\otimes}_X(\omega_X,-)$。 □

设 G 和 G' 为仿射代数 $\mathbb{C}$-群。从 G' 到 G 的 $\mathbb{C}$-同态构成一个范畴，其中从 h_1 到 h_2 的态射是 $g\in G(\mathbb{C})$的一个元素，且 h_2 是 h_1 经 g共轭所得。我们有一个从该范畴到忠实正合张量函子范畴的函子

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)\longrightarrow\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')$$

它将 $h\colon G'\longrightarrow G$ 映到沿 h 的拉回张量函子 h^*，并将 $g\colon h_1\longrightarrow h_2$ 映到一个张量同构，该同构在 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$中 V处的分量是 g 在 V上的作用。

引理 4.5。设 G 和 G' 为仿射代数 $\mathbb{C}$-群。则将 h 映到 h^* 的函子，从由 $\mathbb{C}$-同态（从 G' 到 G）构成的范畴到忠实正合张量函子范畴（从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$到 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')$），是一个等价。

证明。 先假设 $G'=1$。由引理 4.2 可得全忠实性；由以下事实可得本质满射性：根据引理 4.3，对于 X 点，任意从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}$的忠实正合张量函子都与遗忘函子张量同构 ω。

任意 G' 的全忠实性可由 $G'=1$ 的情形推出：在 G的一个忠实表示上求值即可。要证明任意 G' 的本质满射性，根据 [DMOS82，第130页，推论2，9] 只需证明每个忠实正合张量函子 H 从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G'$都与一个 H' 同构，且具有

$$\omega' H'=\omega,$$

其中 ω' 是从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')$ 出发的遗忘张量函子。根据 $G'=1$ 的情形，存在一个张量同构 φ_0，从 $\omega' H$ 到 ω。对于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 中的每个 V，由结构传递，存在唯一的同构 φ_V，属于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')$，其源为 $H(V)$，并满足 $\omega'(\varphi_V)=\varphi_{0V}$。于是存在唯一的张量函子 H'，从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')$，使得 φ_V 是张量同构φ的分量：$H\xrightarrow{\sim}H'$。由于 $\omega'\varphi=\varphi_0$，我们有 $\omega' H'=\omega$。□

定理4.6 是以下内容的一个应用，它利用了引理 4.4 和 4.5中所证明的张量范畴分裂定理，该定理见 [AK02], [O'S05] 和 [O'S19]。

设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴。若 $\mathcal{C}$ 是刚性的，即 $\mathcal{C}$ 中每个对象都有对偶，则自同态 $e\in\mathcal{C}$ 的迹 $\mathrm{tr}(e)\in\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$ 有定义。假设 $\mathcal{C}$ 是刚性的，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$ 是一个

局部 $\mathbb{C}$-代数。那么，满足对每个 $r\colon A \longrightarrow B$ 中的 $\mathcal{C}$，$\mathrm{tr}(s\circ r)$ 都属于 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ 的极大理想的态射 $s\colon B \longrightarrow A$ 构成了 $\mathcal{J}$ 的唯一极大张量理想，参见 $\mathcal{C}$ [O'S19，第 73] 页。记作

$$\overline{\mathcal{C}}$$

$\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{J}$取商。它是一个刚性张量范畴，其对象与 $\mathcal{C}$相同；并且存在一个投影 $\mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$，它在对象上是恒等映射，是满张量函子，且其核为 $\mathcal{J}$。将 $\mathcal{J}$限制到 $\mathcal{C}$ 的任一满刚性张量子范畴 $\mathcal{C}_0$ 上，所得范畴是 $\mathcal{C}_0$ 的唯一极大张量理想，其中$\overline{\mathcal{C}_0}$ 是 $\overline{\mathcal{C}}$的满张量子范畴。

次数为 d 的对称群的群代数作用于 $\mathcal{C}$中每个对象的第 d张量幂；若 $\mathcal{C}$ 是伪阿贝尔的，则例如可以将反对称化幂等元的像定义为第 d外幂。

设 $\mathcal{C}$ 本质小（即具有一个小骨架）、伪阿贝尔且刚性，$\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ 是亨泽尔局部环，其剩余域为 $\mathbb{C}$，并且对 $\mathcal{C}$ 的每个对象，某个外幂都为 0。那么，$\overline{\mathcal{C}}$ 是域 $\mathbb{C}$ 上的半单坦纳卡范畴（见 [O'S19, 命题 11.2(i)] 和[Del90，第 165 页，定理 7.1]）。关于 $\mathcal{C}$ 的分裂定理（见 [O'S19, 定理 11.7]）指出，投影 $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$ 存在一个右拟逆，即一个张量函子 $T\colon \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$，使得其复合

$$\overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{T} \mathcal{C} \xrightarrow{Q} \overline{\mathcal{C}}$$

与单位函子张量同构。此外，若 T 是这样的右拟逆，且 $\mathcal{D}$ 是本质小的刚性张量范畴，那么任何满足 $QS\colon \mathcal{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$ 忠实的张量函子 $S\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 都可分解为

$$\mathcal{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$$

相差一个张量同构。

我们回顾 [BO21，引理 21]：对于任意非空复解析空间 X，$\mathbb{C}$-代数$H^0(X,\ \mathcal{O}_X)$ 是剩余域为 $\mathbb{C}$ 的亨泽尔局部环，当且仅当 X_{red} 上每个全纯函数在 X 上的限制都是常数。若此条件成立，则对于 $\mathrm{Mod}(X)$ 的每个满伪阿贝尔刚性张量子范畴 $\mathcal{C}$，前一段中关于 $\mathcal{C}$ 的假设均得到满足。

回顾 [DMOS82，注 310]：任意有限生成的坦纳范畴在 $\mathbb{C}$ 上都是中性的，因此张量等价于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$；其中 $\mathbb{C}$是某个仿射 G-群$\mathbb{C}$，且必为代数群。此外，$\mathrm{Rep}G(\ G\ )$ 是半单的，当且仅当 $\mathbb{C}$是约化的；若此条件成立，则从 $\mathrm{Rep}G()$ 到非零张量范畴的任何张量函子都是忠实且正合的。

设 X 为复解析空间，J 为约化复李群。若约化闭复李子群 J' 满足 $J' = J$时，主 J-丛 P上的主 J'-子丛才可能存在，则称 P为极小的。沿代数复李群之间的满同态对 X 上的极小主 J-丛作任意推前，所得丛仍是极小的。

定理 4.6. 设 X 为非空复解析空间，G 为约化代数 $\mathbb{C}$-群，且 P 是 X上的主 G_{an}-丛。假设 X上的每个全纯函数在 X_{red} 上的限制都是常数。那么，P 是极小的，当且仅当投影 $\mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(X)$ 与 $P\times^{G_{\mathrm{an}}} -\colon \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Mod}(X)$ 的复合是全忠实的。

证明。设 P是极小的。由于 G 是约化代数 $\mathbb{C}$-群，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 作为伪阿贝尔刚性张量范畴是有限生成的。因此，$P\times^{G_{\mathrm{an}}} -$ 经由 $\mathrm{Mod}(X)$ 的一个有限生成伪阿贝尔满刚性张量子范畴 $\mathcal{C}$ 分解。此外，从 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 到非零张量范畴的任意张量函子都是忠实且正合的。根据分裂定理，$P\times^{G_{\mathrm{an}}} -$ 因而在相差一个张量同构的意义下分解为

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{T} \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(X)$$

其中第三个箭头是嵌入，T后接到 $\overline{\mathcal{C}}$ 上的投影，是一个等价。现在，$\overline{\mathcal{C}}$是一个以 $\mathbb{C}$为底的有限生成半单坦纳卡范畴，因此如上所述，$\mathbb{C}$-张量等价于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G_0)$，其中某个约化代数的 $\mathbb{C}$-群 G_0满足此条件。利用引理4.4 和4.5的本质满射性，我们由此得到某个 $\mathbb{C}$-同态 $h\colon\ G_0 \longrightarrow G$ 以及主 G_0-丛 P_0 的一个分解

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G_0) \xrightarrow{P_0\times^{G_0\mathrm{an}} -} \mathrm{Mod}(X) \tag{4.4}$$

在张量同构意义下， $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 且 $P_0\times^{G_{0\mathrm{an}}}-$ 后接到 Mod(X) 上的投影是全忠实的。如同 (4.2) 中那样，复合映射 (4.4) 也与 $P_1\times^{G_{\mathrm{an}}}-$张量同构，其中 P_1 是 P_0 沿 h_{an}的推前。根据引理4.4的全忠实性， P_1 因此与 P同构。因此，由于P 是极小的， h 是满射的，所以 h^* 是全忠实的。到 Mod(X) 上的投影与 (4.4) 的复合于是全忠实，符合要求。

反之，设投影与 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 的复合是全忠实的。需要证明，对于每个满足 $G'=G$ 的约化 $\mathbb{C}$-子群 G'， G 若 P 有一个主 G'_{an}-子丛P'。若 $i\colon G'\longrightarrow G$ 是嵌入，则如（4.2）中所示， $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 在张量同构意义下可分解为

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G')\xrightarrow{P'\times^{G'_{\mathrm{an}}}-}\mathrm{Mod}(X).$$

与投影复合，并利用 Rep$_{\mathbb{C}}(G')\longrightarrow$ Mod(X) 是忠实的这一事实，可知 i^* 是全忠实的。因此，对于 G的每个表示 V，都有 $V^G=V^{G'}$。取 V为G 的坐标代数，其中 G 通过右平移作用，可知仿射 $\mathbb{C}$-概形 G/G' 是一个点。因此 $G'=G$。□

定理 4.7. 设 X 是一个复解析空间， J_0 和 J 是代数复李群，且J_0 约化。设 P_0 是 X上的极小主 J_0丛，且 h_1 和 h_2 是从 J_0 到 J的复解析同态。假设 X上的每个全纯函数在 X_{red} 上的限制都是常数。那么， P_0 沿 h_1 和 h_2 的推前同构，当且仅当 h_1 和 h_2 共轭。

证明。“如果”部分显然成立，即使对 J_0 或 X 不作任何条件限制也是如此。

为证明反向结论，我们不妨设 $J_0=G_{0\mathrm{an}}$ 和 $J=G_{\mathrm{an}}$ 是仿射代数 $\mathbb{C}$-群 G_0和 G，其中 G_0 是约化的。于是对于 $i=1,2$ 有 $h_i=l_{i\mathrm{an}}$，对应一个 $\mathbb{C}$-同态 $l_i\colon G_0\longrightarrow G$。假设 P_0 沿 $l_{1\mathrm{an}}$ 和 $l_{2\mathrm{an}}$ 的推前彼此同构。那么它们的复合

$$P_0\times^{G_{0\mathrm{an}}}-\colon\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G_0)\longrightarrow\mathrm{Mod}(X)$$

与 l_1^* 和 l_2^* 是张量同构的。与投影到 Mod(X) 复合，并应用定理 4.6 可知 l_1^* 和 l_2^* 是张量同构的。因此，由引理 4.5的全忠实性可得， l_1 和l_2，进而 h_1 和 h_2 共轭。□

下面的推论4.8 可由定理 4.7 以与由定理 3.3 推出推论 3.4.

推论 4.8. 设 X 是一个复解析空间， J 是一个代数复李群，且 P 是 X 上的一个主 J-丛。对于 $i=0,1$，设 J_i 是 P 的一个约化闭复李子群，且 P_i 是 P 的一个主 J_i-子丛。假设 P_0 是极小的，并且每个 X 上的全纯函数在 X_{red} 上的限制都是常数。那么存在一个元素 $j\in J$，使得 J_1 包含 jJ_0j^{-1}，且 P_1 包含一个与 P_0j^{-1} 同构的主 jJ_0j^{-1}-子丛。

复李群 J 在有限维 $\mathbb{C}$-向量空间 V 上的一个表示，可以视为从复李群 J 到 Aut$_{\mathbb{C}}(V)_{\mathrm{an}}$ 的同态。因此，如果 G 是一个约化代数 $\mathbb{C}$-群，那么沿着 $G_{\mathrm{an}}\longrightarrow G$ 的限制定义了从 Rep$_{\mathbb{C}}(G)$ 到 G_{an} 的有限维表示所构成的范畴的一个等价（甚至是一个同构）。

与代数情形一样，对于任意复解析空间 X，秩为 n、底空间为 X 的向量丛与底空间为 X的主 $(\mathrm{GL}_n)_{\mathrm{an}}$-丛之间存在等价；向量丛可分解为秩分别为 r 和 s 的向量丛的直和，其中 $r+s=n$ 对应于结构群从 $(\mathrm{GL}_n)_{\mathrm{an}}$约化为 $(\mathrm{GL}_r)_{\mathrm{an}}\times(\mathrm{GL}_s)_{\mathrm{an}}$。类似地，对于复李群 J 的 n 维表示V_1 和 V_2， $P\times^J V_1$ 与 $P\times^J V_2$ 同构，当且仅当在选定基底后，与 V_1 和 V_2 对应的主 J-丛 P 在 X上的推前（沿着 $J\longrightarrow(\mathrm{GL}_n)_{\mathrm{an}}$）同构。

推论4.9 可由定理 4.7 和推论 4.8 以与推论 3.5 由定理 3.3 和推论3.4以相同方式推出。或者，也可以直接由定理 4.6推出。

推论 4.9. 设 X 为复解析空间， J 为约化复李群， P 为 J上的极小主丛。假设 X 上的每个全纯函数在 X_{red} 上的限制都是常数。则以下两条成立：

(1) 对于 J的任意有限维表示 V， X 上的向量丛 $P\times^J V$ 不可分解，当且仅当 V 不可约。(2) 对于 J 的任意两个有限维表示 V_1 和 V_2， X 上的向量丛 $P\times^J V_1$ 和$P\times^J V_2$ 同构，当且仅当 V_1 和 V_2 同构。

设 G 是一个仿射代数 $\mathbb{C}$-群，且 $G'\subset G$ 是一个 $\mathbb{C}$-子群。G' 的右平移在 G 上定义了一个以 G/G' 为底空间的主 G'-丛，而 G 的左平移则在主 G'-丛 G （其底空间为 G/G'）上定义了一个 G-等变结构。若 V' 是 G' 的一个表示，则主 G'-丛 G 上的 G-等变结构会在准相干$\mathcal{O}_{G/G'}$-模 $G\times^{G'}_{\mathbb{C}} V'$ 上诱导一个 G-等变结构。回顾一下，从 $\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G')$ 到 $\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G)$ 的归纳函子定义为

$$\mathrm{Ind}^G_{G'}(V') \;=\; H^0(G/G', G\times^{G'}_{\mathbb{C}} V').$$

它是 从 $\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G)$ 到 $\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G')$ 的限制函子的右伴随，其伴随同构为

$$\mathrm{Hom}_{G'}(V, V') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G,G/G'}((G/G')\times_{\mathbb{C}} V, G\times^{G'}_{\mathbb{C}} V') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}^G_{G'}(V')),$$

其中，若以 $\overline{g}$ 表示 G/G' 中 G 的任意一个 g 的像，并以 (g, v) 表示 $\overline{G\times^{G'}_{\mathbb{C}} V'}$ 中 $G\times_{\mathbb{C}} V'$ 的点 (g, v) 的像，则第一个同构将任意 $\lambda\colon V\longrightarrow V'$ 映为由下式定义的同态

$$(\overline{g}, v) \;\longmapsto\; \overline{(g, \lambda(g^{-1}v))},$$

其逆映射是取 G/G' 在基点处的纤维。

Su假设 G/G' 是仿射的。那么 $\mathbf{Ind}^G_{G'}$ 是正合的。因此，我们有一个同构

$$\mathrm{Ext}^1_{G'}(V, V') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_G(V, \mathrm{Ind}^G_{G'}(V')) \tag{4.5}$$

对于 $V\in\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G)$ 和 $V'\in\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G')$，该同构通过对一个扩张应用 $\mathbf{Ind}^G_{G'}$，再沿单位 $V\longrightarrow\mathbf{Ind}^G_{G'}(V)$ 拉回而给出；其逆映射则通过应用限制函子，再沿余单位 $\mathbf{Ind}^G_{G'}(V')\longrightarrow V'$ 推前而给出。取 (4.5) 中的 $V=\mathbb{C}$ 可知，$\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G')$ 中 $\mathbb{C}$ 由 V' 扩张得到的每个扩张 W'，都是从 G 到 G' 的限制所得到的扩张 W 的推前，其中$\mathbb{C}\in\mathbf{REP}_{\mathbb{C}}(G)$。此外，如果 V' 是有限维的，将 W 替换为一个足够大的子表示，可知 W 可以取为有限维的。

命题 4.10。设 X 是一个复解析空间， G 是一个仿射代数 $\mathbb{C}$-群，且 P 是 X 上的一个主 G_{an}-丛。那么，当且仅当函子 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 在 $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 上将每个短正合列分裂时， P 才存在一个主 $G_{0\mathrm{an}}$-子丛，其结构群为 G 的某个约化 $\mathbb{C}$ 子群 G_0 。

证明。“当且仅当”中的“仅当”部分由以下事实得出：对任意 $\mathbb{C}$ 子群 G_0 of G， $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 都经过 $P\times^{G_{0\mathrm{an}}}-$ 因子分解。

反之，假设 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$ 将 G 的每个有限维表示短正合列分裂。记

$$G \;=\; U\rtimes_{\mathbb{C}} G_0,$$

其中 U 是 G 的幺幂根基， G_0 是 G 的一个约化 $\mathbb{C}$ 子群。接下来我们证明 P 有一个主 $G_{0\mathrm{an}}$ 子丛。

我们对下中心列的长度作归纳

$$U \;=\; U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset U_{n+1} \;=\; 1$$

对于 U。若 $n=0$，则 $G_0=G$。假设 $n>0$。那么，对于 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$，将 G 换为 G/U_n，将 P 换为沿着从 G_{an} 到 $(G/U_n)_{\mathrm{an}}$ 的投影对 P 的推前 $P/(U_n)_{\mathrm{an}}$，即可满足分裂条件，因为相关函子同构于先从 G/U_n 到 G 作膨胀，再作 $P\times^{G_{\mathrm{an}}}-$。由于

$$G/U_n \;=\; (U/U_n)\rtimes_{\mathbb{C}} G_0,$$

$P/(U_n)_{\mathrm{an}}$ 根据归纳假设有一个主 $G_{0\mathrm{an}}$ 子丛。它在从 P 到 $P/(U_n)_{\mathrm{an}}$ 的投影下的原像是 P 的一个主 G'_{an} 子丛 P'，其中

$$G' \;=\; U_n\rtimes_{\mathbb{C}} G_0$$

是从 G 到 G/U_n 的投影下 G_0 的原像。我们证明 $P'/G_{0\mathrm{an}}$ 在 X 上有一个截面，因此 P'，进而 P，具有一个主 $G_{0\mathrm{an}}$-子丛。

由于 U_n 是交换且幺幂的，它可以识别为一个有限维 $\mathbb{C}$-向量空间。 G' 通过共轭作用在 U_n 上的作用，因而赋予它一个 G' 的表示结构。我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow U_n \longrightarrow W' \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

G'的表示，其中 W' 的底层是带有作用的 $\mathbb{C}$-向量空间 $U_n \oplus k$

$$(ug_0)(v, \alpha) = (g_0 v + \alpha u, \alpha)$$

G'中点 ug_0 在 W'中点(v, α)上的纤维，且 G'在 $\mathbb{C}$上平凡作用。于是， W'在$\mathbb{C}$ 中1上方的纤维可识别为

$$G'/G_0 = U_n$$

其上 G' 通过平移作用。因此我们有短正合列

$$0 \longrightarrow P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} U_n \longrightarrow P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} W' \longrightarrow P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \tag{4.6}$$

X上的向量丛，其中 $P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} W'$在 $P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} \mathbb{C}$ =$X \times \mathbb{C}$ 的恒等截面上方的纤维为

$$P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} (G'/G_0)_{\mathrm{an}} = P'/G_{0\mathrm{an}}.$$

因此，只需证明（4.6）中的列分裂。事实上，$G/G' = U/U_n$ 是仿射的，因此如上所述，扩张 W' 由 $\mathbb{C}$ 扩张 U_n 是将某个扩张从 G 限制到 G' 后再推前得到的，该扩张属于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ 。由于先将 G 限制到 G' 再经由 $P' \times^{G'_{\mathrm{an}}} -$ 同构于 $P \times^{G_{\mathrm{an}}} -$，所需的分裂便由对 $P \times^{G_{\mathrm{an}}} -$的分裂假设得出。□

设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的适当满射态射，且 X 不可约。那么，将 f 限制到 X' 的某个不可约分支 X'' 上，所得映射是满射： X' 被其不可约分支覆盖是局部有限的 [GR84, 9.2.2], ，因此，如果 X_{red} 在 $x \in X$ 处光滑，则存在 X' 的一个不可约分支 X'' ，使得 $f(X'')$ 与 X 在 x 处的维数相同，从而 $f(X'') = X$ [GR84, 9.1.1]。

下面的定理 4.11 可由引理2.4、2.6和2.7及命题 4.10 推出，方法与由引理2.2、2.5和2.7及命题 3.6 推出定理 3.7 相同：写出 $J = G_{\mathrm{an}}$ 后，在 (a) 成立的情形下，证明几乎完全相同；在 (b) 成立的情形下，我们再次将 X 写成其不可约分支 X_α 的不交并 $\coprod_\alpha X_\alpha$ ，并以 f 在 $\coprod_\alpha X'_\alpha$ 上的限制替代 f，其中 X'_α 如上所述是 $f^{-1}(X_\alpha)$ 的一个不可约分支，且 $f(X'_\alpha) = X_\alpha$。

定理 4.11. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间的一个态射， J 是一个代数复李群，且 P 是 X上的主 J-丛。假设下列条件之一成立：

(a) $f_*\mathcal{O}_{X'}$ 是一个处处非零的有限型局部自由 $\mathcal{O}_X$-模；(b) X 是正规的，且 f 是适当且满射的。

那么， P 有一个结构群为 J 的约化闭复李子群 J_0 的主 J_0-子丛，当且仅当 f^*P 也如此。

设 X 是一个复解析空间， J 是一个约化复李群。若对 J 的某个约化闭复李子群 J' ，主 J-丛 P 在 X 上存在结构群为 J' 的主 J'-子丛 P ，则 J' 包含 J的单位连通分支；满足此条件的主 J-丛 X 称为几乎极小。沿代数复李群的满同态推前任何几乎极小的主 J-丛，所得丛仍是几乎极小的。

引理 4.12 可用与引理 3.9相同的方法证明。

引理 4.12. 设 X 为复解析空间， J 为约化复李群， $J_0 \subset J$ 为包含 J 的单位连通分支的闭复李子群。设 P 为 X 上的主 J-丛，且 P_0 为 P 的主 J_0-子丛。那么， P 几乎极小，当且仅当 P_0 也如此。

下文的定理 4.13 可由引理 2.4、2.6、3.8 和 4.12 以及推论 4.9 推出，其方式与定理 3.10 由引理 2.2、2.5、3.8 和 3.9 以及推论 3.5 推出相同。注意，若定理 4.11 的 (b) 成立，则 X 是约化的，因此当 X 非空时，“每个定义在 X 上的全纯函数在 X_{red} 上的限制都是常数”这一条件等价于“$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$”。

定理 4.13. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的一个态射， J 是一个约化复李群，且 P 是一个主 J-丛，定义在 X之上。假设每个定义在 $X_{\rm red}$ 上的全纯函数在 X 上的限制都是常数，并且定理 4.11 的*(a)* 或*(b)*成立。那么， P 是几乎极小的，当且仅当 f^*P 也是如此。

设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的一个态射，且定理 4.11 的 (a) 或 (b) 条件成立。则 $f(X')$在 X 中稠密。假设X' 上的每个全纯函数在$X'_{\rm red}$ 上的限制都是常数。那么， X 上的每个全纯函数在 $X_{\rm red}$ 上的限制也都是常数。由定理 4.7 和推论 4.8，可按定理 3.3 和推论 3.4 推出参数化 (3.3) 及映射 (3.5) 的解析类比。因此，若 J 是代数复李群， P 是 X上的主 J丛，并且对于 J 的某个约化闭复李子群 J_0， P 具有一个极小主 J_0子丛 P_0，且 f^*P_0 也极小，那么沿 f 拉回，对于 J 的任意约化闭复李子群 J_1，都会诱导一个双射，将 P的主 J_1子丛的同构类映到 f^*P的主 J_1子丛的同构类。下文的定理 4.14 可由定理 4.11 和 4.13 按定理 3.7 和 3.10 推出定理 3.11 的方式得到。

定理 4.14. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间的一个态射。假设 X' 上的每个全纯函数在 $X'_{\rm red}$ 上的限制都是常数；对于 X的每个连通有限 ´etale 覆盖 Z， f^*Z 都是连通的；并且定理 4.11 的 (a) 或 (b) 成立。则对于每个代数复李群 J、 J的约化闭复李子群 J_1 、以及 X上的主 J-丛 P，沿 f 的拉回给出从 P的主 J_1-子丛的同构类集合到 f^*P的主 J_1-子丛的同构类集合的一个双射。

推论4.15 以下结论可由定理 4.14 以与推论 3.12 由定理 3.11推出相同的方式推出 $f\colon X' \longrightarrow X$ 与定理4.14中的条件相同，并且4.14 从 Mod(X') 到 Mod(X')的投影与拉回张量函子的复合

$$f^* : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X')$$

是满的，因此 f^* 是"局部的"，即将 Mod(X) 唯一的极大张量理想映入 Mod(X') 唯一的极大张量理想，而诱导的张量函子

$$\overline{\mathrm{Mod}(X)} \longrightarrow \overline{\mathrm{Mod}(X')}$$

是全忠实的。推论4.15 在 (1) 的情形下由分裂定理得出。

推论 4.15. 设 $f\colon X' \longrightarrow X$ 是复解析空间之间的一个态射，且满足定理 *4.14* 的假设。

(1) 对任意约化复李群 J，在 X 上的两个主 J-丛 P_1 和 P_2 同构，当且仅当 f^*P_1 和 f^*P_2 同构。(2) X 上的向量丛 $\mathcal{V}$ 不可分解，当且仅当 $f^*\mathcal{V}$ 不可分解。(3) X 上的两个向量丛 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 同构，当且仅当 $f^*\mathcal{V}_1$ 和 $f^*\mathcal{V}_2$ 同构。

C考虑以下条件，它略强于 （b）定理4.11中的条件：

（b）′ X 是正规的， X' 非空，并且 f 是适当的，且其在X' 的每个不可约分支上的限制都是满射。

类似于代数情形，可以看出，若在定理4.14 中，将假设"定理4.11的（b）或（a）成立"替换为"定理4.11的（a）或（b）′ 成立"，那么假设"每个定义在 $X'_{\rm red}$ 上的全纯函数在 X' 上的限制都是常数"可以替换为"每个定义在 $X_{\rm red}$ 上的全纯函数在 X 上的限制都是常数"。

Acknowledgements

第一作者获得 J. C. Bose Fellowship（JBR/2023/000003）的部分资助 .

References

[AK02] Yves Andr´e 和 Bruno Kahn, *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales*, 《帕多瓦大学数学研讨班报告》108（2002），107–291。MR MR1956434（2003m:18009）[BD22] Indranil Biswas 和 Sorin Dumitrescu, *Holomorphic bundles trivializable by proper surjective holomorphic map*, 《国际数学研究通知》IMRN（2022），第 5 期，3636–3650。MR 4387173[BO21] Indranil Biswas 和 Peter O'Sullivan, *Étale triviality of finite equivariant vector bundles*, ´《代数几何电子期刊》（），文章号。MR Bog Fedor A. Bogomolov, *Stable vector bundles on projective surfaces* **185** 1994 4, 3 26 1272185，《数[90] *Catégories tannakiennes* 87, ¨学文集》（），第 – 期。MR Del Pierre Deligne, 《Grothendieck纪念文集》，第 II 卷，《数学进展》，第 卷，Birkhauser Boston, 波士顿，马萨诸塞州，1990年，第 111–195 页。MR 1106898（92d:14002）[DMOS82] Pierre Deligne、James S. Milne、Arthur Ogus 和 Kuang-yen Shih, *Hodge cycles motives and Shimura vari-*，，《数学讲义》，*eties* 1982 654325第 900 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，。MR [GR84] Hans Grauert 和 Reinhold Remmert, *Coherent analytic sheaves*, 《数学科学基础原理》 [《数学科学基础原理》]，第 265 卷，Springer-Verlag，柏林，1984年。MR 755331[GW10] Ulrich G¨ortz 和 Torsten Wedhorn, *Algebraic geometry I*, 《高级讲座数学丛书》，Vieweg + Teub-ner，威斯巴登，2010， 2675155《概形：示例与练习》。MR O'S Peter O'[05] *The structure of certain rigid tensor categories* Sullivan，，《巴黎科学院数学报告》340（2005），第 8 期，557–562。MR MR2138703（2006a:18006）[O'S10] Peter O'Sullivan, *The generalised Jacobson-Morosov theorem*, 《美国数学会回忆录》207（2010），第 973 号，viii+119。MR 2667427（2011m:14074）[O'S19] Peter O'Sullivan, *Principal bundles under reductive groups*, 2019, arXiv:1506.07828v2。[Sta22] Stacks 项目作者, *The stacks project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2022。

Department of Mathematics, Shiv Nadar University, NH91, Tehsil Dadri, Greater Noida, Uttar Pradesh 201314, India*Email address*: indranil.biswas@snu.edu.in, indranil29@gmail.com

Mathematical Sciences Institute, The Australian National University, Canberra ACT 2601, Australia *Email address*: peter.osullivan@anu.edu.au