arXiv:2303.09091v1 [math.AT] 16 Mar 2023

# T族 Clifford 指数与微分 KO 理论

DANIEL BERWICK-EVANS

Abstract. 拓展 Atiyah–Bott–Shapiro 和 Quillen 的思想，我们构造了一个微分 KO 理论模型，其余循环由带有超联络的 Clifford 模族构成。该模型旨在容纳自旋流形丛的解析推前，从而为 Atiyah 和 Singer 的族指标提供微分精化。

Contents

1. 引言 1 2. 族指标的主要思想 3 3. Clifford 模 5 4. Atiyah–Bott–Shapiro 构造与谱 KO 11 5. 来自 $\mathrm{Cl}_n$-丛的 KO 类 17 ˇ 6. $\mathrm{Cl}_n$-丛的庞特里亚金类作为切赫–德拉姆余循环 20 7. 微分余循环 26 8. 族微分指标 31 参考文献 36

## 1. 引言

本文给出了次数为 $n \in \mathbb{Z}$ 的微分 KO 理论模型，将次数为 0 的 $\widehat{\mathrm{K}}^0$，微分复 K 理论的生成元与关系描述推广了。

$\mathrm{KO}^n(M)$ 的生成元是三元组 $(V, \mathbb{A}, \phi)$，其中 $\widehat{V} \to M$ 是带厄米度量的 $\mathbb{C}$-向量丛，$\mathbb{A}$ 是厄米超联络，而 $\phi$ 是 $M$ 上的奇微分形式。这些数据满足一个涉及 a$\widehat{\ }$ 陈–西蒙斯形式的等价关系；详情见 §7.1。初步来看，$\mathrm{KO}^n(M)$ 的生成元将 $\mathbb{C}$ 替换为实 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_n$：考虑三元组 $(V, \mathbb{A}, \phi)$，其中 $V$ 是带度量的实向量丛，带有自伴 $\mathrm{Cl}_n$ 作用；$\mathbb{A}$ 是 $V$ 上一个 $\mathrm{Cl}_n$-线性且保持度量的联络；$\phi$ 是次数模 4 为 $n-1$ 的微分形式。这些数据上恰当的等价关系推广了 Clifford 模上的 Atiyah–Bott–Shapiro 等价关系 [ABS64],，另见 Donovan–Karoubi [DK70]。粗略地说，当存在带度量向量丛的包含映射 $g\colon V \hookrightarrow V'$，并同时给出正交补 $V^\perp \subset V'$ 上的 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$ 作用数据，且满足关于陈–西蒙斯形式的一个条件时，三元组 $(V, \mathbb{A}, \phi)$ 与 $(V', \mathbb{A}', \phi')$ 等价。主要的微妙之处在于，这个等价关系需要在 $M$ 上局部实-$\widehat{\ }$施，也就是说，$\mathrm{KO}^n(M)$ 的一个元素由一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 给出，在每个 $U_\alpha$ 上都有 $(V_\alpha, \mathbb{A}_\alpha, \phi_\alpha)$，并且对每个 $U_\alpha \bigcap U_\beta$ 都有等价 $g_{\alpha\beta}$，这些等价满足一个余循环 ˇ 条件，该条件细化了 Čech–de Rham 复形中的条件；详情见 §6 和 §7。

**定义 1.1** （定义 7.6 的概要）。设 $M$ 是一个光滑流形。考虑由元组 $\{V_\alpha \to U_\alpha, \mathbb{A}_\alpha, \phi_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ 的等价类生成的自由阿贝尔群，并对具有恰当陈–西蒙斯形式的协调$\widehat{\ }$取商。定义 $\mathrm{KO}^n(M)$ 为将向量丛直和$\widehat{\ }$与 $\mathrm{KO}^n(M)$ 中的加法等同后得到的商；参见（87）。

$\widehat{\ }$**定理 1.2.** 分次环 $\mathrm{KO}^\bullet(M)$ 自然同构于 $M$ 的微分 KO 理论。当 $M = \mathrm{pt}$ 时，这一描述精化了 Atiyah–Bott–Shapiro 同构，该同构将一个 Clifford 模映射到 $\mathrm{KO}^\bullet(\mathrm{pt})$ 中的一个类。

我们强调，定义 1.1 中的实向量丛 $V_\alpha \to U_\alpha$ 是有限秩的。相比之下，Atiyah 和 Singer 构造（非微分）KO 理论的方式，是通过 $\mathrm{Cl}_n$-线性弗雷德霍姆算子的族，这些算子作用于无限秩丛 [AS69] 上。正如下文所述，指标丛构造使我们能够比较 Atiyah 和 Singer 对 $\mathrm{KO}^n(M)$ 的描述与定理 1.2 中的描述；见 §4.2-§4.5 和命题 5.12。§2 概述了定义 1.1 如何在考虑 Clifford 线性狄拉克算子族的指标丛的微分精化时自然出现。这类算子族的核通常不是向量丛（其秩不一定局部恒定），因此指标丛及其微分精化需要精细的粘合数据。定义 1.1 专为容纳这些信息而设计，为微分 KO 理论中的解析指标提供了一个自然的归属。

**定理 1.3.** 设 $\pi\colon X \to B$ 是一个由 $n$ 维黎曼自旋流形构成的真族，且 $V \to X$ 是一个带度量实向量丛，带有相容联络 $\nabla$。族 Clifford 指数确定了一个次数为 $-n$ 的微分余循环 $\hat{\pi}_!(V, \nabla)$，定义在 $B$ 上，其$\widehat{\ }$关联类 $[\hat{\pi}_!(V, \nabla)] \in \mathrm{KO}^{-n}(B)$ 是 KO 理论中解析推前的精化。

1.1. **与其他工作的比较。** 与针对复丛的微分 K 理论相比，关于微分 KO 理论的文献相当稀少。迄今最全面的论述出自 Grady 和 Sati [GS21]。他们采用 Hopkins 和 Singer 的微分上同调模型 [HS05]，并以谱层的形式表述 [BNM16]。将这一一般构造应用于 KO 时，它阐明了微分扭曲等结构方面，并与强大的同伦论工具相结合，例如微分 Atiyah–Hirzebruch 谱序列。

复 K 理论的 Hopkins–Singer 微分精化常会通过几何动机余循环模型加以增强。这些更具针对性的 K 理论表述对于某些构造至关重要，例如 [GL15] 中的微分解析指标和 [FL10] 中的微分指标定理。反过来，这些构造使人们能够精化并拓展经典结果，例如 [Lot94, Fre01, Bun09, Bun11]。这些几何模型及其后续应用在微分 KO 理论中仍未得到充分发展。Freed 概述了一种候选构造 [Fre00, page 34]，，Bunke 和 Schick 也提出了进一步的建议 [BS12, §4.9]；然而，这些想法从未得到充分阐述。最近，Gomi 和 Yamashita [GY22] 开发了一种模型，将其作为 Karoubi 的 KO 理论 [Kar78], 的增强形式，旨在研究凝聚态物质系统不变量的微分精化 [FH21]。

本文构造的微分 KO 理论余循环模型，受到指标丛几何的启发，旨在应用于实微分指标理论。该模型的核心是 $\mathrm{Cl}_n$-丛的定义（见定义 5.2）；这一概念源自 $\mathrm{Cl}_n$-线性狄拉克算子的有限维族指标，见 §2.2。这一几何与 Furuta 的向量丛 [Fur02、Gom10] 和 Henrique 的拟丛[Hen09], 颇有共鸣，不过下文将着重阐述其与 Atiyah–Bott–Shapiro 构造 [ABS64]的联系。未来的工作中，我们计划在定理 1.2 的框架下，通过实现 Atiyah–Bott–Shapiro Thom 类来构造微分拓扑指标。

将实克利福德代数 $\mathrm{Cl}_n$ 替换为复克利福德代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ l，可得到微分复 K 理论中定理 1.2 和 1.3 的类似结果。这与先前的结果有所关联。例如，当 $n = 0$ 和 $M$ 紧致时，定理 1.2 推广了 $\widehat{\mathrm{K}}^0(M)$ 的生成元与关系表示，该表示以带联络的有限秩向量丛和一个奇数次微分形式为基础；参见备注 7.7。本文的结果也与更偏解析风格的模型有所重叠：将指标丛构造（见 §2）应用于 [GL15] 的微分 K 理论希尔伯特丛模型，可得到定义 1.1 的一个版本，其中系数取自 $\mathbb{C}$；而 [GL15, §6] 中的奇数次群可用 $\mathbb{C}\mathrm{l}_1$ 线性超联络来理解。最后，定理 1.3（包括其陈述和证明）推广了 Freed 和 Lott 对自旋$^c$流形族构造微分解析指标的方法 [FL10]。

定义 1.1 也旨在接收一类 $1|1$ 维欧几里得场论的余循环映射，这类场论遵循 Stolz 和 Teichner [ST04, ST11] 的风格。Stolz–Teichner 计划的一项基本主张是，对这类场论进行量子化应对应于 KO 理论中的解析推前。据猜想， $2|1$ 维推广将为拓扑模形式这一上同调理论提供解析推前。定理 1.2 和 1.3 提供了一个背景，可据此开始将其中一些想法精确化，见 [BE23a, BE23b, BE23c]。鉴于本文在几何学方面本身具有独立价值，本文的写作不依赖于这场关于场论的讨论。

1.2. **致谢**。感谢 Theo Johnson-Freyd 耐心地（并且一再地）回答我关于超代数符号规则的问题。也感谢 Yigal Kamel 仔细审阅先前的草稿并提出反馈。本研究得到美国国家科学基金会 DMS-2205835 号资助的支持。

## 2. The main idea from the families index

定义 1.1 在将 Freed 和 Lott 的族微分指标 [FL10, §3] 推广到 Clifford 线性狄拉克算子的族时自然出现。本节将回顾族指标的若干版本，并说明它们与本文定义和结果之间的关系。

2.1. **K 理论中的族指标K理论**。 设 $X$ 是一个紧致偶维自旋$^c$ 流形。流形 $X$ 上狄拉克算子 $\not{D}$ 的指标为

$$\mathrm{Ind}(\not{D}) = [\ker(\not{D})_{\mathrm{ev}}] - [\ker(\not{D})_{\mathrm{odd}}] \in \mathrm{K}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}, \tag{1}$$

其中，我们将 $\ker(\not{D})$ 视为一个 $\mathbb{Z}/2$-分次的 $\mathbb{C}$-向量空间，其偶子空间与奇子空间分别为 $\ker(\not{D})_{\mathrm{ev}}$ 和 $\ker(\not{D})_{\mathrm{odd}}$。一族黎曼自旋$^c$ 流形 $\pi\colon X \to B$（具有紧致偶维纤维）确定了 $B$ 上的一族算子 $\not{D}$ 。在 $b \in B$ 处的纤维是自旋$^c$ 流形 $\pi^{-1}(\{b\}) = X_b$ 上的狄拉克算子 $\not{D}_b$ 。我们希望利用这些数据构造 $\mathrm{K}(B)$ 中的一个类。取逐纤维指标后，每个 $b \in B$ 都得到一个 $\mathbb{Z}/2$-分次向量空间 $\ker(\not{D}_b)$。然而，这些空间通常无法拼合成一个 $\mathbb{Z}/2$-分次向量丛，例如，核的维数未必局部恒定。因此，这种朴素的族指标构造无法确定 $\mathrm{K}(B)$ 中的一个类，以推广公式 (1)。

对此有两种广为人知的补救方法。第一种是解析方法：弗雷德霍姆算子空间表示函子 $\mathrm{K}(-)$，例如参见 [LM94, §III.8]。一族自旋$^c$流形 $\pi\colon X \to B$ 确定一个 $B$-族狄拉克算子，进而给出一个从 $B$ 到弗雷德霍姆算子空间的映射。该映射的同伦类定义了族解析指标 $\mathrm{Ind}(\not{D}) \in \mathrm{K}(B)$。第二种是几何方法：考虑由下式定义的 $B$ 的开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}$

$$U_\lambda := \{b \in B \mid \lambda \notin \mathrm{Spec}(\not{D}_b^2)\}, \tag{2}$$

其中，$\mathrm{Spec}(\not{D}_b^2)$ 表示自伴非负狄拉克拉普拉斯算子 $\not{D}_b^2$ 的谱。对于 $b \in U_\lambda$，令 $\mathcal{H}_b^{<\lambda}$ 表示 $\not{D}_b^2$ 中特征值小于 $\lambda$的特征子空间之和。 $\not{D}_b^2$ 的椭圆性意味着这些 $\mathcal{H}_b^{<\lambda}$ 拼合成一个有限秩、光滑的 $\mathbb{Z}/2$-分次向量丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$。因此，我们得到一个 K 理论类 $[\mathcal{H}^{<\lambda}] = [\mathcal{H}^{<\lambda}_{\mathrm{ev}}] - [\mathcal{H}^{<\lambda}_{\mathrm{odd}}] \in \mathrm{K}(U_\lambda)$。在 $U_\lambda \bigcap U_\mu$ 与 $\lambda < \mu$ 的交叠区域上，存在显然的 $\mathbb{Z}/2$-分次向量丛包含映射，

$$g_{\lambda\mu}\colon \mathcal{H}^{<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{H}^{<\mu}. \tag{3}$$

$\not{D}$ 在包含映射 (3) 的正交补上的限制确定了一个可逆奇端同态 $e_{\lambda\mu}$ ，它证明了 K 理论类 $[\mathcal{H}^{<\lambda}] = [\mathcal{H}^{<\mu}] \in \mathrm{K}(U_\lambda \bigcap U_\mu)$ 相等，见 (106)。事实上，包含映射 (3) 和奇同构 $e_{\lambda\mu}$ 在 $U_\lambda \bigcap U_\mu \bigcap U_\mu$上满足余循环条件。由此构造出一个定义良好的类

$$\mathrm{Ind}(\not{D}) := [\{\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda, g_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu}\}] \in \mathrm{K}(B) \tag{4}$$

等于 $\pi$ 的族解析指标： $X \to B$；参见 [Fre87, §7.2], [BGV92, §9.5]。

指标的几何描述 (4) 还导出了 $B$ 的微分 K 理论中的一种自然精化，它使用 *Bismut* 超联络，记作 $\mathbb{B}$，并将在下文 (107) 中回顾。$\mathbb{B}$ 的 1 次部分在 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上的限制确定了每个有限秩向量丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \subset \mathcal{H}|_{U_\lambda}$ 上的普通联络 $\nabla^{<\lambda}$，其陈形式为

$$\mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda}) \in \Omega^{\mathrm{even}}(U_\lambda; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]), \qquad |u| = -2. \tag{5}$$

Bismut 超联络的性质进一步唯一确定了数据 (5) 的延拓，使其成为相对于开覆盖 (2) 的 $M$ 上 Čech–de Rham 复形中的一个余循环（见命题 6.15），

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{B}, \{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}) \in \Omega^\bullet(U_*; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]), \qquad (d+\delta)\mathrm{Ch}(\mathbb{B}, \{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}) = 0. \tag{6}$$

按构造，这个 Čech–de Rham 余循环表示指标丛的陈特征。根据黎曼–罗赫定理，另一个代表元是沿纤维积分

$$\int_{X/B} \mathrm{Ch}(\nabla^V) \wedge \mathrm{Todd}(\nabla^{X/B}) \in \Omega^\bullet_{\mathrm{cl}}(B; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]) \tag{7}$$

of t $V$ 的陈形式经 Todd($\nabla^{X/B}$) 修正后的形式，即自旋$^c$-族的 Todd 形式。

族微分指标源于在 Čech–de Rham 复形中指定一个上边界，用以调和余循环 (6) 和 (7)。借鉴 Bismut [Bis86],Bismut–Cheeger [BC89] 和 Freed–Lott [FL10, §3], 的方法，存在微分形式 $\eta_\lambda \in \Omega^{\mathrm{odd}}(U_\lambda,\ \mathbb{R}[u, u^{-1}])$，满足

$$\int_{X/B} \mathrm{Ch}(\nabla^V) \wedge \mathrm{Todd}(X/B) - \mathrm{Ch}(\mathbb{B}, \{U_\lambda\}) = (d+\delta)\{\eta_\lambda\} \in \Omega^\bullet(U_*; \mathbb{R}[u, u^{-1}]), \tag{8}$$

˘ 其中 $d$ 是 de Rham 微分，$\delta$ 是 Čech 微分，也就是说，$\eta_\lambda$ 确定了 Čech–de Rham 复形中所需的上边界。这确定了一个微分 K-上循环

$$\widehat{\mathrm{Ind}}(\not{D}) = [\{(\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda, \nabla^{<\lambda}, \eta_\lambda), (g_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu})\}] \in \widehat{\mathrm{K}}(B) \tag{9}$$

表示微分指标。

2.2. **KO 理论中的族指标**。现在考虑定义在 $n$ 维黎曼自旋流形上的 Clifford 线性狄拉克算子 $\not{D}$。$\not{D}$ 的核是一个有限秩 Clifford 模 [ LM94, II.7]。此模在 Atiyah–Bott–Shapiro 映射下的等价类给出 KO$^{-n}$(点) 中的一个类 [ABS64]

$$\mathrm{Ind}(\not{D}) := [\ker(\not{D})] \in \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt}). \tag{10}$$

这是 $\not{D}$ 的 克利福德指标。有关 Clifford 线性狄拉克算子的更多细节，请参见 §8.1；有关 Atiyah–Bott–Shapiro 构造的综述，请参见 §4.1。

将 (10) 推广到 $n$ 维自旋流形族 $\pi\colon X \to B$ 时，逐纤维 Clifford 线性狄拉克算子的核出于与自旋$^c$ 情形相同的原因，无法确定一个光滑的 Clifford 模丛。解析方法再次提供了解决方案：Clifford 线性 Fredholm 算子空间 Fred$_n$ 表示函子 KO$^{-n}$(–) [AS69], [ LM94, III.10]。与自旋流形丛 $\pi\colon X \to B$ 相关联的 Clifford 线性狄拉克算子族确定了一个映射 $B \to \mathrm{Fred}_n$，其同伦类定义了族解析指标

$$\mathrm{Ind}(\not{D}) \in [B, \mathrm{Fred}_n] \simeq \mathrm{KO}^{-n}(B). \tag{11}$$

本文的主要目标是发展一种与自旋$^c$-狄拉克算子的指标丛相对应的、用于研究族 Clifford 指数的互补几何方法。本节余下部分将概述其主要思想。

注释 2.1。在处理 Clifford 线性 Dirac 算子时，需要确定若干符号约定（详见注释 3.7 和 4.1）。根据我们的约定，Clifford 线性 Dirac 算子的核是一个（左）Cl$_{-n}$-模。

对于一族 $\not{D}$ 个 Cl$_{-n}$-线性 Dirac 算子，像之前一样定义一个开覆盖 (2)：考虑 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 不是 $\not{D}^2$的特征值的子空间。将特征值为 $< \lambda$ 的特征子空间直和，便在每个分支上得到有限秩 Clifford 模丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$。该丛的光滑性源于狄拉克拉普拉斯算子 $\not{D}^2$的椭圆性。在交叠部分 $U_\lambda \bigcap U_\mu$上，将 $\not{D}$ 限制到丛包含映射 (3) 的像的正交补上，便得到一个与 Cl$_{-n}$作用相交换的可逆奇端同态，见 (106)。该奇端同态生成一个 Cl$_{-1}$作用，从而在正交补上产生一个 Cl$_{-n}\otimes$Cl$_{-1} \simeq$ Cl$_{-n-1}$作用，并将先前的 Cl$_{-n}$作用扩展到该正交补上。存在这样的扩张，意味着 $U_\lambda \bigcap U_\mu$ 上的 Clifford 模丛在 KO 理论中表示同一个类。事实上，Clifford 线性情形下的类似信息 (4) 确定了 KO$^{-n}(B)$ 中的一个类。

总而言之，Cl$_{-n}$-线性狄拉克算子族的指标丛由以下数据构成：

(i) 一个开覆盖，以及有限秩 Cl$_{-n}$-模丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$；(ii) 对每个交集 $U_\lambda \bigcap U_\mu$，都有 Cl$_{-n}$-模的包含映射 (3)，以及正交补上的 Cl$_{-n-1}$ 作用数据，该作用延拓了 Cl$_{-n}$ 作用。

这些数据满足余循环条件。这实质上恢复了 Cl$_{-n}$-丛的定义 5.2。反过来，Cl$_{-n}$-丛可用于构造 KO$^{-n}(M)$（命题 5.12），从而得到定理 1.2 在（非微分）KO 理论中的一个版本。

微分精化可通过将复 K 理论中的微分指标 (9) 加以推广而得到。首先，对于一个克利福德线性狄拉克算子族，式 (107) 中定义的 Bismut 超联络 $\mathbb{B}$ 自动是 Cl$_{-n}$-线性的。它限制为每个 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上的普通 Cl$_{-n}$-线性联络 $\nabla^{<\lambda}$，其陈形式与 (5) 类似，构成表示指标丛的庞特里亚金特征的 Čech–de Rham 余循环 (6) 的部分数据。将 (7) 中的 Todd 形式替换为 $A$-形式后，微分指标的其余数据来自确定 Čech–de Rham 上边界（如 (8) 所示）的 $\eta_\lambda$-形式。这些形式由标准构造的克利福德线性推广构造而成。有了这些定义，微分 KO 指标的定义方式与 (9) 基本相同，

$$\widehat{\mathrm{Ind}}(\not{D}) = [\{(\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda, \nabla^{<\lambda}, \eta_\lambda), (g_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu})\}] \in \widehat{\mathrm{KO}}^{-n}(B) \tag{12}$$

其中 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 是一个 Cl$_{-n}$-模丛，$g_{\lambda\mu}$ 是 Clifford 模丛的包含映射，$e_{\lambda\mu}$ 将包含映射的正交补上的 Cl$_{-n}$-作用扩展为 Cl$_{-n-1}$-作用，$\nabla^{<\lambda}$ 是 $\mathcal{H}^{<\lambda}$上的 Clifford 线性联络，而形式 $\{\eta_\lambda\}$ 确定了一个 Čech–de Rham 上边界。

微分余循环的定义 7.3 经过专门设计，使得微分指标 (12) 可直接作为一个例子。将类似 (12) 的数据构造为到微分 KO 理论的映射，基本上沿用复 K 理论中的相同思路。定理 1.2 的主要工作是证明该映射是满射；这归结为一个计算（命题 7.23）。接着，定理 1.3 可由上文概述的微分指标构造推出。

## 3. Clifford modules

本节回顾克利福德模理论。我们重点讨论实克利福德代数和实克利福德模，并简要介绍一些关于 $\mathbb{C}$的理论内容。对于适用于实系数或复系数的定义和构造，我们用 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

**3.1. $\mathbb{Z}/2$-分次 $*$-代数。**实（分别是复）超向量空间范畴，其对象是 $\mathbb{Z}/2$分次的、定义在 $\mathbb{R}$（分别是 $\mathbb{C}$）上的向量空间，其态射是保持分次的线性映射。我们通过分次张量积将其提升为对称幺半范畴，其中“超”这一修饰语指的是编织同构中的符号

$$V \otimes_{\mathbb{F}} W \xrightarrow{\sim} W \otimes_{\mathbb{F}} V \qquad v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v \quad v \in V,\ w \in W$$

其中，$v$ 和 $w$ 是次数为 $|v|$的 $|w| \in \mathbb{Z}/2$齐次元素。对于超向量空间 $V$，令 $V_{\mathrm{ev}} \oplus V_{\mathrm{odd}}$ 表示 $V$的偶子空间与奇子空间直和分解

。分次对合是线性映射 $(-1)^{\mathsf{F}}$: $V \to V$，它在 $V_{\mathrm{ev}}$上作用为 $+1$，在 $V_{\mathrm{odd}}$上作用为 $-1$。[1] 令 $\Pi V$表示 $V$ 的奇偶反转，即 $(\Pi V)_{\pm} = V_{\mp}$。全文中，$\mathbb{F}^{n|m}$ 表示满足 $(\mathbb{F}^{n|m})_{\mathrm{ev}} = \mathbb{F}^n$ 且 $(\mathbb{F}^{n|m})_{\mathrm{odd}} = \mathbb{F}^m$的超向量空间。

$\mathbb{F}$ 上的超代数 是 $\mathbb{F}$上的超向量空间中的代数对象。超代数中元素的超交换子 定义为

$$[a,b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba \qquad a,b \in A, \tag{13}$$

对于齐次元素 $a$ 和 $b$。超交换子满足雅可比恒等式的分次版本。

**例 3.1.** 对于超向量空间 $V$，令 End($V$) 表示所有线性映射$V \to V$（不一定保持分次）的集合，其中保持分次的映射视为偶映射，反转分次的映射视为奇映射。线性映射的复合赋予 End($V$) 超代数结构。

注 3.2. 推广前一个例子，对于超向量空间 $V$和 $W$，可以考虑由所有线性映射 $V \to W$ 构成的超向量空间 Hom($V, W$)，并根据线性映射是保持分次还是反转分次来赋予分次。这使超向量空间范畴具有闭幺半结构，即 $- \otimes V$是 Hom($V$, –) 的左伴随。

超代数上的超迹 是一个超向量空间之间的映射

$$\mathsf{sTr}_A \colon A \to \mathbb{F} \qquad \mathsf{sTr}_A([a,b]) = 0 \tag{14}$$

它在超交换子上取值为零，因此由一个线性映射 $A/[A,A] \to \mathbb{F}$决定。超代数的相反代数 $A$ 是一个超代数 $A^{\mathsf{op}}$，其底层超向量空间和乘法相同

$$a \cdot_{\mathsf{op}} b := (-1)^{|a||b|} b \cdot a$$

其中 $b \cdot a$ 是 $A$中的乘法。对于超代数 $A$ 和 $B$，令 $A \otimes B$ 表示乘法为下式的超代数

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'.$$

**例 3.3.** 线性自同态 $T$: $V \to V$的超迹 定义为

$$\mathsf{sTr}(T) := \mathsf{Tr}((-1)^{\mathsf{F}} \circ T) \tag{15}$$

其中 Tr 是普通迹。超迹确定了例 3.1 中超代数 End($V$) 上的一个迹。

超代数上的 $*$-结构 是其底层（未分次）代数上的 $*$-结构，即底层代数的一个反对合（当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$时，它是共轭线性的）。

**例 3.4.** 通常的转置在 End($V$) 上确定了一个 $*$-结构。

注记 3.5。 一个密切相关的概念是 $*$-超代数，即带有一个对合分次 反对合的超代数；这意味着存在一个在分次意义下到相反代数的同态。带有 $*$-结构的超代数与 $*$-超代数之间有一套对应关系 [DEF+99，第 89-92] 页。与 $*$-超代数相关的符号（尽管在范畴论上或许更令人称道）与指标理论中的标准约定不太协调。这就是我们选择采用普通 $*$-结构的原因。

[1] 记号 $(-1)^{\mathsf{F}}$ 源自物理学，其中 F 代表“费米子”，例如参见 [Wit82, §1]。

**3.2. 超代数上的模。** 给定一个超代数 $A$，令 ${}_A\mathsf{Mod}$ 和 $\mathsf{Mod}_A$ 分别表示左 $A$-模和右 $A$-模的范畴，其对象是带有一个（分次） $A$-作用的超向量空间。这些范畴通过 $A$-模的直和具有对称幺半结构。类似地，令 ${}_A\mathsf{Mod}_B$ 表示 $A-B$-双模的范畴。存在范畴的典范等价

$$ {}_{A\otimes B}\mathsf{Mod} \simeq {}_A\mathsf{Mod}_{B^{\mathsf{op}}} \simeq \mathsf{Mod}_{A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}} \tag{16}$$

其中，左 $A\otimes B$-双模 $W$ 被映射为具有相同底层超向量空间和作用的 $A-B^{\mathsf{op}}$-双模

$$a\cdot w\cdot b := (-1)^{|w||b|}(a\otimes b)\cdot w$$

类似的公式定义了右 $A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}$-模。我们常用记号 ${}_AW$ 表示 ${}_A\mathsf{Mod}$ 的对象，用 ${}_AW_B$ 表示 ${}_A\mathsf{Mod}_B$ 的对象。

超代数 $A$ 上的超迹会在（有限维） $A$-模范畴上诱导出一个超迹。对于右 $A$-模，这个超迹来自复合

$$\mathrm{End}_A(W) \xleftarrow{\sim} W\otimes_A W^\vee \to A/[A,A] \xrightarrow{\mathsf{sTr}_A} \mathbb{F} \tag{17}$$

其中， $W^\vee := \mathsf{Hom}_A(W,\ A)$ 是对偶的（左） $A$-模，而映射到 $A/[A,A]$ 的是由求值配对诱导的 Hattori–Stallings 迹 [Hat65, Sta65] ，

$$\mathrm{eval}\colon W\otimes_{\mathbb{F}} W^\vee \to A.$$

On利用式 (16)，可以从右模上的迹得到双模（以及左模）的迹 .

如果存在双模 ${}_AW_B$ 和 ${}_BV_A$，使得 ${}_AW\otimes_B V_A \simeq {}_AA_A$ 和 ${}_BV\otimes_A W_B \simeq {}_BB_B$，其中 $A$ 和 $B$ 被视为它们自身上的双模，则超代数 $A$ 和 $B$ ***Morita*** 等价。对于 Morita 等价的代数，存在范畴等价

$$({}_BV\otimes_A -)\colon {}_A\mathsf{Mod} \leftrightarrows {}_B\mathsf{Mod}\colon ({}_AW\otimes_B -).$$

注3.6。超代数、双模和双模映射分别是（超）Morita 双范畴中的对象、1-态射和2-态射；例如，参见 [Fre12, §1.27]。当该双范畴中的对象 Morita 等价时，它们是 1-同构的。下文不会明确使用这种双范畴结构，但会用到其中的一些术语。特别地，Morita 等价将称为可逆双模，以体现它在 Morita 双范畴中作为可逆 1-态射所发挥的作用。

**3.3. 克利福德代数。** 对于带有二次型 $q$ 的实（未分次）向量空间 $V$，克利福德代数 是 $V$ 的张量代数的商

$$\mathrm{Cl}(V,q) := T(V)/\langle v\otimes v + q(v)\rangle. \tag{18}$$

这是一个超代数，其分次对合由 $v\mapsto -v$ 确定，其中 $v\in V\subset \mathsf{Cl}(V,q)$。

注 3.7。 (18) 中的符号约定有所不同；我们的约定与 [ABS64、LM94、ST04] 一致，但不同于 [Bou88、IX.9]。

令 $\mathsf{Cl}_{n,m}$ 表示与实向量空间 $V=\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^m$ 相关联的克利福德代数，其二次型由 $\mathbb{R}^n$ 上的标准正定内积与 $\mathbb{R}^m$ 上的标准负定内积的直和给出。因此，我们有如下生成元与关系表示，

$$\mathrm{Cl}_{n,m} = \langle f_1,\dots,f_n,e_1,\dots,e_m \mid [f_i,f_j]=-2\delta_{ij},\ [e_i,e_j]=2\delta_{ij},\ [f_i,e_j]=0\rangle \tag{19}$$

其中 $f_i\in\mathbb{R}^n\subset\mathsf{Cl}_{n,m}$ 和 $e_i\in\mathbb{R}^m\subset\mathsf{Cl}_{n,m}$ 为奇的，且所有关系都涉及超交换子 (13)。由于实数集上的二次型由其惯性指数分类，因此对于任意 $(V,q)$，只要 $q$ 的惯性指数为 $(n,m)$，就存在同构 $\mathsf{Cl}(V,q)\simeq\mathsf{Cl}_{n,m}$。

我们赋予 $\mathsf{Cl}_{n,\ m}$ 一个由生成元上的取值确定的 $*$-结构，

$$e_i^* = e_i,\qquad f_i^* = -f_i. \tag{20}$$

我们还采用以下记号

$$\mathrm{Cl}_n := \begin{cases} \mathrm{Cl}_{n,0} & n \geq 0 \\ \mathrm{Cl}_{0,n} & n < 0 \end{cases}$$

and

$$\Gamma_{n,m} = 2^{-(n+m)/2} f_1 f_2 \cdots f_n e_1 e_2 \cdots e_m, \qquad \Gamma_n := \begin{cases} \Gamma_{n,0} & n \geq 0 \\ \Gamma_{0,n} & n < 0. \end{cases} \tag{21}$$

元素 $\Gamma_{n,\ m}$ 取决于对 $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ 选择的定向，改变定向会引入一个符号。存在典范同构

$$\mathrm{Cl}_n^{\mathsf{op}} \simeq \mathrm{Cl}_{-n}, \quad \mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}_1^{\otimes n}, \quad \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_m \simeq \mathrm{Cl}_{n+m}, \quad \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-m} \simeq \mathrm{Cl}_{n,m}, \tag{22}$$

对于 $n,\ m$，二者均为非负或均为非正。同构 $\mathsf{Cl}_n^{\mathsf{op}} \simeq \mathsf{Cl}_{-n}$ 由底层超向量空间上的恒等映射确定，因此下文将记作 $\mathsf{Cl}_n^{\mathsf{op}} = \mathsf{Cl}_{-n}$。其他同构则关键地依赖于 $\otimes$ 是超代数的分次张量积这一事实。

定义复克利福德代数 $\mathbb{Cl}_{n,\ m} := \mathsf{Cl}_{n,\ m} \otimes \mathbb{C}$。对赋值 (20) 作 $\mathbb{C}$-反线性扩张，可为它们赋予 $*$-结构。存在同构 $\mathbb{Cl}_{n,\ m} \simeq \mathbb{Cl}_{n+m} \simeq \mathbb{Cl}_{-n-m}$，其实现方式是将相应的生成元乘以 $i = \sqrt{-1}$。这些同构不保留 (21) 中的元素 $\Gamma_{n,\ m} \in \mathsf{Cl}_{n,\ m} \subset \mathbb{Cl}_{n,\ m}$。

3.4. **Clifford 模。** （实）*Clifford* 模 是 $\mathsf{Cl}(V, q)$ 上的分次左模。右 Clifford 模和 Clifford 双模的定义类似。式 (22) 中的第一个同构确定了范畴等价

$$\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-m} \mathsf{Mod} \simeq {}_{\mathrm{Cl}_n}\mathsf{Mod}_{\mathrm{Cl}_m} \simeq \mathsf{Mod}_{\mathrm{Cl}_{-n} \otimes \mathrm{Cl}_m} \tag{23}$$

这使我们能够将任意 Clifford（双）模转化为左 Clifford 模。

实超向量空间 $W$ 上的内积 是其底层非分次向量空间 $W$ 上的内积，并且 $W$ 的偶子空间与奇子空间彼此正交。复超向量空间上的 Hermitian 内积也采用类似的定义。

注记 3.8. 微分几何中的符号约定常会混用分次张量积和非分次张量积，涉及 $\mathbb{Z}/2$分次希尔伯特空间、克利福德代数，以及取值于超向量丛截面的微分形式，例如 [BGV92]中的约定。要使这些约定彼此一致，需要借助一种等价关系，它将通过分次张量积和非分次张量积定义的超向量空间上的内积联系起来。这种等价关系涉及符号和 $\sqrt{-1}$ 的因子（见 [DEF+99, 第 90-91] 页）。当两种约定相遇时，就会出现这类因子。例如，自伴超联络在这种转换中会继承符号，见定义 6.2。

左 Clifford 模 $\rho$: $\mathsf{Cl}(V,\ q) \to \mathsf{End}(W)$ 是 自伴的 [BGV92，定义 3.3]如果 $W$ 配备了内积，并且

$$\rho(v^*) = \rho(v)^\dagger \tag{24}$$

对于所有 $v \in V \subset \mathsf{Cl}(V,\ q)$，使用 $*$-结构 (20)，其中 $(-)^\dagger$ 是 $\mathsf{End}(W)$ 上的伴随。自伴右模和自伴双模通过等价关系 (23) 定义。给定一个自伴左 $\mathsf{Cl}(V,\ q)$-模 $W$，*Clifford* 线性自同态 是一个线性映射$T$: $W \to W$ （不一定保分次），它与 Clifford 作用分次对易，即对于所有 $v \in V \subset \mathsf{Cl}(V,\ q)$,

$$T(\rho(v) \cdot w) = (-1)^{|T|} \rho(v) \cdot T(w), \quad \iff \quad [T, \rho(v)] = 0$$

其中 $[-,-]$ 表示 $\mathsf{End}(W)$ 上的超交换子 (13)。当 Clifford 线性奇自同态相对于 $W$上的内积自伴时，它称为自伴的 。注意， $W$ 上的分次对合总是自伴的。

复 Clifford 模的定义类似，其中自伴模是相对于厄米内积定义的。

**例 3.9**。 定义一个左 $\mathrm{Cl}_{1,1}$-模，其底层超向量空间为 $\mathbb{R}^{1|1}$
其作用由下式确定

$$f \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

生成元采用记号 (19)。对于标准内积，此 $\mathrm{Cl}_{1,1}$-作用是自伴的。赋值 (25) 诱导出超代数的一个同构，$\mathrm{Cl}_{1,1} \simeq \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1})$。这表明 $\mathrm{Cl}_{1,1}$ 与 $\mathbb{R}$Morita 等价，其 Morita 双模为 $\mathbb{R}^{1|1}$。利用 (22)，我们发现，对于任意 $n, m \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_m$ 与 $\mathrm{Cl}_{n+m}$ Morita 等价。由 (23) 还可看出，(25) 确定了一个可逆的 $\mathrm{Cl}_1$ –$\mathrm{Cl}_1$-双模。同构 $\mathrm{Cl}_{1,1} \simeq \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1|1})$ 表明，可逆的 $\mathrm{Cl}_1$ –$\mathrm{Cl}_1$-双模有两个同构类；在 Morita 等价下，它们分别对应于带有两种可能分次的直线 $\mathbb{R}$ 。(25) 中的左 $\mathrm{Cl}_{1,1}$-模对应于作为自身双模的 $\mathrm{Cl}_1$ 。最后，$\mathrm{Cl}_1$ 作为双模的等距自同构构成群 $\mathbb{Z}/2 = \mathrm{Spin}(1)$，其作用为通过 $\{\pm 1\}$ 作用于 $\mathbb{R}^{1|1} \simeq \mathrm{Cl}_1$。

**例 3.10**。 对前一个例子取张量幂，得到 $\mathrm{Cl}_{n,\ n}$ 与 $\mathbb{R}$之间的 Morita 等价，它由 $\mathrm{Cl}_n$ 作为可逆 $\mathrm{Cl}_n$-双模（$n \in \mathbb{N}$）确定。群 SO($n$)通过对生成元$\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}_{\pm n}$的标准作用，以代数自同构的方式作用于 $\mathrm{Cl}_{\pm n}$ 。这给出了 SO($n$)对可逆 $\mathrm{Cl}_{\pm n}$-双模群胚的范畴作用，其作用方式是通过代数自同构扭曲左 $\mathrm{Cl}_{\pm n}$-作用，其中代数自同构属于 $\mathrm{Cl}_{\pm n}$。范畴作用是额外的数据，在此情形下，这相当于 SO($n$)的 Spin($n$)扩张。为说明这一点，我们首先注意到，根据舒尔引理，存在一个同构，将标准作用下 $\mathrm{Cl}_{\pm n}$ 作为自身上的双模，与通过 SO($n$)中的一个元素扭曲左作用所得的双模联系起来。该同构由一个（保持度量的）标量给出，即 $\{\pm 1\}$。因此，$\mathrm{Cl}_{\pm n}$ 作为双模的自同构群是 SO($n$)的一个 $\mathbb{Z}/2$-扩张，而这恰好是旋量双覆盖，例如参见 [ST04，定义 2.3.1]。

**例 3.11.** 令 $\mathbb{H}$ 表示四元数，并固定向量空间的同构 $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$，将 $\{1, i, j, k\}$ 映到 $\mathbb{R}^4$的标准基。定义一个 $\mathrm{Cl}_4$-模，其底层超向量空间为 $\mathbb{R}^{4|4}$ ，作用由生成元 $\mathbb{R}^4 \subset \mathrm{Cl}_4$的作用确定

$$\mathbb{R}^4 \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{4|4}) \qquad q \mapsto \begin{bmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{H} \tag{26}$$

其中， $q \in \mathbb{H}$ 是四元数中的一个元素，它通过四元数在自身上的左作用作用于 $\mathbb{R}^4$ ；分块对角矩阵对应于分解 $\mathbb{R}^{4|4} \simeq \mathbb{R}^{4|0} \oplus \mathbb{R}^{0|4}$，即分解为偶子空间与奇子空间。验证克利福德关系可知，赋值 (26) 延拓为一个单同态 $\mathrm{Cl}_4 \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^{4|4})$，其像为 $\mathbb{R}^{4|4} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$上的 $\mathbb{H}$-线性自同态。

**例3.12.** 令 $\mathbb{O}$ 表示八元数，并固定一个向量空间同构$\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8$ ，将八元数的生成元映到 $\mathbb{R}^8$ 的标准基。定义一个 $\mathrm{Cl}_8$-模，其底层超向量空间为 $\mathbb{R}^{8|8}$ ，其作用由生成元 $\mathbb{R}^8 \subset \mathrm{Cl}_8$ 的作用确定。

$$\mathbb{R}^8 \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8}) \qquad x \mapsto \begin{bmatrix} 0 & x \\ -\bar{x} & 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{O} \tag{27}$$

其中 $x \in \mathbb{O}$ 通过与八元数中的左乘相识别而作用于 $\mathbb{R}^8$ （从左侧），而分块对角矩阵对应于分解 $\mathbb{R}^{8|8} \simeq \mathbb{R}^{8|0} \oplus \mathbb{R}^{0|8}$。赋值 (27) 导出一个单射 $\mathrm{Cl}_8 \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8})$；由于 $\dim(\mathrm{Cl}_8) = 2^8 = 16 \cdot 16 = \dim(\mathrm{End}(\mathbb{R}^{8|8}))$，此映射是同构。结合例 3.9，这便导出了克利福德代数 $\mathrm{Cl}_{n+8}$ 与 $\mathrm{Cl}_n$ 之间著名的 Morita 等价，对所有 $n$ 均成立。我们还注意到 $\mathrm{Cl}_8 \simeq \mathrm{Cl}_4 \otimes \mathrm{Cl}_4$-模的同构 [LM94，第 70] 页。

$$({}_{\mathrm{Cl}_4}\mathbb{R}^{4|4}) \otimes_{\mathbb{R}} ({}_{\mathrm{Cl}_4}\mathbb{R}^{4|4}) \simeq ({}_{\mathrm{Cl}_8}\mathbb{R}^{8|8})^{\oplus 4} \tag{28}$$

其中 ${}_{\mathrm{Cl}_4}\mathbb{R}^{4|4}$ 来自前一个例子。

**例3.13.** 例 3.9 中模的复化给出一个 $\mathrm{Cl}_{1,1}\otimes\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}_2$-模，它是一个可逆的 $\mathbb{C}-\mathbb{C}\mathrm{l}_2$-双模。具体而言， $\mathbb{C}\mathrm{l}_2$ 在 $\mathbb{C}^{1|1}$ 上的作用由生成元的作用决定

$$f_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

诱导出一个同构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})$，从而使 $\mathbb{C}\mathrm{l}_2$ 与 $\mathbb{C}$ 之间构成 Morita 等价。

3.5. **Clifford 模的超迹**。存在一个典范同构 [BGV92，命题 3.21]

$$\mathrm{Cl}_n/[\mathrm{Cl}_n,\mathrm{Cl}_n] \simeq \mathrm{Cl}_n/\mathrm{Cl}_{n-1} \simeq \Lambda^n\mathbb{R}^n = \mathrm{Det}(\mathbb{R}^n)$$

与 $\mathbb{R}^n$ 的行列式线丛相同构。因此，$\mathrm{Cl}_n$ 上的一个（非平凡）超迹 (14)，等价于 $\mathbb{R}^n$ 上行列式线的平凡化数据，也就是说，等价于对体积形式的一种选择。任意这样的体积形式都等价于 $c\cdot\Gamma_n$ 中的一个元素，其中 $c\in\mathbb{R}$ 和 $\Gamma_n$ 来自 (21)。这给出了相应超迹的公式：

$$\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}(a) := c\cdot\mathsf{sTr}(\Gamma_n\circ a) \qquad c\in\mathbb{R} \tag{30}$$

其中，右侧的超迹是针对 $\Gamma_n\circ a$ 在向量空间 $\Lambda^\bullet\mathbb{R}^n\simeq\mathrm{Cl}_n$ 上的作用取的，该作用来自克利福德代数对自身的左作用。

选定一个标量 $c$ 后，方程（17）和（30）确定了自由 $\mathrm{Cl}_n$-模上的超迹。我们将有限秩模写成自由模的直和项，从而把超迹扩展到任意 Clifford 模。由此得到的超迹

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Cl}_n}(W)\to\mathrm{Det}(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}$$

继承了 Hattori–Stallings 迹（17）的所有性质，例如，它在克利福德线性自同态的超交换子上取值为零。与 KO 理论中的庞特里亚金特征比较时，发现将上述定义加上一个形式参数会更方便；参见 [FL10，第2.5]节。

**定义3.14**。给定左 $\mathrm{Cl}_{n,m}$-模 $W$，$\mathrm{Cl}_{n,m}$-线性映射 $T$ 的克利福德超迹 为

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T) = \mathrm{sTr}(u^{(m-n)/2}\Gamma_{n,m}\circ T)\in\mathbb{R}[u^{1/2},u^{-1/2}], \tag{31}$$

其中 $u^{1/2}$ 是次数为 $-1$ 、逆元为 $u^{-1/2}$的可逆形式变量。

由普通超迹的性质以及（21）中 $\Gamma_{n,m}$ 的定义可知，克利福德超迹满足

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T_1\oplus T_2) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T_1)+\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T_2) \tag{32}$$

当 $T_i$ 是 $\mathrm{Cl}_{n,m}$-模 $W_i$ 的自同态且 $i=1,2$ 时，

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}\otimes\mathrm{Cl}_{n',m'}}(T_1\otimes T_2) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T_1)\cdot\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n',m'}}(T_2) \tag{33}$$

当 $T_1$ 是 $\mathrm{Cl}_{n,m}$-模 $W_1$ 的自同态，且 $T_2$ 是 $\mathrm{Cl}_{n',m'}$-模 $W_2$的自同态时。

对于复克利福德代数上的模，也有一种完全类似的迹理论，它具有与实克利福德超迹相同的形式性质。式 (31) 中归一化的选择决定了复克利福德超迹的归一化，因为 $\mathrm{Det}(\mathbb{C}^n)\simeq\mathrm{Det}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}$，也就是说，行列式线的实平凡化也给出了其复化的平凡化。

**例 3.15.** 对于例 3.9 中的 $\mathrm{Cl}_{1,1}$-模，

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{1,1}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}) = \mathrm{sTr}(\Gamma_{1,1}) = 2/2 = 1.$$

由此可见，$\mathrm{Cl}_{n,m}$-线性算子的 Clifford 超迹与例 3.9 中的 Morita 等价相兼容 $T$

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}\otimes\mathrm{Cl}_{1,1}}(T\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T)\cdot\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{1,1}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_{n,m}}(T).$$

对于例 3.11 中的 $\mathrm{Cl}_4$-模，我们得到

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{4|4}}) = \mathrm{sTr}(u^{-4/2}\Gamma_4) = 2^{-4/2}\cdot 8u^{-2} = 2u^{-2}, \tag{34}$$

以及例3.12中的 $\mathrm{Cl}_8$-模，

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_8}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{8|8}}) = \mathrm{sTr}(u^{-8/2}\Gamma_8) = u^{-4}2^{-8/2}\cdot 16 = u^{-4}. \tag{35}$$

我们验证了 (34) 和 (35) 与 (28) 中 $\mathrm{Cl}_8$-模的同构相容，

$$2u^{-2}\cdot 2u^{-2} = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_4\otimes\mathrm{Cl}_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{4|4}}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{4|4}}) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_8}((\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{8|8}})^{\oplus 4}) = 4u^{-4}.$$

由 (35) 我们还发现，对于一个 $\mathrm{Cl}_n$-线性算子 $T$，

$$\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{8k}}(T\otimes(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{8|8}})^{\otimes k}) = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}(T)\cdot(\mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_8}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{8|8}}))^k = \mathrm{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}(T)\cdot u^{-4k},$$

因此，Clifford 模的 8 周期性体现于 Clifford 超迹中，其中周期生成元为 $u^{\pm 4}\in\mathbb{R}[u^{1/2},u^{-1/2}]$。

**例3.16.** 例3.13中的复 Clifford 模满足

$$\mathrm{sTr}_{\mathbb{C}l_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{1|1}}) = \mathrm{sTr}(\Gamma_2) = 2iu^{-1}/2 = iu^{-1}.$$

因此，类似于实情形中的 8 周期性

$$\mathrm{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{2k}}(T\otimes(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{1|1}})^{\otimes k}) = \mathrm{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(T)\cdot(\mathrm{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{1|1}}))^k = \mathrm{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(T)\cdot i^k u^{-k}. \tag{36}$$

注 3.17. 在处理复 Clifford 模时，一些作者会在定义 (21) 中引入因子 $i^{n/2}$，使得 $\mathrm{sTr}_{\mathbb{C}l_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{1|1}}) = u^{-1}$，例如参见 [BGV92，命题 3.21] 和 [ST04，定义 3.2.16]。然而，对于实 Clifford 模，这样做不太自然，因为所得的 $\Gamma_n$ 不是实 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_n$的元素。在 (31) 中引入形式变量 $u$ 的一个原因是，任意两种归一化方式都可以通过按适当的标量缩放 $u$ 相互转换。

## 4. The Atiyah–Bott–Shapiro construction and the spectrum KO

本节回顾一种通过 Clifford 模构造表示 $\mathrm{KO}^n(-)$ 的空间的方法，见 [HST10, §7]and [Che07, §1.3-1.4]。我们的阐述着重强调它与 Atiyah–Bott–Shapiro 构造以及族指标之间的联系。

### 4.1. Atiyah–Bott–Shapiro 构造。

设 $M$ 是一个流形，不一定是紧致的。紧支撑实 K 理论群 $\mathrm{KO}_c^0(M)$ 中的一个类可由一对 $(V,\ Q)$ 指定，其中 $\mathbb{Z}/2$是一个分次实向量丛 $V\to M$，而 $Q\in\mathrm{End}(V)_{\mathrm{odd}}$ 是一个奇端同态，且在 $M$的某个紧子集之外可逆。粗略地说，

$$[V] = [V_{\mathrm{ev}}] - [V_{\mathrm{odd}}] \in \mathrm{KO}^0(M) \tag{37}$$

确定一个类；在 $M$ 上 $Q$ 可逆的子空间上，我们得到一个同构$V_{\mathrm{ev}}\xrightarrow{\sim} V_{\mathrm{odd}}$，因此形式差 (37) 在该子空间上为零；我们将在注 4.20 中对此作更详细的解释。

给定一个右 $\mathrm{Cl}_n$-模 $W$，考虑平凡丛 $W = W\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$。将其视为一个 $\mathbb{Z}/2$-分次向量丛，并赋予它奇算子 $\mathrm{cl}_x\in\mathrm{End}(W)_{\mathrm{odd}}$，该算子在点 $x\in\mathbb{R}^n$ 处表示在 $W$ 上由 $x\in\mathbb{R}^n\subset\mathrm{Cl}_n$ 进行的 Clifford 乘法。由此构造一个映射

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Cl}_n}\to\mathrm{KO}_c^0(\mathbb{R}^n)\simeq\mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt}),\qquad W\mapsto(\underline{W},\mathrm{cl}_x) \tag{38}$$

由于算子 $\mathrm{cl}_x$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 之外可逆（因为 $(\mathrm{cl}_x)^2 = -|x|^2$ 是标量乘法），该类具有紧支撑。(38) 中的同构是悬挂同构，它将 $\mathbb{R}^n$ 的一点紧化与 $n$-球面相识别。在 (38) 下，$\mathrm{Cl}_n$-模的直和对应于 $\mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt})$ 中类的加法。

令 $\mathfrak{M}_n$ 表示 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Cl}_n}$ 的 Grothendieck 群。标准包含映射 $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 给出一个超代数同态 $i\colon\mathrm{Cl}_n\hookrightarrow\mathrm{Cl}_{n+1}$，该同态由生成元上的映射 (19) 确定。这诱导出限制

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{Cl}_{n+1}}\to\mathrm{Mod}_{\mathrm{Cl}_n},\quad i^*\colon\mathfrak{M}_{n+1}\to\mathfrak{M}_n,\qquad n\geq 0.$$

Atiyah–Bott–Shapiro [ABS64, 定理 11.5] 表明 (38) 可通过商群分解 t
$\mathfrak{M}_n/i^*\mathfrak{M}_{n+1}$，事实上还确定了阿贝尔群之间的同构

$$\mathfrak{M}_n/i^*\mathfrak{M}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt}) \qquad n \geq 0. \tag{39}$$

此外，Clifford 模的张量积与 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}$KO$^{-n}$(pt) 上的分次环结构相容。结合克利福德代数和 KO 的八重周期性，映射 (39) 给出了分次环 KO$^\bullet$(pt) 的一个完全代数化描述。

注 4.1. 我们比较阿蒂亚–博特–夏皮罗同构 (39) 中的符号约定。首先，回顾范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Cl}_n} \simeq {}_{\mathrm{Cl}_{-n}}\mathrm{Mod}$ 之间的等价，该等价由典范同构 $\mathrm{Cl}^{\mathrm{op}}_{\pm n} = \mathrm{Cl}^{\mp n}$ 给出。这使我们能够用左克利福德模来重新表述 (39),

$$ {}_{-n}\mathfrak{M}/i^*{}_{-n-1}\mathfrak{M} \simeq \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt}) \qquad n \geq 0, \quad i\colon \mathrm{Cl}_{-n} \hookrightarrow \mathrm{Cl}_{-n-1} \tag{40}$$

但需采用所示的符号变更。另一种做法是使用 Cl$_n$ 的非分次反自同构（有时称为转置），这样便可得到 (39) 的左模版本，而无需改变符号。考虑模的张量积以及 KO$^\bullet$(pt) 中相应的乘积时，第二种做法略显棘手：Cl$_m$ 与 Cl$_n$ 的非分次张量积并非克利福德代数。

下面的符号约定由我们对左模的偏好，以及在 $n$ 维黎曼自旋流形上的 Clifford 线性 Dirac 算子的例子所确定。若要求 Dirac 拉普拉斯算子是非负算子，则它必须定义在 Spin($n$) 对 Cl$_n$ 的作用所对应的伴随丛上，如 (98) 所示（对应于 Cl$_{-n}$ 的伴随丛会导出非正的 Dirac 拉普拉斯算子）。这一约定与 [LM94, II.7] 一致。利用典范同构 $\mathrm{Cl}^{\mathrm{op}}_n = \mathrm{Cl}_{-n}$，Clifford 线性 Dirac 算子的核于是成为一个左 Cl$_{-n}$-模，根据约定 (40)，它确定 KO$^{-n}$(pt) 中的一个元素。

注记 4.2。 利用生成元与关系的描述 [LM94, I.9]，可以完全显式地验证阿蒂亚–博特–夏皮罗同构 (40)。

$$\pi_*\mathrm{KO} = \mathbb{Z}[\eta,\alpha,\beta^{\pm 1}]/\langle 2\eta, \eta^3, \eta\alpha, \alpha^2 - 4\beta\rangle, \quad |\eta| = -1,\ |\alpha| = -4,\ |\beta| = -8. \tag{41}$$

我们概述 (40) 的满射性。上一节构造的 Clifford 模对应于一些类

$$[\mathrm{Cl}_{-1}\mathbb{R}^{1|1}] = \eta \in \mathrm{KO}^{-1}(\mathrm{pt}), \quad [\mathrm{Cl}_4\mathbb{R}^{4|4}] = \beta^{-1}\alpha \in \mathrm{KO}^4(\mathrm{pt}), \quad [\mathrm{Cl}_8\mathbb{R}^{8|8}] = \beta^{-1} \in \mathrm{KO}^8(\mathrm{pt})$$

其中，例 3.9 中在 $\mathbb{R}^{1|1}$ 上定义的 Cl$_{-1}$ 作用（通过遗忘 Cl$_1$ 作用），例 3.11 中在 $\mathbb{R}^{4|4}$ 上定义的 Cl$_4$ 作用，以及例3.12 中在 $\mathbb{R}^{8|8}$ 上定义的 Cl$_8$ 作用。要证明 $2\eta = \eta^3 = 0$，必须说明 $\mathbb{R}^{1|1} \oplus \mathbb{R}^{1|1} \simeq \mathbb{R}^{2|2}$ 可扩张为一个 Cl$_{-1} \otimes$ Cl$_{-1} \simeq$ Cl$_{-2}$-模，而 Cl$_{-3}$-模 $(\mathbb{R}^{1|1})^{\otimes 3} \simeq \mathbb{R}^{4|4}$ 可扩张为一个 Cl$_{-4}$-模；对于前者，可将第二个 Clifford 生成元取为交换直和中 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的各个副本的同构；对于后者，则使用一种与 (26) 密切相关的模结构。要证明 $\eta\alpha = 0$，只需验证 $\eta\alpha\beta^{-1} = 0$；从 Cl$_{-1} \otimes$Cl$_4$-模$\mathbb{R}^{1|1} \otimes \mathbb{R}^{4|4}$出发，Morita 等价给出一个底层向量空间为 $\mathbb{R}^{4|4}$ 的 Cl$_3$-模，而它同样可以扩张为一个 Cl$_4$-模。 $\beta$ 的可逆性由 (27) 所实现的 Morita 等价推出，而涉及 $\alpha$ 和 $\beta$ 的关系等价于同构 (28)。

4.2. **表示 KO 的无界算子**。 接下来，我们按照 [HST10, §3]中的介绍，回顾一个已知可表示 KO 的无界算子空间。固定一个实的、无限维的可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。 $D$ 上的一个无界算子是由一个子空间 dom($D$) $\subset \mathcal{H}$ （称为 $D$ 的定义域）以及一个线性映射 $D$: dom($D$) $\to \mathcal{H}$构成的数据。若一个无界算子在其定义域的闭包上自伴，则称其为自伴算子。若一个无界自伴算子 $D$ 的紧预解式满足： $D$ 的谱由有限重数的特征值构成，且这些特征值在 $\mathbb{R}$中没有聚点，则称该算子具有紧预解式。

**定义 4.3.** 令 Inf($\mathcal{H}$) 表示 $\mathcal{H}$ 上具有紧预解式的无界自伴算子集合。

注 4.4. 记号 Inf 源自 [HST10] 中的术语： $D \in \mathrm{Inf}(\mathcal{H})$ 是超半群表示的无穷小生成元。尽管我们不使用超半群表示，为了便于与 [HST10] 对照，我们仍沿用相同的记号。需要指出的是，我们的符号约定与 [HST10]略有不同；参见注 4.5。

为简化叙述，下文通常省略“紧致预解式”和“自伴”这两个词，将 $\mathrm{Inf}(\mathcal{H})$ 中的元素简称为 $\mathcal{H}$ 上的无界算子。凯莱变换确定了一个单射 [HST10，命题 3.7]

$$\mathrm{Inf}(\mathcal{H}) \hookrightarrow O(\mathcal{H}) \tag{42}$$

从无界算子到无限正交群，将算子 $D$ 的特征子空间映射为正交算子；前者的（实）特征值为 $\lambda$，后者的（复）特征值为 $\frac{\lambda+i}{\lambda-i}$。为无界算子集赋予从 $O(\mathcal{H})$ 继承的子空间拓扑，其中 $O(\mathcal{H})$ 赋予范数拓扑。

接下来，我们考察无界算子空间 $\mathrm{Inf}(\mathcal{H})$ 的一些变体，这些变体涉及分次和 Clifford 作用。定义一个 $\mathbb{Z}/2$分次希尔伯特空间为一个可分希尔伯特空间，其底层向量空间带有 $\mathbb{Z}/2$-分次，且偶子空间与奇子空间均为无限维并彼此正交。一个稳定的$\mathrm{Cl}_n$-模是一个 $\mathbb{Z}/2$-分次希尔伯特空间，带有自伴的左 $\mathrm{Cl}_n$-模结构，并且每个不可约 $\mathrm{Cl}_n$-模的同构类都以无限重数出现；例如，从一个 $\mathbb{Z}/2$-分次希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 出发，则 $\mathcal{H}_n := \mathrm{Cl}_n \otimes \mathcal{H}$ 是一个稳定的 $\mathrm{Cl}_n$- 模。任意两个稳定的 $\mathrm{Cl}_n$- 模都同构，而稳定的 $\mathrm{Cl}_n$- 模与稳定的 $\mathrm{Cl}_m$- 模的张量积确定一个稳定的 $\mathrm{Cl}_{n+m}$-模（当 $n$ 与 $m$ 符号不同时，使用例 3.9 中的 Morita 等价）。关于稳定 $\mathrm{Cl}_n$-模的这一张量积，进一步讨论见 [Joa01，第 3] 节。

自伴无界算子 $D$ 在 $\mathcal{H}_n$ 上若其定义域为分次子空间，且 $D\colon \mathrm{dom}(D) \to \mathcal{H}$ 是奇线性映射，则称其为奇 算子。奇自伴无界算子 $D$在 $\mathcal{H}_n$ 上若 $\mathrm{dom}(D)$ 是 Clifford 子模，且 $D$ 与 $\mathrm{Cl}_n$-作用分次对易，则称其为*Clifford* 线性 算子。令 $\mathrm{Inf}_{-n}$ 表示作用于 $\mathcal{H}_n$上的奇、Clifford 线性无界算子集合。我们赋予该集合子空间拓扑，该拓扑来自显然的包含映射

$$\mathrm{Inf}_{-n} \subset \mathrm{Inf}(\mathcal{H}_n). \tag{43}$$

注 4.5。 在 [HST10], 中，作者使用稳定的右 $\mathrm{Cl}_n$-模，而非上述稳定的左 $\mathrm{Cl}_n$-模，参见注 4.1。本文中的空间 $\mathrm{Inf}_{-n}$ 与 [HST10] 中的空间同胚（符号不变），只需将 $\mathcal{H}_n = \mathrm{Cl}_n \otimes \mathcal{H}$ 上的左 $\mathrm{Cl}_n$-作用换为右 $\mathrm{Cl}_{-n}$-作用。

在应用中，无界算子 $D \in \mathrm{Inf}_{-n}$的定义域不 要求在 $\mathcal{H}_n$中稠密，这一点很重要；因此可以得到下面的例子。

**例 4.6**。 考虑一个分次的、$\mathrm{Cl}_n$-不变子空间 $W \hookrightarrow \mathcal{H}_n$。定义无界算子 $P_W$，其定义域为 $W$，并且 $P_W\colon W \to \mathcal{H}_n$ 是包含映射。若 $W$ 是有限维的，则 $P_W$ 具有紧预解式，且 $P_W \in \mathrm{Inf}_{-n}$。

KO 谱的分析模型中，或许最为人熟知的是 Atiyah–Singer 空间 $\mathrm{Fred}_n$，即 $\mathrm{Cl}_n$-线性弗雷德霍姆算子空间；对 $n \geq 0$，它们表示 $\mathrm{KO}^{-n}$[AS69], [LM94, III.10]。空间 $\mathrm{Inf}_n$ 以如下意义给出了这些空间的无界版本（我们继续采用备注 4.1 中的符号约定）。

**定理 4.7** （[HST10] 命题 3.11 和定理 8.2）。 对于 $n \geq 0$，存在同伦等价 $\mathrm{Inf}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fred}_n$。因此，$\mathrm{Inf}_n$ 表示函子 $\mathrm{KO}^{-n}(-)$。

Clifford 模的 8 周期性给出同胚 $\mathrm{Inf}_n \simeq \mathrm{Inf}_{n-8}$，因此（由 Bott 周期性）可得 $\mathrm{Inf}_n$ 表示所有 $n \in \mathbb{Z}$ 的 $\mathrm{KO}^{-n}(-)$。另一种方法是将 $\mathrm{Fred}_n$ 空间的构造推广到任意 $n \in \mathbb{Z}$，并证明适用于所有 $n$ 的定理 4.7 的一个版本，例如参见 HST10，注 0.1]。

4.3. **拓扑范畴及其分类空间**。A拓扑范畴是这样一种范畴，其中对象和态射都是拓扑空间，并且结构映射（源、目标、单位、复合）均为连续映射。对于拓扑范畴 $\mathcal{C}$，令 $\mathcal{C}_0$ 表示对象空间，$\mathcal{C}_1$ 表示态射空间。

给定一个拓扑空间的开覆盖，下面两个例子构造拓扑范畴。

**例 4.8**。设 $Z$ 是一个拓扑空间，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 $Z$的一个开覆盖。对于一个非空有限子集 $\sigma \subset I$，令 $U_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} U_i$ 表示其交集。定义该覆盖的*Čech* 范畴，记作 $\check{\mathbf{C}}(U_i)$，它是一个拓扑范畴，其对象为 $\check{\mathbf{C}}(U_i)_0 = \coprod_\sigma U_\sigma$，态射空间为 $\check{\mathbf{C}}(U_i)_1 = \coprod_{\sigma\subseteq\tau} U_\tau$。源映射和目标映射由投影与包含映射 $U_\tau \subseteq U_\sigma$确定，单位由恒等映射 $U_\sigma \to U_\sigma$诱导，而复合则来自嵌套包含。

**例 4.9**。设 $Z$ 是一个拓扑空间，且 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 $Z$ 的一个开覆盖，并在指标集 $I$上给定排序数据。于是定义拓扑范畴 $\check{\mathbf{C}}^{\mathrm{ord}}(U_i)$，其对象和态射为

$$\check{\mathrm{C}}^{\mathrm{ord}}(U_i)_0 = \coprod_{i\in I} U_i, \qquad \check{\mathrm{C}}^{\mathrm{ord}}(U_i)_1 = \coprod_{i\leq j} U_{ij}, \qquad U_{ij} = U_i \bigcap U_j.$$

源映射和目标映射是包含映射 $U_i \bigcap U_j \subset U_i, U_j$，单位映射是 $U_i = U_i \bigcap U_i$ 上的恒等映射，而复合由三重交集到二重交集的包含映射给出。

**定义 4.10**。拓扑范畴 $\mathcal{C}$ 的神经 是一个单纯空间，其 $k$-单形为 $N_k\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$，其中 $k = 0, 1$；对于 $k > 1$，则为由可复合态射组成的长度为 $k$ 的链

$$\begin{aligned} N_k\mathcal{C} &= \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_k} x_k \mid x_i \in \mathcal{C}_0, f_i \in \mathcal{C}_1\} \\ &= \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \cdots \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1, \end{aligned}$$

赋予纤维积拓扑。$N_\bullet\mathcal{C}$ 中的面映射由态射的复合确定，退化映射则由 $\mathcal{C}$ 中的单位映射确定。

单纯空间 $Z_\bullet$ 的几何实现 为

$$|Z_\bullet| := (\coprod_n Z_n \times \Delta^n)/\sim \qquad (f^*x, t) \sim (x, f_*t) \quad \forall f\colon [l] \to [k] \tag{44}$$

其中 $\Delta^n$ 是标准的 $n$-单形，$f\colon [l] \to [k]$ 是一个保序映射。几何实现具有自然性：单纯空间的映射 $F\colon Z_\bullet \to Y_\bullet$ 确定一个几何实现之间的映射，$|F|\colon |Z_\bullet| \to |Y_\bullet|$。

**定义 4.11.** 给定一个拓扑范畴 $\mathcal{C}$，定义的分类空间为其神经的几何实现，$\mathrm{B}\mathcal{C} := |N_\bullet\mathcal{C}|$.

**例 4.12.** 例 4.9 中的拓扑范畴 $\check{C}^{\mathrm{ord}}(U_i)$ 的神经，其 $k$-单形为交集

$$N_k\check{C}(U_i) = \coprod_{i_0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k} U_{i_0 i_1\cdots i_k}, \qquad U_{i_0 i_1\cdots i_k} = U_{i_0} \bigcap U_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap U_{i_k}. \tag{45}$$

wh而例 4.8 中的拓扑范畴 $\check{C}(U_i)$ 的神经，其 $k$-单形

$$N_k\check{C}(U_i) = \coprod_{\sigma_0\subseteq\sigma_1\subseteq\cdots\subseteq\sigma_k} U_{\sigma_k}.$$

Segal [Seg68，命题 4.12]，以及 Dugger–Isaksen [DI04，定理 2.1 和命题 2.6] 的结果表明，典范映射

$$\mathrm{B}\check{C}^{\mathrm{ord}}(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}\check{C}(U_i), \qquad \mathrm{B}\check{C}^{\mathrm{ord}}(U_i) \xrightarrow{\sim} Z, \qquad \mathrm{B}\check{C}(U_i) \xrightarrow{\sim} Z, \tag{46}$$

是同伦等价。

范畴的实现与其相反代数的实现之间存在一个同伦等价 $\mathrm{B}\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{B}\mathcal{C}$ 。下文中，我们常将 $\mathrm{B}\check{C}(U_i)$ 与 $\mathrm{B}\check{C}(U_i)^{\mathrm{op}}$ 视为相同。

4.4. **Atiyah–Bott–Shapiro 范畴**。

**定义 4.13.** 令 $\mathcal{M}_n^\delta$ 为一个范畴，其对象是有限维 $\mathrm{Cl}_n$-子模$W \subset \mathcal{H}_n$ ，其态射为

$$\mathrm{Mor}(W_0, W_1) := \begin{cases} \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1} - \text{action on } W_0^\perp \\ \text{extending the } \mathrm{Cl}_n\text{−action} & \text{if } W_0 \subseteq W_1 \subset \mathcal{H}_n \\ \\ \emptyset & \text{else} \end{cases} \tag{47}$$

其中 $W_0^\perp \subseteq W_1$ 表示子空间 $W_0 \subseteq W_1$的正交补。对于嵌套的包含映射 $W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2$ ，复合运算利用 Clifford 模的直和，在 $W_0 \subseteq W_2$的正交补上得到 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-模结构。

注 4.14. 扩展为 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-作用的数据是 $W_0^\perp$上的一个自伴奇端态射 $e$ ，它与 $\mathrm{Cl}_n$-作用分次对易，并满足 $e^2 = 1$。

注记 4.15。 </style]对于 $n \geq 0$，$\mathrm{Cl}_{-n} \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-模与 $\mathrm{Cl}_{-n-1}$-模的数据相同。因此，对于 $n \leq 0$, $\mathcal{M}_n^\delta$ 是一个范畴，其态射参数化了 Atiyah–Bott– Shapiro 映射 (40) 如何识别 $\mathrm{KO}^n$( 点 ) 中的（左） Clifford 模。

令 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ 表示作用在 $\mathcal{H}_n$ 上的有界 $\mathrm{Cl}_n$-线性算子空间。存在单射 s

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{M}_n^\delta) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n), \qquad \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_n^\delta) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)^{\times 3}. \tag{48}$$

第一个映射来自将子模 $W_0 \subset \mathcal{H}_n$ 与有限秩投影算子对应起来。类似地，$(W_0,\ W_1,\ e)$ $\in \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_n^\delta)$ 确定了一对有限秩投影算子，以及一个有界算子；该算子通过在 $W_0^\perp \subset \mathcal{H}_n$ 的正交补上取零算子，将 $e$ （采用注记 4.14 中的记号）扩张为作用在 $\mathcal{H}_n$ 上的算子。

**定义 4.16**。 定义第 $n$<style id='4} 个 Atiyah–Bott–Shapiro 范畴 $\mathcal{M}_n$ ，它是一个拓扑范畴，其底层范畴为 $\mathcal{M}_n^\delta$ ；其对象和态射按照包含映射 (48) 赋予子空间拓扑，其中有界算子采用范数拓扑。

注记 4.17。 由于 $\mathrm{Cl}_n$ 模与 $\mathrm{Cl}_m$ 模的张量积会生成一个 $\mathrm{Cl}_{n+m}$ 模，且任意一对稳定的 $\mathrm{Cl}_n$ 模都同构，因此存在连续函子

$$\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_m \xrightarrow{\otimes} \mathcal{M}_{n+m}, \tag{49}$$

它在可缩的选择空间意义下唯一。拓扑范畴 $\mathcal{M}_n$ 还有一个部分定义的和运算，该运算定义在正交子空间 $W, W' \subset \mathcal{H}_n$ 上。

4.5. **族指标与 Atiyah–Bott–Shapiro 范畴**。 我们将通过一个指标映射，将第 $n$ 个 Atiyah–Bott–Shapiro 范畴的分类空间与空间 $\mathrm{Inf}_{-n}$ 进行比较；该映射类似于 §2 中描述的族指标。定义一个开覆盖，其分支由 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 编号

$$\mathrm{Inf}_{n,\lambda} := \{D \in \mathrm{Inf}_{-n} \mid \lambda \notin \mathrm{Spec}(D^2)\} \subset \mathrm{Inf}_{-n}. \tag{50}$$

令 $\check{\mathrm{C}}(\mathrm{Inf}_{n,\lambda})$ 表示 $\mathrm{Inf}_{-n}$ 上此覆盖的 $\check{\mathrm{C}}$ech 范畴。具体而言，该范畴的对象由一个无界算子 $D$ 和一个 $(k+1)$ 元正实数数组构成，

$$\check{\mathrm{C}}(\mathrm{Inf}_{n,\lambda})_0 = \{D, \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \mid D \in \mathrm{Inf}_{-n},\ \lambda_i \in \mathbb{R}_{>0},\ \lambda_i \notin \mathrm{Spec}(D^2)\},$$

满足所示性质。态射由相同的数据以及一个指定的子集 $\{\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_l}\} \subseteq \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$ 和 $\lambda_{i_0} \leq \lambda_{i_1} \leq \cdots \leq \lambda_{i_l}$给出。

定义一个连续函子

$$\mathrm{Ind} \colon \check{\mathrm{C}}(\mathrm{Inf}_{n,\lambda})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}_n \tag{51}$$

如 fo 如下。在对象上，Ind 将 $(D,\ \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k)$ 赋给子空间 $\mathcal{H}^{<\lambda_k} \subset \mathcal{H}$ 由给 $D^2$ 的特征值小于 $\lambda_k$ 的特征子空间的直和

$$\mathcal{H}^{<\lambda_k} := \bigoplus_{\mu<\lambda} \mathcal{H}_\mu.$$

子空间 $\mathcal{H}^{<\lambda_k} \subset \mathcal{H}_n$ 是有限维的，因为 $D$ 具有紧预解式。此外，$\mathcal{H}^{<\lambda_k}$ 是一个分次 $\mathrm{Cl}_n$-子模，因为 $D$ 是 Clifford 线性算子。在态射上，函子 (51) 将包含映射赋给 Clifford 子模 $\mathcal{H}^{<\lambda_{i_l}} \subset \mathcal{H}^{<\lambda_k} \subset \mathcal{H}_n$；在包含映射的正交补上，使用算子 $D$ 构造 $\mathrm{Cl}_{-1}$-作用，具体如下。首先，将包含映射的正交补分解为算子 $D^2$ 的 $\mu$-特征子空间，

$$(\mathcal{H}^{<\lambda_{i_l}})^\perp \simeq \bigoplus_{\lambda_{i_l}<\mu<\lambda_k} \mathcal{H}_\mu.$$

这个和是有限的，因为 $D^2$ 具有紧预解式且非负；这些特征子空间彼此正交，因为 $D^2$ 是自伴的。现在定义一个奇算子

$$e\colon (\mathcal{H}^{<\lambda_{i_l}})^\perp \to (\mathcal{H}^{<\lambda_{i_l}})^\perp, \qquad e := \bigoplus_{\mu} (\frac{1}{\sqrt{\mu}} D|_{\mathcal{H}_\mu}).$$

根据构造，$e^2 = +1$，因此确定了一个 $\mathrm{Cl}_{-1}$-作用（见备注 4.14）。由于 $D$ 是自伴且 $\mathrm{Cl}_n$-线性的，这个作用是自伴的，并且与 $\mathrm{Cl}_n$-作用分次对易。

**引理 4.18**。 连续函子 (51) 诱导出一个弱等价

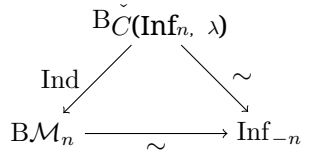
$$\mathrm{BInd}\colon \mathrm{B}\check{\mathrm{C}}(\mathrm{Inf}_{n,\lambda}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}\mathcal{M}_n, \tag{52}$$

因此 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 表示函子 $\mathrm{KO}^n(-)$。

证明。 在 [HST10 的第 53], 页，有一个记作 $\mathrm{D}_n$ 的拓扑范畴，它的对象与 $\mathcal{M}_n$ 相同，其态射记作

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{D}_n}(W_0, W_1) = \begin{cases} \{R \in O_{C_n}(W_2^\perp) \mid R \text{ odd } R^2 = 1\} & \text{if } W_0 \subset W_1 \\ \emptyset & \text{else.} \end{cases}$$

由于 $R$ 是正交的，且 $R^2 = 1$，它生成了一个 $\mathrm{Cl}_{-1}$ 的自伴作用。由此我们注意到，$\mathrm{D}_n$ 和 $\mathcal{M}_n$ 作为拓扑范畴是同构的：它们的对象空间和态射空间同胚。接着，[HST10、命题 3.11、命题 4.6 和定理 7.1] 构造出一个同伦等价 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inf}_{-n}$，它位于如下同伦交换三角形中，




其中，弱等价 $\mathrm{B}\,\check{C}(\mathrm{Inf}_{n,\ \lambda}) \to \mathrm{Inf}_{-n}$ 由 (46) 得出，而同伦交换性则由 [HST10 命题 4.6] 中的论证得出。由三取二性质可知，映射 (52) 是弱等价。引理中的第二个结论随即由定理 4.7 得出。□

注记 4.19。 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 表示 $\mathrm{KO}^n(-)$ 这一事实直接来自 [HST10, 定理 7.1]。 [Che07, §1.3-1. 4], 中给出了一个独立证明，该证明通过比较 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 与 Clifford 线性 Fredholm 算子得出。引理 4.18 中唯一的新内容，是指出指标映射实现了这一弱等价。

注记 4.20。 我们重新考察式 (37) 中紧支撑 KO 类 $[V,Q]\in \mathrm{KO}_c^0(M)$ 的 Atiyah–Bott–Shapiro 描述。取 $M$ 的一个开覆盖 $U_0,\ U_1$，使得 $U_0$ 的闭包是 $M$ 的紧子集，且 $Q|_{U_1}$ 可逆。接下来，将 $V|_{U_0}\subset U_0\times\mathcal{H}_0$ 嵌入为平凡希尔伯特丛的一个直和项；根据 [Kui65]，这种嵌入在可缩的选择空间意义下唯一。然后考虑映射 $U_1\to\mathcal{M}_0$，它是到 $\mathcal{M}_0$ 的基点的常值映射，即零模 $\{0\}\subset\mathcal{H}_n$。在交集 $U_0\bigcap U_1$ 上，奇算子 $Q$ 确定了 $\mathcal{M}_0$ 中从 $V|_{U_0}\subset U_0\times\mathcal{H}_0$ 到零对象的一族连续态射。综上，我们得到一个拓扑范畴的连续函子 $(V,Q)\colon \mathrm{B}\check{C}(U_i)\to\mathcal{M}_0$。实现之后，这确定了一个映射

$$M\simeq \mathrm{B}\check{C}(U_i)\to \mathrm{B}\mathcal{M}_0$$

表示紧支撑类 $[V,Q]\in\mathrm{KO}_c^0(M)$；参见命题 5.12 和推论 5.15。

## 5. 来自 $\mathrm{Cl}_n$-bundles 丛的 KO-classes from 类

本节定义光滑流形 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛范畴，它为 KO 理论提供一个余循环模型，并在 $M=$pt 时还原为 Atiyah–Bott–Shapiro 范畴。假设所有超向量丛均为有限秩。超向量丛上的 **度量** 是其底层（未分级）向量丛上的度量，并且每个纤维中的偶子空间与奇子空间相互正交。

### 5.1. $\mathrm{Cl}_n$-丛。

我们从 $\mathrm{Cl}_n$-丛范畴的一个朴素候选定义开始。

**定义 5.1**。 $M$ 上的一个**基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛** 是一个带度量的超向量丛 $V\to M$，带有 $\mathrm{Cl}_n$作用，其纤维是自伴的左 $\mathrm{Cl}_n$-模。基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛之间的一个**稳定同构**是一个位于 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-等变包含映射 $V\hookrightarrow V'$，并附带 $V^\perp\subset V'$ 上的一个自伴 $\mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{-1}$作用的数据，该作用延拓了给定的 $\mathrm{Cl}_n$作用。

定义 5.1 恢复了一个范畴，它等价于（离散的）Atiyah–Bott–Shapiro 范畴，当 $M=$点 时。此外，上述意义下的 $\mathrm{Cl}_n$-丛确定了一个映射$M\to\mathrm{B}\mathcal{M}_n$；参见命题 5.12 的证明。然而，有些连续映射 $M\to\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 无法由基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛实现，因此存在一些 KO 类无法用定义 5.1 给出余循环描述。最简单的此类例子是一个映射 $S^1\to\mathrm{B}\mathcal{M}_1\widetilde{\ }$，其在 $\mathrm{KO}^1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$ 中的类非平凡。以下定义修正了这一缺陷。对于流形 $M$ 的开子集及其交集，我们沿用例 4.8 中的记号。

**定义 5.2**。 流形 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 由以下数据组成：

(1) $M$的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$；(2) 对每个非空有限子集 $\sigma\subset I$，一个带度量的超向量丛 $V_\sigma\to U_\sigma$，其上有 $\mathrm{Cl}_n$作用于 $V_\sigma$，且其纤维是自伴的左 $\mathrm{Cl}_n$-模；(3) 对每个非空有限子集 $\sigma\subset\tau\subset I$的包含映射，一个 $\mathrm{Cl}_n$-等变的带度量超向量丛 $g_{\sigma\tau}$ 的单射 $V_\sigma|_{U_\tau}\hookrightarrow V_\tau$：$U_\tau$之上，并在像 $V_\sigma^\perp\subset V_\tau$ 的正交补上配备一个 $\mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{-1}$作用，该作用扩张 $\mathrm{Cl}_n$作用。

对于 $\sigma\subset\tau\subset\rho$，我们要求映射 $g_{\sigma\tau}\circ g_{\tau\rho}=g_{\sigma\rho}$：$V_\sigma|_{U_\rho}\hookrightarrow V_\rho$相等，并要求 $V_\sigma^\perp\subset V_\tau\hookrightarrow V_\rho$ 上的 $\mathrm{Cl}_{-1}$作用是从 $V_\tau^\perp\subset V_\rho$上的 $\mathrm{Cl}_{-1}$作用限制而来。对于指称 $M$上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛时，我们使用记号 $e_{\sigma\tau}\in\Gamma(U_\tau,\ \mathrm{End}(V_\tau^\perp)_{\mathrm{odd}})$表示作用于 $V_\sigma^\perp\subset V_\tau$和$V=\{V_\sigma,g_{\sigma\tau},e_{\sigma\tau}\}$的 $\mathrm{Cl}_{-1}$作用的生成元。

**例 5.3**。实向量丛是 $\mathrm{Cl}_0$-模的例子。不过，$\mathrm{Cl}_0$-丛不一定是向量丛。例如，对于相对于开覆盖 $U_0,\ U_1\subset M$ 定义的 $\mathrm{Cl}_0$-丛，定义 5.2 要求提供数据

$$V_0\to U_0,\ \ V_1\to U_1,\qquad V_0|_{U_{01}}\hookrightarrow V_{01}\hookleftarrow V_1|_{U_{01}} \tag{53}$$

对于实向量丛 $V_0$和 $V_1$，以及在 $U_{01}=U_0\bigcap U_1$ 上的一个稳定等价。因此，在 $U_{01}$ 上稳定同构但秩不同的向量丛 $V_0$ 和 $V_1$，决定了一个并非向量丛的 $\mathrm{Cl}_0$-丛。

**定义 5.4**。对于光滑映射 $\phi\colon N \to M$和 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$，拉回 $\phi^*V$：$= \{\phi^*V_\sigma, \phi^*g_{\sigma\tau}, \phi^*e_{\sigma\tau}\}$是 $N$ 上的一个 $\mathrm{Cl}_n$-丛，其定义相对于开覆盖 $\{\phi^{-1}(U_i)\}$。特别地，$\mathrm{Cl}_n$-丛可以限制到子流形 $N \subset M$ 上。

我们需要以下几种 $\mathrm{Cl}_n$-模之间等价的版本。每一种都推广了向量丛之间的一种标准等价概念；参见例 5.8。

**定义 5.5**。相对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 和 $\{U'_i\}_{i\in I'}$，分别定义的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 和 $V' = \{V'_\alpha, g'_{\alpha\beta}, e'_{\alpha\beta}\}$ 之间的同构 由 $\mathrm{Cl}_n$- 等变的带度量向量丛同构 $\varphi_{\alpha\sigma}\colon V_\sigma|_{U'_\alpha} \xrightarrow{\sim} V_\alpha|_{U_\sigma}$（对 $\sigma \subset I$ 和 $\alpha \subset I'$，且 $U'_\alpha \bigcap U_\sigma$ 非空）组成。要求同构 $\varphi_{\alpha\sigma}$ 与 $g_{\sigma\tau}$、$g'_{\alpha\beta}$、$e_{\sigma\tau}$、$e'_{\alpha\beta}$ 的限制相容：对于 $\sigma \subset \tau$ 和 $\alpha \subset \beta$，上述数据须构成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} V_\tau|_{U'_\beta} & \xrightarrow{\varphi_{\beta\tau}} & V'_\beta|_{U_\tau} \\ {\scriptstyle g_{\sigma\tau}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g'_{\alpha\beta}} \\ V_\sigma|_{U'_\alpha} & \xrightarrow[\varphi_{\alpha\sigma}]{} & V'_\alpha|_{U_\sigma} \end{array} \tag{54}$$

并且要求像的正交补上的 $\mathrm{Cl}_{-1}$-作用相容。我们用 $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} V'$ 表示 $\mathrm{Cl}_n$-丛的同构。

**定义 5.6.** 使用定义 5.5 中的记号，$\mathrm{Cl}_n$-丛 $V$和 $V'$之间的稳定等价 是指如下数据：$\mathrm{Cl}_n$-等变等距嵌入 $\varphi_{\alpha\sigma}\colon V_\sigma|_{U'_\alpha} \hookrightarrow V'_\alpha|_{U_\sigma}$，以及对每个 $\sigma \subset I$和 $\alpha \subset I'$， $V_\sigma^\perp \subset V'_\alpha|_{U_\sigma}$上带有一个 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-作用，其中 $U_\sigma \bigcap U'_\alpha \neq \emptyset$。这些数据须满足与 (54) 类似的相容性。

**定义 5.7.** $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V$ 与 $V'$ 在 $M$ 上的一个协调，是指一个定义在 $M \times \mathbb{R}$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $\widetilde{V}$，连同同构 $i_0^*\widetilde{V} \cong V$和 $i_1^*\widetilde{V} \cong V'$，其中 $i_0$， $i_1\colon M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$分别是位于 0 和 1 处的包含映射。若存在这样的协调，我们称 $V$和 $V'$ 共边。协调在 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛同构类上定义了一个等价关系，其等价类称为协和类。

**例 5.8.** 对于视为 $\mathrm{Cl}_0$-模的向量丛 $V$， $V' \to M$，定义 5.5 意义下的同构与向量丛同构所包含的数据相同。若向量丛 $V$， $V' \to M$ 是定义 5.6 意义下稳定等价的 $\mathrm{Cl}_0$-丛，则 $[V] = [V'] \in \mathrm{KO}^0(M)$；事实上， $[V] - [V'] = [V^\perp] \in \mathrm{KO}^0(M)$，且奇同构 $e\colon V_\pm^\perp \to V_\mp^\perp$的存在蕴含 $[V^\perp] = [V^\perp{}_{\text{偶}}] - [V^\perp{}_{\text{奇}}] = 0$。实际上，稳定等价确定了作为 $\mathrm{Cl}_0$-模的 $V$与 $V'$ 之间的协调，构造见下文证明。

**引理 5.9**。若 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛稳定等价，则它们共边。

证明。设 $V'$ 上的 $V$ 和 $\mathrm{Cl}_n$-丛稳定等价。通过细化覆盖，我们可以假设 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V$、 $V'$ 以及它们之间的稳定等价，都是相对于 $M$ 的固定覆盖 $\{U_i\}$ 定义的。因此，设 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 和 $V' = \{V'_\sigma, g'_{\sigma\tau}, e'_{\sigma\tau}\}$。考虑由 $\{(-\infty,1),(0,\infty)\}$ 给出的 $\mathbb{R}$ 的开覆盖。协调 $\widetilde{V}$ 通过基本 $\mathrm{Cl}_n$-模定义，

$$V_\sigma \times (-\infty, 1) \to U_\sigma \times (-\infty, 1), \quad V'_\sigma \times (0,1) \to U_\sigma \times (0,1), \quad V'_\sigma \times (0,\infty) \to U_\sigma \times (0,\infty).$$

对于包含映射 $U_\sigma \times J \hookrightarrow U_\tau \times J$，其中固定 $J = (-\infty,1)$、$(0,\infty)$ 或 $(0,1)$，由 $V$ 或 $V'$ 可得显然的数据 $(g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau})$ 或 $(g'_{\sigma\tau}, e'_{\sigma\tau})$。剩下要为包含映射指定定义 5.2 中的相容数据 (3)

$$U_\sigma \times (-\infty, 1) \hookleftarrow U_\sigma \times (0,1) \hookrightarrow U_\sigma \times (0,\infty).$$

对于右侧包含映射，这些丛通过限制相关联，因此正交补是零丛，无需指定其他数据。对于左侧包含映射，我们使用

用于指定兼容性的 $\varphi_\sigma$ 的稳定等价数据： $V_\sigma \times (0,1) \hookrightarrow V'_\sigma \times (0,1)$ 数据。至此，协调的构造完成。 □

注记 5.10。 通过复合协调，一系列之字形稳定等价也确定了 $\mathrm{Cl}_n$-丛之间的协调。

**定义 5.11**。 设 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 是定义在 $M$ 上、相对于开覆盖 $\{U_i\}$ 定义的 $\mathrm{Cl}_n$-丛，设 $V' = \{V'_\alpha, g'_{\alpha\beta}, e'_{\alpha\beta}\}$ 是定义在 $M'$ 上、相对于开覆盖 $\{U'_k\}$ 定义的 $\mathrm{Cl}_m$-丛。定义以下 $\mathrm{Cl}_n$-丛上的加法和乘法运算。

(1) 若 $n = m$，则外直和 是定义在 $M \times M'$ 上、相对于乘积开覆盖 $\{U_i \times U'_k\}$ 定义的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V \boxplus V' := \{V_\sigma \boxplus V'_\alpha, g_{\sigma\tau} \boxplus g'_{\alpha\beta},\ e_{\sigma\tau} \boxplus e'_{\alpha\beta}\}$，其中 $V_\sigma \boxplus V'_\alpha$ 表示 $U_\sigma \times U'_\alpha$ 上超向量丛的 $\mathbb{Z}/2$- 分次外直和。(2) 外张量积 是定义在 $M \times M'$ 上、相对于开覆盖 $\{U_i \times U'_k\}$ 定义的 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_m$-丛 $V \boxtimes V' = \{V_\sigma \boxtimes V'_\alpha, g_{\sigma\tau} \boxtimes g'_{\alpha\beta}, e_{\sigma\tau} \boxtimes e'_{\alpha\beta}\}$，其中 $V_\sigma \boxtimes V'_\alpha$ 表示 $U_\sigma \times U'_\alpha$ 上超向量丛的 $\mathbb{Z}/2$-分次外张量积。

通过沿对角映射 $M \hookrightarrow M \times M$ 拉回外直和和外张量积，定义 $M$ 上 $\mathrm{Cl}_n$-丛的直和和张量积运算。

5.2. **从 $\mathrm{Cl}_n$-丛到 $\mathrm{KO}^n$-类**。

**命题 5.12**。 存在一个从 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛到 $\mathrm{KO}^n(M)$ 的满射，它在 $M =$点时化为 Atiyah–Bott–Shapiro 映射 (40)。一对 $\mathrm{Cl}_n$-丛在 $\mathrm{KO}^n(M)$ 中确定相同的类，当且仅当它们共边。$\mathrm{Cl}_n$-丛的外积和外直和与 KO 中的外积和外直和相容。

证明。 给定一个相对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 定义的 $M$ 上的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V$，考虑例 4.8 中的拓扑范畴 $\check{C}(U_i)$。定义 5.2 中的数据确定了一个映射 $\check{C}(U_i)_0 \to (\mathcal{M}_n)_0$ 到第 $n$ 个 Atiyah–Bott–Shapiro 范畴的对象空间，该映射在可缩选择的意义下唯一，定义如下。为所有 $\sigma$ 选取 $\mathrm{Cl}_n$-等变嵌入 $\epsilon_\sigma$: $V_\sigma \subset \mathcal{H}_n \times U_\sigma$ over $U_\sigma$。根据 [Kui65], , 嵌入空间是可缩的，因此这些选择确实在可缩选择的意义下唯一。进一步指定这些嵌入之间的同伦

$$\mathcal{H}_n \times U_\tau \overset{\epsilon_\sigma|_{U_\tau}}{\hookleftarrow} V_\sigma|_{U_\tau} \overset{g_{\sigma\tau}}{\hookrightarrow} V_\tau \overset{\epsilon_\tau}{\hookrightarrow} \mathcal{H}_n \times U_\tau$$

and 嵌套包含映射之间的高阶同伦（同样由 [Kui65]给出）。由此得到一个 p bet几何实现之间的映射，其在可缩选择意义下唯一

$$M \simeq |N_\bullet \check{C}(U_i)^{\mathrm{op}}| \to |N_\bullet \mathcal{M}_n| = \mathrm{B}\mathcal{M}_n. \tag{55}$$

由引理 4.18，这确定了一个类 $[V] \in \mathrm{KO}^n(M)$。根据神经定理 [Bor48], , 任意连续映射 $M \to \mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 都与映射 $N_\bullet \check{C}(U_i)^{\mathrm{op}} \to N_\bullet \mathcal{M}_n$的几何实现同伦，其中 $\{U_i\}$ 取为良好开覆盖；因此，由定理 4.18，$\mathrm{KO}^n(M)$中的任意类都可由一个 $\mathrm{Cl}_n$-丛表示。共边的 $\mathrm{Cl}_n$-丛按构造确定了到 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 的同伦映射，因此表示相同的 KO 类。选取 $M \times \mathbb{R}$的一个良好开覆盖后，同伦映射可提升为共边的 $\mathrm{Cl}_n$-丛。

与外张量积的相容性由定理 4.18 以及几何实现与有限乘积可交换这一事实推出；具体而言，与 $\mathrm{Cl}_n$-模和 $\mathrm{Cl}_m$-模的外张量积相对应的映射 (55)，与复合映射同伦

$$\begin{aligned} M \times M' &\simeq |N_\bullet \check{C}(U_i \times U'_j)^{\mathrm{op}}| \simeq |N_\bullet \check{C}(U_i)^{\mathrm{op}} \times N_\bullet \check{C}(U'_i)^{\mathrm{op}}| \simeq |N_\bullet \check{C}(U_i)^{\mathrm{op}}| \times |N_\bullet \check{C}(U'_i)^{\mathrm{op}}| \\ &\to \mathrm{B}\mathcal{M}_n \times \mathrm{B}\mathcal{M}_m \to \mathrm{B}\mathcal{M}_{n+m}, \end{aligned}$$

其中，第一个箭头由与构成部分的 $\mathrm{Cl}_n$-丛和 $\mathrm{Cl}_m$-丛相关联的映射 (55) 确定，第二个箭头则是 (49) 的实现。因此，这与乘积映射 $\mathrm{KO}^n(M) \times \mathrm{KO}^m(M') \to \mathrm{KO}^{n+m}(M \times M')$ 一致。

外直和的处理方式类似，但有一点细微之处： $\mathcal{M}_n$ 上的加法运算只部分有定义（见注释 4.17）。为确保所需的和有定义，在选择与 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$ 和 $V'$ 相关联的映射到 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 时，要选取彼此正交的子空间 $V_\sigma \subset \mathcal{H}_n \times U_\sigma$ 和 $V'_\alpha \subset \mathcal{H}_n \times U_\alpha$。随后，子空间 $V_\sigma \boxplus V'_\alpha \subset \mathrm{H}_n \times U_\sigma \times U'_\alpha$ 的集合连同显然的相容性数据，确定了一个与 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V \boxplus V'$ 相关联的映射 $M \times M' \to \mathrm{B}\mathcal{M}_n$。□

对于 $M$ 上的 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$，我们用记号 $[V] \in \mathrm{KO}^n(M)$ 表示命题 5.12 中相应的 KO 类。

**推论 5.13**。 如果 $M$ 上的 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$ 和 $V'$ 稳定等价，那么 $[V] = [V'] \in \mathrm{KO}^n(M)$。

证明。 这由引理 5.9 立即得出。 □

5.3. **悬挂类的一个代表**。

**定义 5.14**。 $M$ 上的 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$ 具有紧支撑，如果在某个紧子集 $K \subset M$ 的补集上， $V$ 的底层超向量丛是零 $\mathsf{Cl}_n$-丛。类似地，对于纤维丛 $\pi\colon M \to N$， $M$ 上的 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$具有紧垂直支撑，如果对每个 $y \in N$，都存在一个邻域 $U \subset N$，使得 $V$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 上具有紧支撑。

**推论 5.15.** 存在一个从 $M$上的紧支撑 $\mathsf{Cl}_n$-丛到 $\mathrm{KO}^n_c(M)$的满射。两个 $\mathsf{Cl}_n$-丛在 $\mathrm{KO}^n_c(M)$中确定相同的类，当且仅当它们共边。$\mathsf{Cl}_n$-丛的外积与紧支撑 KO 中的外积相容。

证明。 这是因为零 $\mathsf{Cl}_n$-丛在 (55) 下唯一确定到 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 基点的常值映射。□

**De定义 5.16.** 悬挂类是 $\mathrm{KO}^1_c(\mathbb{R}) \simeq \widetilde{\mathrm{KO}}^1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$的一个生成元的选取。

**引理 5.17.** 悬挂类由以下 $\mathsf{Cl}_1$-丛表示。考虑

$$\begin{aligned} \{U_i\} &= \{(-1,1),\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \\ V_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} &= \mathbf{0}, \quad V_{(-1,1)} = \underline{\mathsf{Cl}}_1 \end{aligned} \tag{56}$$

其中 $\mathsf{Cl}_1 \simeq \mathbb{R}^{1|1}$ 是其自身上的左模，并配有稳定同构 $\mathbf{0} \hookrightarrow \mathsf{Cl}_1$ over $(-1,0) \coprod (0,1)$，该同构来自 Example 3.9 中 $\mathbb{R}^{1|1}$ 上的 $\mathsf{Cl}_1 \otimes \mathsf{Cl}_{-1}$-作用。

证明。令 $\sigma_{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathsf{Cl}_1$-丛（56），并令 $[\sigma_{\mathbb{R}}] \in \mathrm{KO}^1_c(\mathbb{R})$ 表示由推论 5.15 得到的对应 KO 类。开覆盖 $\{(-\infty,0),(-1,1),(0,\infty)\}$ 是良好的，因此（再次由推论 5.15）悬挂类可以用该覆盖上的基本 $\mathsf{Cl}_n$-丛以及交叠区域上的稳定同构来表示。紧支撑条件要求我们在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上取零模。在 $(-1,1)$ 上，$\mathsf{Cl}_1$-模必须是纤维为超向量空间 $\mathbb{R}^{k|k} \simeq (\mathbb{R}^{1|1})^{\oplus k}$ 的平凡丛，其中 $k \in \mathbb{N}$ 为某个元素；这是因为 $f \in \mathsf{Cl}_1$ 给出了 $\mathsf{Cl}_1$-模丛的偶子空间与奇子空间之间的同构。在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上，我们要求在 $\mathbb{R}^{k|k}$ 上具有 $\mathsf{Cl}_1 \otimes \mathsf{Cl}_{-1} \simeq \mathsf{Cl}^{1,1}$-模结构。除奇偶反转外，具有例 3.9 中 $\mathsf{Cl}^{1,1}$-模结构的 $\mathbb{R}^{1|1}$ 是唯一不可约的 $\mathsf{Cl}^{1,1}$-模。由此可知，$\mathrm{KO}^1_c(\mathbb{R})$ 中的任意类都具有 $[(\sigma_{\mathbb{R}})^{\oplus k}]$ 的形式，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 为某个元素，而负的 $k$ 表示取奇偶反转后的模。因此， $[\sigma_{\mathbb{R}}]$ 是 $\mathrm{KO}^1_c(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$ 的生成元，因而是悬挂类的一个代表。□

## 6. The Pontryagin class of a $\mathsf{Cl}_n$-bundle as a Cech–de Rham cocycle

对于普通向量丛 $V \to M$，在 $V$ 上选择联络 $\nabla$，可确定一个闭微分形式，它细化了 $M$的 $\mathrm{KO}^0$-类 $[V] \in$ 中的庞特里亚金特征 $\mathrm{Ch}(V) \in \mathrm{H}(M;\mathbb{R}[u^{\pm 1}])$，

$$\mathsf{sTr}(e^{-u\nabla^2}) \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[u^{\pm 1}]), \qquad [\mathsf{sTr}(e^{-u\nabla^2})] = \mathrm{Ch}(V) \in \mathrm{H}(M;\mathbb{R}[u^{\pm 1}]).$$

本节将为 $\mathrm{Cl}_n$-丛构造类似的细化：选择联络数据后，$\mathrm{Cl}_n$-丛 $V \to M$ 可确定 $M$ 的 Čech–de Rham 复形中的一个余循环，它细化了 $[V]$的庞特里亚金特征；参见命题 6.15 和 6.16。

6.1. **超联络的陈形式回顾**。对于实超向量丛$V \to M$，令 $V_{\mathrm{ev}} \subset V$ 和 $V_{\mathrm{odd}} \subset V$ 分别表示其偶子丛和奇子丛。考虑取值于 $V$ 的微分形式空间 $\Omega^\bullet(M;\, V) = \Gamma(M;\, \Lambda^\bullet(T^*M) \otimes V)$，并将其视为超向量空间。

**定义 6.1** ([Qui85])。在 $V$ 上的一个超联络 $\mathbb{A}$ 是一个奇 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\mathbb{A}\colon \Omega^\bullet(M;V) \to \Omega^\bullet(M;V), \quad \mathbb{A}(\alpha \cdot v) = d\alpha \cdot v + (-1)^{|\alpha|}\alpha \cdot \mathbb{A}v \tag{57}$$

满足所示的莱布尼茨法则，其中 $v \in \Omega^\bullet(M;\, V)$ 和 $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$。

在一个 $n$-流形上，可以将超联络表示为以下各项之和

$$\mathbb{A} = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}_{(j)}, \tag{58}$$

其中 $\mathbb{A}_{(1)} = \nabla$ 是 $V$ 上的普通联络，$\mathbb{A}_{(2j)} \in \Omega^{2j}(M;\, \mathrm{End}(V)_{\mathrm{odd}})$ 取值于奇端同态，而 $\mathbb{A}_{(2j+1)} \in \Omega^{2j+1}(M;\, \mathrm{End}(V)_{\mathrm{ev}})$ 取值于偶自同态。

**定义 6.2** ([BGV92], 第 117 页)。设 $V \to M$ 是一个度量实超向量丛，并配备了超联络 $\mathbb{A}$。其伴随超联络为

$$\mathbb{A}^* = \sum_j (-1)^{j(j+1)/2} \mathbb{A}^\dagger_{(j)} \tag{59}$$

其中，对于 $j \neq 1$，$\mathbb{A}^\dagger{}_{(j)}$ 表示利用 $V$ 上的度量得到的、取值于自同态的微分形式的伴随，而 $\mathbb{A}^\dagger{}_{(1)} = \nabla^\dagger$ 是由以下条件刻画的普通联络的伴随

$$d\langle v, w\rangle = \langle \nabla v, w\rangle + \langle v, \nabla^\dagger w\rangle.$$

若 $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$，则称超联络是**自伴** 的。

注 6.3。自伴性等价于 $\mathbb{A}_{(j)}$ 在次数为 $j = 4k$，$4k+3$ 时自伴，在次数为 $j = 4k+1$，$4k+2$，$j \neq 1$ 时反自伴。

对于 $u^{1/2}$ 一个次数为 $-1$的形式变量，定义

$$\mathbb{A}(u) := u^{-1/2}\mathbb{A}_{(0)} + \mathbb{A}_{(1)} + u^{1/2}\mathbb{A}_{(2)} + \cdots + u^{j/2}\mathbb{A}_{(j)} + \ldots \tag{60}$$

那么，$\mathbb{A}$ 的庞特里亚金形式为微分形式

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) := \mathsf{sTr}(e^{-u\mathbb{A}(u)^2}) \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[u,u^{-1}]) \tag{61}$$

其总次数为 0，表示 $V$的庞特里亚金特征。$\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 中没有 $u$ 的分数次幂，这是因为奇端同态的超迹为零。根据注 6.3，自伴性进一步意味着 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 的取值落在次数模 4 为 0 的微分形式中；见下文引理 6.10。微分形式的等式

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}') = \mathrm{Ch}(\mathbb{A}) + \mathrm{Ch}(\mathbb{A}'), \quad \mathrm{Ch}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}') = \mathrm{Ch}(\mathbb{A}) \cdot \mathrm{Ch}(\mathbb{A}') \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[u,u^{-1}]) \tag{62}$$

细化了上同调中庞特里亚金特征的直和与张量积公式。

**定义 6.4**。设给定超向量丛及其上的超联络 $(V_0, \mathbb{A}_0)$ 和 $(V_1, \mathbb{A}_1)$，它们定义在 $M$ 上。超联络 $\mathbb{A}_0$ 与 $\mathbb{A}_1$ 之间的协调是超向量丛 $\tilde{V} \to M \times \mathbb{R}$ 上的一个超-联络 $\tilde{\mathbb{A}}$，并附有同构数据 $i_0^* \tilde{V} \simeq V_0$ 和 $i_1^* \tilde{V} \simeq V_1$，且满足

$$i_0^* \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}_0, \qquad i_1^* \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}_1$$

对于包含映射 $i_j\colon\ M \times \{j\} \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$, $j = 0,1$。

**定义 6.5**。 超联络协调 $\mathbb{A}$ 的陈–西蒙斯形式 为

$$\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}) := \int_{[0,1]} \mathrm{Ch}(\tilde{\mathbb{A}}) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[u, u^{-1}]). \tag{63}$$

由斯托克斯定理，陈–西蒙斯形式满足

$$d\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}) = \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_1) - \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_0). \tag{64}$$

注记 6.6。 模去恰当形式后，$\mathrm{CS}(\mathbb{A})$ 仅取决于 $\mathbb{A}_1$ 和 $\mathbb{A}_0$，而不取决于协调 $\mathbb{A}$的选择。

**例 6.7**。 对于同一超向量丛 $V \to M$上的超联络 $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1$，仿射插值

$$\tilde{\mathbb{A}} = dt\partial_t + (1-t)\mathbb{A}_0 + t\mathbb{A}_1 \qquad i_0^*\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}_0, \;\; i_1^*\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}_1 \tag{65}$$

给出 $p^*V \to M \times \mathbb{R}$ 上关于 $p$的协调： $M \times \mathbb{R} \to M$ 投影。我们采用记号

$$\mathrm{CS}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1) := \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}) \tag{66}$$

表示形如 (65) 的协调。

协调的存在意味着 $V_0 \simeq V_1$，因此我们常常会默认共边的超联络 $\mathbb{A}_0$ 和 $\mathbb{A}_1$ 定义在同一个丛上。不过，该协调不必具有 (65) 的形式。

利用 (62)，陈–西蒙斯形式在直和与张量积下具有如下性质

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}} \oplus \tilde{\mathbb{B}}) & = & \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}) + \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{B}}) \\ \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}} \otimes \tilde{\mathbb{B}}) & = & \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}})\mathrm{Ch}(\mathbb{B}) + \mathrm{Ch}(\mathbb{A}')\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{B}}) \mod \mathrm{image(d)} \\ & = & \mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}})\mathrm{Ch}(\mathbb{B}) + \mathrm{Ch}(\mathbb{A})\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{B}}) + d\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}})\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{B}}). \end{array} \tag{67}$$

我们需要将 (63) 推广到 $(k+1)$-元组的共边超联络。首先定义仿射光滑单纯形 $\mathbb{A}\mathrm{ff}^k$ 和闭 $k$-单纯形 $\Delta^k \subset \mathbb{A}\mathrm{ff}^k$ 如下

$$\mathbb{A}\mathrm{ff}^k = \{(t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum t_i = 1\}, \qquad \Delta^k = \{(t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{A}\mathrm{ff}^k \mid t_i \geq 0\}.$$

于是，给定一个超向量丛 $V \to M$，其上有 $k+1$ 个超联络 $\mathbb{A}_0$，$\mathbb{A}_1$，$\mathbb{A}_2$，…，$\mathbb{A}_k$，定义超联络 $\mathbb{A}$ 于 $p^*V$ 上，方式如下

$$\tilde{\mathbb{A}} := \sum_{j=0}^k dt_j \partial_{t_j} + \sum_{j=0}^k t_j p^* \mathbb{A}_j$$

其中 $p$: $M \times \mathbb{A}\mathrm{ff}^k \to M$ 是投影。于是，微分形式

$$\mathrm{CS}_k(\tilde{\mathbb{A}}) = \int_{\Delta^k} \mathrm{Ch}(\tilde{\mathbb{A}}) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]) \tag{68}$$

其总次数为 $-k$，并且（根据斯托克斯定理）满足

$$d\mathrm{CS}_k(\tilde{\mathbb{A}}) = \int_{\partial\Delta^k} \mathrm{Ch}(\tilde{\mathbb{A}}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{\Delta^{k-1}} \mathrm{Ch}(\tilde{\mathbb{A}}_j) \tag{69}$$

其中， $\tilde{\mathbb{A}}_j$ 是 $\mathbb{A}\mathrm{ff}^k$的第 $j$个面的 $\tilde{\mathbb{A}}$ 限制。当 $k = 1$时，(68)重现陈–西蒙斯形式(63)，其中性质(69)简化为(64)。

6.2. **Clifford 线性超联络**。在 [Qui85, §5], 中，Quillen 使用超联络，为带有 $\mathbb{C}\mathrm{l}_1$-作用的复超向量丛构造陈特征的微分形式精化，作为(61)的奇次数对应物。以下内容进一步阐述 Quillen 的思想，并讨论带有 $\mathrm{Cl}_n$-作用的实向量丛。

**定义 6.8**。设 $V \to M$ 是一个实超向量丛，其纤维带有 $\mathrm{Cl}_n$作用。$V$上的超联络 $\mathbb{A}$ 若与 $\mathrm{Cl}_n$作用分次对易，则称其为 $\mathrm{Cl}_n$-线性的 。

**定义 6.9**。设 $V \to M$ 是一个实度量超向量丛，其纤维带有自伴的 $\mathrm{Cl}_n$作用。$V$上的 $\mathrm{Cl}_n$-线性自伴超联络 $\mathbb{A}$ 的陈形式 为

$$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}) := \mathsf{sTr}(u^{-n/2}\Gamma_n \circ \exp(-u\mathbb{A}(u)^2)) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[u^{1/2}, u^{-1/2}]), \tag{70}$$

使用 $\mathrm{Cl}_n$-模上的超迹 (31)，并将其按 $\Omega^\bullet(M)$-线性方式延拓。

**引理 6.10**。对于自伴 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}$，微分形式 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$属于子代数 $\Omega^\bullet(M;\ \mathbb{R}[\alpha, \alpha]) \subset \Omega^\bullet(M;\ \mathbb{R}[u^{1/2}, u^{-1/2}])$，其中 $\alpha = 2u^2$。此外，$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$是闭的，且总次数为 $n$。

证明。 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}) \in \Omega^\bullet(M;\ \mathbb{R}[u, u]) \subset \Omega^\bullet(M;\ \mathbb{R}[u^{1/2}, u^{-1/2}])$ 这一事实源于奇端同态的超迹为零。具体而言，(58) 指明了超联络的一个分量取值于偶端同态还是奇端同态；奇端同态对应于 (60) 中的半整数系数。端同态 $\Gamma_n$ 是偶的还是奇的，取决于 $n$ 的奇偶性，并且根据 Clifford 超迹的定义，带有一个 $u^{-n/2}$ 因子。因此，$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$ 展开式中 $u$ 的半整数次幂是奇端同态的系数，故在超迹作用下为零。利用斜自伴算子的超迹为零这一性质，自伴超联络还能将结果进一步限定为 $u$ 的偶次幂，见注 6.3。这验证了 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}) \in \Omega^\bullet(M;\ \mathbb{R}[\alpha, \alpha])$。

由于 $u\mathbb{A}(u)^2$ 的总次数为零，而 $u^{-n/2}\Gamma_n$ 的总次数为 $n$，$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$ 的总次数为 $n$。最后，要证明 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$ 是闭的，可采用与普通超联络情形相同的论证，例如参见 [BGV92，命题 1.41]。关键事实是

$$\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}([\mathbb{A}, \omega]) = d\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}(\omega). \tag{71}$$

这可通过局部计算得到：写作 $\mathbb{A} = d + \gamma$，并利用 Clifford 超迹在超交换子 [ 上为零这一事实，参见 Qui85，命题 2]。于是，由 (71) 及恒等式 $[\mathbb{A}, \exp(-\mathbb{A}^2)] = 0$，可得 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A})$ 是闭的。□

**定义 6.11**。在 $V_0, V_1 \to M$ 上，两个自伴 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1$ ˜ ˜ 之间的协调 是指一个自伴 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}$，定义在 $V \to M \times \mathbb{R}$ 上，并附带以下同构的数据

$$i_0^*\widetilde{V} \simeq V_0, \qquad i_1^*\widetilde{V} \simeq V_1$$

˜ ˜满足性质 $i_0^*\mathbb{A} = \mathbb{A}_0$ 和 $i_1^*\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$，对于包含映射 $i_j$: $M \times \{j\} \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$,$j = 0,\ 1$。

**定义 6.12.** $\mathrm{Cl}_n$-线性自伴超联络之间的协调的陈–西蒙斯形式 是一个总次数为 $n-1$ 的微分形式，

$$\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}) := \int_{[0,1]} \mathrm{Ch}_n(\tilde{\mathbb{A}}) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]). \tag{72}$$

标准论证表明，陈–西蒙斯形式满足 (64)，且在模恰当形式的意义下仅取决于 $\mathbb{A}_0$ 和 $\mathbb{A}_1$ 。涉及直和与张量积的陈–西蒙斯形式也满足相同的公式 (67)。

**引理 6.13**。假设给定了一个 $\mathrm{Cl}_n$-丛稳定等价的数据 s

$$V_0 \hookrightarrow V_1, \qquad e \in \Gamma(M; \mathrm{End}(V^\perp)_{\mathrm{odd}}),\ e^2 = \mathrm{id} \tag{73}$$

以及 $\mathrm{Cl}_n$-线性自伴超联络 $\mathbb{A}_0$ on $V_0$ 和 $\mathbb{A}_1$ on $V_1$ （它们不必与包含映射 $V_0 \hookrightarrow V_1$相容）。那么存在唯一确定的自伴 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}_0'$ on $V_1$，使得微分形式满足总次数为 $n$时的等式

$$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_1) - \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0) = d\mathrm{CS}(\mathbb{A}_0', \mathbb{A}_1), \qquad \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0) = \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0') \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]) \tag{74}$$

进一步细化庞特里亚金特征在上同调中的等式 $\mathrm{Ch}(V_0) = \mathrm{Ch}(V_1)$。特别地，稳定等价 $V_0 = \mathbf{0} \hookrightarrow V_1$ 连同在 $V_1$ 上选定的超联络，决定了一个满足 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_1) = d\zeta$的微分形式 $\zeta$。

证明。令 $V_0^\perp \subset V_1$ 表示包含映射 $V_0 \hookrightarrow V_1$的正交补。$\mathrm{Cl}_n$-线性自同态 $e \in \Gamma(\mathrm{End}(V_0^\perp)_{\mathrm{odd}})$ 的存在性，且满足 $e^2 = \mathrm{id}_{V_0^\perp}$，意味着基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛存在直和分解 $V_0^\perp \simeq (V_0^\perp)_+ \oplus (V_0^\perp)_-$，其中$e$: $(V_0^\perp)_\pm \to (V_0^\perp)_\mp$ 是交换各直和项的反分次同构。令

$$p^+ \colon V_1 \to (V_0^\perp)_+$$

表示正交投影。利用基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛的同构，

$$V_1 \simeq V_0 \oplus V_0^\perp \simeq V_0 \oplus (V_0^\perp)_+ \oplus (V_0^\perp)_-$$

定义 $V_1$ 上自伴的 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络

$$\mathbb{A}_0' = \mathbb{A}_0 \oplus (p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+) \oplus e^*(p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+) \tag{75}$$

其中，$\nabla_1$ 是 $\mathbb{A}_1$的普通联络部分，见 (58)。利用 (62) 以及 Clifford 超迹的性质，我们计算得

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0') &= \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0) + \mathrm{Ch}_n((p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+)) + \mathrm{Ch}_n(e^*(p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+)) \\ &= \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0) + \mathrm{Ch}_n((p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+)) - \mathrm{Ch}_n((p^+ \circ \nabla_1 \circ p^+)) \\ &= \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_0) \end{aligned}$$

其中第二行用到了 $e$ 是一个奇自同构。结论得证。 □

**例 6.14**。例 3.15 中的模可视为 $M = \mathrm{pt}$ 上的基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛。Clifford 超迹由此计算出相关类在 $\mathrm{KO}^\bullet(\mathrm{pt})$ 中众所周知的庞特里亚金特征。具体而言，

$$\mathrm{Ch}_8({}_{\mathrm{Cl}_8}\mathbb{R}^{8|8}) = u^{-4} = \beta^{-1} = \frac{1}{4}\alpha^{-2} \qquad \mathrm{Ch}_4({}_{\mathrm{Cl}_4}\mathbb{R}^{4|4}) = 2u^{-2} = \beta^{-1}\alpha = \frac{1}{4}\alpha^{-1}, \tag{76}$$

采用记号 (41) 表示 $\mathrm{KO}^\bullet(\mathrm{pt})$ 的元素，并使用以下同一

$$\Omega^\bullet(\mathrm{pt}; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]) \simeq \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}] \subset \mathbb{R}[u, u^{-1}], \qquad 2u^2 = \alpha.$$

6.3. **Cl丛的庞特里亚金形式**。$\mathrm{Cl}_n$-丛的庞特里亚金形式由局部的 (70) 决定，其中微分形式代表元对超联络选择的依赖由 (72) 衡量。我们现在的目标是证明，将这些局部值拼接起来会得到 Čech–de Rham 复形 $(\Omega^\bullet(U_*)\ d + \delta)$ 中的一个余循环。我们的 Čech–de Rham 双复形约定遵循 Bott 和 Tu [BT82, §8], ，尤其是，Čech 微分 $\delta$ 要求对覆盖 $I$ 的指标集进行排序。

**命题 6.15**。给定一个 $\mathrm{Cl}_n$ 丛 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 及 $I$上的一个排序，在 $V_\sigma \to U_\sigma$ 上对每个 $\sigma \subset I$ 选择自伴超联络 $\mathbb{A}_\sigma$，即可确定一个记作如下的 Čech–de Rham 余循环

$$\mathrm{Ch}_n(\{U_i\}, \mathbb{A}_i) \in \Omega^\bullet(U_*; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]). \tag{77}$$

证明。从每个 $i \in I$ 的次数为 $n$ 的陈形式开始，

$$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_i) \in \Omega^\bullet(U_i; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]) \tag{78}$$

我们构造其在 Čech–de Rham 复形中的扩张，使之成为一个余循环。对于 $\sigma = \{i_0 < i_1 < \cdots < i_k\}$，$\mathrm{Cl}_n$-丛给出了 $U_\sigma$上的稳定同构$g_{i_j\sigma}$： $V_{i_j}|_{U_\sigma} \hookrightarrow V_\sigma$的数据。

利用所选的 $V_{i_j}$ 上的超联络 $\mathbb{A}_{i_j}$ 和 $V_\sigma \to U_\sigma$上的超联络 $\mathbb{A}_\sigma$，引理 6.13 为每个 $i_j \in \sigma \subset I$ 在 $V_\sigma$ 上构造出超联络 $\mathbb{A}'_{i_j}$，

$$\mathbb{A}'_{i_0}, \mathbb{A}'_{i_1}, \dots, \mathbb{A}'_{i_k}, \qquad \tilde{\mathbb{A}}_\sigma = \sum_{j=0}^{k} dt_j \partial_{t_j} + \sum_{j=0}^{k} t_j \mathbb{A}'_j, \qquad i_0 \le i_1 \le \cdots \le i_k$$

˜它们确定了 $p^*V_\sigma$ 上的指定超联络 $\mathbb{A}_\sigma$，其中 $k+1 = |\sigma|$ 且 $p\colon\ U_\sigma \times \mathbb{A}\mathrm{ff}^k \to U_\sigma$ 是投影。上文中，我们按照 $I$上的排序，对超联络 $\mathbb{A}'_{i_0}$，$\mathbb{A}'_{i_1}$，……，$\mathbb{A}'_{i_k}$ 进行排序。按照（68），定义高阶陈–西蒙斯形式

$$\mathrm{CS}_k(\tilde{\mathbb{A}}_\sigma) = \int_{\Delta^k} \mathrm{Ch}_n(\tilde{\mathbb{A}}_\sigma) \in \Omega^{\bullet - k}(U_\sigma; \mathbb{R}[u^{\pm 1}]) \tag{79}$$

其总次数为 $n-k$。我们注意到，改变 $I$ 的排序可能会改变形式（79）的符号。陈形式（78）和高阶陈–西蒙斯形式（79）提供了 Čech–de Rham 复形中次数为 $n$ 的余循环所需的数据；仍需证明它们满足所要求的性质。对于 Čech–de Rham 双复形中的 $\delta$ Čech 微分和 $d$ de Rham 微分，首先需要检验的条件是

$$\delta\{\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_i)\} = \delta\{\mathrm{Ch}_n(\widetilde{\mathbb{A}}_i)\} = \{d\mathrm{CS}(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)\} = \{d\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}_{ij})\} \in \prod_{i<j} \Omega^n(U_i \bigcap U_j)$$

其中，前两个等式用到了（74），第三个等式则是（79）的定义。关于更高阶交集的条件也可类似地由下式推出

$$\begin{aligned} d\int_{\Delta^k} \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_{i_0,\dots,i_k}) &= \int_{\partial\Delta^k} \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_{i_0,\dots,i_k}) \\ &= \sum (-1)^j \int_{\Delta^{k-1}} \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots i_k}) \\ &= \delta \int_{\Delta^{k-1}} \mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_{i_0,\dots,i_k}). \end{aligned}$$

这表明我们构造出了双复形中的一个余循环，从而完成证明。 □

**命题 6.16.** 切赫–德拉姆余循环（77）代表 $\mathbf{Cl}_n$-丛 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 的庞特里亚金特征。

证明. 由于超联络空间是仿射的，$[\mathbf{Ch}_n(\{U_i\}, \mathbb{A}_i)]$ 仅取决于 $[V] \in \mathbf{KO}^n(M)$。因此，由命题 5.12，$\mathbf{Ch}_n$ 确定了一个映射

$$[\mathrm{Ch}_n]\colon \mathrm{KO}^n(M) \to \mathrm{H}^n(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]). \tag{80}$$

局部描述（70）以及 Clifford 超迹的性质（32）和（33）表明，映射（80）是可加且可乘的。

当 $n=0$（其中 $\mathbf{Cl}_0 = \mathbb{R}$）时，公式（70）与实向量丛的庞特里亚金特征的标准微分形式精化一致，从而验证了此时的引理。一般 $n$ 的情形则由 $\mathbf{Ch}_n$ 与悬挂类和 Bott 元相容这一事实推出，下面对此作出解释。设 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 为一个 $\mathbf{Cl}_j$-模，并选取 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $8k - j \ge 0$。然后考虑如下图示，

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{KO}^j(M) & \xrightarrow{\smile [\sigma_{\mathbb{R}^{8k-j}}]} & \mathrm{KO}_c^{8k}(M \times \mathbb{R}^{8k-j}) & \xrightarrow{\smile [\beta^k]} & \mathrm{KO}_c^0(M \times \mathbb{R}^{8k-j}) \\ \downarrow{\scriptstyle [\mathrm{Ch}_j]} & & \downarrow{\scriptstyle [\mathrm{Ch}_{8k}]} & & \downarrow{\scriptstyle [\mathrm{Ch}_0]} \\ \mathrm{H}^j(M; \mathbb{R}[u,u]) & \xrightarrow[\smile [\mathrm{Ch}(\sigma_{\mathbb{R}^{8k-j}})]]{} & \mathrm{H}_c^{8k}(M \times \mathbb{R}^{8k-j}; \mathbb{R}[u,u]) & \xrightarrow[\smile u^{4k}]{} & \mathrm{H}_c^0(M \times \mathbb{R}^{8k-j}; \mathbb{R}[u,u]) \end{array}$$

左上方的水平箭头来自与表示悬挂类 $\sigma_{\mathbb{R}^{8k-j}} = (\sigma_{\mathbb{R}})^{\boxtimes(8k-j)}$，的 $\mathbf{Cl}_n$-丛取外积，其中 $\sigma_{\mathbb{R}}$ 在 (56) 中定义。该类在 $\mathbf{Ch}_n$ 下的像 ˇ 是普通上同调中悬挂类的一个 Čech–de Rham 代表元，它具有紧支撑且在上同调中非零；参见下文引理 7.16

。这意味着左侧的水平箭头都是（悬挂）同构。中间的水平箭头是 Bott 同构，其中例 6.14 计算了 Bott 类在 $\mathrm{Ch}_n$ 下的像。最右侧的竖直箭头是通常的 0 次庞特里亚金特征。由于所有水平箭头都是同构，庞特里亚金特征在上同调中与悬挂相容，因此其他竖直箭头也由庞特里亚金特征给出。□

## 7. Differential cocycles

我们的下一个目标是将命题 5.12 中的 KO 余循环细化为微分余循环（见定义 7.3）。具体做法的依据是下文 §7.1 回顾的微分复 K 理论的生成元与关系描述。随后我们证明定理 1.2，表明定义 7.6 中的 $\mathrm{KO}^\bullet(M)$ 是微分 KO 理论的一个模型。

**7.1. 微分复 K 理论回顾。** 我们回顾 Klo08 第 2] 章中微分复 K 理论的几何构造。该构造扩展了 FL10 定义 2.14] ，将带有超联络的超向量丛纳入其中；参见备注 7.2。对于光滑流形 $M$，考虑三元组 $(V, \mathbb{A}, \phi)$，其中 $V \to M$ 是厄米向量丛， $\mathbb{A}$ 是定义在 $V$ 上的自伴超联络，且 $\phi \in \in \Omega^{\mathrm{odd}}(M)$。定义一个等价关系

$$(V,\mathbb{A},\phi) \sim (V',\mathbb{A}',\phi') \iff \begin{array}{l}\text{there exists an isomorphism } f\colon V \xrightarrow{\sim} V' \\ \text{with } \ \phi' = \mathrm{CS}(\mathbb{A}, f^*\mathbb{A}') + \phi \in \Omega^{\mathrm{odd}}(M)/\mathrm{image}(d).\end{array} \tag{81}$$

即满足关于所得陈–西蒙斯形式之条件的厄米向量丛同构。

**定义 7.1.** 将 $\widehat{\mathrm{K}}^0(M)$ 定义为由等价类 (81) 生成的自由阿贝尔群，模去由下列元素生成的子群

$$(V,\mathbb{A},\phi) + (V',\mathbb{A}',\phi') - (V\oplus V', \mathbb{A}\oplus\mathbb{A}', \phi+\phi') \quad \text{and} \quad (W\oplus \Pi W, \nabla \oplus \Pi\nabla, 0) \tag{82}$$

其中 $\Pi W$ 是纯偶向量丛 $W$的奇偶反转， $\nabla$ 是 $W$上的普通联络，而 $\Pi\nabla$是 $\Pi W$上相应的联络。三元组 $(V, \nabla, \eta)$ 是一个微分余循环，而 $[V, \mathbb{A}, \phi] \in \widehat{\mathrm{K}}^0(M)$ 表示它在微分 K 理论中的等价类。

注 7.2。 在任一给定的等价类 (81) 中，都存在一个涉及普通联络的代表元：每个超联络都与某个普通联络共边。

我们注意到，(81) 蕴含存在一个良定义映射

$$\widehat{\mathrm{K}}^0(M) \to \Omega^{\mathrm{even}}(M), \qquad [V,\nabla,\phi] \mapsto \mathrm{Ch}(V,\nabla,\phi) := \mathsf{sTr}(e^{-\nabla^2}) + d\phi,$$

其取值于闭偶微分形式。对于下面的推广，我们强调， $\phi$是介于微分形式 $\mathsf{sTr}(e^{-\nabla^2})$ 和 $\mathrm{Ch}(V, \nabla, \phi)$ 之间的上边界。

**7.2. $\mathrm{Cl}_n$-丛的微分精化。**

**定义 7.3。** 相对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 定义的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $V = \{V_\sigma, g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau}\}$ 的微分精化 是如下数据：

(i) 对每个 $\sigma \subset I$，在 $V_\sigma \to U_\sigma$ 上的自伴 $\mathrm{Cl}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}_\sigma$；(ii) 一个总次数为 $n$ 的闭全局形式 $\mathrm{Ch}(V, \mathbb{A}, \phi) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}])$；(iii) Čech–de Rham 复形中的上边界 $\{\phi_\sigma \in \Omega^\bullet(U_\sigma; \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}])\}$ ，它在整体形式 $\mathrm{Ch}(V, \mathbb{A}, \phi)$ 与命题 6.15 中构造的余循环 $\mathrm{Ch}_n(\{U_i\}, \mathbb{A}_i) \in \Omega^\bullet(U_*; \mathbb{R}[u^{\pm 1}])$ 之间建立联系（该余循环取决于对 $I$ 的一种排序选择）。

$\mathrm{Cl}_n$-丛的微分精化是一个微分余循环，记作 $(V, \mathbb{A}, \phi) = \{(V_\sigma, \mathbb{A}_\sigma, \phi_\sigma), (g_{\sigma\tau}, e_{\sigma\tau})\}$。

我们将展开说明 (iii) 中 Čech–de Rham 上边界的数据和性质。该上边界的数据是总次数为 $n-1$ 的微分形式 $\phi_i \in \Omega^\bullet(U_i; \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}])$，每个 $i \in I$ 对应一个。这些形式满足两个性质。首先，局部定义的量

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_i) + d\phi_i \in \Omega^\bullet(U_i; \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}]), \qquad \delta(\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_i) + d\phi_i) = 0 \tag{83}$$

确定了 (ii) 中的整体形式，即

$$\mathrm{Ch}(V,\mathbb{A},\phi)|_{U_i}-\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_i)=d\phi_i\in\Omega^\bullet(U_i;\mathbb{R}[\alpha^{\pm1}]),\qquad \mathrm{Ch}(V,\mathbb{A},\phi)\in\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[\alpha^{\pm1}]).$$

Second, for all $i<j$,

$$\mathrm{CS}(\tilde{\mathbb{A}}_{ij})=\phi_j-\phi_i\in\Omega^\bullet(U_{ji};\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}]),\tag{84}$$

对于式（79）中定义的陈–西蒙斯形式。

**定义 7.4**。 微分余循环 $(V_0,\ \mathbb{A}_0,\ \phi_0)$，$(V_1,\ \mathbb{A}_1,\ \phi_1)$ 之间的协调 是一个$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$微分余循环 $(V,\ \mathbb{A},\ \phi)$，定义在 $M\times\mathbb{R}$ 上，并配有同构

$$i_0^*\widetilde{V}\cong V_0,\ i_0^*(\tilde{\mathbb{A}},\widetilde{\phi})=(\mathbb{A}_0,\phi_0),\quad i_1^*\widetilde{V}\cong V_1,\ i_1^*(\tilde{\mathbb{A}},\widetilde{\phi})=(\mathbb{A}_1,\phi_1).$$

sati满足与超联络及微分形式数据所指明的相容性 .

**定义 7.5**。 给定微分余循环之间的一个协调，定义总陈–西蒙斯形式

$$\mathrm{CS}((V_0,\mathbb{A}_0,\phi_0),(V_1,\mathbb{A}_1,\phi_1))=\int_{[0,1]}\mathrm{Ch}_n(\widetilde{V},\tilde{\mathbb{A}},\widetilde{\phi})\in\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])\tag{85}$$

其总次数为 $n-1$。同样由斯托克斯定理可知，总陈–西蒙斯形式度量了共边微分余循环的陈特征之差，如式 (64) 所示。

对于光滑流形 $M$，考虑次数为 $n$ 的微分余循环集合，并对其取以下等价关系的商

$$(V,\mathbb{A},\phi)\sim(V',\mathbb{A}',\phi')\iff\begin{array}{l}\text{there exists a concordance }(\tilde{\mathrm{V}},\tilde{\mathbb{A}},\tilde{\phi})\\ \text{with }\ \mathrm{CS}((V,\mathbb{A},\phi),(V,\mathbb{A},\phi))\in\mathrm{image}(d).\end{array}\tag{86}$$

⌒**定义 7.6**。 对于光滑流形 $M$，定义 $\mathrm{KO}^n(M)$ 为由等价类 (86) 生成的自由阿贝尔群对以下子群取商所得的群

$$(V,\mathbb{A},\phi)+(V',\mathbb{A}',\phi')-(V\oplus V',\mathbb{A}\oplus\mathbb{A}',\phi+\phi').\tag{87}$$

⌒令 $[V,\mathbb{A},\phi]\in\mathrm{KO}^n(M)$ 表示微分 KO 理论中一个微分余循环的等价类。

备注 7.7。 假设 $(V,\mathbb{A},\phi)$ 是一个微分余循环，其中 $V$ 是一个基本 $\mathrm{Cl}_n$-丛。那么由斯托克斯定理可得

$$\mathrm{CS}((V,\mathbb{A},\phi),(V',\mathbb{A}',\phi'))\ =\ \int_{[0,1]}(\mathrm{Ch}_n(\widetilde{\mathbb{A}})+d\widetilde{\phi})=\mathrm{CS}(\mathbb{A},\mathbb{A}')+\phi'-\phi.$$

条件 (86) 要求右侧是一个恰当形式，这直接推广了微分复 K 理论中的等价关系 (81)。

⌒7.3. **KO 上的环结构** $\mathrm{KO}^\bullet(M)$。 我们在微分余循环上定义如下乘积结构；参见 [FL10, 方程 2.20] 或 [Klo08，§4.2]。

**定义 7.8**。 给定 $M$ 上的一个微分余循环 $(V,\mathbb{A},\phi)$，以及 $M'$ 上的一个微分余循环 $(V',\mathbb{A}',\phi')$，定义 $V\boxtimes V'$ 上的一个微分余循环（见定义 5.11）如下：

$$\{V_\sigma\boxtimes V'_\alpha,\mathbb{A}_\sigma\boxtimes1+1\boxtimes\mathbb{A}'_\alpha,\phi_\sigma\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}'_\alpha)+(-1)^n\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_\sigma)\phi'_\alpha+\phi_\sigma d\phi'_\alpha\}\tag{88}$$

其中 $\mathbb{A}_\sigma\boxtimes1+1\boxtimes\mathbb{A}'_\alpha$ 是 $V_\sigma\boxtimes V'_\alpha$ 上的一个超联络，且 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}'_\alpha)+\phi'_\alpha\mathrm{Ch}_m(\mathbb{A}_\sigma)+\phi_\sigma d\phi'_\alpha\in\Omega^\bullet(U_\sigma\times U'_\alpha;\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])$。我们用简写 $(V\boxtimes V',\mathbb{A}\boxtimes\mathbb{A}',\phi\boxtimes\phi')$ 表示所得的微分余循环。

**引理 7.9**。 赋值 $(V,\mathbb{A},\phi)\mapsto\mathrm{Ch}_n(V,\mathbb{A},\phi)$ 与和及乘积相容：

(1) 对于次数为 $n$ 的微分余循环 $(V,\mathbb{A},\phi)$ 和 $(V,\mathbb{A}',\phi')$，有 $\mathrm{Ch}_n(V\oplus V',\mathbb{A}\oplus\mathbb{A}',\phi+\phi')=\mathrm{Ch}_n(V,\mathbb{A},\phi)+\mathrm{Ch}_n(V',\mathbb{A}',\phi')$。 (2) 对于次数分别为 $n$ 和 $m$ 的微分余循环 $(V,\mathbb{A},\phi)$ 和 $(V,\mathbb{A}',\phi')$，有 $\mathrm{Ch}_{n+m}(V\boxtimes V',\mathbb{A}\boxtimes\mathbb{A}',\phi\boxtimes\phi')=\mathrm{Ch}_n(V,\mathbb{A},\phi)\cdot\mathrm{Ch}_m(V',\mathbb{A}',\phi')$。

*Proof.* 该陈述可在局部验证，由定义和 pro 得出
p- 性质
Clifford 超迹的（32）和（33）式。 □
下面证明，微分余循环的张量积赋予 $\mathrm{KO}^\bullet(M)$ 分次环结构。

**引理 7.10.** 若 $M$ 上的次数 $n$ 微分余循环 $(V,\mathbb{A},\phi)$ 与 $(V',\mathbb{A}',\phi')$ 共边，且次数 $m$ 微分余循环 $(W,\mathbb{B},\psi)$ 与 $(W',\mathbb{B}',\psi')$ 在 $N$ 上协调，则 $(V\boxtimes W,\mathbb{A}\boxtimes\mathbb{B},\phi\boxtimes\psi)$ 与 $(V'\boxtimes W',\mathbb{A}'\boxtimes\mathbb{B}',\phi'\boxtimes\psi')$ 在 $M\times N$ 上协调。此外，忽略恰当形式后，该协调的总陈–西蒙斯形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{CS}((V\boxtimes W,\mathbb{A}\boxtimes\mathbb{B},\phi\boxtimes\psi),\ &(V'\boxtimes W',\mathbb{A}'\boxtimes\mathbb{B}',\phi'\boxtimes\psi'))\\ &= \mathrm{CS}((V,\mathbb{A},\phi),(V',\mathbb{A}',\phi'))\mathrm{Ch}_m(W,\mathbb{B},\psi)\\ &\quad+(-1)^n\mathrm{Ch}_n(V,\mathbb{A},\phi)\mathrm{CS}((W,\mathbb{B},\psi),(W',\mathbb{B}',\psi'))\\ &\quad+\mathrm{CS}((V,\mathbb{A},\phi),(V',\mathbb{A}',\phi))d\mathrm{CS}((W,\mathbb{B},\psi),(W',\mathbb{B}',\psi')).\end{aligned}$$

~ ~证明。设 $W$ 是 $M\times\mathbb{R}$ 上的协调，$V$ 是 $N\times\mathbb{R}$上的协调。于是~ ~我们沿着映射拉回 $W\boxtimes V$

$$M\times N\times\mathbb{R}\xrightarrow{\mathrm{id}\times\Delta}M\times N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq(M\times\mathbb{R})\times(N\times\mathbb{R})$$

其中 $\Delta\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 是对角映射。此拉回给出了 $(W\boxtimes V,\mathbb{A}\boxtimes\mathbb{B},\phi\boxtimes\psi)$ 与 $(V'\boxtimes W',\mathbb{A}'\boxtimes\mathbb{B}',\phi'\boxtimes\psi')$ 之间所需的协调。根据引理 7.9 的第 (2) 部分，并利用 (67) 进行简短计算，可得所述的陈 – 西蒙斯形式。□

7.4. **稳定等价的微分精化**。

**定义 7.11.** 设 $V_0,V_1\to M$ 是基本 $\mathrm{Cl}_n$-模。两个微分余循环 $(V_0,\mathbb{A}_0,\phi_0)$ 和 $(V_1,\mathbb{A}_1,\phi_1)$ 之间的微分稳定等价是一个包含映射 $g\colon V_0\hookrightarrow V_1$，并带有 $\mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{-1}$ 在 $V_0^\perp\subset V_1$ 上作用的数据，该作用扩张给定的 $\mathrm{Cl}_n$ 作用，使得

$$\mathrm{CS}(\mathbb{A}_0',\mathbb{A}_1)=\phi_0-\phi_1\in\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[u,u])^{n-1}/\mathrm{image}(d) \tag{89}$$

对于 $\mathrm{CS}(\mathbb{A}_0',\mathbb{A}_1)$，这是引理 6.13 中构造的微分形式。

**引理 7.12.** 设 $V_0,V_1\to M$ 是 $\mathrm{Cl}_n$-模，并假设微分余循环 $(V_0,\mathbb{A}_0,\phi_0)$ 和 $(V_1,\mathbb{A}_1,\phi_1)$ 按照定义 7.11 的意义微分稳定等价。那么 $(V_0,\mathbb{A}_0,\phi_0)$ 和 $(V_1,\mathbb{A}_1,\phi_1)$ 共边，且总陈–西蒙斯形式为零。

证明。引理 5.9 构造了 $\mathrm{Cl}_n$ 丛 $V$ 与 $V'$之间的协调，因此只需构造具有所述性质的这一协调的微分精化。超联络数据由下式指定

$$(p_-^*V_0,p_-^*\mathbb{A}_0,p_-^*\phi_0)\to M\times(-\infty,1),\quad(p^*V_1,p^*\mathbb{A}_1,p^*\phi_1)\to M\times(0,1),$$
$$(p_+^*V_1,p_+^*\mathbb{A}_1,p_+^*\phi_1)\to M\times(0,\infty)$$

其中 $p\colon M\times(0,\ 1)\to M$，$p_-\colon M\times(-\infty,\ 1)\to M$，以及 $p_+\colon M\times(0,\ \infty)\to M$。Čech–de Rham 上边界由 $\phi_0$ 和 $\phi_1$给出：条件 (84) 由稳定等价的性质 (89) 推出，而条件 (83) 则由等式推出

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_0)+d\phi_0=\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_1)+d\phi_1. \tag{90}$$

最后，(90) 还意味着这一微分余循环的总陈形式在 $M\times\mathbb{R}$ 上关于 $\mathbb{R}$为常数，且等于沿投影 $M\times\mathbb{R}\to M$对 (90) 的拉回。由于没有 $dt$ 分量，定义陈–西蒙斯形式的积分恒等于零。□

由引理 6.13 可得以下推论，它给出了式（82）中第二个关系所声称的推广。

**推论 7.13.** 设 $(W,\mathbb{A},\phi)$ 是 $M$ 上的微分余循环。若 $W$可扩张为 $M$ 上的一个 $\mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{-1}$-丛，则存在一个微分余循环的协调，使 $(W,\mathbb{A},\phi)$ 与 $(\mathbf{0},0,\zeta)$ 之间的总陈–西蒙斯形式为零，其中 $\mathbf{0}$ 是 $M$ 上带零联络 0 的零丛，并且 $\zeta\in\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[u,u])^{n-1}/\mathrm{image}(d)$ 满足

$$\mathrm{Ch}_n(W,\mathbb{A},\phi)=d\zeta. \tag{91}$$

7.5. **KO** 的悬挂类的微分精化。德拉姆上同调中的悬挂同构在余循环层面可描述为与微分形式 $U_{\mathbb{R}^n}$ 的外乘法

$$\Omega^\bullet(M) \to \Omega_c^{\bullet+n}(M \times \mathbb{R}^n), \quad \alpha \mapsto \alpha \wedge U_{\mathbb{R}^n}, \quad U_{\mathbb{R}^n} \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n), \quad (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} U_{\mathbb{R}^n} = 1$$

其中 $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \subset \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ 表示快速衰减形式所构成的子空间；这些形式为紧支撑上同调提供了一个模型 [MQ86, §4]。任何总积分为 1 的快速衰减形式都会给出一个悬挂类（请注意上文对该积分的归一化）。 $U_{\mathbb{R}^n}$ 的一个标准选择是高斯函数

$$U_{\mathbb{R}^n} := 2^{n/2} e^{-|x|^2} d\mathrm{vol}. \tag{92}$$

悬挂同构 $\mathrm{KO}^k(M) \to \mathrm{KO}_c^{k+n}(M \times \mathbb{R}^n)$ 同样由与 $\mathrm{KO}_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{KO}^n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$的一个生成元作外乘法来确定；参见引理 5.17。下面我们使用定义 5.14 中紧支撑 $\mathsf{Cl}_n$-丛的定义。

**定义 7.14**。定义 $\mathbb{R}^n$ 上的快速衰减次数 $k$ 微分余循环为一个紧支撑 $\mathsf{Cl}_n$-丛 $V$以及一个微分精化 $(V, \mathbb{A}, \phi)$，并要求 $\mathsf{Ch}_k(V, \mathbb{A}, \phi) \in \Omega(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])$ 且 $\{\phi_\sigma\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的快速衰减微分形式。考虑快速衰减微分余循环关于关系 (86) 的等价类集合。定义 $\widehat{\mathrm{KO}}_c^k(\mathbb{R}^n)$ 为以该集合为生成元的自由阿贝尔群除以由 (87) 生成的子群所得的商。

根据上述定义，存在映射

$$\mathrm{KO}_c^n(\mathbb{R}^n) \xleftarrow{[-]} \widehat{\mathrm{KO}}_c^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathrm{Ch}_n} \Omega_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])^n, \tag{93}$$

因此，可以询问是否存在一个微分余循环 $\hat{\sigma}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{KO}_c^n(\mathbb{R}^n)$，同时精化 KO 理论中的悬挂类以及德拉姆上同调中悬挂类的微分形式代表元 (92)。

**定义 7.15**。令 $(\mathbb{R}^{1|1}, \mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的基本 $\mathsf{Cl}_1$-丛，其超向量丛为 $\mathbb{R}^{1|1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\mathsf{Cl}_1$作用由 (25) 中关于 $f$ 的等式确定。为这个基本 $\mathsf{Cl}_1$-丛赋予超联络

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{(0)} + \mathbb{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + d = xe + d, \tag{94}$$

其中 $x \in \mathbb{R}$ 是标准坐标，并将奇端同态与例 3.9 中由 $xe \in \mathsf{Cl}_{-1}$ 给出的左作用等同。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们还可以考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathsf{Cl}_n$- 丛及其超联络，它们由 $n$ 重外积 $(\mathbb{R}^{1|1}, \mathbb{A})^{\boxtimes n}$ 给出。

以下是对 [MQ86 第2]节中计算的进一步阐述。

**引理 7.16**。我们有以下微分形式等式

$$\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}^{\boxtimes n}) = U_{\mathbb{R}^n} \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$$

其中 $U_{\mathbb{R}^n}$ 定义见（92）。

证明。只需证明在 $n = 1$ 的情形下该引理成立。我们计算

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}_1(\mathbb{A}) &= \mathsf{sTr}(\Gamma_1 u^{-1/2} \exp(-u\mathbb{A}(u)^2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathsf{sTr}\left( u^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \exp(-u\mathbb{A}(u)^2) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = \sqrt{2} e^{-x^2} dx \in \Omega_c^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}[u, u^{-1}]) \end{aligned}$$

这里提醒一下，第二行中的因子 $2^{-1/2}$ 来自式(21)中 $\Gamma_1$的定义，并且我们用到了

$$u\mathbb{A}(u)^2 = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} + u^{1/2} \begin{bmatrix} 0 & dx \\ dx & 0 \end{bmatrix}.$$

这表明 $\mathrm{Ch}_1(\mathbb{A}) = U_{\mathbb{R}}$，命题得证。 □

作为（$\mathbb{R}^{1|1}$，$\mathbb{A}$）$^{\boxtimes n}$ 底层对象的 $\mathrm{Cl}_n$-丛，按照定义 5.14 的意义并非紧支撑，因此不能用于定义悬挂类的微分精化。然而，（$\mathbb{R}^{1|1}$，$\mathbb{A}$，0）$^{\boxtimes n}$ 与一个紧支撑的微分余循环共边，该余循环定义如下；参见引理 5.17。

**定义 7.17**。将悬挂余循环 $\hat{}\sigma_{\mathbb{R}} = (V, \mathbb{A}, \phi) \in \widehat{\mathrm{KO}}^1_c(\mathbb{R})$ 定义为与以下微分余循环相关联的等价类，该微分余循环定义在 $\mathbb{R}$ 上：

$$\{U_i\} = \{(-1,1), \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

$$V_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = \mathbf{0},\ \mathbb{A}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = 0, \quad V_{(-1,1)} = \underline{\mathbb{R}}^{1|1}, \mathbb{A}_{(-1,1)} = d + xe,$$

$$\phi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = (\sqrt{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|^2}dt \coprod \sqrt{2}\int_{\infty}^{x} e^{-|t|^2}dt), \quad \phi_{(-1,1)} = 0.$$

（$-1$，0）和（0，1）上的稳定同构数据来自 $\mathrm{Cl}_1 \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$ 对$\mathbb{R}^{1|1}$ 的作用，见例 3.9。对于 $n \in \mathbb{N}$，将 $n$次悬挂余循环 定义为外张量积 $\hat{}\sigma_{\mathbb{R}^n} := (\hat{}\sigma_{\mathbb{R}})^{\boxtimes n}$。

**引理 7.18**。$\hat{}\sigma_{\mathbb{R}^n}$ 与 $(\mathbb{R}^{1|1}, \mathbb{A}, 0)^{\boxtimes n}$ 之间存在一个协调，其陈–西蒙斯形式为零。

证明。在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上，考虑例 3.9 中带有 $\mathrm{Cl}_{-1}$ 作用于 $\mathbf{0}^{\perp} = \underline{\mathbb{R}}^{1|1}$ 的典范包含 $\mathbf{0} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1|1}$；在 $(1, -1)$ 上，考虑恒等包含映射 $\mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{1|1}$。推论 7.13 证实，这个 $\mathrm{Cl}_1$ 丛的协调是微分余循环之间的协调。

□

**引理 7.19**。底层的第 $n$ 个悬挂余循环的 KO 类 $[\hat{}\sigma_{\mathbb{R}^n}] \in \mathrm{KO}^n_c(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}$ 是第 $n$ 个悬挂类，即一个生成元。

证明。只需证明 $n = 1$ 情形，而这由引理 5.17 得出。 □

**定义 7.20**。第 $n$个微分悬挂映射为

$$\boxtimes\hat{\sigma}_{\mathbb{R}^n} : \widehat{\mathrm{KO}}^k(M) \to \widehat{\mathrm{KO}}^{k+n}_{cv}(M \times \mathbb{R}^n), \qquad (W, \mathbb{A}, \phi) \mapsto (W, \mathbb{A}, \phi) \boxtimes \hat{\sigma}_{\mathbb{R}^n} \tag{95}$$

其中，下标 $cv$ 表示相对于 $M \times \mathbb{R}^n \to M$ 的紧垂直支撑。

7.6. **由 $\mathrm{Cl}_n$-丛构造微分 KO 理论的一个模型**。

**引理 7.21**。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) & \longrightarrow & \mathrm{KO}^n(M) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ch}_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\mathrm{Ch}_n]} \\ \Omega_{\mathrm{cl}}(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])^n & \longrightarrow & \mathrm{H}^n(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]). \end{array} \tag{96}$$

其中，上方的水平箭头将 $\mathrm{KO}^n(M)$ 中的微分余循环映射到其底层类 $\mathrm{KO}^n(M)$（通过命题 5.12）；下方的水平箭头将闭形式映射到其德拉姆上同调类；箭头 $\mathrm{Ch}_n$ 提取闭微分形式 $\mathrm{Ch}_n(V, \mathbb{A}, \phi) \in \Omega_{\mathrm{cl}}(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])^n$ 中总次数为 $n$ 的数据。

证明。这由命题 6.16 和微分余循环的定义得出。 □

**引理 7.22**。存在一个正合列

$$\mathrm{KO}^{n-1}(M) \xrightarrow{[\mathrm{Ch}]} \Omega^{n-1}(M; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])/\mathrm{image}(d) \xrightarrow{a} \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) \to \mathrm{KO}^n(M) \to 0 \tag{97}$$

其中，映射 $a(\phi) = [\mathbf{0}, 0, \phi] \in \mathrm{KO}^n(M)$ 将总次数为 $n-1$的微分形式 $\phi$ 映至零 $\mathrm{Cl}_n$-丛，其微分精化由 $\phi$确定。

证明。我们从右向左进行。超联络空间和微分形式空间的可缩性意味着映射 $\mathrm{KO}^n(M) \to \mathrm{KO}^n(M)$ 是满射。由推论 7.13 可得，$\mathrm{KO}^n(M)$ 处的正合性成立。接下来验证 $\Omega^{n-1}(M;\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])$ 处的正合性。由命题 5.12，只需证明对于所有次数为 $n-1$ 的微分余循环 $(V,\mathbb{A},\phi)$，次数为 $n$ 的微分余循环 $(0,0,\mathrm{Ch}_{n-1}(V,\mathbb{A},\phi))$ 共边于零。进而，这要求我们找到从零 $\mathrm{Cl}_n$-丛出发的一个协调，以及该协调的一个微分精化，使其陈–西蒙斯形式为 $\mathrm{Ch}_{n-1}(V,\mathbb{A},\phi)$。将微分悬挂映射 (95) 应用于 $(V,\mathbb{A},\phi)$。这得到一个在 $M\times\mathbb{R}$ 上紧支撑的次数为 $n$ 的微分余循环，它（对 $\mathbb{R}$重新参数化后）确定了一个从零 $\mathrm{Cl}_n$-丛到自身的协调。由引理 7.9，以及 $\mathrm{Ch}(\sigma_{\mathbb{R}}) = \mathrm{U}_{\mathbb{R}}$ 在 (92) 中的积分为 1 这一事实，这个协调的陈–西蒙斯形式恰为 $\mathrm{Ch}_{n-1}(V,\mathbb{A},\phi)$。引理得证。□

**命题 7.23**。第 $k$ 个微分悬挂映射 (95) 是一个同构。

证明。只需证明 $k=1$ 的情形。考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{KO}^{n-1}(M) & \xrightarrow{[\mathrm{Ch}_{n-1}]} & \Omega^{n-1}(M;\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])/\mathrm{image}(d) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) & \longrightarrow & \mathrm{KO}^n(M) \\
\downarrow{\scriptstyle [\sigma_{\mathbb{R}}]} & & \downarrow{\scriptstyle (-)\wedge U_{\mathbb{R}}} \uparrow{\scriptstyle (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}} & & \vdots{\scriptstyle \sigma_{\mathbb{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle [\sigma_{\mathbb{R}}]} \\
\mathrm{KO}^n_c(M\times\mathbb{R}) & \xrightarrow{[\mathrm{Ch}_n]} & \Omega^n_c(M\times\mathbb{R};\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])/\mathrm{image}(d) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{KO}}^{n+1}_c(M\times\mathbb{R}) & \to & \mathrm{KO}^{n+1}_c(M\times\mathbb{R}),
\end{array}$$

其中，最左端和最右端的竖直箭头是（非微分）KO 理论中的悬挂同构。由与快速衰减 1-形式 $U_{\mathbb{R}} = \sqrt{2}e^{-x^2}dx$ 的外张量积给出的箭头，其逆映射由对 $\mathbb{R}$ 积分给出。因此，三个竖直箭头是同构。由各行的正合性以及最右端水平映射的满射性，根据五引理可知，虚线竖直箭头是一个同构。□

定理 *1.2* 的证明。由有理偶上同调理论 [ 的乘法微分$\widehat{\ }$扩张的唯一性可得结论；这里用到 BS10 定理 1.7], , 以及 $\mathrm{KO}^\bullet(-)$ 具有乘法结构这一事实，并结合引理 7.21 和 7.22。□

注记7.24。不借助 Bunke 和 Schick 的唯一性定理，也可以直接证明定理 1.2。简要来说，对于 $n=0$，定理 1.2 可由次数为 0 的复 K 理论的生成元与关系表示的相同论证推出，例如参见 [FL10, §2.2]。有了 $n=0$ 情形之后，利用微分悬挂同构，并采用与 [FL10, 命题 9.21] 相同的论证，即可得到一般结论。$\widehat{\ }$另一种证明方法是构造 $\mathrm{KO}^\bullet$ 与 Hopkins 和 Singer [HS05, §4] 所构造的微分精化之间的同构，将其视为同伦拉回；在这一比较中，需结合第 4 节的 KO 谱点集模型，以及第 6 节对庞特里亚金特征的描述。

## 8. The families differential index

**8.1. （族）解析指标回顾**。设 $X$ 是一个 $n$ 维黎曼自旋流形，其主 $\mathrm{Spin}(n)$-丛为 $P\to X$。定义向量丛 [LM94, II.7]

$$\mathbb{S}_X := P\times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Cl}_n \simeq P\times_{\mathrm{Spin}(n)} (\mathrm{Cl}_n^{\mathrm{ev}} \oplus \mathrm{Cl}_n^{\mathrm{odd}}) \tag{98}$$

其分次 $\mathbb{Z}/2$继承自克利福德代数上的分次，如图所示。$\mathbb{S}_X$ 的纤维是可逆的 $\mathrm{Cl}(TX)$ – $\mathrm{Cl}_n$-双模。狄拉克算子是以下复合

$$\not{D}\colon \Gamma(\mathbb{S}_X) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*X)\otimes_{C^\infty(X)}\Gamma(\mathbb{S}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(TX)\otimes_{C^\infty(X)}\Gamma(\mathbb{S}_X) \xrightarrow{\mathrm{cl}} \Gamma(\mathbb{S}_X), \tag{99}$$

其中，$\nabla$ 是列维-奇维塔联络，中间的同构使用度量，而右侧最后一个箭头是（左）Clifford 乘法。因此，$\not{D}$ 与 $\Gamma(\mathbb{S}_X)$上的右 $\mathrm{Cl}_n$作用可交换。给定一个带有度量和相容

联络 $\nabla^V$的实向量丛 $V$， $\Gamma(\mathbb{S}_X\otimes V)$上的 $V$-扭曲 $\mathrm{Cl}_n$线性狄拉克算子 $\not{D}\otimes V$可类似地定义。将（98）中的右 $\mathrm{Cl}_n$作用换成左 $\mathrm{Cl}_{-n}$作用（利用 $\mathrm{Cl}_n^{\mathrm{op}}=\mathrm{Cl}_{-n}$）后，狄拉克算子 $\not{D}\otimes V$是作用在截面$L^2(\mathbb{S}_X\otimes V)$的 $L^2$完备化上的 $\mathrm{Cl}_{-n}$线性无界算子，我们将其认作一个稳定的 $\mathrm{Cl}_{-n}$-模。识别空间$L^2(\mathbb{S}_X\otimes V)\simeq\mathcal{H}_{-n}$由 [Kui65]可知是可缩的。 $\not{D}\otimes V$的定义域是光滑旋量的稠密子空间， $\Gamma(\mathbb{S}_X\otimes V)\subset L^2(\mathbb{S}_X\otimes V)$。当自旋流形紧致时， $\not{D}\otimes V$具有紧预解式，因此确定了 §4.2 中定义的无界算子空间 $\mathrm{Inf}_{-n}$ 中的一个点。根据定理 4.7，我们进而得到一个类，

$$[\not{D}\otimes V]\in \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt}). \tag{100}$$

根据引理 4.18，此类等于由克利福德指标 (10) 计算所得的类。

(100) 的族推广始于以下几何数据 .

**定义 8.1** ([BGV92, §10.1])**.** 一个黎曼自旋流形族是

(1) 流形的一个光滑纤维化 $\pi\colon X\to B$，其纤维是维数为常数 $n$ 的紧致流形，并选定了自旋结构；(2) 垂直切丛 $T(X/B):=\ker(d\pi)\subset TX$ 上的度量 $g^{X/B}$；以及 (3) 一个投影 $p\colon TX\to T(X/B)$。

令 $P\to X$ 表示 $T(X/B)\to X$ 的主自旋丛，我们按照 (98) 类似地定义 $X$ 上的族旋量丛 $\mathbb{S}:=P\times_{\mathrm{Spin}(n)}\mathrm{Cl}_n$。给定一个带有度量和相容联络的实向量丛 $V\to X$，我们可以构造 $V$-扭曲旋量丛 $\mathbb{S}\otimes V$。相应的 $\mathrm{Cl}_{-n}$-线性狄拉克算子 $\not{D}\otimes V$ 按照前述相同方式定义。将 $\mathbb{S}\otimes V$ 和 $\not{D}\otimes V$ 限制到 $b\in B$ 处的纤维 $X_b:=\pi^{-1}(\{b\})$ 上，我们便得到黎曼自旋流形 $X_b$ 上的旋量丛 $\mathbb{S}_{X_b}\otimes V|_{X_b}$ 和狄拉克算子 $\not{D}\otimes V|_{X_b}$。

直接像 $\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)$ 确定了 $B$ [BGV92, §9.2] 上一个光滑的 $\mathbb{Z}/2$ 分次 Fr´echet 向量丛。该丛的纤维具有左 $\mathrm{Cl}_{-n}$ 丛的结构，而 $\mathrm{Cl}_{-n}$ 线性狄拉克算子确定了一个克利福德线性奇算子族。对 $\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)$ 逐纤维取 $L^2$ 完备化，确定了一个覆盖 $B$ 的连续（但非光滑） $\mathbb{Z}/2$ 分次希尔伯特丛。根据 Kuiper 定理 [Kui65], ，我们可以选取一个与 $\mathcal{H}_{-n}\times B\to B$（即平凡丛）的同一化。狄拉克算子族继而确定了一个连续映射

$$B\to \mathrm{Inf}_n\qquad b\mapsto(\not{D}\otimes V)_b\in\mathrm{Inf}_n \tag{101}$$

对于在 [HST10] 中构造并在 §4.2 中回顾的 $\mathrm{Inf}_n$ 空间。

**定义 8.2**。 将 $\pi\colon X\to B$ 的族解析指标 定义为 KO 类

$$[\not{D}\otimes V]\in[B,\mathrm{Inf}_n]\simeq\mathrm{KO}^{-n}(B) \tag{102}$$

由映射 (101) 确定。

注 8.3。 上述关于族解析指标的描述是我们从 Stolz 和 Teichner 处了解到的，参见 [ST04, 注 3.2.21] 以及 [HST10, §3 和 §6]。它等价于 [LM94, III.16] 中更标准的 Clifford线性Fredholm指标，二者的等价性由 [HST10, 命题 3.11 和定理 8.2], 给出的比较结果得出，后者在上文表述为定理 4.7。

8.2. **作为 $\mathrm{Cl}_{-n}$-丛的族指标**。 我们将族解析指标 (102) 精化为一个 $\mathrm{Cl}_{-n}$-模，使其通过命题 5.12 与 (102) 相容。

**命题 8.4**。 给定一个 $n$ 维黎曼自旋流形族 $\pi\colon X\to B$，以及一个带有度量和相容联络的实向量丛 $V\to X$，则在 $B$ 上存在一个 $\mathrm{Cl}_{-n}$-丛，它在协调意义下唯一，并表示 KO 类 $[\not{D}\otimes V]\in\mathrm{KO}^{-n}(B)$。

证明。由构造 (101) 和引理 4.18 可形式地推出存在一个连续的 $\mathrm{Cl}_{-n}$-丛。要得到光滑细化，则关键在于利用狄拉克算子的性质。对于作用于（连续）希尔伯特丛$\mathcal{H}\to B$上的狄拉克算子族 $\not{D}\otimes V$，通过子集 $U_\lambda\subset B$ 为 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$定义一个有序开覆盖

$$U_\lambda=:\{b\in B\mid \lambda\notin\mathrm{Spec}(\not{D}_b^2)\}\subset B. \tag{103}$$

对于固定的 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $b \in U_\lambda$，定义

$$\mathcal{H}_b^{<\lambda} := \bigoplus_{\nu<\lambda} \mathcal{H}_b^\nu \subset \mathcal{H}_b \tag{104}$$

作为具有特征值 $\nu < \lambda$ 的 $\not{D}_b^2$ 的 $\mathcal{H}_b^\nu$ 特征子空间的直和。令 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 表示 $\mathcal{H}|_{U_\lambda} \simeq U_\lambda \times \mathcal{H}_{-n}$ 中在 $b$ 处的纤维为 (104) 的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-不变子集。椭圆性意味着，子集 (103) 是光滑子流形，而子集 (104) 是 $U_\lambda$ 上光滑的、有限秩的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-模丛；参见 [BGV92，命题 9.10]，或 [LM94，III，第 5.8] 定理。

对于任何选定的子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$，只要它确定了 $B$ 的局部有限开覆盖，我们便定义 $B$ 上一个从属于开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛。对于确定非空交集 $U_\sigma$ 的有限子集 $\sigma \subset \Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$，令 $\lambda \in \sigma \subset \mathbb{R}_{>0}$ 为其最大元素，并将丛 $\mathcal{H}^{<\lambda}|_{U_\sigma} \to U_\sigma$ 赋予为沿包含映射 $U_\sigma \subset U_\lambda$ 限制所得的丛。在 $U_\lambda \bigcap U_\mu$ 上，对 $\lambda < \mu$，存在一个 $\mathsf{Cl}_{-n}$-模丛的典范包含映射

$$g_{\lambda\mu} \colon \mathcal{H}^{<\lambda}|_{U_\mu} \hookrightarrow \mathcal{H}^{<\mu}|_{U_\lambda}. \tag{105}$$

事实上，存在正交分解 $\mathcal{H}^{<\mu} \simeq \mathcal{H}^{<\lambda} \oplus \mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}$ 在 $U_\lambda \bigcap U_\mu$上，其中$\mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}$ 是有限秩光滑向量丛，其在 $b \in U_\lambda \bigcap U_\mu$ 处的纤维是 $\not{D}_b^2$ 的特征子空间的直和，这些特征子空间对应的特征值属于区间 $(\lambda, \mu)$。因此，$(\mathcal{H}^{<\lambda})^\perp = \mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}$，这里的正交补是相对于包含映射 (105) 而取的。定义$\mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}$ 上的一族奇端同态，使其在 $b \in U_\lambda \bigcap U_\mu$ 处由各个特征子空间上的线性映射的直和给出

$$e_{\lambda\mu}(b) := \bigoplus_{\nu\in(\lambda,\mu)} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \not{D}_b|_{\mathcal{H}_b^\nu}, \qquad e_{\lambda\mu}^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}} \tag{106}$$

其中求和指标为 $\not{D}_b^2$ 的特征值 $\nu \in (\lambda, \mu)$，而 $e_{\lambda\mu}$ 生成 $\mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}$上的自伴 $\mathsf{Cl}_{-1}$作用。对于任意 $\sigma \subset \tau \subset \Lambda$，上述数据限制后给出与包含映射 $U_\tau \subset U_\sigma$相关联的 $\mathsf{Cl}_{-n}$丛的数据。由此完成了与一族自旋流形相关联的 $\mathsf{Cl}_{-n}$丛的构造。

原则上，上述构造依赖于对 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$ 的一个子覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的选择。对于另一个子覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$，我们可以在共同细化 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in(\Lambda\bigcup\Lambda')}$ 上比较所得的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛。对于 $\lambda < \lambda'$，我们得到 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛的包含映射 (105)，且在包含映射的正交补上，$\mathsf{Cl}_{-1}$ 作用彼此交换。这给出了 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛稳定等价的数据。由引理 5.9 可知，$\mathsf{Cl}_{-n}$-丛因此共边。

上述构造的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛确定了一个连续函子 $\check{\mathsf{C}}(U_\lambda)^{\mathsf{op}} \to \mathcal{M}_{-n}$，它（通过与引理 4.18 比较）分解了 (102) 中的映射 $B \to \mathsf{Inf}_n$。因此，相应的 KO 类与族解析指标一致。□

**8.3. 族指标的微分精化。** 按照 Bismut [Bis86], , 定义 8.1 中的几何数据允许在无限秩丛 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 上构造一个超联络，其零次部分是狄拉克算子族 $\not{D} \otimes V$。回顾一下，令 $\Omega^\bullet(B; \pi_*(\mathbb{S} \otimes V))$ 表示取值于 $\mathbb{Z}/2$-分次 Fr´echet 丛 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 的微分形式所构成的实 Fr´echet 空间。我们将 $\Omega^\bullet(B; \pi_*(\mathbb{S} \otimes V))$ 视为左 $\mathsf{Cl}_{-n}$-模。按照 [BGV92，定义 9.12], , 适配于 $\not{D} \otimes V$ 的 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 上的超联络是一个奇次数微分算子 $\mathbb{A} \colon \Omega^\bullet(B; \pi_*(\mathbb{S} \otimes V)) \to \Omega^\bullet(B; \pi_*(\mathbb{S} \otimes V))$，满足莱布尼茨法则，并具有如下形式

$$\mathbb{A} = \not{D} \otimes V + \sum_{i=1}^{\dim(B)} \mathbb{A}_i$$

也就是说，超联络的零次部分是狄拉克算子族。如果超联络与 $\Omega^\bullet(B; \pi_*(\mathbb{S} \otimes V))$ 上的 $\mathsf{Cl}_{-n}$ 作用分次对易，则称其为 $\mathsf{Cl}_{-n}$-线性的 。

Fr´echet 丛 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 带有酉联络 $\nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)}$，该联络由 $\mathbb{S}$ 上的列维-奇维塔联络、$V$ 上的联络以及纤维的平均曲率构造而成

of $\pi$: $X \to B$ [BGV92, 命题 9.13]。*Bismut* 超联络定义为 [BGV92, 命题 10.15]

$$\mathbb{B} := \not{D} \otimes V + \nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)} - \frac{c(T)}{4} \tag{107}$$

其中 $c(T)$ 是由丛 $\pi$ 的曲率 2-形式 $T$ 给出的 Clifford 乘法: $X \to B$。Bismut 超联络是 $\mathrm{Cl}_{-n}$- 线性的: 式 (107) 右侧的三项分别都与 $\mathrm{Cl}_{-n}$ 作用对易。这里需要特别注意, 算子 $c(T)$ 使用左 $\mathrm{Cl}(TX)$-作用, 该作用与左 $\mathrm{Cl}_{-n}$-作用对易。

定理 *1.3* 的证明。接下来要为命题 8.4 中的 $\mathrm{Cl}_{-n}$-丛$\{\mathcal{H}^{<\lambda}, g_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu}\}$ 构造一个微分精化。按照定义 7.3, 我们将提供以下数据:

(i) 每个 $\mathcal{H}^{<\lambda}$上的普通 $\mathrm{Cl}_{-n}$-线性联络 $\nabla^{<\lambda}$; (ii) 一个总次数为 $-n$的全局微分形式; 以及 (iii) 微分形式 $\eta_\lambda \in \Omega^\bullet(B; \mathbb{C}[u, u^{-1}])$, 它们确定 (i) 所关联的庞特里亚金特征与 (ii) 中整体形式之间的 Čech–de Rham 上边界。

对于 (i), 定义联络

$$\nabla^{<\lambda} := p_\lambda \circ \nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)} \circ p_\lambda \tag{108}$$

在每个 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 上, 其中 $p_\lambda$: $\mathcal{H}|_{U_\lambda} \to \mathcal{H}^{<\lambda}$ 是逐纤维正交投影。根据 [BGV92, 命题 9.10], $p_\lambda$ 是平滑算子, 因此有限秩向量丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 上由此得到的算子 $\nabla^{<\lambda}$ 是光滑的。最后, 由于 $p_\lambda$ 和$\nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)}$ 是 $\mathrm{Cl}_{-n}$-线性的, 因而在 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上得到的联络 $\nabla^{<\lambda}$ 是 $\mathrm{Cl}_{-n}$-线性的。

对于 (ii), 取微分形式

$$u^{-n/2} \int_{X/B} \mathrm{Ch}(\nabla^V) \wedge \hat{A}(X/B) \in \Omega^\bullet_{\mathrm{cl}}(B; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]) \tag{109}$$

其中

$$\hat{A}(X/B) := \det{}^{1/2}\left(\frac{u \cdot (\nabla^{X/B})^2}{\sinh(u \cdot (\nabla^{X/B})^2)}\right) \in \Omega(X; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])^0 \tag{110}$$

$\hat{}$是 $\pi$ 的垂直切丛的 $A$-形式: $X \to B$, 由该族的列维-奇维塔联络 $\nabla^{X/B}$ 构造而成。(109) 中的积分是对 $\pi$ 的纤维进行的: $X \to B$。由于 $\mathrm{Ch}(\nabla^V)$ 和 $\hat{}A(X/B)$ 的总次数为零, (109) 的总次数为 $-n$。

数据 (iii) 的构造稍微复杂一些, 但总体上沿袭了 Bismut 证明局部指标定理的思路。事实上, 我们将构造总次数为 $n-1$ 的微分形式$\eta_\lambda \in \Omega^\bullet(U_\lambda; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}])$, 使其满足

$$\mathrm{Ch}_{-n}(\nabla^{<\lambda}) + d\eta_\lambda = \left(u^{-n/2} \int_{X/B} \mathrm{Ch}(\nabla^V) \wedge \hat{A}(X/B)\right)|_{U_\lambda} \in \Omega^\bullet_{\mathrm{cl}}(U_\lambda; \mathbb{R}[\alpha, \alpha^{-1}]). \tag{111}$$

利用庞特里亚金特征是复化的陈特征这一事实, $\eta_\lambda$可通过应用 Morita 等价, 将问题化约为 Bismut 已知的关于 $\mathbb{C}$上的族指标的构造, 见 [BGV92, 第 10] 章（适用于 $n$ 偶数情形）, 以及 [BF86, §II.f] （适用于$n$ 奇数情形）。我们构造 $\eta_\lambda$ 的具体方法改编自 [FL10, §7.2]。

回顾例3.13中实现 $\mathbb{C}\mathrm{l}_2$与 $\mathbb{C}$ 之间 Morita 等价的可逆双模 $\mathbb{C}^{1|1}$。取张量幂后, 我们得到可逆双模

$$M(n) := \begin{cases} \text{invertible } \mathbb{C} - \mathbb{C}\mathrm{l}_{-n} \text{ bimodule for } n \text{ even} \\ \text{invertible } \mathbb{C}\mathrm{l}_{-1} - \mathbb{C}\mathrm{l}_{-n} \text{ bimodule for } n \text{ odd.} \end{cases}$$

考虑 $B$上的 Fr´echet 向量丛,

$$M(n) \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}} \pi_*(\mathbb{S} \otimes V_{\mathbb{C}}) \simeq \pi_*(M(n) \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}} \mathbb{S} \otimes V_{\mathbb{C}}) \simeq \pi_*(\not{S} \otimes_{\mathbb{R}} V) \tag{112}$$

作为 $\mathbb{C}\mathrm{l}_0 = \mathbb{C}$-模的丛（当 $n$ 为偶数时）, 以及 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-模的丛（当 $n$ 为奇数时）。(112) 中最后一个同构在 Clifford 线性 Dirac 算子与狄拉克算子之间建立了对应关系

由旋量表示构成（见 [LM94, §II.7]）：当 $n$ 为偶数时，我们将 (112) 识别为标准 $V\otimes\mathbb{C}$-扭曲复旋量丛的直接像

$$\not{S} := P\times_{\mathrm{Spin}(n)}\Delta \simeq M(n)\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(\mathbb{S}\otimes\mathbb{C})$$

其中，$\not{S}$ 构造为 $\mathbb{Z}/2$-分次复旋量表示 $\Delta$ 的伴随丛（参见 98）。类似地，当 $n$ 为奇数时，我们将 (112) 识别为 $V_{\mathbb{C}}$-扭曲复旋量的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-模，上文也记作 $\not{S}\simeq M(n)\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$。在这些识别下，算子

$$D := \mathrm{id}_{M(n)}\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(\not{D}\otimes V_{\mathbb{C}}) \tag{113}$$

可识别为作用于 $\not{S}\otimes_{\mathbb{R}}V$上的标准 $V_{\mathbb{C}}$-扭曲狄拉克算子。此外，Clifford 线性 Bismut 超联络 (107) 变为标准 Bismut 超联络，

$$\mathbb{A}_{\mathrm{Bis}} = M(n)\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}\otimes\mathbb{B},$$

例如，偶数 $n$ 的情形见 [BGV92, 命题 9.10]，奇数 $n$ 的情形见 [BF86, §II.f]。

对每个 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$，定义 $U_\lambda$上的有限秩复向量丛

$$M(n)\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{<\lambda}) =: \begin{cases}\mathcal{H}_0^{<\lambda} & n \text{ even}\\ \mathcal{H}_1^{<\lambda} & n \text{ odd}\end{cases}$$

其纤维在 $n$ 为偶时是 $\mathbb{C}=\mathbb{C}\mathrm{l}_0$-模，在 $n$ 为奇时是 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-模。对于偶的 $n$，$\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上的 $\mathrm{Cl}_{-n}$-线性联络确定了 $\mathcal{H}_0^{<\lambda}$上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_0$-线性联络 $\nabla^{\mathcal{H}_0^{<\lambda}}$；对于奇的 $n$，我们得到 $\mathcal{H}_1^{<\lambda}$上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-线性联络 $\nabla^{\mathcal{H}_1^{<\lambda}}$。此外，利用 (36) 计算模 $M(n)$ 的 Clifford 超维数后，(111) 中的 Clifford 超迹可通过复 Clifford 超迹计算，

$$\mathrm{Ch}_{-n}(\nabla^{<\lambda}) = \begin{cases}u^{-n/2}\mathrm{Ch}_0(\nabla^{\mathcal{H}_0^{<\lambda}}) & n \text{ even}\\ u^{-(n-1)/2}\mathrm{Ch}_{-1}(\nabla^{\mathcal{H}_1^{\lambda}}) & n \text{ odd}\end{cases}$$

我们将使用以下记号

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := (M(n)\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}) = L^2(\pi_*(\not{S}\otimes_{\mathbb{R}}V))$$

表示与实 Hilbert 丛$\mathcal{H}=L^2(\pi_*(\mathbb{S}\otimes V_{\mathbb{C}}))$ 通过 Morita 等价相关联的连续复 Hilbert 丛。

接下来，我们应用 [FL10, §7.2] 中的一个论证来构造 $\eta_\lambda$。对于 $l\in\{0,1\}$，令 $\Pi\mathcal{H}_l^{<\lambda}$表示超向量丛 $\mathcal{H}_l^{<\lambda}$ 的奇偶反转，并考虑 $U_\lambda$ 上的（连续）Hilbert 丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\oplus\Pi\mathcal{H}_l^{<\lambda}$，其上带有 $\mathbb{R}$-族自伴无界算子

$$D^\lambda(\alpha) = \begin{bmatrix} D & \alpha i_\lambda\\ \alpha p_\lambda & 0\end{bmatrix},\quad \alpha\in\mathbb{R} \tag{114}$$

其中 $D$ 与式 (113) 中相同，$p_\lambda\colon\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{H}_l^{<\lambda}$是谱投影，$i_\lambda\colon\mathcal{H}_l^{<\lambda}\to\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$是包含映射。取一个实值函数 $\alpha(s)\in C^\infty(\mathbb{R})$，它在 $0\in\mathbb{R}$ 附近为零，且对 $s\geq 1$满足$\alpha(s)=1$。然后定义如下单参数超联络族

$$\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\lambda}(s) = sD^\lambda(\alpha(s)) + \nabla^{\pi_*(\not{S}\otimes V_{\mathbb{C}})}\oplus\nabla^{\mathcal{H}_l^{<\lambda}} - s^{-1}\frac{c(T)}{4}\oplus 0_{\mathcal{H}_l^{<\lambda}}.$$

对每个 $s$，这是一个适用于狄拉克算子族 $D$的有限秩变形的超联络。于是，当 $s$ 接近零时 $\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\ \lambda}(s)=\mathbb{A}_{\mathrm{Bis}}\oplus\nabla^{\Pi\mathcal{H}_0^{<\lambda}}$ 并且

$$\lim_{s\to 0}\mathrm{Ch}_{-l}(\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\lambda}(s)) = u^{-n/2}\int_{X/B}\mathrm{Ch}(V)\wedge\hat{A}(X/B) - \mathrm{Ch}_{-l}(\nabla^{\mathcal{H}_l^{<\lambda}}),$$

根据 Bismut 超联络的标准性质；关于 $l=0$，见 [BGV92，定理 10.23]；关于 $l=1$，见 [BF86，定理 2.10]。对于 $\alpha(s)>0$，$D_\lambda(\alpha(s))$ 由 [FL10，引理 7.18]，是一个可逆算子族。于是根据 [BGV92，定理 9.26],

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{Ch}(\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\lambda}(s)) = 0.$$

因此，微分形式（对照 [FL10，公式 7.23]）

$$\eta_\lambda := u^{-n/2}\int_0^\infty \mathsf{sTr}(u\frac{d\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\lambda}(s)}{ds}e^{u\mathbb{A}_{\mathrm{Bis},\lambda}(s)^2})ds \in \Omega^\bullet(U_\lambda;\mathbb{R}[\alpha,\alpha^{-1}])$$

定义良好，并满足 (111)。$\{\nabla^{<\lambda},\eta_\lambda\}$ 提供了对 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛 $\{\mathcal{H}^{<\lambda},g_{\lambda\mu}\}$进行微分精化所需的数据；对于最大的元素 $U_\sigma$，我们赋予其 $\{\mathcal{H}^{<\lambda},\nabla^{<\lambda},\eta_\lambda\}$在 $\lambda\in\sigma\subset\Lambda\subset\mathbb{R}_{>0}$ 处的限制。接下来需要验证兼容条件 (83) 和 (84)，以使 $\eta_\lambda$ 确定所需的 Čech–de Rham 上边界。描述 (111) 确定了整体形式，并验证了条件 (83)。$\eta_\lambda$ 和 $\eta_\mu$ 的积分之差，是在一个有限维子空间上的超迹；狄拉克算子在该子空间上的限制可逆。这归结为带度量的超向量丛的正合列

$$0\to\mathcal{H}^{<\lambda}\hookrightarrow\mathcal{H}^{<\mu}\to\mathcal{H}^{(\lambda,\mu)}\to 0,$$

以及相应联络的陈–西蒙斯形式。由于第一个箭头是稳定等价，积分 $\eta_\lambda$ 和 $\eta_\mu$ 之间的差异可通过引理 6.13 中的相同构造来衡量，并且按构造满足 (84)。至此，微分指标的构造完成

$$\widehat{\pi}_!(V,\nabla) := \{\mathcal{H}^{<\lambda}\to U_\lambda,\nabla^{<\lambda},\eta_\lambda,g_{\lambda\mu},e_{\lambda\mu}\}\in\widehat{\mathrm{KO}}^{-n}(B)$$

对于 $[V,\nabla]\in\widehat{\mathrm{KO}}^0(X)$。

与命题 8.4 中一样，构造 $\pi_!(V,\nabla)$ 时唯一涉及的选择，是为 $\Lambda\subset\mathbb{R}_{>0}$ 选择 $B$ 的覆盖 $\{U_\lambda\}$。命题 8.4 通过 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛的稳定等价，构造了不同选择所对应的 $\mathsf{Cl}_{-n}$-丛之间的协调。根据推论 7.13，这一稳定等价的陈–西蒙斯形式是恰当的，因此微分类 $\pi_!(V,\nabla)$ 不依赖于覆盖的选择。

最后，命题 8.4 表明，微分指标是对族解析指标的精化。证明至此完成。□

## References


[ABS64] M. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro, *Clifford modules*, 《Topology》3 (1964)，第 1 号增刊，3–38。[AS69] M. Atiyah 和 I. Singer, *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators*, 高等科学研究所 Publ. Math. 37 (1969)。[BC89] J.-M. Bismut 和 J. Cheeger, *$\eta$-invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989)。[BE23a] D. Berwick-Evans, *Chern characters and supersymmetric field theories*, 即将发表于 Geometry and Topology (2023)。[BE23b] ,
*The families index for $1|1$-dimensional Euclidean field theories*, 预印本 (2023)。[BE23c] ,
*How do field theories detect the torsion in topological modular forms?*, 预印本 (2023)。[BF86] J. Bismut 和 D. Freed, ——— *The analysis of elliptic families II: Dirac operators eta invariants and the holonomy theorem of Witten* **107** 1986 , , , Commun. Math. Phys. ( )。[BGV92] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, 施普林格出版社，1992。[Bis86] J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs* **83** 1986 ,

Inventiones mathematicae ( )。[BNM16] U. Bunke、T. Nikolaus 和 M. V¨olkl, *Differential cohomology theories as sheaves of spectra*, J. Homotopy Relat. Struct. 11 (2016)。[Bor48] K. Borsuk, *On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes*, Fund. Math. 35 (1948)。[Bou88] N. Bourbaki, *Algebra*, 施普林格出版社 (1988)。[BS10] U. Bunke 和 T. Schick, *Uniqueness of smooth extensions of generalized cohomology theories*, Journal of Topology 3 (2010)。[BS12] , *Differential K-theory: a survey*, 《Global differential geometry》, Springer Proc. Math. 17 (2012)。[BT82] R. Bott 和 L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, 第 82 卷，施普林格出版社，1982。[Bun09] U. Bunke, *Index theory, eta forms, and Deligne cohomology*, 美国数学会回忆录，美国数学会，2009。[Bun11] U. Bunke, *String structures and trivialisations of a Pfaffian line bundle*, 《数学物理通讯》307 (2011)。[Che07] P. Cheung, *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 博士论文，2007。

[DEF+99] P. Deligne、P. Etingof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、J. Morgan、D. Morrison 和 E. Witten, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, Volume 1*, 美国数学会, 1999。[DI04] D. Dugger 和 D. Isaksen, *Topological hypercovers and $\mathbb{A}^1$-realizations*, 《数学杂志》246 (2004), 第 4 号。[DK70] P. Donovan 和 M. Karoubi, *Graded brauer groups and k-theory with local coefficients*, 高等科学研究所 Publ. Math. (1970), 第 38 号。[FH21] D. Freed 和 M. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geom. Topol. 25 (2021)。[FL10] D. Freed 和 J. Lott, *An index theorem in differential K-theory*, Geometry and Topology 14 (2010)。[Fre87] D. Freed, *Geometry of Dirac operators*, 预印本 (1987)。[Fre00] , *Dirac charge quantization and generalized differential cohomology*, 《微分几何综述》, Int. Press, ( 2000)。[Fre01] , *K-theory in quantum field theory*, 《数学当前进展》(2001)。[Fre12] , *Lectures on twisted K-theory and orientifolds*, 维也纳 ESI 讲座 (2012)。[Fur02] M. Furuta, *Index theorem, II (japanese)*, 岩波现代数学丛书 (2002)。[GL15] A. Gorokhovsky 和 J. Lott, *A Hilbert bundle description of differential K-theory*, 《数学进展》328 (2015)。[Gom10] Kiyonori Gomi, *Twisted K-theory and finite-dimensional approximation*, 《数学物理通讯》294 (2010)。[GS21] D. Grady 和 H. Sati, *Differential KO-theory: constructions, computations, and applications*, 《数学进展》384 (2021)。[GY22] K. Gomi 和 M. Yamashita, *Differential KO-theory via gradations and mass terms*, 预印本 (2022)。[Hat65] A. Hattori, *Rank element of a projective module*, 《名古屋数学杂志》25 (1965)。[Hen09] A. Henriques, *A proof of Bott periodicity via Clifford algebras*, 草稿 (2009)。[HS05] M. Hopkins 和 I. Singer, *Quadratic functions in geometry, topology and M-theory*, 《微分几何杂志》70 (2005), 329–452。[HST10] H. Hohnhold, S. Stolz 和 P. Teichner, *From minimal geodesics to super symmetric field theories* **50** 2010 , CRM会议论文集与讲义 ( )。[Joa01] M. Joachim, *A symmetric ring spectrum representing KO-theory*, Topology 40 (2001)。[Kar78] M. Karoubi, *K-theory. An introduction*, 数学科学基础丛书, 施普林格出版社, 柏林-纽约, 1978。[Klo08] K. Klonoff, *An index theorem in differential k -theory*, 博士论文, 可从电子版获取: `http://hdl.handle.net/2152/3912` (2008)。[Kui65] N. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965)。[LM94] H. Lawson 和 M. Michelsohn, *Spin geometry*, 普林斯顿数学丛书, 大学出版社, 1994。[Lot94] J. Lott, *$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-index theory*, 《分析与几何通讯》2 (1994)。[MQ86] V. Mathai 和 D. Quillen, *Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms*, Topology 25 (1986)。[Qui85] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology 24 (1985)。[Seg68] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publications Math´ematiques de l'IH´ES 34 (1968)。[ST04] S. Stolz 和 P. Teichner, *What is an elliptic object?*, 《拓扑、几何与量子场论》, 伦敦数学会 LNS 308, 剑桥大学出版社 (2004), 247–343。[ST11] , *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 《量子场论与微扰弦论的数学基础》（B. Jurˇco、H. Sati、U. Schreiber 编）, 纯数学研讨会论文集, 2011。[Sta65] J.R. Stallings, *Centerless groups — an algebraic formulation of Gottlieb's theorem*, Topology 4 (1965)。[Wit82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, 《微分几何杂志》17 (1982), 661–692。