arXiv:2303.09122v1 [cs.CG] 16 Mar 2023

平移下点集的最小 L_∞ 豪斯多夫距离：推广 Klee 测度问题

Timothy M. Chan*

2023年3月17日

摘要

我们提出了一种（组合）算法，其运行时间接近 $O(n^d)$，用于计算任意常数维度 d下两个 n 点集在平移下的最小有向 L_∞ 豪斯多夫距离。这大幅改进了二十多年前 Chew、Dor、Efrat 和 Kedem 提出的最佳时间界（接近 $O(n^{5d/4})$）。我们的解法基于对 Chan 算法 [FOCS' 13]的一种新推广，用于解决 Klee 测度问题。

作为对这一算法结果的补充，我们还证明了一个几乎匹配的条件下界：对于组合算法，在组合 k-团假设下，其下界接近 $\Omega(n^d)$。

1 引言

本文研究以下问题：

问题 1. (L_∞ 平移豪斯多夫) 给定一个包含 n 个点的集合 P 和一个包含 m 个点的集合 Q，且二者均属于 $\mathbb{R}^d$，求平移后从 P 到 Q 的最小有向豪斯多夫距离，即计算 $\min_{v\in\mathbb{R}^d} \vec{h}_\infty(P+v,\ Q)$，其中 $\vec{h}_\infty(P, Q)$：$=\max_{p\in P}\min_{q\in Q}\|p-q\|_\infty$。

该问题在 20 世纪 90 年代的计算几何领域得到了广泛研究。对于无向豪斯多夫距离（定义为 $h_\infty(P,Q) = \max\{h_\infty(P,Q),\ h_\infty(Q,P)\}$）的类似$\vec{}$ $\vec{}$问题，如果 $m = \Theta(n)$，则可归约 [27] 为有向版本。研究这一问题的动机在于度量以点云表示的两个几何对象之间的相似程度；此外，它与一个更为基础的问题——Klee 测度问题（见下一页）——之间的关联也增添了理论上的趣味（这也是最初吸引本文作者关注此问题的原因）。Huttenlocher 和 Kedem [22]提出了这一问题，并给出了首批用于 $d = 2$的算法（后续一篇论文 [23] 还研究了 L_2中的变体）。Chew 和 Kedem [17] 给出了一种改进算法，其在L_∞中用于 $d = 2$ 的运行时间为 $O(mn\log^2(mn))$，并将该算法推广到任意常数维度 d，运行时间为 $O((mn)^{d-1}\log^2(mn))$。Chew、Dor、Efrat 和 Kedem [15] 进一步介绍了高维情况下的改进算法：在主要情形 $m = n$下，他们给出的运行时间上界分别为 $O(n^3\log^2 n)$（用于 $d = 3$）、 $O(n^{(4d-2)/3}\log^2 n)$（用于 $4 \le d \le 7$），以及$O(n^{5d/4}\log^2 n)$（用于任意常数 $d \ge 8$）。指数 $5d/4$ 看起来颇为奇特，自然令人不禁想问能否进一步改进，但此后近二十年来一直没有出现新的改进（对数因子 [12, 14]方面的改进除外）。

*伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校计算机科学系（tmc@illinois.edu）。本研究部分受美国国家科学基金会资助，项目编号 CCF-2224271。

维度	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
先前上界	n^2	n^3	$n^{4.66\cdots}$	n^6	$n^{7.33\cdots}$	$n^{8.66\cdots}$	n^{10}	$n^{11.25}$	$n^{12.5}$	$n^{13.75}$	n^{15}	$\cdots$
新上界			n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	n^{12}	$\cdots$

表 1：忽略多对数因子时，$m = n$ 情形下问题 1 的先前上界 [15] 及新上界。

问题 1 的许多其他变体也得到了研究，例如，采用其他度量方式，如L_2（如上文所述）；除平移外，还允许旋转和/或缩放；处理点以外的其他对象；允许近似等（例如，参见 [16, 4, 21, 24, 19, 18, 3]）。在计算几何领域，其他几种替代豪斯多夫距离的度量也得到了广泛研究，例如地球搬运距离和 Fr´échet 距离。本文将不讨论这些变体，而仅关注平移下点集的精确有向 L_∞ 豪斯多夫距离。

我们的新结果是一种针对问题 1 的算法，在主要的 $m = n$ 情形下，对任意常数 $d \geq 3$，其运行时间为 $O(n^d(\log\log n)^{O(1)})$（使用随机化）；如果不允许随机化，则会多出一个对数因子。因此，指数 d 相较于 Chew 等人先前的指数有显著改进，且对所有 $d \geq 4$都成立；见表 1。在一般情形下，我们算法的运行时间为$O((mn)^{d/2}(\log\log(mn))^{O(1)})$。

与广义 Klee 测度问题的联系。只需关注判定问题：判断最小值是否不超过给定值 r。通过 Frederickson 和 Johnson 的一种著名技术，原问题可归约为判定问题，但运行时间会多出一个对数因子 [20]（事实上，当 $d \geq 4$时，标准的二分搜索即可，因为最优值属于一个包含 $O((mn)^2)$ 个可能值的全集，而这些值可以显式枚举）。在某些情况下，还可以通过随机优化技术消除这个额外的对数因子 [12]。

等价地，我们希望判定是否存在一个向量 $v \in \mathbb{R}^d$，使得 $P + v \subseteq Q + [-r, r]^d$（其中“+”在上下文明确时表示闵可夫斯基和）。假设（通过重新缩放）$r = 1/2$。令 $\mathcal{Q}$ 为单位超立方体集合 $\{q + [-1/2, 1/2]^d : \ q \in Q\}$，并令 $S^* := \bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$。该条件等价于 $P + v \subseteq S^*$，即 $v \in \bigcap_{p\in P}(S^* - p)$。因此，该判定问题等价于以下问题：

问题 2. (L_∞ 平移 Hausdorff 判定问题) 给定一个由 n 个点组成的集合 P，以及一个由 m 个单位超立方体组成的集合 $\mathcal{Q}$，其中这些超立方体位于 $\mathbb{R}^d$ 中，判定是否 $\bigcap_{p\in P}(S^* - p) = \emptyset$，其中 $S^* := \bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$。

对于每个 $B \in \mathcal{Q}$ 和 $p \in P$，创建一个新的单位超立方体 $B - p$，并赋予该超立方体颜色 p。问题 2 随即归结为以下关于 $N = mn$ 个彩色单位超立方体的问题：判断$\bigcap_\chi S_\chi = \emptyset$是否成立，其中 $S_\chi := \bigcup_{B\in\mathcal{B}}$的颜色为$_\chi B$。（换句话说，我们要判断是否存在一个位于所有颜色对应的超立方体中的“彩色”点。）

单位超立方体的情形又可归约为正交象限 的情形（即 d 边盒，沿每个坐标轴的一个方向无界）：我们可以构建边长为 1 的均匀网格，并在每个网格单元内求解子问题；而在一个网格单元内，单位超立方体与正交象限完全相同。（我们可以忽略那些与所有颜色的超立方体都不相交的网格单元。）由于一个单位超立方体只与 $O(1)$个网格单元相交，这些子问题的输入规模总计为 $O(N)$。这一切促使我们定义以下关于带颜色的正交象限的问题：

[1]本文中，所有超立方体和盒均与坐标轴平行 .

问题 3.（广义 Klee 测度问题）给定一个集合 $\mathcal{B}$ 包含 N 个带颜色的正交象限，位于 $\mathbb{R}^d$，(a) 判断 $\bigcap_\chi S_\chi = \emptyset$，(b) 或者更一般地，计算 S_χ 中深度最大或最小的点（即位于最多或最少个区域中的点 S_χ），(c) 或者计算 $\bigcap_\chi S_\chi$ 的体积，

其中 $S_\chi := \bigcup_{B \in \mathcal{B}，\text{其颜色为 } \chi} B$。

总之，如果问题 3(a) 能在 $T(N)$ 时间内求解，那么问题 2 就能自动在 $O(T(N)) = O(T(mn))$ 时间内求解（假设 $T(\cdot)$ 具有超可加性）。

问题 3(a) 是盒覆盖问题的一种推广：判断 $\mathbb{R}^d$ 中一组 N 个盒的并集是否覆盖整个空间。这是因为 $\bigcap_\chi S_\chi = \emptyset$ 当且仅当 $\bigcup_\chi S_\chi = \mathbb{R}^d$，而一个盒可以表示为至多 $2d$ 个正交象限之并集的补集（我们用 S 表示集合 S 的补集）。类似地，问题 3(b) 是盒深度问题的一种推广：求 $\mathbb{R}^d$ 中 N 个盒的最小或最大深度。问题 3(c) 是*Klee* 测度问题的一种推广：计算 $\mathbb{R}^d$ 中一组 N 个盒的并集体积。这种推广使我们能够计算更一般形状的并集体积，只要每个形状都能表示为正交象限并集的补集即可。（注意，我们可以将其裁剪到一个有界盒中，以确保体积有限。）

原始的 Klee 测度问题已在计算几何领域得到广泛研究 [2, 8, 13,14, 28, 30]。Chan 提出的、目前已知用于求解 Klee 测度问题的最佳算法 [14] 基于一种巧妙而简单的分治方法，运行时间为 $O(N^{d/2})$。盒覆盖问题和盒深度问题也可以用类似的算法求解；事实上，利用查表和位打包技巧，时间界还能略微降低若干对数因子 [14]。

对于 $d \leq 3$，正交象限的并集具有线性的组合复杂度 [7]，并且可以在近线性时间内构造。因此，求解问题 3 的一种直接方法是先显式构造所有区域 S_χ，将每个区域 S_χ 分解为互不相交的盒的并集，然后对得到的 $O(N)$ 个盒运行已知的 Klee 测度问题算法。采用这种方法，对于 $d = 2$，问题 3 可在 $O(N \log N)$ 时间内求解；对于 $d = 3$，可在 $O(N^{3/2})$ 时间内求解；因此，对于 $d = 2$，问题 2 可在 $O((mn)\log(mn))$ 时间内求解；对于 $d = 3$，可在 $O((mn)^{3/2})$ 时间内求解。Chew 和 Kedem [17] 以及 Chew 等人 [15] 此前提出的已知二维和三维算法，基本上就是按照这种方式设计的。

然而，对于 $d \geq 4$，N 个正交象限的并集在最坏情况下可能具有 $\Theta(N^{\lfloor d/2 \rfloor})$ 的组合复杂度 [7]。因此，先显式构造所有区域 S_χ，再调用求解 Klee 测度问题的算法，这种两阶段方法会太慢！Chew 等人 [15] 以一种非平凡的方式改造了 Overmars 和 Yap 求解 Klee 测度问题的算法 [28]，从而获得了一个用于问题 3 的 $O(N^{5d/8} \log N)$ 时间算法；进而，当 $m = n$ 时，获得了一个用于问题 2 的 $O(n^{5d/4} \log n)$ 时间算法。

我们提出了一种新算法，可在 $O(N^{d/2} \log^{d/2} N)$ 时间内求解问题 3(c)，其时间界与原始 Klee 测度问题的已知时间界相匹配，仅相差对数因子。事实上，对于问题 3(a,b)，利用查表和位打包技巧，可以将多对数因子降低为 poly-log log N 因子。因此，当 $m = n$ 时，我们得到了问题 2 的 $O(n^d(\log \log n)^{O(1)})$ 时间界；一般情况下，则为 $O((mn)^{d/2}(\log \log(mn))^{O(1)})$。我们的结果是通过直接修改 Chan 针对 Klee 测度问题的分治算法 [14] 得到的。这种改编并非显而易见，并用到了有趣的新思路。如前所述，我们无法将其拆分为两个阶段。相反，在单个递归过程中，我们将同时处理两类对象：(i) 输入正交象限，以及 (ii) 过程中发现的区域 S_χ 的特征。递推关系的分析更加精细（尽管整个算法仍然简单）。

条件下界。另一方面，近期在 SoCG'21 上，Bringmann 和 Nusser [10]在正交向量（OV）假设 [29] 下（特别是，在强指数时间假设（SETH） [29]下也成立），证明了问题1–2 在 $d = 2$ 下存在 $\Omega((mn)^{1-\delta})$ 的条件下界，其中 $\delta > 0$ 是任意小的常数。这表明，Chew 和 Kedem 针对 $d = 2$ 给出的上界很可能已接近最优 [17]。然而，Bringmann 和 Nusser 并未在更高维度下得到任何下界。

正如 Chan 所指出的，在组合 k-团假设下，Klee 测度问题和盒覆盖问题对于组合算法都具有 $\Omega(N^{d/2-\delta})$ 的下界。该假设指出，对于任意常数 $k \geq 3$，不存在一个用时为 $O(n_0^{k-\delta})$、能够检测含有 n_0 个顶点的图中是否存在 k-团的组合算法。"组合"算法这一概念在数学上并没有明确定义，但直观而言，它指的是避免使用快速矩阵乘法（例如 Strassen算法）的算法；本文中的所有算法以及 Chew 等人之前论文中的算法都符合这一标准。（最近，K¨unnemann [26] 在"k-超团假设"下，为 Klee 测度问题中任意的非组合算法得出了新的下界，但其界对 $d \geq 4$ 并不紧。另请参见 [11, 6, 5]，其中给出了其他相关几何问题的条件下界。参见 [25] ，了解计算几何中使用组合 k-团假设的近期实例；另请参见 [1, 9] ，了解几何学之外涉及组合 k-团假设的其他实例。）

由于我们针对问题 3 的算法具有近似 $N^{d/2}$ 运行时间，因此在组合 k-团假设下，它们对于组合算法而言近乎最优。然而，这并不一定意味着我们针对问题 1 或 2 的算法也是最优的。

在本文的第二部分，我们证明，在组合 k-团假设下，对于任意固定的 $\gamma \leq 1$，问题 1–2 的条件下界为 $\Omega(n^{d-\delta})$（针对 $m = n$），或 $\Omega((mn)^{d/2-\delta})$（针对 $m = n^{\gamma}$）。这表明，我们针对问题 1 的组合算法也在条件意义下近乎最优。Chan [13] 此前关于 Klee 测度问题的条件下界是通过从 d-团归约得到的，而我们将从任意大的常数规模的团进行归约。我们的新归约更具挑战性，也更有意思，但仍然简单。

2 算法

本节中，我们将介绍针对任意常数维数 $d \geq 4$ 的广义 Klee 测度问题（问题 3）的新算法。根据这一结果，我们可以直接得到问题 1–2 的新算法。

为解决问题 3(c)，我们转而求解一个推广问题：给定一个盒状"单元" γ 和一个额外的盒集合 $\mathcal{E}$，求出 $\bigcap_\chi S_\chi \cap \bigcap_{E\in\mathcal{E}} E \cap \gamma$ 的体积。初始时，$\gamma = \mathbb{R}^d$ 且 $\mathcal{E} = \emptyset$。我们假设输入坐标已预先排序（这只需付出一次性的初始 $O(N \log N)$开销）。

如果某个正交象限或盒的某些（$d-2$）面与 γ 的内部相交，则称其为短；若它与 γ 的内部相交但并非短，则称其为长；若它与 γ 的内部不相交，或者完全包含 γ，则称其为平凡。

我们的算法受到 Chan 针对原始 Klee 测度问题提出的分治算法 [14] 启发，二者有许多相似之处（例如，都使用加权中位数划分单元），但我们的算法也有重大创新（例如，如何减少长对象的数量，以及如何在递归过程中将 $\mathcal{B}$ 中的一些对象"转换"为 $\mathcal{E}$ 中的新对象）。分析该算法需要新的收费论证和递推关系，因此会引入一些额外的对数因子。

定义权重。考虑 $\mathcal{B}$ 的短正交象限的一个 $(d-2)$-面 f，使得 f 与 γ 的内部相交。若 f 垂直于第 i 个和第 j 个坐标轴，则赋予 f 权重 $2^{(i+j)/d}$。注意，此权重为 $\Theta(1)$，并且

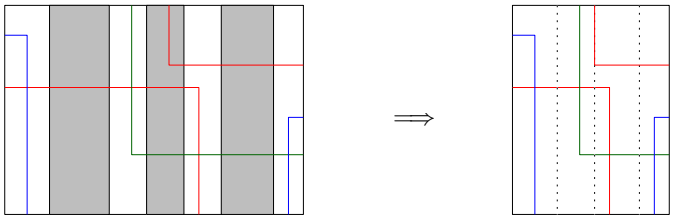


图1：将阴影板层的宽度缩小至 0，以消除其中的长盒 $\mathcal{E}$.

因此， $\mathcal{B}$ 的每个短正交象限的总权重均为 $\Theta(1)$。

类似地，考虑盒的一个 $(d-2)$-面 f，其 $\mathcal{E}$ 满足 f 与 γ 的内部相交。如果 f 垂直于第 i 和第 j 个坐标轴，则赋予 f 权重 $2^{(i+j)/d}/t$，其中 $t \geq 1$ 是稍后设定的参数。注意，此权重为 $\Theta(1/t)$，因此 $\mathcal{E}$ 中的每个短盒贡献的总权重为 $\Theta(1/t)$。

令 $T(N_{\text{long}}, W_{\text{short}})$ 表示该问题的时间复杂度，其中 N_{long} 表示 $\mathcal{B}$ 中长正交象限和平凡正交象限的总数，以及 $\mathcal{E}$ 中长盒和平凡盒的总数； W_{short} 表示 $\mathcal{B}$ 中所有短正交象限和 $\mathcal{E}$ 中所有短盒的总权重。注意， $\mathcal{B}$ 中正交象限的总数与 $\mathcal{E}$ 中盒的总数均以 $O(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})$ 为上界。

减少长对象的数量。 首先，可以轻松剔除平凡正交象限和盒：我们可以移除与 γ 的内部不相交的 $\mathcal{B}$ 的所有正交象限，以及 $\mathcal{E}$ 的所有盒。如果 $\mathcal{B}$ 的某个颜色类整体与 γ 的内部不相交，或者 $\mathcal{E}$ 的某个盒完全包含 γ，则可以返回 0 作为答案。如果 $\mathcal{B}$ 中有一个正交象限完全包含 γ，则可以从 $\mathcal{B}$ 中移除其颜色类。

对于每种颜色 χ，考虑 $\mathcal{B}$ 中颜色为 χ 的长正交象限；这些长正交象限的并集至多由 $2d$ 个正交象限定义（因为它是一个至多有 $2d$ 条边的盒的补集）。每种颜色保留这些 $O(1)$ 个长正交象限，并移除其余部分。如果存在一个颜色为 χ 的长正交象限，但没有相同颜色的短正交象限，那么 $S_\chi \cap \gamma$ 就是一个盒——将这个盒加入 $\mathcal{E}$，并从 $\mathcal{B}$ 中移除该颜色类（换句话说，我们已将 $\mathcal{B}$ 中的整个颜色类“转换”为 $\mathcal{E}$ 中的单个盒）。这一步使 W_{short} 至多增加 N_{long}/t。完成这一步后，每个剩余的长正交象限都可以“归因”于一个颜色相同的短正交象限，因此 $\mathcal{B}$ 中剩余的长正交象限数量至多为短正交象限数量的 $O(1)$ 倍，即为 $O(W_{\text{short}})$。

接下来，对每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$，考虑 $\mathcal{E}$中与 γ相交且其 $(d-1)$-面垂直于第 i 个坐标轴的长盒。先对这些盒排序，再通过线性扫描计算它们的并集，因为将其投影到第 i 个坐标轴后，这相当于计算一维区间的并集。该并集构成互不相交的板层集合。重新调整所有第 i 个坐标，使这些板层的宽度缩至 0，同时不改变$\bigcap_\chi S_\chi \cap \bigcap_{E\in\mathcal{E}} E \cap \gamma$的体积，如图1所示。对每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$依次执行此操作后， $\mathcal{E}$中的所有长盒都将被消除。

经过这一过程， $\mathcal{B}$ 中还剩下 $O(W_{\text{short}})$个长正交象限，且 $\mathcal{E}$中的长盒数量为零。因此， N_{long} 可化简为 $O(W_{\text{short}})$。 $\mathcal{B}$ 中短正交象限的权重最多可能增加到 $W_{\text{short}} + N_{\text{long}}/t$。于是，对于某个常数 c，有：

$$T(N_{\text{long}}, W_{\text{short}}) \leq T(cW_{\text{short}}, W_{\text{short}} + N_{\text{long}}/t) + O(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}}). \tag{1}$$

分治。 接下来，计算与 γ的内部相交且垂直于第一坐标轴的 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{E}$ 的$(d-2)$-面在第一坐标上的加权中位数 m。用超平面 $\{(x_1, \ldots, x_d) : x_1 = m\}$将 γ 分成两个子单元 γ_L 和γ_R。将坐标轴$1, 2, \ldots, d$ 重新编号为 $2, \ldots, d, 1$，并递归求解 γ_L 和 γ_R 的问题。

为了分析该算法，考虑 $\mathcal{B}$（分别为 $\mathcal{E}$）的一个$(d-2)$-面 f，它垂直于第 i和第 j坐标轴，且 $i,j \neq 1$。坐标轴重新编号后，其权重从 $2^{(i+j)/d}$ 变为 $2^{(i-1+j-1)/d}$ （分别从$2^{(i+j)/d}/t$ 变为 $2^{(i-1+j-1)/d}/t$），也就是说，权重缩小了 $2^{2/d}$倍。

接下来考虑一个 $(d-2)$-面 f，它属于 $\mathcal{B}$（分别为 $\mathcal{E}$），且与第一条和第 j条坐标轴正交，其中 $j \neq 1$。经过坐标轴重新编号后，其权重从 $2^{(1+j)/d}$ 变为 $2^{(d+j-1)/d}$ （分别从 $2^{(1+j)/d}/t$ 变为 $2^{(d+j-1)/d}/t$），也就是说，权重增加了 $2^{(d-2)/d}$ 倍。但是，当 γ 被划分为子单元 γ_L 和 γ_R时，每个子单元内的权重都会减半；因此，权重净减少了 $2^{2/d}$倍。

因此，在任一子单元中， W_{short} 都会减少为原来的 $2^{2/d}$。（另一方面， N_{long} 不一定会减少。）于是我们有

$$T(N_{\text{long}}, W_{\text{short}}) \;\leq\; 2\,T(N_{\text{long}}, W_{\text{short}}/2^{2/d}) + O(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}}). \tag{2}$$

综合起来。 将 (2) 和 (1) 结合起来，并令 $T(N) := T(cN, N)$，我们得到

$$\begin{aligned} T(N) \;\leq\; 2\,T(cN, N/2^{2/d}) + O(tN) \;&\leq\; 2\,T(cN/2^{2/d}, N/2^{2/d} + cN/t) + O(tN) \\ &\leq\; 2\,T\left(\tfrac{1+2c/t}{2^{2/d}}N\right) + O(tN). \end{aligned}$$

对于基本情形，我们有 $T(O(1)) = O(t^{d/2})$：当 $W_{\text{short}} = O(1)$ 时，有 $O(1)$ 个基数为 $\mathcal{B}$的正交象限，以及 $O(t)$ 个基数为 $\mathcal{E}$的盒，因此可以对 $O(t)$ 个盒 [14]运行已知的 Klee 测度问题算法来解决该问题。

根据主定理，该递推关系的解为

$$T(N) \;=\; O(t^{d/2} N^{1/\log_2(2^{2/d}/(1+2c/t))}) \;=\; O(t^{d/2} N^{d/2+O(1/t)}).$$

选择 $t = \log N$可得 $T(N) = O(N^{d/2}\log^{d/2} N)$。至此，主算法的描述与分析便告完成。

通过位打包减少对数因子。 对于问题 3(a)，我们可以通过使用更复杂但标准的位打包技巧，在多对数因子方面取得小幅（但不太实用的）改进，下面简要说明（关于此类技巧的更多细节，请参见 [14]）：关键在于，实际坐标值并不重要，重要的只是它们的相对顺序，因此我们可以用排序列表中的秩来替代这些值。于是， $O(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})$ 个输入对象可以用$O((N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})\log(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}}))$ 位表示，并打包在 $O(((N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})\log(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}}))/w)$ 个字中，假设计算采用 w 位字 RAM 模型。递归过程中各种线性扫描的 $O(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})$ 开销可降至 $O(((N_{\text{long}} + tW_{\text{short}})\log^2(N_{\text{long}} + tW_{\text{short}}))/w)$，因为通过打包版归并排序，排序 kb 位数可以在 $O((kb\log k)/w)$ 时间内完成。因此，递推关系变为 $T(N) \leq 2T(\frac{1+2c/t}{2^{2/d}}N) + O(1 + (tN\log^2(tN))/w)$。

对于基本情形，我们可以使用 Chan 算法的位打包版本来解决$O(t)$个盒的盒覆盖问题，其运行时间为 $T(O(1)) = O(1 + (t/w)^{d/2}\log^{O(1)} w)$时间 [14, 第 3 节。1]递推关系的解为 $T(N) = O(N^{d/2+O(1/t)} \cdot (1 + (t/w)^{d/2}\log^{O(1)} w))$。选择 $t = \log N$可得 $T(N) = O(N^{d/2} \cdot (1 + N/w^{d/2})^{O(1)} w)$。

上述方法可能需要对 w位字进行非标准运算。通过选择 $w = \delta \log N$，其中常数 $\delta > 0$足够小，这类运算可以在 $2^{O(w)} = N^{O(\delta)}$时间内预处理后，通过查表在常数时间内模拟。因此，我们得到最终的时间界 $O(N^{d/2}(\log\log N)^{O(1)})$。

问题 3(b) 也可以通过类似的方法求解，只需稍作修改以减少 $\mathcal{E}$ 中长盒的数量；不过，这与 Chan 针对原始盒深度问题 [14, 第 3 节 1] 中对 Chan 算法所做的修改相同。总而言之，我们得到了以下定理:

定理 2.1。 对于任意常数 $d \geq 4$，问题 *3(c)* 可在 $O(N^{d/2}\log^{d/2} N)$ 时间内求解，而问题 *3(a,b)* 可在 $O(N^{d/2}(\log\log N)^{O(1)})$ 时间内求解。

推论 2.2。 对于任意常数 $d \geq 4$，问题 *2* 可在 $O((mn)^{d/2}(\log\log(mn))^{O(1)})$ 时间内求解。问题 *1* 可确定性地在 $O((mn)^{d/2}\log(mn)(\log\log(mn))^{O(1)})$ 时间内求解；采用随机化时，期望时间为 $O((mn)^{d/2}(\log\log(mn))^{O(1)})$。

证明。 如第 1 节所述，利用 Frederickson 和 Johnson 的技术 [20]，或者通过普通的二分搜索并增加一个对数因子，问题 1 可归约为问题 2。

Chan [12, 第 4 节2] 介绍了如何应用其随机优化技术，在不损失对数因子的情况下，将以下问题归约为其判定问题:

给定 N 个带颜色的点在 $\mathbb{R}^d$中，求包含所有颜色的点的最小超立方体 .

如 [12], 所述，问题 1 可归约为此问题。另一方面，如第 1 节所述，此问题的判定版本（等价于寻找一个同时位于所有颜色对应的单位超立方体内的点）可归约为问题 3(a)，而我们刚刚已经解决了该问题。 □

3 条件下界

本节中，我们在组合 k-团假设下，为组合算法证明问题 1–2 的近乎匹配的条件下界。我们首先引入一个更便于处理的中间问题。粗略地说，问题 2 考虑的是同一种单一 形状（该形状是单位超立方体的并集）的平移副本的交集，而下面的问题考虑的是多种 形状（每种形状都是正交象限的并集）的平移副本的交集。

问题 4. 设 $\mathcal{Z}$ 是一组形状，其中每种形状都是 $\mathbb{R}^d$中的正交象限的并集。设 m 为 $\mathcal{Z}$中所有形状所包含的正交象限总数。给定一组 $\mathcal{S}$ 个 n 对象，其中每个对象都是 $\mathcal{Z}$中某种形状的平移副本，判断 $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S = \emptyset$是否成立。

Le引理 3.1. 问题 *4* 可归约为在 $O(n)$ 个点和 $O(m)$ 个单位超立方体上的问题 *2* .

证明。 假设（通过缩放） $\mathcal{Z}$ 的所有正交象限以及 $\mathcal{S}$中使用的所有平移向量的坐标都属于 $[0,1/2]$。特别是，如果 $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$非空，它必定包含 $[0,1]^d$中的一个点。在 $[0,1]^d$内， $\mathcal{Z}$ 的每个正交象限都可以替换为一个等价的单位超立方体。

令 Z_1、.....、 Z_ℓ 为 $\mathcal{Z}$的形状。令 $\mathcal{B}_i$ 为对应于定义Z_i 的正交象限的单位超立方体（因此，对于任意 $t \in [0,1/2]^d$， $(Z_i + t) \cap [0,1]^d = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_i}(B + t) \cap [0,1]^d$）。

我们按如下方式构造问题 2 的一个实例：对于每个 $B \in \mathcal{B}_i$，将平移后的单位超立方体$B + u_i$添加到 $\mathcal{Q}$ 中，其中 $u_i := (4i, 0, \ldots\ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$。（此操作将不同类别的对象 $\mathcal{B}_i$ 分散到空间的不同部分，因为向量 u_i 沿第一坐标轴彼此至少相距 4 个单位。）对于每个对象 $S \in \mathcal{S}$，若 S 是 $Z_i + t$的平移，则将点 $u_i - t$ 添加到 P中。最后，将两个辅助单位超立方体 $[0,1]^d$和 $u_{\ell+1} + [0,1]^d$添加到 $\mathcal{Q}$中，并将两个辅助点 u_0和 $u_{\ell+1}$添加到 P中。

我们在 P 的这些点和 $\mathcal{Q}$的这些单位超立方体上求解问题，以确定$\bigcap_{p\in P}(S^* - p) = \emptyset$是否成立，其中 $S^* := \bigcup_{B\in\mathcal{Q}} B$。为了证明正确性，只需注意到 $\bigcap_{p\in P}(S^* - p)$ 与 $[0,1]^d$内的 $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ 相同。这是因为对于每个 $B \in \mathcal{B}_i$，只有当 $i = i'$时，$(B + u_i) - (u_{i'} - t)$ 才可能与$[0,1]^d$ 相交（因为当 $i \neq i'$时， u_i和 $u_{i'}$相距很远），假设 $t \in [0,1/2]^d$。 □

我们现在通过从图的团问题进行归约，证明问题 4 是困难的。我们先用两个较简单的归约热身，得到较弱的下界，然后再在引理 3.4 中给出最终的归约。（不需要建立直觉的读者可以直接阅读引理 3.4 的证明。）

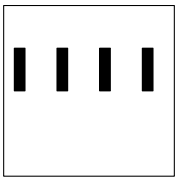
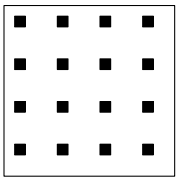
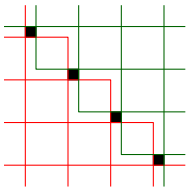




图2：（左）对于 $(a,\ b)$，$Y_{\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ u,\ v}$ 区域为 $(0,\ 1)$。（中）对于 $(a,\ b)$，$Y_{\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ u,\ v}$ 区域为 $(0,\ 0)$。（右）一条对角线 $D_{\alpha,\ \beta}$（其补集可表示为红色和绿色正交象限的并集）。

第一次尝试。首先注意，盒覆盖问题（判断 n 个盒能否覆盖 $\mathbb{R}^d$ 中的整个空间，即判断 n 个盒的补集的交集是否为空）可以轻易归约到问题 4，其中包含 n 个正交象限和 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 个对象，因为盒的补集是 O 个（1）正交象限的并集。根据引理 3.1，我们立即得到问题 4 的 $\Omega(n^{d/2-\delta})$ 条件下界，因为在组合 k-团假设 [13] 下，盒覆盖问题有 $\Omega(n^{d/2-\delta})$ 的下界。

在下面的引理中，我们直接修改从团到盒覆盖问题的（非常简单的）已知归约 [13], ，以表明即使正交象限的数量为 $O(1)$，仍然有相同的下界 m：

引理3.2。在具有 n_0 个顶点的图中检测一个 d-团，可归约到问题 *4*，其中有 $m = O(1)$ 个正交象限和 $n = O(n_0^2)$ 个对象，位于 $\mathbb{R}^d$中。

证明。设 $G = (V,\ E)$为给定的图，其中有 $V = [n_0] = \{0, \ldots, n_0 - 1\}$。我们将构造一个对象集合 $\mathcal{S}$，其交集为

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in [0, n_0)^d : \{\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_d \rfloor\} \text{ is a } d\text{-clique of } G\}. \tag{3}$$

于是，交集非空当且仅当存在一个 a d-团。

构造非常简单：对于每个 $\alpha,\ \beta \in \{1, \ldots, d\}$ 满足 $\alpha \neq \beta$ 的对象，以及每个 $u,\ v \in [n_0]$ 满足 $uv \notin E$的对象，将盒的补集加入

$$B_{\alpha,\beta,u,v} := \{(x_1, \ldots, x_d) : \lfloor x_\alpha \rfloor = u,\ \lfloor x_\beta \rfloor = v\}$$

到 $\mathcal{S}$ 中。（注意，如果 $u = v$，我们考虑 $uv \notin E$。）这些盒投影到第 α 和第 β 个坐标轴后是单位正方形，因此是 $O(1)$ 个固定盒的平移副本；而每个这样的固定盒的补集显然可以表示为 $O(1)$ 个正交象限的并集，并可加入 $\mathcal{Z}$。最后，将界定 $[0, n_0)^d$ 的 $O(1)$ 个半空间加入 $\mathcal{S}$。于是 $\mathcal{S}$ 总共有 $O(n_0^2)$ 个平移副本，并且显然满足所需性质 (3)。 □

结合引理 3.1，上述引理确实蕴含问题 2 的一个 $\Omega(n^{d/2-\delta})$ 条件下界：如果问题 2 对于 $m = O(1)$ 存在一个运行时间为 $O(n^{d/2-\delta})$ 的组合算法，那么对于有 n_0 个顶点的图，d-团检测问题就存在一个运行时间为 $O((n_0^2)^{d/2-\delta}) = O(n_0^{d-2\delta})$ 的组合算法，这与组合 k-团假设矛盾。

第二次尝试。现在，我们通过从一个规模较大的团 $2d$ 进行归约，改进下界。我们的关键思路如下：在单个坐标值中编码一对顶点。

引理 3.3。在具有 n_0 个顶点的图 G 中检测一个$(2d)$-团，可归约为问题 *4*，其中包含 $m = O(n_0)$ 个正交象限和 $n = O(n_0^3)$ 个对象 $\mathbb{R}^d$。

证明。设 $G=(V,E)$ 为给定的图，具有 $V=[n_0]$。对于任意 $x\in[0,n_0^2)$，令 $\phi_0(x)=\lfloor x\rfloor$ 模 n_0，且 $\phi_1(x)=\lfloor x/n_0\rfloor$。我们将构造一个由对象组成的集合 $\mathcal{S}$，其交集为

$$\{(x_1,\dots,x_d)\in[0,n_0^2)^d:\ \{\phi_0(x_1),\phi_1(x_1),\dots,\phi_0(x_d),\phi_1(x_d)\}\text{ is a }(2d)\text{-clique in }G\}. \tag{4}$$

因此，当且仅当存在一个 $(2d)$-团时，交集非空。

对于每个 $\alpha,\beta\in\{1,\dots,d\}$ 和 $a,b\in\{0,1\}$，满足 $(\alpha,a)\neq(\beta,b)$，以及每个满足 $uv\notin E$ 的 $u,v\in[n_0]$，定义区域

$$Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}:=\{(x_1,\dots,x_d)\in[0,n_0^2)^d:\ \phi_a(x_\alpha)=u,\ \phi_b(x_\beta)=v\}.$$

若 $\alpha=\beta$，则 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 在投影到第 α 个坐标轴后恰好是一个单位区间，因此是 $O(1)$ 个固定盒之一的平移；每个这样的固定盒的补集都可表示为 $O(1)$ 个正交象限的并集，并可加入 $\mathcal{Z}$。从现在起，假设 $\alpha\neq\beta$。

若 $(a,b)=(1,1)$，则 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 在投影到第 α 个和第 β 个坐标轴后恰好是一个 $n_0\times n_0$ 正方形，因此是 $O(1)$ 个固定盒之一的平移；每个这样的固定盒的补集都可表示为 $O(1)$ 个正交象限的并集，并可加入 $\mathcal{Z}$。

如果 $(a,b)=(0,1)$（或 $(a,b)=(1,0)$），那么将 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 投影到第 α 和第 β 个坐标轴上时，它是 n_0 个维度为 $1\times n_0$（或 $n_0\times 1$）的矩形的并集（见图2（左）），因此它是 $O(1)$ 个固定盒的 n_0 个平移副本的并集，而每个固定盒的补集都可以表示为 $O(1)$ 个正交象限的并集，并且可以添加到 $\mathcal{Z}$ 中。

如果 $(a,b)=(0,0)$，那么将 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 投影到第 α 和第 β 个坐标轴上时，会形成网格图案（见图2（中））。尽管该区域的补集无法表示为正交象限的并集，但我们可以将这个网格分解成能够如此表示的子区域。最直观的方法是将其分解为行或列，但这仍然行不通。因此，我们将把它分解为“对角线”。更准确地说，定义

$$\begin{aligned}D_{\alpha,\beta}:=\{(x_1,\dots,x_d):\quad &\lfloor x_\alpha\rfloor \bmod n_0=0,\ \lfloor x_\beta\rfloor \bmod n_0=0,\\ &\lfloor x_\alpha/n_0\rfloor+\lfloor x_\beta/n_0\rfloor=n_0,\ x_\alpha,x_\beta\geq 0\}.\end{aligned}$$

由于将 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 投影到二维后，可以将其视为夹在两条阶梯之间的区域，因此其补集 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 可以表示为 $O(n_0)$ 个正交象限的并集（见图2（右））。将形状 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 添加到 $\mathcal{Z}$。裁剪到 $[0,n_0^2)^d$ 时，区域 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 可以表示为 $O(n_0)$ 个 $D_{\alpha,\beta}$ 的平移副本的并集。

无论如何，$\overline{Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}}\cap[0,n_0^2)^d$ 都可以表示为 $[0,n_0^2)^d$ 与来自 $\mathcal{Z}$ 的 $O(n_0)$ 个形状平移副本的交集。对于每个 $\alpha,\beta\in\{1,\dots,d\}$ 和 $a,b\in[g]$（满足 $(\alpha,a)\neq(\beta,b)$），以及每个满足 $uv\notin E$ 的 $u,v\in[n_0]$，将这些平移副本添加到 $\mathcal{S}$。最后，将界定 $[0,n_0^2)^d$ 的 $O(1)$ 个半空间添加到 $\mathcal{S}$。这样，$\mathcal{S}$ 总共有 $O(n_0^3)$ 个平移副本，并满足所需的性质（4）。 □

上述引理意味着一个更大的 $\Omega(n^{2d/3-\delta})$ 条件下界：如果针对 $m=n^{1/3}$ 的问题 2 存在一个运行时间为 $O(n^{2d/3-\delta})$ 的组合算法，那么对于一个具有 n_0 个顶点的图，其 $(2d)$-团检测问题可以通过一个运行时间为 $O((n_0^3)^{2d/3-\delta})=O(n_0^{2d-3\delta})$ 的组合算法解决，这与组合 k-团假设相矛盾。

最终归约。 我们通过进一步推广这一思路，得到最终的下界。我们将归约自规模更大的团问题，并改为编码由 g 个顶点组成的元组，而非顶点对（顺带一提，近期 K¨unnemann 在证明 Klee 测度问题的条件下界时，也采用了编码元组的思路 [26]）：

引理 3.4。设 g 为任意整数常数。在一个有 n_0 个顶点的图 G 中，检测一个(dg)-团，可归约为问题 ***4***，其中包含 $m = O(n_0^{g-1})$ 个正交象限和 $n = O(n_0^{g+1})$ 个对象 $\mathbb{R}^d$。

更一般地，对于任意给定的 $m \le n_0^{g-1}$，在具有 n_0 个顶点的图 G 中检测一个(dg)-团，可归约为在 $\mathbb{R}^d$ 中求解具有 m 个正交象限和 $n = O(n_0^{2g}/m)$ 个对象的问题 ***4***。

证明。设 $G = (V, E)$ 为给定的图，其中 $V = [n_0]$。对于任意 $x \in [0, n_0^g)$ 和 $a \in [g]$，令 $\phi_a(x)$ 为 $\lfloor x \rfloor$ 在基数 n 下的第 $(a+1)$ 个最低有效数位。我们将构造一个对象集合 $\mathcal{S}$，其交集为

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in [0, n_0^g)^d : \quad \{\phi_0(x_1), \ldots, \phi_{g-1}(x_1), \ldots, \phi_0(x_d), \ldots, \phi_{g-1}(x_d)\} \text{ is a } (dg)\text{-clique in } G\}. \tag{5}$$

由此可知，该交集非空，当且仅当存在一个 (dg)-团。

对于每个 $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, d\}$ 和 $a, b \in [g]$，满足 $(\alpha, a) \neq (\beta, b)$，以及每个满足 $uv \notin E$ 的 $u, v \in [n_0]$，定义区域

$$\begin{aligned} Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v} &:= \{(x_1, \ldots, x_d) \in [0, n_0^d)^d : \phi_a(x_\alpha) = u,\ \phi_b(x_\beta) = v\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_d) : x_\alpha \in [in_0^{a+1} + un_0^a, in_0^{a+1} + (u+1)n_0^a), \\ &\qquad x_\beta \in [jn_0^{b+1} + vn_0^b, jn^{b+1} + (v+1)n_0^b) \\ &\qquad \text{for some } i \in [n_0^{g-a-1}], j \in [n_0^{g-b-1}]\}. \end{aligned}$$

若 $\alpha = \beta$，则 $Y_{\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ u,\ v}$ 在投影到第 α 个坐标轴时，是至多 $O(n_0^{g-1})$ 个单位区间的并集，因此是 $O(n_0^{g-1})$ 个 $O(1)$ 个固定盒的平移副本的并集；每个固定盒的补集都可以表示为 $O(1)$ 个正交象限的并集，并可添加到 $\mathcal{Z}$。

若 $\alpha \neq \beta$，则 $Y_{\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ u,\ v}$ 在投影到第 α 个和第 β 个坐标轴时，形成一个 $O(n_0^{g-1}) \times O(n_0^{g-1})$ 网格图案。定义“对角线”

$$D_{\alpha,\beta,a,b} = \{(x_1, \ldots, x_d) : \ x_\alpha \in [in_0^{a+1}, in_0^{a+1} + n_0^a),\ x_\beta \in [jn_0^{b+1}, jn_0^{b+1} + n_0^b) \text{ for some } i, j \in [m] \text{ with } i + j = m\}.$$

由于 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 在投影到二维空间时，可以视为夹在两条阶梯之间的区域，因此其补集 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 可以表示为 $O(m)$ 个正交象限的并集。将形状 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 添加到 $\mathcal{Z}$。区域 $Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}$ 在裁剪到 $[0, n_0^g)^d$ 时，可以表示为 $O(n_0^{2(g-1)}/m)$ 个 $D_{\alpha,\beta,a,b}$ 的平移副本的并集。

无论如何，$\overline{Y_{\alpha,\beta,a,b,u,v}} \cap [0, n_0^g)^d$ 都可以表示为来自 $\mathcal{Z}$ 的形状的 $O(n_0^{2(g-1)}/m)$ 个平移副本与 $[0, n_0^g)^d$ 的交集。对于每个 $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, d\}$ 和 $a, b \in [g]$，满足 $(\alpha, a) \neq (\beta, b)$，以及对于每个满足 $uv \notin E$ 的 $u, v \in [n_0]$，将所有这些平移副本加入 $\mathcal{S}$。最后，将界定 $[0, n_0^g)^d$ 的 $O(1)$ 个半空间加入 $\mathcal{S}$。这样，$\mathcal{S}$ 总共包含 $O(n_0^2 \cdot n_0^{2(g-1)}/m)$ 个 $= O(n_0^{2g}/m)$ 平移副本，并满足所需性质 (5)。

□

上述引理意味着，对于任意整数常数 g，都有一个 $\Omega(n^{gd/(g+1)-\delta})$ 的条件下界：如果 $m = n^{(g-1)/(g+1)}$ 的问题 2 存在一个运行时间为 $O(n^{gd/(g+1)-\delta})$ 的组合算法，那么对于一个有 n_0 个顶点的图，其 (dg)-团检测问题就存在一个组合算法，运行时间为$O((n_0^{g+1})^{gd/(g+1)-\delta}) = O(n_0^{dg-(g+1)\delta})$，这与组合 k-团假设相矛盾。通过选取足够大的 $g \ge d/\delta$，指数 $gd/(g+1) - \delta$ 大于 $d - 2\delta$。

更一般地，对于任意常数 $\gamma \le (g-1)/(g+1)$，如果针对 $m = n^\gamma$ 的问题 2 存在一个运行时间为 $O((mn)^{d/2-\delta})$ 的组合算法，那么对于具有 n_0 个顶点的图，其 (dg)-团检测问题存在一个运行时间为 $O(((n_0^{2g}/m) \cdot m)^{d/2-\delta}) = O(n_0^{dg-2g\delta})$ 的组合算法，这与组合 k-团假设矛盾。

定理 3.5。 在组合 k-团假设成立的前提下，针对 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 个点和 n 个单位超立方体，问题 *1* 或问题 *2* 不存在运行时间为 $O(n^{d-\delta})$ 的组合算法（对任意常数 $\delta > 0$均如此）。

更一般地，在相同假设下，对于任意固定常数 $\gamma \leq 1$， $\mathbb{R}^d$ 中的 $m = n^\gamma$ 个点和 n 个单位超立方体的 问题 *1* 或 *2*，不存在运行时间为 $O((mn)^{d/2-\delta})$ 且适用于任意常数 $\delta > 0$ 的组合算法。

4 最后的讨论

总而言之，我们研究了点集的 L_∞ 平移豪斯多夫距离问题。这是计算几何中一个基础问题，历史悠久。我们为该问题得到了显著改进的上界，并首次给出了适用于维度 3 及更高维度的条件下界，且该下界几乎与上界相匹配。我们的上界技术颇有意思，因为它表明，Klee 测度问题的一种自然的彩色推广，可以在大致与原始 Klee 测度问题相同的时间界内求解。我们的下界证明也很有意思，因为它为计算几何中近期不断积累的细粒度复杂性研究增添了新的成果；更具体地说，它展示了组合团假设的威力。

我们的近似 $O((mn)^{d/2})$ 上界也适用于该问题的无向豪斯多夫距离变体，因为问题 1 的无向版本也可以通过 $N = O(mn)$ 归约到问题 3(a)。不过，要将我们的下界推广到无向问题，可能还需要付出更多努力（尽管我们尚未认真尝试）。

对于非组合算法，我们的归约意味着一个 $\Omega((mn)^{d\omega/6-\delta})$ 的下界，前提是采用标准假设：对于含有 n_0 个顶点的图， k-团问题需要 $\Omega(n_0^{d\omega/3-\delta'})$ 时间，其中 $\omega \in [2, 2.373)$ 表示矩阵乘法指数。对于非组合算法，如何证明更好的条件下界仍是一个开放问题。这可能需要进一步发展新技术，因为目前对于非组合算法解决原始 Klee 测度问题，我们还没有得到紧确的条件下界， $d \geq 4$ [26]。

如前所述，Bringmann 和 Nusser [10] 在正交向量假设下证明了 $d = 2$ 的一个接近mn 下界；他们的结果在某种意义上更具鲁棒性（对非组合算法也成立），且也适用于 L_2 情形（并且 L_p 对任意 $1 \leq p \leq \infty$都成立）。不过， L_2 问题的复杂性可能高于 L_∞问题：目前最好的上界分别为 $d = 2$ 的近 n^3 、 $d = 3$ [23]的近 n^5 ，以及在 $m = n$ 情形下 $d \geq 4$ [15]的近$n^{\lceil 3d/2 \rceil + 1}$ 。（关于 $d = 2$的 L_2 问题在“非平衡”情形下的基于 3SUM 的下界，即 m 为常数时的结果，请参见 Bringmann 和 Nusser 的论文。）

参考文献

[1] Amir Abboud、Arturs Backurs 和 Virginia Vassilevska Williams。如果当前的团算法是最优的，那么 Valiant 解析器也是最优的。*SIAM* 计算杂志，47(6):2527–2555，2018年。初步版本发表于 FOCS 2015。doi: 10.1137/16M1061771。[2] Pankaj K. Agarwal。一种改进的立方体并集体积计算算法。载于第 *26* 届 *ACM* 计算几何研讨会论文集(SoCG)，第 230–239 页，2010年。doi:10.1145/1810959.1811000。[3] Pankaj K. Agarwal、Sariel Har-Peled、Micha Sharir 和 Yusu Wang。点和球在平移下的豪斯多夫距离。*ACM* 算法汇刊，6(4):71:1–71:26，2010年。初步版本发表于 SoCG 2003。doi:10.1145/1824777.1824791。

[4] Oswin Aichholzer、Helmut Alt 和 G¨unter Rote。带参考点的形状匹配。《国际计算几何与应用杂志》，7(4):349–363，1997年。初步版本发表于 SoCG 1994。doi:10.1142/S0218195997000211。[5] Boris Aronov 和 Jean Cardinal。几何模式匹配可归约为 k-SUM。载于第 31 届国际算法与计算研讨会论文集 (ISAAC)，第 181 卷，第 32:1–32:9 页，2020年。doi:10.4230/ LIPIcs.ISAAC.2020.32。[6] Gill Barequet 和 Sariel Har-Peled。多边形包含以及线段集之间的平移最小豪斯多夫距离是 3SUM 困难问题。《国际计算几何与应用杂志》，11(4):465–474，2001年。doi:10.1142/ S0218195901000596。[7] Jean-Daniel Boissonnat、Micha Sharir、Boaz Tagansky 和 Mariette Yvinec。某些多面体距离函数下高维空间中的 Voronoi 图。载于第 11 届年度计算几何研讨会论文集 (SoCG)，第 79–88 页，1995年。doi:10.1145/220279.220288。[8] Karl Bringmann。一种用于胖盒 Klee 测度问题的改进算法。《计算几何》，45(5- 6):225–233，2012年。初步版本发表于 SoCG 2010。doi:10.1016/j.comgeo.2011.12.001。[9] Karl Bringmann、Allan Grønlund 和 Kasper Green Larsen。正则表达式成员资格测试的二分性。载于第 58 届 IEEE 计算机科学基础年会研讨会论文集 (FOCS)，第 307–318 页，2017年。doi:10.1109/FOCS.2017.36。[10] Karl Bringmann 和 Andr´e Nusser。平移下的豪斯多夫距离难以计算：平移下豪斯多夫距离的细粒度下界。载于第 37 届国际计算几何研讨会论文集 (SoCG)，第 18:1–18:17 页，2021年。doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2021.18。[11] Sergio Cabello、Panos Giannopoulos 和 Christian Knauer。 d维点集模式匹配的参数化复杂度。《信息处理快报》，105(2):73–77，2008年。doi:10.1016/j.ipl.2007.08.003。[12] Timothy M. Chan。随机优化技术的几何应用。《离散与计算几何》，22(4):547–567，1999年。初步版本发表于 SoCG 1998。doi:10.1007/PL00009478。[13] Timothy M. Chan。一种（稍快一些的）Klee 测度问题算法。《计算几何》，43(3):243–250，2010年。初步版本发表于 SoCG 2008。doi:10.1016/j.comgeo.2009.01.007。[14] Timothy M. Chan。轻松解决 Klee 测度问题。载于第 54 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集 (FOCS)，第 410–419 页，2013年。doi:10.1109/FOCS.2013.51。[15] L. Paul Chew、Dorit Dor、Alon Efrat 和 Klara Kedem。 d维空间中的几何模式匹配。《离散与计算几何》，21(2):257–274，1999年。初步版本发表于 ESA 1995。doi:10.1007/PL00009420。[16] L. Paul Chew、Michael T. Goodrich、Daniel P. Huttenlocher、Klara Kedem、Jon M. Kleinberg 和 Dina Kravets。欧几里得运动下的几何模式匹配。《计算几何》，7:113–124，1997年。doi:10.1016/ 0925-7721(95)00047-X。[17] L. Paul Chew 和 Klara Kedem。绕过最小豪斯多夫距离的下界。《计算几何》，10(3):197–202，1998年。初步版本发表于 SWAT 1992。doi:10.1016/S0925-7721(97) 00032-1。[18] Minkyoung Cho 和 David M. Mount。平面点模式匹配的改进近似界。《算法学》，50(2):175–207，2008年。doi:10.1007/s00453-007-9059-9。[19] Alon Efrat、Piotr Indyk 和 Suresh Venkatasubramanian。线段集的模式匹配。《算法学》，40(3):147–160，2004年。初步版本发表于 SODA 2001。doi:10.1007/s00453-004-1089-y。[20] Greg N. Frederickson 和 Donald B. Johnson。广义选择与排序：排序矩阵。《SIAM 计算杂志》，13(1):14–30，1984年。doi:10.1137/0213002。[21] Michael T. Goodrich、Joseph S. B. Mitchell 和 Mark W. Orletsky。刚体运动下的近似几何模式匹配。《IEEE 模式分析与机器智能汇刊》，21(4):371–379，1999年。初步版本发表于 SoCG 1994。doi:10.1109/34.761267。

[22] Daniel P. Huttenlocher 和 Klara Kedem. 平移点集时计算最小豪斯多夫距离。发表于第六届 *ACM* 计算几何研讨会论文集(SoCG)，第 340–349 页，1990年。doi: 10.1145/98524.98599.[23] Daniel P. Huttenlocher、Klara Kedem 和 Micha Sharir. Voronoi曲面的上包络及其应用。《离散与计算几何》，9:267–291，1993年。初步版本发表于 SoCG 1991。doi:10.1007/ BF02189323.[24] Piotr Indyk、Rajeev Motwani 和 Suresh Venkatasubramanian. 噪声下的几何匹配：组合界与算法。发表于第十届 *ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集(SODA)，第 457–465 页，1999年。URL: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=314500.314601.[25] Ce Jin 和 Yinzhan Xu. 基于广义布尔矩阵乘法和 OMv 的紧致动态问题下界。发表于第 *54* 届 *ACM*计算理论研讨会论文集(STOC)，第 1515–1528 页，2022年。doi:10.1145/ 3519935.3520036.[26] Marvin K¨unnemann. 三维 Klee 测度问题的紧致（非组合）条件下界。发表于第 *63* 届 *IEEE*计算机科学基础研讨会论文集(FOCS)，第 555–566 页，2022年。[27] Andr´e Nusser. 几何相似性度量的细粒度复杂性与算法工程。博士论文，萨尔兰大学，德国萨尔布吕肯，2021年。URL: https://publikationen.sulb. uni-saarland.de/handle/20.500.11880/33904.[28] Mark H. Overmars 和 Chee-Keng Yap. Klee 测度问题的新上界。《SIAM 计算杂志》，20(6):1034–1045，1991年。初步版本发表于 FOCS 1988年。doi:10.1137/0220065.[29] Virginia Vassilevska Williams. 关于算法与复杂性中的若干细粒度问题。发表于*ICM* 论文集，第 3 卷，第 3431–3472 页。世界科学出版社，2018年。URL: https://people.csail.mit.edu/ virgi/eccentri.pdf.[30] Hakan Yildiz 和 Subhash Suri. 计算落地盒的 Klee 测度。《算法学》，71(2):307–329，2015年。初步版本发表于 SoCG 2012年。doi:10.1007/s00453-013-9797-9.