arXiv:2303.09138v1 [math.AT] 16 Mar 2023

场论如何探测拓扑模形式中的挠率?

DANIEL BERWICK-EVANS

Abstract. 我们构造了取值于一种逼近拓扑模形式的上同调理论的 2|1维欧几里得场论的变形不变量。这蕴含了 Stolz 和 Teichner 所预期的若干结果，并给出了取值于 π_*TMF 的场论的首批挠率不变量。该框架导出了一个用场论数据描述的椭圆欧拉类版本，并部分构造了以弦流形为目标的超对称σ模型。

1. 引言与结果陈述

Stolz 和 Teichner 描述了由次数 $n \in \mathbb{Z}$索引、定义在光滑流形 M 上的 2|1维欧几里得场论范畴。他们猜想，这类场论决定了拓扑模形式 [ST11, 猜想 1.17]的几何上循环

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{fully-extended } 2|1\text{-Euclidean} \\ \text{field theories of degree } n \text{ over } M \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{cocycle}} \mathrm{TMF}^n(M). \tag{1}$$

此外，我们预期这一余循环模型会继承一个由场论量子化导出的解析推前。最终目标是证明阿蒂亚–辛格指标定理的 TMF 推广。在本文中，我们通过范畴 $2|1\text{-eft}^n(M)$构造并证明了对式（1）的一个 1-扩张近似；这些范畴编码了次数为 n 的场论在 M 上的（Ramond）超圆柱和超环面上的取值。我们的定义还对 $2|1\text{-eft}^n(M)$的对象施加了威尔逊式椭圆性条件，见注释 1.15。在同伦论方面，$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$是 TMF 的一个高度 ≤ 1 近似，并存在一个环谱映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$，见式（9）。

Th定理 1.1. 部分定义的 2|1-欧几里得场论确定几何余循环 s

$$2|1\text{-eft}^n(M) \xrightarrow{\text{cocycle}} \mathrm{KO}^n_{\mathrm{MF}}(M). \tag{2}$$

TMF 的 Ando–Hopkins–Rezk σ-定向 AHR10]给出了一个环谱映射

$$\mathrm{MString} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{TMF} \to \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}, \tag{3}$$

这意味着 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 对于带有弦结构的向量丛具有欧拉类。以下结果近似于 Stolz 和 Teichner 提出的椭圆欧拉类 [ST04, 定理 1.0.3]。

定理 1.2。 带有几何弦结构的实向量丛 $V \to M$ 确定了一个对象 $\mathrm{Eu}(V) \in 2|1\text{-eft}^{\dim(V)}(M)$，其在 (2) 下的像是 V 的 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类。

Hopkins–Mahowald 证明，弦定向能够检测 π_*TMF[中的所有挠率（Hop02, 定理 6.25], ）；Bunke–Naumann [BN14, §1.4] 则表明，次数 $4k-1$ 中的 3-挠率经由 $\pi_*\mathrm{TMF} \to \pi_*\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 单射，且 $\mathbb{Z}/24 \simeq \pi_3\mathrm{TMF} \hookrightarrow \pi_3\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 是单射。以下结果近似于预期的取值于 π_*TMF 的解析指标，同时给出了由超对称欧几里得场论中的结构检测到的首个 TMF 挠率。

定理 1.3。 对于一个 n 维弦流形 X，存在一个对象 $\sigma(X) \in 2|1\text{-eft}^{-n}(\mathrm{pt})$，它是像中该类的上循环精化（使用 (2)）：

$$[X] \in \pi_n(\mathrm{MString}) \to \pi_n\mathrm{TMF} \to \pi_n\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}} = \mathrm{KO}^{-n}_{\mathrm{MF}}(\mathrm{pt}).$$

特别地，具有由 $1 \in \mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^3(S^3;\mathbb{Z})$ 指定的弦结构的 S^3，确定了一个余循环$\sigma(S^3) \in 2|1\text{-eft}^{-3}(\mathrm{pt})$，它表示 $\mathbb{Z}/24 \simeq \pi_3(\mathrm{TMF}) \hookrightarrow \pi_3(\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}})$ 的生成元 ν。

1.1. 背景。 在20世纪80年代末，Witten 提出了椭圆上同调与量子场论之间一个令人惊讶的联系 [Wit87, Wit88a]。其工作的一项重点是一个取值于整模形式的弦流形协边不变量

$$\left\{\begin{array}{c}\text{String manifolds}\\ \text{up to cobordism}\end{array}\right\} \to \mathrm{MF}^{\mathbb{Z}} \tag{4}$$

如今称为维滕属。用物理学的语言来说，Witten 认为，具有 $\mathcal{N}=(0,1)$ 超对称性的量子场论的配分函数决定了整模形式。于是，不变量（4）来自以弦流形为目标的 $\mathcal{N}=(0,1)$ 超对称σ模型的配分函数。Segal [Seg88, Seg04] 以及随后 Stolz 和 Teichner [ST04, ST11] 提出了数学框架，使 Witten 物理论证中的某些方面得以精确化，并由此导出猜想（1）。

与这些进展并行，霍普金斯及其合作者阐明了维滕属的同伦论起源 [Hop94, AHS01, Hop02, Lur09, AHR10]。这最终促成了拓扑模形式（TMF）的普适椭圆上同调理论及其弦定向，

$$\mathrm{MString} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{TMF}, \qquad \pi_*\mathrm{MString} \overset{(4)}{\underset{\pi_*\sigma}{\longrightarrow}} \pi_*\mathrm{TMF} \xrightarrow[\phi]{} \mathrm{MF}^{\mathbb{Z}}. \tag{5}$$

映射 σ 如上方右侧所示，将维滕属加以精化；这里使用了典范的（边缘）同态 ϕ: π_*TMF $\to$ 模形式环$^{\mathbb{Z}}$。映射 ϕ 是一个有理同构，其核和余核含有非平凡的 2-挠群和 3-挠群。自然会问，Witten 在量子场论与模形式之间搭建的桥梁，是否也延伸为与拓扑模形式的联系。这个问题一直难以解决：数十年来，人们始终未能用量子场论的语言描述 TMF 挠率。

困难的一部分源于我们对 $\mathcal{N}=(0,1)$-理论的物理理解十分有限。超对称性足够强时，量子场论会受到如此多的约束，以至于其路径积分实际上由代数而非分析所控制。这往往能带来以严谨数学为基础的精确计算。例如，具有 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性的二维理论允许来自镜像对称的 A-和 B-扭曲；这些理论中的关联函数分别可借助辛几何和代数几何求得 [Wit88b]。相比之下，$\mathcal{N}=(0,1)$ 是二维中的最小超对称性，因此对路径积分施加的约束相对较少。相应地，物理学家计算出的量也寥寥无几。由于这一领域更具挑战性，$\mathcal{N}=(0,1)$-理论受到的关注相对较少。然而，从某种意义上说，最小超对称理论才是最基础的理论。

近期物理学研究利用（1）预测何时一对 $\mathcal{N}=(0,1)$-理论属于同一个变形类 [GJF18, JF20, Tac21, TY21, GPPV21, LP22, Lin22]。接下来可以寻找能验证这些预测且具有物理意义的不变量。盖奥托、约翰逊-弗雷德和 Witten [GJFW21] 考察了目标为 S^3 的 $\mathcal{N}=(0,1)$-超对称σ模型。这是一个群$S^3 \simeq$ SU(2)的超对称 Wess–Zumino–Witten 模型，其依赖于一个层级 $k \in \mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^4(B\mathrm{SU}(2);\mathbb{Z})$。盖奥托–约翰逊-弗雷德–Witten 认为，$k$ mod 24 是该理论的一个变形不变量。鉴于同构 $\pi_3(\mathrm{TMF}) \simeq \mathbb{Z}/24$，这与猜想（1）及维滕属的 π_*TMF 值精化（5）所作的预测相符。盖奥托和约翰逊-弗雷德后续的工作将这一不变量推广到目标为一个（$4k-1$）维弦流形的 $\mathcal{N}=(0,1)$ 超对称σ模型，其中层级由更一般的反常抵消数据 [GJF19] 取代。定理1.1和1.3使盖奥托–约翰逊-弗雷德–Witten 不变量得以精确定义，并将其取值识别为 $\pi_{4k-1}\mathrm{TMF} \to \pi_{4k-1}\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 像中的 TMF 挠率。这为本文标题中的问题提供了一个部分答案。

1.2. **与先前工作的关系**。定理 1.1 推出了 Stolz 和 Teichner 预期的若干结果。具体而言，[ST04, 定理 1.0.2] 描述了一个映射（以 [ST04, 假设 3.3.13]为前提）

$$\left\{\begin{array}{c}2|1\text{-Euclidean field theories}\\ \text{of degree } n \text{ over } M\end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{KO}^n(M)(\!(q)\!) \tag{6}$$

以及当 $M =$pt 时，映射 (6) 的像具有模性。Pokman Cheung [Che07], 证明了一个与 (6) 密切相关的结果，而模性性质的一个特例则陈述于 [ST11, 定理 1.15] 其中概述了证明。环谱的映射

$$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}} \to \mathrm{KO}(\!(q)\!),$$

使我们能够从定理 1.1 推导出 (6) 的一个版本。此外，$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 所编码的模性在 $M =$ pt 时，归结为 Stolz 和 Teichner 所声称的 (6) 的模性。基于 (6)，Stolz 和 Teichner 在 [ST04, 定理 1.0.3] 中描述了一种场论，预期它能在 (1) 下给出弦向量丛的 TMF-欧拉类的上循环代表元。从某种意义上说，这一对象是 Stolz–Teichner 计划的核心，它通过二维超对称场论来描述 TMF 的弦定向。定理 1.2 给出了一个部分构造，并验证 $\mathrm{Eu}(V) \in 2|1\text{-eft}^n(M)$ 是 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类的上循环代表元，因此可视为 TMF-欧拉类的近似。这实现了 Stolz–Teichner 计划的一个 1-范畴版本；另见注 9.12。需要指出的是，在 [ST04], [Che07] 和 [ST11], 中，场论的精确定义各不相同，尽管这些定义的基本思路相当相似。本文中的定义与 [ST11], 中的定义密切相关，见命题 1.22。

我们的结果也为 Bunke 和 Naumann 关于 $(4k-1)$ 维弦流形 [BN14] 的挠不变量提供了一些启示

$$\pi_{4k-1}\mathrm{MString} \to \mathbb{C}(\!(q)\!)/(\mathbb{Z}(\!(q)\!) + \mathrm{MF}_{2k}). \tag{7}$$

在定理 1.6 和推论 1.7 中，我们证明，对谱映射 (3) 的复合取系数后，便确定了不变量 (7)。这一描述蕴含了猜想 [BN14, §1.5, Open problem 3], ，见推论1.8。定理 1.3 随后将 Bunke–Naumann 不变量与 Gaiotto–Johnson-Freyd–Witten 不变量等同起来，从而完成了 [GJF19, §2.5] 中概述的论证；另见注 1.23。

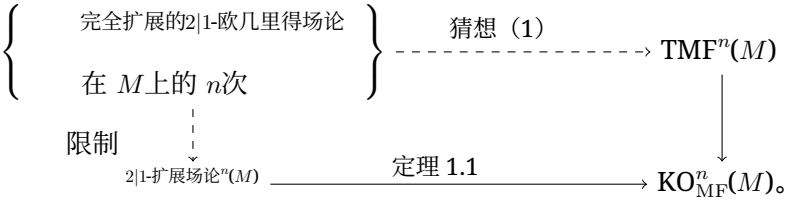
定理 1.1–1.3 在代数拓扑与物理学文献中的 Dirac–Ramond 算子之间建立了新的联系。特别是，Alvarez 和 Windey [AW10] 研究了与弦流形丛 $X \to M$ 相关的 Dirac–Ramond 算子族 [Wit88a] ，并提取出其 M 上同调层面的模不变量，系数取自 $\mathbb{C}$。他们的构造有一种自然的扩展，涉及*Bismut–Ramond* 超联络，它为 Alvarez 和 Windey 的不变量同时给出积分精化和挠精化；见 §3.3。Bismut–Ramond 超联络是定理 1.3 中构造对象 $\sigma(X) \in 2|1\text{-eft}^{-n}(\mathrm{pt})$ 所需的解析输入。

定理 1.1–1.3 背后的几何学进一步拓展了对猜想（1）的验证，其中系数取自 [BE21, BE22], ，即对 Stolz–Teichner 纲领在高度 0 情形下的确认。这些先前的结果表明，$2|1$-欧几里得场论在 M 上超环面的取值会产生 $\mathrm{H}(M;$ 模形式环$^{\omega})$ 中的一个类；这里的普通上同调以弱模形式为值域，参见命题 1.18。本文进一步拓展了这一结果，也纳入了 $2|1$-欧几里得场论在 M 上超圆柱的数据。超圆柱上取值的迹可恢复超环面上的取值，因此定理 1.1–1.3 直接推广了 [BE21, BE22] 中的结果。

本文及其配套论文 [BE23b] 中提出的一个关键新要素，是场论的一种椭圆性条件，即能量截断平滑变化，并具有某种陈–西蒙斯形式，见定义 1.14。这种数学量子场论的威尔逊式方法受到 Costello 的工作 [Cos11a, Cos11b, Cos11c]的影响。

In 在我们的框架中，存在截断是 Stolz–Teichner 场论的一项性质 ，not 附加数据；参见注释 1.15。

现代数学物理面临的一项长期挑战，是为量子场论寻找精确而完备的定义。在这一领域的早期，根本没有任何定义；如今数学家有太多选择，反而难以判断哪一种才是“正确”的定义。每种数学框架都有自己的优势和见解，例如 [Seg04、ST04、GMS04、HK04、Che07、HST10、Cos11a、Cos11c、ST11、DH11、Kit14、GP20]。猜想（1）是一个绝佳的试金石，因为它要求我们具备足够的深刻见解，才能识别出量子场论中编码 TMF 这类复杂对象的结构。考虑到这些不断变化的图景，余循环映射（2）的设计力求尽可能稳健，不受场论数学定义变化的影响： $2|1$-eft$^n(M)$ 的一个对象是附属于某些明确给定的模空间的数据，这些模空间由 $2|1$-欧几里得超流形构成；这类数据无疑属于 $\mathcal{N}=(0,1)$-理论的几何内容。将一个定义完备的理论的数据限制到这些特定模空间上的取值，便得到一个图表

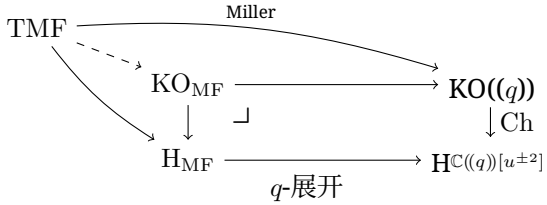
(8)


因此，定理 1.1 有助于梳理式 (1) 中场论各种可能定义的繁杂情形：要将 $2|1$-eft$^n(M)$ 中部分定义的场论扩展为完全扩展的场论，就必须将 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 中的一个类提升为 TMF 中的一个类。物理学家近期整理了预期能够表示特定 TMF 类的 $\mathcal{N}=(0,1)$- 理论清单，例如参见 [GPPV21，表 2]。这提供了明确的案例，可据此研究将 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 类提升为 TMF 类的问题，并将其与给定量子场论中的向下扩展进行比较。

注记 1.4. Stolz 和 Teichner 的 [ST11，猜想 1.17] 指出，余循环映射 (1) 在场论的共边类与 TMF 类之间诱导一个双射。容易看出，映射 (2) 可经由共边类分解，但我们并不认为对于本文所用的定义，这会给出一个双射。基本问题在于，在我们的框架中，向量丛的维数 $\mathcal{E}_k$（见下文 (17)）是共边不变量，但并非底层 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 类的不变量。考虑以向量丛上的超联络来描述 K 理论的模型时，已经会出现这一问题。我们知道两种可能可实现所需共边类双射的可行方法。第一种方法固定一个无限维可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，并考虑子空间 $\mathcal{E}\subset M\times\mathcal{H}$，其中 $\mathcal{E}$ 不再要求局部平凡，但由 $\mathcal{E}$ 确定的投影算子族必须随 M连续变化。这是对加框希尔伯特空间定义的推广。第二种方法考虑取值于拓扑向量空间层的场论族，不施加局部自由条件；参见 [ST11，注记 3.16]。层论版本的定理 1.1 要求扩展指标理论中的工具，使其适用于这一更一般的情形；例如，调整 [BGV92，第 9 章-10]，以考察由一般拓扑向量空间层支撑的超联络和指标丛。尽管这看起来颇有趣，却与本文的目标无关：我们感兴趣的例子（即 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类和超对称$\sigma$-模型）定义在向量丛上，因此为求简便，我们采用这一类场论。

1.3. 结果详细概述。 在本引言的其余部分，我们将介绍定理 1.1–1.3 中的对象，并概述证明，同时重点介绍有关 $2|1$-欧几里得场论和 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$的一些关键中间结果。

1.3.1. 一个 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-指标定理。 令 MF 表示弱全纯模形式的分次环（我们的约定见 §A.1），令 H_{MF} 表示以 MF 为系数的普通上同调的交换环谱。类似地，令 $\mathrm{H}^{\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm 2}]}$ 表示以 $\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm 2}]$ 为系数的普通上同调的谱，其中 $|u^2| = -4$。将 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 定义为交换环谱范畴中的拉回，

(9)


其中，Ch 是庞特里亚金特征，而下方的水平箭头由系数的 q-展开确定。根据拉回的泛性质，存在一个映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$，它由将米勒特征与 $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ [Mil89] 作 smash 积确定。米勒特征来自对 Tate 曲线上的 TMF 求值，本质上提取了 TMF 的高度 1 部分。同样，切恩–多尔德特征 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{TMF} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{MF}}$提取了高度 0 部分。由此，$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 是 TMF 的一种高度 ≤ 1 近似。

Bismut 族指标定理 [Bis86] 与文献 [Wit88a] 中 KO((q)) 值维滕属的解析描述相结合，得到如下结论，证明见第 3.5 节。

命题 1.5。 给定一族黎曼弦流形 $\pi\colon X \to M$，Bismut–Ramond 超联络的解析指标确定一个类 $\sigma(X) \in \mathrm{KO}^{-n}$ 模形式环(M)。

弦定向 (3) 也确定了一个拓扑指标：对于纤维维数为 n 的弦流形族 $\pi\colon X \to M$，考虑复合

$$[X] \in \mathrm{MString}^{-n}(M) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{TMF}^{-n}(M) \to \mathrm{KO}^{-n}_{\mathrm{MF}}(M). \tag{10}$$

根据 KO((q)) 和 H_{MF} 定向对 [MString,$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$] 的刻画，得到如下关于 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的指标定理，该定理在 §3.6 中得到证明。

定理 1.6. 拓扑指标 (10) 等于命题 1.5 中的解析指标。

这个指标定理得到了 Bunke 和 Naumann 此前研究过的一个不变量，并证明了一个相关猜想，下面对此作出解释。当 $M =$pt 时，命题 1.5 确定了通过解析方法构造的弦流形不变量，

$$\left\{ \begin{matrix} \text{String manifolds} \\ \text{up to cobordism} \end{matrix} \right\} \simeq \pi_* \mathrm{MString} \to \pi_* \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}. \tag{11}$$

$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的同伦群在命题 3.3 中得到计算，特别是

$$\pi_{4k} \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}} \simeq \mathrm{MF}^{\mathbb{Z}}_{2k}, \qquad \pi_{4k-1} \simeq \mathbb{C}(\!(q)\!)/(\mathbb{Z}(\!(q)\!) + \mathrm{MF}_{2k})$$

在度数 $4k$ 中得到整模形式，并在度数 $4k-1$ 中得到 Bunke–Naumann 不变量 (7) 的目标。

推论 1.7. 在次数 $* = 4k$ 中，(11) 与作为整模形式的维滕属一致。在次数 $4k-1$ 中，它与弦流形的 Bunke–Naumann 挠不变量 [BN14] 一致。

以下内容验证了 [BN14, §1.5 中的开放问题 3]。

推论1.8. ($4k-1$) 维弦流形的 Bunke–Naumann 挠不变量由拓扑推前 (10) 决定。

证明。 这直接由定理 1.6 和推论 1.7 得出。 □

1.3.2. *Stolz* 和 *Teichner* 的 $2|1$-欧几里得场论。 定理 1.1 中的范畴 $2|1\text{-eft}^n(M)$，源自对 Stolz 和 Teichner 在 [ST11] 中所发展的框架下，一个次数为 n 的 $2|1$-欧几里得场论的几何信息进行提炼。我们将在下文简要回顾他们的设定。

猜想（1）中度数为 n 的场论定义始于一个范畴：该范畴由光滑流形 M 上的$2|1$-欧几里得配边构成。此配边范畴的一个 1-扩张版本记作 $2|1\text{-EBord}(M)$，其构造见 [ST11]。粗略地说， $2|1\text{-EBord}(M)$ 中的一个态射是

$$\begin{array}{ccccc} Y_{\mathsf{out}}^{1|1} & \hookrightarrow & \Sigma^{2|1} & \hookleftarrow & Y_{\mathsf{in}}^{1|1} \\ & & \Phi\downarrow & & \\ & & M & & \end{array} \tag{12}$$

对于一个 $2|1$-欧几里得流形 $\Sigma^{2|1}$、一个映射 $\Phi\colon \Sigma^{2|1}\to M$，以及决定配边源和目标的 $1|1$ 维子超流形 $Y_{\mathsf{in}}, Y_{\mathsf{out}} \hookrightarrow \Sigma^{2|1}$ 。 $2|1\text{-EBord}(M)$ 的精确定义需要考虑配边族及其等距变换（作为一个对称幺半群叠），但我们暂且忽略这一点；详情见 §C.4。

一个级 n 场论（定义在 M 上）是一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathbb{1}}{\curvearrowright} & \\ 2|1\text{-欧几里得配边}(M) & E\Downarrow & \mathsf{TA} \\ & \underset{\mathrm{Fer}_n}{\curvearrowright} & \end{array} \tag{13}$$

其中 TA 是由（拓扑）代数、双模及双模映射构成的 Morita 范畴。函子 1 是取值于 TA 的幺半群单位元的常值函子，并且

$$\mathrm{Fer}_n\colon 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\to \mathsf{TA}, \qquad \mathrm{Fer}_n\otimes \mathrm{Fer}_m\simeq \mathrm{Fer}_{n+m} \tag{14}$$

这是一个 $\otimes$-可逆函子，并配备了对 n、$m\in\mathbb{Z}$ 所指明的同构。Fer_n 的完整构造尚未见诸文献，但预计 (14) 是 n 次张量幂的唯一超对称扩张；该张量幂来自 ST11 第 5–6] 节中构造的手征自由费米子。假设 7.10 对这一扩张作出了精确表述，我们将在下文假定该假设成立。

注 1.9。 我们强调，定理 1.1–1.3 并不依赖假设 7.10；该假设的作用是使我们能够将结果与 [ST11] 进行比较。在 §7.3 中，我们证明了对于本文相关的 $2|1$-欧几里得配边范畴，Fer_n 存在唯一的超对称扩张，从而部分验证了假设 7.10。

事实证明，在次数为 n 的场论 (13) 上要求额外的结构很重要，这种结构称为反射正性；它隐含在“伴随变换”中，而“伴随变换”是 $2|1$ 维场论在 [ST04] 中定义的一部分。下文我们采用 Freed–Hopkins [FH22, §3] 的方法：反射结构 是自然变换 (13) 的 $\mathbb{Z}/2$-等变数据（定义 C.31），而正性性质 则是指某个厄米配对为正定（定义 7.25）。

定义 1.10（定义 7.27）。 令 $2|1\text{-EFT}^n(M)$ 表示由反射正自然变换 (13) 作为对象构成的群胚。

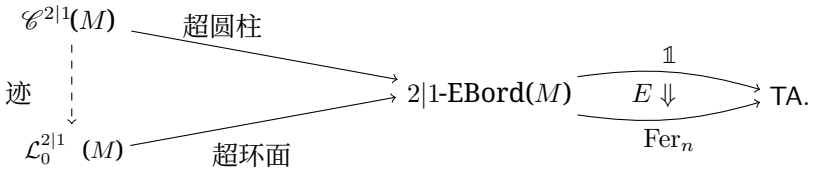
注1.11。我们注意到，在猜想（1）的 $d=1$ 版本中，反射正性并非必要条件：无定向的实 $1|1$维场论可恢复实 K 理论 [HST10]。[1]然而，无定向结构和实结构无法推广到 $2|1$维情形：

[1]I在 [HST10]，中施加了一个不同于反射正性的正性条件；目前尚不清楚楚是否恢复 KO 理论需要这一条件。

手征超对称性在定向反转下不会保持，在复共轭下也不会保持。若要使猜想（1）成立，米勒特征 TMF $\to$ KO((q)) 就要求存在一个从 $2|1$ 维欧几里得场论到实 K 理论的映射。要在二维态希尔伯特空间上获得实结构，一种方法（事实上，也是我们所知的唯一方法）是假设反射正性，例如参见 [GPPV21, 3.2.2]。

1.3.3. 范畴 $2|1$-eft$^n(M)$ 和$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-余循环。定理 1.1 中的余循环映射来自将 (13) 限制到 $2|1$-EBord(M) 的某些明确子范畴，

(15)–(16)



沿 (15) 的 E 限制给出范畴 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个扭曲表示，该范畴由 M 中的近乎常值超圆柱构成，并将其视为 M 中超圆之间的配边。沿 (16) 的 E 限制确定了栈 $\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ 上的一个带截面的线丛，该栈由 M 中的近乎常值超环面构成，并将其视为从空集到自身的配边。$\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 和 $\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ 在 $2|1$-EBord(M) 中的像通过一个（范畴论的）迹相互兼容，如虚线箭头所示。模空间 $\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ 和 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 是有限维的，因此限制 (15) 和 (16) 从场论中提取的数据可以用超几何中的标准技术进行分析。

备注 1.12。 子范畴 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 和$\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ 中的欧几里得超圆柱和超环面具有非边界型（即奇数）自旋结构。从物理角度来说，因此限制 (15) 和 (16) 仅探查 $2|1$-欧几里得场论的 Ramond 扇区，而忽略 Neveu–Schwarz 扇区。Ramond 扇区是 $\mathcal{N} = (0,1)$-超对称σ模型中与维滕构造维滕属 [Wit88a] 相关的部分。

沿着 (15) 限制，可从指标理论中提取熟悉的对象。

命题 1.13（命题 8.2、8.16、8.17）。 限制 (15) 确定了：

i. 一个 Fr´echet 向量丛 $\mathcal{E} \to M$，其纤维上带有 $S^1 \times \mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用，且 S^1-作用的特征值有下界；ii. 一个光滑的单参数超联络族 $\mathbb{A}_\ell$, $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$，作用于 $\mathcal{E}$，并且具有 S^1-不变性且为 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性。

Th反射正的次数 n 场论沿着 (15) 的限制还进一步确定了

iii. $\mathcal{E}$ 上的一个厄米度量，使得 S^1-作用是酉的， $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用是自伴的，且超联络 $\mathbb{A}$ 是自伴的；iv. $\mathcal{E}$ 上的一个实结构，它与 S^1-作用及超联络相容，并且 Clifford 作用相对于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$上的标准实结构为实。

T这些 S^1-特征子空间提取出一系列带有超联络的向量丛（引理 9。 1)

$$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_k, \qquad \mathbb{A}_\ell = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\ell,k} \tag{17}$$

其中 $\mathcal{E}_k = \{0\}$ 对于 $k \ll 0$。我们强调， $\mathcal{E}_k$ 不必是有限秩的。命题 1.13 中的几何对象推广了 $\mathcal{N} = (0,\ 1)$ 超对称量子场论（见 §2.4）中的标准数据，通过算子 M-族

$$L_0 := \bigoplus_k (k + \frac{\ell}{2\pi}\mathbb{A}^2_{\ell,k}), \qquad \bar{L}_0 := \bigoplus_k \frac{\ell}{2\pi}\mathbb{A}^2_{\ell,k}, \qquad \bar{G}_0 := \bigoplus_k \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{A}_{\ell,k}. \tag{18}$$

¯我们注意到，这些算子满足以下条件： $L_0 - L_0$ 具有整数特征值（因而生成一个 S^1-作用）、 $[L_0, \bar{L}_0] = 0$和 $\bar{G}_0^2 = \bar{L}_{0}$。假设微分方程的解存在且唯一（见注释 9.6），则 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数 n 表示为

$$q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0+\theta\sqrt{2\pi}\bar{G}_0}, \qquad q = e^{2\pi i z/\ell}, \quad \ell \in \mathbb{R}_{>0},\ z/\ell \in \mathfrak{H} \subset \mathbb{C} \tag{19}$$

当 $M =$pt 时，可恢复通常的超半群公式，例如参见 [Seg04, §4], [ST04, §3.3],以及 [Che07, Eq. 2.1.17]。从几何上看， ℓ 表示超圆的周长，而$\tau = z/\ell$ 是超圆柱的共形模数；参见 §5。

在尝试将 $2|1$-欧几里得场论与 M 的拓扑联系起来时， M命题 1.13 表明，我们可以提取一列 KO 类

$$\text{Index}\colon 2|1\text{-EFT}^n(M) \dashrightarrow \mathrm{KO}^n(M)(\!(q)\!), \qquad E \mapsto \sum q^k \mathrm{Ind}(\mathbb{A}_{\ell,k}) \tag{20}$$

通过对 (17) 中从一个 $2|1$-欧几里得场论 E提取的每个 $\mathbb{A}_{\ell,\ k}$ 应用族指标构造（例如参见 [BGV92, Ch. 10]）。族指标构造的有效性是超联络的一项性质，因此指标 (20) 定义在 $2|1$-扩展场论$^n(M)$ 的以下子范畴上。

定义 1.14。 n ($\mathscr{C}^{2|1}$)的一个次数为 n 表示具有截断，当且仅当它是无穷小生成的（见定义 9.5 ），且超联络 (17) 按定义 9.3 的意义具有光滑指标丛。若一个场论 $E \in 2|1\text{-EFT}^n(M)$ 的相应表示 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 具有光滑截断，则称该场论具有光滑截断 。令 $2|1\text{-EFT}^n_{\mathrm{co}}(M) \subset 2|1\text{-EFT}^n(M)$ 表示其对象具有截断的满子范畴。

注 1.15： 上述术语源于这样一个事实：族指标的存在性与威尔逊有效场论意义下的光滑能量截断理论的存在性等价；例如参见 [Cos11b, §1.3] ，其中给出了数学上的阐述，并且场论的定义还包含椭圆性条件 [Cos11b, 定义 9.3.1]。在我们的框架中，截断的存在性是场论上的一个解析条件，类似于微分算子的椭圆性。这一类比对于 $1|1$维场论尤其紧密：族狄拉克算子的椭圆性会蕴含其在 $1|1$-eft$^n(M)$ 中对应对象的截断性质，见 [BE23b]。值得注意的是，从这一主题一开始，Witten 就建议数学家使用截断来分析具有 $\mathcal{N} = (0,\ 1)$ 超对称的二维理论 [Wit88a, §1]。

注 1.16。 如果 (17) 中的 S^1-特征子空间 $\mathcal{E}_k$ 是有限维向量丛，那么根据常微分方程解的存在唯一性，以及有限维情形下族指标丛的存在性（例如 [BGV92，第 9 节1]），定义 1.14 中的截断性质自动成立。特别地，带联络的 M族顶点代数会产生算子 (18)，并满足截断条件。已有许多将（族）顶点代数与椭圆上同调类联系起来的构造方案，例如参见 [Liu96、GMS04、HK04、Cos11a、Che13、Kit14、Hen15、LP22]。欧几里得超圆柱的表示 (19) 为这些顶点代数构造与 Stolz–Teichner 计划提供了一个交汇点。

注 1.17。 当 $M =$pt 时，截断性质会大大简化，本质上只是对 $\mathbb{A}^2_\ell$的特征值施加增长约束，参见注 D.15。

现在我们将注意力转向超环面模空间，以及沿着（16）对次数为 n 的场论施加的限制。根据一般性考量，这一限制会在 $\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ [ST11, §5.3] 上产生一个带截面的线丛。以下结果将 [BE22, 定理 1.1] 从次数为 $n = 0$ 的陈述推广到任意次数。向量空间 $\mathrm{mf}^{k,\ l}$ 是弱模形式的 C^∞-版本，可视为定义在 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 中带基定向格上的函数，并按权 $(-k/2,\ -l/2)$ 变换，见（ 354 ）。

Pro位置 1.18。 Pfaffian 线的 n^{th} 次张量幂的截面由数据给出 a

$$\Gamma(\mathcal{L}_0^{2|1}(M);\mathsf{Pf}^{\otimes -n}) \simeq \left\{ \begin{array}{l} Z \in \bigoplus_{j+k=n} \Omega^j(M;\mathrm{mf}^{k,0})) \\ Z_v \in \bigoplus_{j+k=n-1} \Omega^j(M;\mathrm{mf}^{(k+2),2}) \\ Z_{\bar\tau} \in \bigoplus_{j+k=n-1} \Omega^k(M;\mathrm{mf}^{k,-2}) \end{array} \right\} \tag{21}$$

满足

$$dZ = 0 \quad \partial_v Z = dZ_v \quad \partial_{\bar\tau} Z = dZ_{\bar\tau}, \tag{22}$$

其中， d 是外微分， ∂_v 是关于格的体积的导数， $\partial_{\bar\tau}$ 是关于格的共形模数的反全纯部分的导数。特别地，一个次数为 n 的场论确定了一个（德拉姆）上同调类 $[Z]$，具有以下性质

$$[\partial_v Z] = [dZ_v] = 0, \quad [\partial_{\bar\tau} Z] = [dZ_{\bar\tau}] = 0, \implies [Z] \in \mathrm{H}^n(M;\mathrm{MF}^\omega) \tag{23}$$

这意味着 $[Z]$ 是一个取值于弱模形式环 MF^ω 中的类。

注1.19。具有性质 (23) 的数据 $Z_{\bar\tau}$ 还原了 GJF19 第 9 页和 14] 中的全纯反常方程 [。

总结以上讨论，将次数为 n 的场论限制到 M 中的超环面和超圆柱上，可得到所示的箭头

$$\begin{array}{ccccc} & & 2|1\text{-}\mathsf{EFT}^n_{\mathrm{co}}(M) & \xrightarrow{\text{Restrict to cylinders + Index}} & \\ & \swarrow^{\text{Restrict to tori}} & \downarrow & \searrow & \\ \mathrm{H}^n(M;\mathrm{MF}^\omega) & \longleftarrow & \mathrm{H}^n(M;\mathrm{MF}) & \xrightarrow[q\text{-expand}]{} & \mathrm{H}^n(M;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]). \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \mathrm{KO}^n_{\mathrm{MF}}(M) & \longrightarrow & \mathrm{KO}^n(M)((q)) \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ch} \\ & & \end{array} \tag{24}$$

这些限制满足相容性：场论在超环面上的取值，等于其在超圆柱 [ST12, §2],上的取值的迹

$$Z = \mathsf{sTr}_n(q^{L_0}\bar q^{\bar L_0}) \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0})) \tag{25}$$

按照 (19) 和 (21) 中的记号。利用命题 1.13 中的 S^1-特征子空间有下界这一事实，等式 (25) 表明 $[Z] \in \mathrm{H}^n(M;$ 模形式环$) \subset \mathrm{H}^n(M;$ 模形式环$^\omega)$ 确定了一个取值于弱全纯模形式的德拉姆上同调类，即， $[Z]$ 在 $i\infty$ 处是亚纯的（见定义 A.1）。由此得到 (24) 中的长虚线箭头。

注 1.20。 (25) 右侧的超迹取决于理论的次数；它是 Clifford 超迹的归一化版本，参见注 2.7。

(24) 中的点线箭头更难处理：相容性 (25) 提供的信息不足以确定一个到 $\mathrm{KO}^n_{\mathrm{MF}}$ 的映射。相反，需要同伦相容性数据，将从 (25) 两侧¯提取的 $\Omega^n(M;\ \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$ 中的 de Rham 余循环关联起来。在左侧，选取 (22) 中 $Z_{\bar\tau}$ 的一个 $\partial_{\bar\tau}$-原像 T，得到

$$Z_{\bar\tau} = \partial_{\bar\tau} T \implies \partial_{\bar\tau}(Z - dT) = 0.$$

因为半平面 $\mathfrak{H} \subset \mathbb{C}$ 是 Stein 的，所以 T 总是存在。通过将范围限制在体积为 1 的格上并进行 q 展开，我们得到一个微分形式

$$(Z - dT)|_{v=1} \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \qquad (\text{depends on choice of } T). \tag{26}$$

On (25) 右侧某个指标丛选取的庞特里亚金特征 con -
str在形式幂级数系数下的 Cech–de Rham 复形中构造一个余循环，

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}(\bar{G}_0)) \in \Omega^\bullet(\mathfrak{U}; \mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm 2}]) \qquad \text{(Chern character of the index bundle).} \tag{27}$$

定义 1.14 保证每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都存在一个指标丛，但其构造取决于截断的选择，见 §D.3。利用 (25)，余循环 (26) 和 (27) 表示同一个上同调类，但作为 de Rham 余循环，它们不一定相等。Bismut 局部指标定理 [Bis86]给出了一个余边界，用以度量二者的差异。这个余边界正是 (24) 中虚线箭头所要求的同伦相容性。

在 §8 中，我们构造群胚 $2|1$-eft$^n(M)$，专门用于捕捉 a $2|1$-欧几里得场论中那些通过 (2) 决定 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-余循环的部分。

定义 1.21。 群胚 $2|1$-eft$^n(M)$ 的对象是 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示（定义 8.1），它们是反射正的（定义 8.15）、迹类的（定义 8.20），并且允许截断（定义 1.14）。态射是 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示之间的同构，且与反射结构和迹相容。

命题 1.22 （引理 8.11 及命题 8.18 和 8.22）。 存在一个跨度

$$2|1\text{-EFT}^n(M) \hookleftarrow 2|1\text{-EFT}^n_{\mathrm{co}}(M) \xrightarrow{\mathrm{restrict}} 2|1\text{-eft}^n(M),$$

也就是说，群胚 $2|1$-eft$^n(M)$ 存在一个限制映射，其定义域为 Stolz 和 Teichner 的场论中允许使用截断的子范畴。

根据定义，(24) 中的虚线箭头经由 $2|1$-eft$^n(M)$ 分解。至此，定理 1.1 中余循环映射 (2) 的证明概要告一段落；完整证明见 §9.4。

注 1.23。 当 $M =$pt 时，(24) 中点线箭头的构造可化为物理论证中的挠不变量，见 [GJF19，第 14-15] 页。简而言之，从一个 $\mathcal{N} =$ (0,1)-理论中提取全纯量有两种可能的方式，即 (26) 和 (27)。每种方式都依赖于一种选择，而两种选择之间的差异定义了一个不变量。 [GJF19 第 14-15] 页中的选择与 (26) 和 (27) 完全相同。

$2|1$-扩展场论$^n(M)$ 的一个对象由命题 1.13 和 1.18 中满足各种性质的几何数据确定。定理 1.2 和 1.3 通过显式构造这类数据并验证其性质得出。定理 1.3（证明见 §9.6）利用命题 1.5 中的 Bismut–Ramond 超联络构造超圆柱的次数 $-n$ 表示；Bismut 局部指标定理在验证该表示的截断性质时起着关键作用。定理 1.2（证明见 §9.5）则先将弦向量丛 $V \to M$ 的 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类用由 V 构造的有限秩 Clifford 模丛无限序列表示出来，见 §3.7。随后，在 V 上选取一个联络便可提供数据 (17)；该数据（在选定弦结构后）确定一个对象 Eu(V) $\in 2|1$-扩展场论$^{\dim(V)}(M)$。在这种情况下，截断性质由注 1.16 得出。

1.4. **致谢**。 本项目酝酿数年，期间受益于与许多同事的交流，其中包括 Matt Ando、Mark Behrens、David Ben-Zvi、Emily Cliff、Nora Ganter、Andr´e Henriques、Tom Nevins、Stephan Stolz 和 Arnav Tripathy。特别感谢 Theo Johnson-Freyd 和 Peter Teichner 与我进行了许多富有启发性的超对称场论讨论，也感谢 Lennart Meier 和 Charles Rezk 帮助分析 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的弦定向。本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS- 2205835。

Contents

1. 引言与结果陈述 1 2. 超对称量子场论的动机 11 3. 用 KO
MF 18 近似 TMF 4. 二维超欧几里得几何 28 5. 光滑流形中的超圆柱 40 6. 作为 2|1-欧几里得配边的超圆柱与超环面 51 7. 2|1-欧几里得场论的次数 n 61 8. 从次数为 n 的场论中提取几何数据 73 9. 能量截断与余循环映射 83 附录 A. Pfaffian 线与模形式 89 附录 B. 超背景 93 附录 C. Stolz 和 Teichner 扭曲的几何场论 97 附录 D. KO理论中的族指标 108 参考文献 113

2. Motivation from supersymmetric quantum field theory

本节回顾 Witten 如何通过具有 $\mathcal{N}=(0,1)$ 超对称性的二维量子场论，构造维滕属 [Wit88a]。他的论证利用量子场论在圆柱上的取值与在环面上的取值之间的相容性，证明此类量子场论的配分函数是整数模形式。对于场论族，这种相容性转化为相容数据，这是提取 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 值不变量的关键观察；参见图表 (24) 和 (54)。

2.1. 超对称量子力学与指标定理。设 X 是一个 n维黎曼自旋流形，其主自旋丛为 $P\to X$。旋量丛 $\mathbb{S}:=P\times_{\mathrm{Spin}(n)}\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 支持 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$ 线性的狄拉克算子 $\not{D}$，下文 §D.1 将对此进行回顾。McKean和Singer 的论证 [MS67] 表明，克利福德超迹 $\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(e^{-t\not{D}^2})$ 与 t无关，而极限

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(e^{-t\not{D}^2})=\mathrm{sdim}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(\ker(\not{D})),\tag{28}$$

计算 $\not{D}^2$ 的克利福德超维数。根据 Atiyah–Bott–Shapiro构造 [ABS64], ，克利福德模 $\ker(\not{D})$ 是狄拉克算子的 $\mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt})$ 值指标。克利福德超维数 (28) 是这个类的有理化；当维数 n 能被 4 整除时，它等于通常的指标，否则为零。另一方面，$t\to 0$ 极限可识别为 A-形式的积分，例如参见 [BGV92，定理 4.21]。总之，$t\to 0$ 和 $t\to\infty$ 极限分别给出了 Atiyah–Singer指标定理的两边

$$\mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(e^{-t\not{D}^2})=\begin{cases}\mathrm{sdim}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(\ker(\not{D})) & t\to\infty\\ \displaystyle\int_X\hat{A}(X) & t\to 0.\end{cases}\tag{29}$$

下面我们回顾 Witten [Wit82] 和 Alvarez-Gaum´e [AG83]用超对称量子力学语言对 (29) 的一种描述。

量子力学系统的基本数据是一个 $\mathbb{Z}/2$分次态空间 $\mathcal{H}$，带有厄米内积和一个自伴偶算子 H （哈密顿量），后者生成时间演化。在 Wick旋转理论中，时间演化是一个迹类半群

表示

$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), \qquad t \mapsto e^{-tH} \qquad t \updownarrow \bullet \quad I_t. \tag{30}$$

如（30）右侧所示，我们可以从几何角度重新表述这个半群表示：参数 t 表示区间 I_t的长度。粘合区间会使长度相加， $I_t \circ I_s \simeq I_{t+s}$这对应于半群中的乘法。

作用于 $\mathcal{H}$ 上的超代数 A 若与 H对易，便是一个对称代数。在 A 上的迹（见 §B.2）定义了配分函数

$$Z := \mathsf{sTr}_A(e^{-tH}) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}; A/[A,A]) \tag{31}$$

取值于阿贝尔化中，即 A的零次霍赫希尔德同调中。在几何图像中，迹（31）对应于将（30）中长度为 t 的区间两端粘合起来，从而得到周长为 t的圆。

超对称量子力学还加入了奇的自伴算子 $Q_1, \dots Q_{\mathcal{N}}$，它们满足 [Wit82]

$$Q_i^2 = \frac{1}{2}[Q_i, Q_i] = H \text{ for } i = 1, \dots, \mathcal{N} \quad \text{and} \quad [Q_i, Q_j] = 0 \text{ for } i \neq j,$$

其中括号 $[-,-]$ 表示超交换子。根据分次雅可比恒等式， Q_i生成一个对称代数。黎曼自旋流形 X 通过 [ST04, Remark 3.2.21]确定一个具有 $\mathcal{N} = 1$ 超对称的量子力学系统。

$$\mathcal{H} = \Gamma(X; \mathbb{S}), \quad H = \not{D}^2, \quad Q = \not{D}, \tag{32}$$

而克利福德代数 Cl_{-n} 是一个与 Q对易的对称代数。超对称将半群表示 (30) 提升为超半群表示,

$$\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), \qquad (t, \theta) \mapsto e^{-tH + \theta D}. \tag{33}$$

(30) 中以长度为 t 的区间来描述的几何结构，可推广为对长度为 $(t,\ \theta)$ 的超区间 进行粘合。这可以在 Stolz 和 Teichner 的 $1|1$-欧几里得场论形式体系中得到精确定义；详细内容请参阅配套论文 [BE23b] 。

超对称的一个推论是，配分函数 (31) 与 t 无关。对于系统 (32)， $t \to \infty$ 极限可计算出（例如, 参见 [GJF19，第 5-6] 页）

$$Z = \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(e^{-tQ^2}) = \mathsf{sTr}(\Gamma_{-n} \circ e^{-tQ^2}) \overset{t\to\infty}{=} \begin{array}{c}1\text{-point function} \\ \text{of } \Gamma_{-\mathrm{n}}\end{array} \tag{34}$$

其中 Γ_{-n} 是决定克利福德超迹的克利福德作用中的一个特定元素，见 (419)。当 $n = 0$（或在莫里田等价后，当 $n = 0$ 模 8）时，(34) 是基态的带符号计数，称为该量子力学系统的 维滕指数 。另一方面， $t \to 0$ 极限可用路径积分技术计算,

$$Z = \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(e^{-tQ^2}) = \int_{LX} e^{-S(\gamma)} d\gamma \overset{t\to 0}{=} \int_X \hat{A}(X) \tag{35}$$

作为对（超）环路空间的积分。在 $t \to 0$ 极限下，这个积分（形式上）局部化到常值环路上 [Ati85], [Wit82，§4]。随后可以定义 路径积分，将其视为 S^1-等变上同调中不动点公式的形式应用，从而得到 X上 A形式的积分；例如参见 [JP90]。总之，式（29）的极限可解释为超对称量子力学

$$\left(\begin{array}{c} t \to \infty : \\ \text{count of} \\ \text{ground states} \end{array}\right) \rightsquigarrow \quad \mathrm{sdim}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}}(\ker(\not{D})) = \int_X \hat{A}(X) \qquad \left(\begin{array}{c} t \to 0 : \\ \text{localized} \\ \text{path integral} \end{array}\right). \tag{36}$$

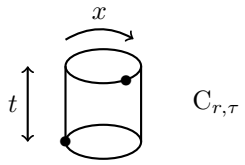
从物理角度看，等式（36）体现了量子力学的哈密顿量方法与拉格朗日形式（即路径积分）方法之间的一致性，为 Atiyah–Singer指标定理提供了物理学论证。维滕属及其模性可从二维超对称量子场论中对式（36）的一般化推导出来。

2.2. 二维欧几里得量子场论。二维欧几里得量子场论的基本数据包括一个 $\mathbb{Z}/2$分次态空间 $\mathcal{H}$，其上配有厄米内积；一个自伴哈密顿量 $H \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$，用于生成无穷小时间演化；以及一个自伴动量算子 $P \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$，用于生成无穷小空间平移。对于在半径为 r的圆上紧化的二维量子场论，算子 P的谱包含于 $\frac{1}{r}\cdot\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$中。定义算子 [Wit86，式 106]

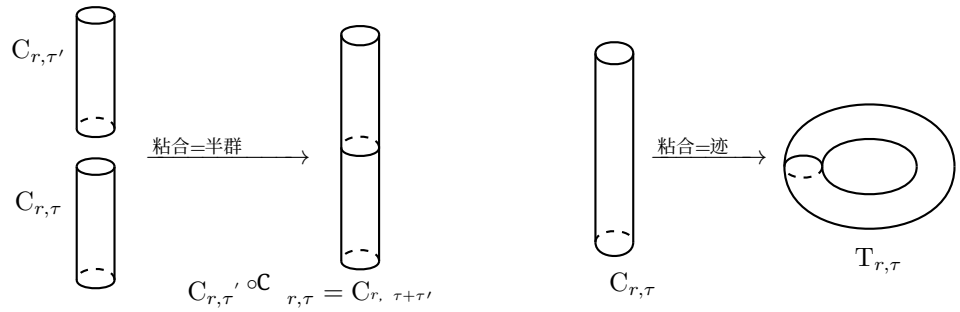
$$L_0 = (H+P)/2, \qquad \bar{L}_0 = (H-P)/2. \tag{37}$$

考虑由 $\mathfrak{H} \subset \mathbb{C}$上半平面中的加法确定的半群 $\mathfrak{H}/2\pi r\mathbb{Z}$。通过以下方式定义该半群的表示：

$$q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0} = e^{-tH+ixP} \colon \mathfrak{H}/2\pi r\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), \qquad \tau = \tfrac{x+it}{2\pi},\ q = e^{2\pi i\tau}. \tag{38}$$



这推广了量子力学中的时间演化半群（30）。如（38）右侧所示，可以从几何角度重新表述这个半群表示：参数（r，τ）确定了一个圆柱$\mathsf{C}_{r,\,\tau}$，它被视为半径为 r的圆之间的欧几里得（即平坦黎曼）配边，其中复参数 τ 编码了圆柱的高度 t 以及旋转 $x \bmod 2\pi r$，后者衡量边界圆参数化之间的差异 [Wit86，图 2]。半群中的复合于是对应于圆柱的粘合，



(39)

正如 [Wit86, §3]，所解释的，将圆柱的两端粘合在一起对应于取迹，

$$Z_r(\tau) := \mathsf{Tr}(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) \in C^\infty(\mathfrak{H}/2\pi r\mathbb{Z})$$

并且配分函数 $Z_r(\tau)$ 被解释为场论在环面 $\mathsf{T}_{r,\,\tau} = \mathbb{R}^2/(2\pi r\mathbb{Z} \oplus 2\pi\tau\mathbb{Z})$ 上的取值，该环面与带基格 $2\pi r\mathbb{Z} \oplus 2\pi\tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 相关联。路径积分的论证使人预期，配分函数只取决于底层环面，而与带基格无关。因此，给定每个 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 对应的算子（37），我们预期存在一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变函数 Z，

$$Z(r,\tau) := \mathsf{Tr}(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times\mathfrak{H})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (r,\tau) = \left(r|c\tau+d|, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

其中，在（40）中，L_0 和 $\bar{L}_0$ 现在是一族依赖于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$的算子。

对图（39）的增强为曲面赋予自旋结构，从而得到一个自旋欧几里得场论。在这种情况下，半径为 r 的圆有两种可能

分别对应周期自旋结构（称为*Ramond* 扇区）和反周期自旋结构（称为*Neveu–Schwarz* 扇区）。因此，自旋欧几里得场论有一对态希尔伯特空间和一对半群表示（38），分别对应圆上的两种自旋结构。自旋理论的配分函数有 4 种形式（45），对应欧几里得环面 $\mathbb{C}/2\pi r\mathbb{Z}\oplus 2\pi\tau\mathbb{Z}$ 上的 4 种自旋结构；见 §4.2。与算子半群的关系来自在 Ramond 或 Neveu–Schwarz 扇区取迹或超迹。对于亚辛双覆盖，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变性性质（40）精化为 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-不变性性质，其作用会置换三种自旋结构；见 §A.3。本文关注 Ramond 扇区以及与超迹对应的配分函数，即理论在非边界环面上的取值。

2.3. **对称性、自由费米子与次数 n 场论。** 量子力学中对称代数 A 的推广，是二维场论中的一种流代数 。次数为 n 的欧几里得场论带有 n（手征）自由费米子的流代数作用，该代数本质上由环空间的克利福德代数决定，见（41）。以下讨论较为非正式，但已有许多严格的数学处理方法；参见 [Seg04，第§8] 节，以及 [ST04，第§2.3], 节；另见 [DH11、Ten17、LR20]。

对于半径为 r 的自旋圆，考虑如下（无限维）克利福德代数

$$\mathrm{Fer}_n(S^1_r) := \mathrm{Cl}\Big(\Gamma(S^1_r;\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n), \int_{S^1_r}\langle -,-\rangle\Big) \tag{41}$$

其中 $\Gamma(S^1_r;\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$-扭曲旋量丛的截面空间，$\langle -,-\rangle$ 是 $\mathbb{C}$-双线性延拓的 $\mathbb{R}^n$ 上标准内积，而积分利用同构 $\mathbb{S}\otimes\mathbb{S}\simeq\Omega^1_{S^1_r}$ 定义。对于非边界型自旋结构，$\mathbb{S}$ 是平凡丛；这使得可以将 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}(L_r\mathbb{R}^n)$ 识别为 $\mathbb{R}^n$ 上半径为 r、内积为 $\int_{S^1_r}\langle -,-\rangle dt$ 的环空间的复克利福德代数。

> 下面我们将重点讨论来自一个次数为 n 的欧几里得场论的两项数据：(i.) 与半群表示（38）相容的、作用于 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$-模结构；(ii.) 一个取值于自旋环面模空间上的线丛的迹。

这两方面都需要稍作铺垫。

我们从 (i) 开始。将对 $(\Gamma(S^1_r;\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n)\ \int_{S^1_r}\langle -,-\rangle)$ 视为一个奇辛向量空间，并将 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$ 视为相应的魏尔代数，会很有帮助。从这个角度看，自旋圆柱 $\mathrm{C}_{r,\tau}$ 确定了一个拉格朗日子空间

$$\Gamma_{\mathrm{harmonic}}(\mathrm{C}_{r,\tau};\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n)\xhookrightarrow{\text{restrict}}\Gamma(S^1_r;\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n)\oplus\Gamma(S^1_r;\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n) \tag{42}$$

该子空间由调和旋量（即狄拉克算子的核）限制到 $C_{r,\tau}$ 的边界上得到。一个一般构造将福克模 $\mathrm{Fer}_n(\mathrm{C}_{r,\tau})$ 与拉格朗日子空间（42）相关联；它是一个不可约的 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$-双模 [ST04, Definition 2.2.4]。这个福克模的形式相当显式：它就是 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$ 本身作为双模，而其左作用通过一个代数同构加以修正 [ST11, page 59]

$$\varphi_\tau\colon \mathrm{Fer}_n(S^1_r)\to\mathrm{Fer}_n(S^1_r) \tag{43}$$

对每个 $\tau\in\mathfrak{H}$。对于自旋欧几里得场论中的每个扇区，次数为 n 的结构决定了 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$ 在 $\mathcal{H}$ 上的作用数据，并且该作用通过式 (43) 与半群表示 (38) 相容。

注 2.1. 分解为傅里叶模后，可以用有限维克利福德代数的无限张量积来描述 (41) 和 (43)，参见 (399)、(404) 和 (405)。

现在我们来讨论上述 (ii) 中的迹数据。在次数为 n 的欧几里得场论中，$\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$-模上的半群表示的迹取值于向量空间族 [ST12, §2]

$$\mathsf{sTr}_{\mathrm{Fer}_n}(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) \in \mathrm{Fer}_n(\mathrm{C}_{r,0}) \otimes_{\mathrm{Fer}_n(S^1_r)\otimes\mathrm{Fer}_n(S^1_r)^{\mathrm{op}}} \mathrm{Fer}_n(\mathrm{C}_{r,\tau}) \quad (\text{for } (r,\tau) \text{ fixed}), \tag{44}$$

也就是说，$\mathrm{Fer}_n(S^1_r$ 取值于双模 $\mathrm{Fer}_n(\mathrm{C}_{r,\ \tau})$ 的零次霍赫希尔德同调，类似于迹（31）。对于每个 $(r,\ \tau)$，向量空间（44）都是一维的。令 $(r,\ \tau) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H}$ 变化，所得线丛沿覆盖映射 [ST04, Definition 2.3.12]，与 Pfaffian 线的 n 次幂的限制典范同构。

$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H} /\!\!/ \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}), \quad r \in \mathbb{R}_{>0},\ \tau \in \mathfrak{H}.$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变性条件（40）推广为 Pfaffian 线的 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-等变数据，以及截面的 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-不变性性质。对于 Ramond 扇区中的超迹，这表示为

$$Z := \mathsf{sTr}_{\mathrm{Fer}_n}(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) \in \Gamma(\mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H}; \mathrm{Pf}^{\otimes n})^{\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})}. \tag{45}$$

这些 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-不变截面是模形式的 C^∞ 版本；参见 §A.3。

注记 2.2。 环面上另外 3 种自旋结构也有与配分函数 (45) 对应的版本。扇区的选择（Ramond 扇区或 Neveu–Schwarz 扇区）与普通迹或超迹的选择相结合，对应于 4 种自旋结构，其中 (45) 是 Ramond 扇区中的超迹。对于其余 3 种选择，$\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-作用会置换这些自旋结构，因此，与 (45) 类似的不变性条件涉及 3 个函数之间的相容条件，例如参见 [ST11，第 60]页。

注记 2.3。 量子系统的对称性与反常密不可分。就此处而言，代数 (41) 的福克模与环群 $L\mathrm{Spin}(n)$ 的正能量表示密切相关。这建立了 n度场论与经典陈-西蒙斯理论 [ST04, §5.2]之间的联系；粗略地说，一个 n 度理论确定了群 $\mathrm{Spin}(n)$ 在 1 级的经典陈-西蒙斯理论的一个（非拓扑）边界条件，而该理论是一个可逆拓扑场论。边界理论（也称为相对 或扭曲 理论）可解释为具有反常的理论，其中体理论编码了该反常，例如参见 [Fre14, §2.3]以及 [FT14]。

2.4. 二维超对称量子场论。 度为 n 的自旋欧几里得场论的进一步增强是超对称欧几里得场论，它要求给出算子（37）的奇平方根。k 奇平方根¯和 L_0 的 l 奇平方根 L_0 的数据称为 $\mathcal{N} = (k,\ l)$ 超对称。我们最感兴趣的是 $\mathcal{N} = (0,\ 1)$超对称，即一个奇算子 $\bar{G}_0$，满足

$$\bar{G}_0^2 = \frac{1}{2}[\bar{G}_0, \bar{G}_0] = \bar{L}_0.$$

¯将超对称量子力学中的（33）推广后，算子 G_0 将半群表示（38）提升为超半群表示

$$q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0+\sqrt{2\pi i}\theta Q}, \qquad \mathfrak{H}^{2|1} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}) \tag{46}$$

其中 $\mathfrak{H}^{2|1} \subset \mathbb{R}^{2|1}$ 是超李群 $\mathbb{R}^{2|1}$ 的上半空间，其乘法为

$$(\tau,\bar{\tau},\theta)\cdot(\tau',\bar{\tau}',\theta') = (\tau+\tau', \bar{\tau}+\bar{\tau}+\theta'\theta', \theta+\theta'), \qquad (\tau,\bar{\tau},\theta),(\tau',\bar{\tau}',\theta') \in \mathbb{R}^{2|1}.$$

在这种情况下，得出式 (29) 中与 t无关的麦基恩–辛格论证，也得出式 (45) 中与 $\bar{q}$无关的结果 [ST04，第 46], 页

$$\begin{aligned} Z(r,\tau) &= \mathsf{sTr}_A(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) = \mathsf{sTr}_A(q^{L_0}|_{\ker(\bar{L}_0)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{sTr}_A(q^{L_0}|_{\ker(\bar{L}_0)\bigcap \mathcal{H}_k}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \mathrm{sdim}_{\mathrm{Fer}_n}(\ker(\bar{L}_0)\bigcap \mathcal{H}_k) \end{aligned}$$

¯其中， $\mathcal{H}_k$是 $L_0 - L_0$的第 k个特征空间。上述计算有三个推论。首先， $Z = Z(r, \tau)$与 $\bar{q}$无关，因此是关于 $\mathfrak{H}$的全纯函数。其次， Z 的 q-展开具有整数系数，这意味着对 $\mathbb{R}_{>0}$ 的依赖是平凡的，因为整数幂级数不存在非平凡的 $\mathbb{R}_{>0}$-变形。最后，由于迹类算子是紧算子，且半群表示的取值为迹类算子，因此 q 的幂必定有下界。这就引出了关键结论。

预期 2.4 ([ST04，定理 3.3.14])。 具有 $\mathcal{N} = (0, 1)$ 超对称且次数为 n 的二维场论的配分函数 (45) 是权为 $-n/2$的整模形式。

注 2.5。 二维场论中模形式的另一个来源是手征共¯形 场论。一个共形 场论包含算子 L_k 和 L_k作用于 $\mathcal{H}$ 上的数据，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 生成维拉索罗代数在 $\mathcal{H}$ 上的一个表示，并扩展了 (45)。¯一个手征 场论对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $L_k = 0$ 零算子。因此，通过取 $\bar{G}_0 = 0$，手征理论自然带有一个 $\mathcal{N} = (0, 1)$ 超对称的生成元。预计手征共形理论可以唯一扩张为具有 $\mathcal{N} = (0, 1)$ 超对称的欧几里得场论；见下文的假设 7.10 和注 7.11。

超半群（46）的几何诠释涉及欧几里得超圆柱的粘合。可以用与（39）相同的图示来呈现，只是模参数由（r， τ， $\bar{\tau}$， θ） $\in \mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H}^{2|1}$指定，而欧几里得超圆柱的粘合给出

$$\mathrm{C}_{r,\tau,\bar{\tau},\theta} \circ \mathrm{C}_{r,\tau',\bar{\tau}',\theta'} \simeq \mathrm{C}_{r,\tau+\tau',\bar{\tau}+\bar{\tau}'+\theta\theta',\theta+\theta'}.$$

（46）中对应于迹的图示同样涉及超环面的模空间，该空间由格（ℓ_1， $\bar{\ell}_1$， λ_1）$\mathbb{Z}\oplus$（ℓ_2， $\bar{\ell}_2$， λ_2）$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{2|1}$确定。这些思想可以在 Stolz 和 Teichner 的框架下精确表述。这些对象的模空间极为丰富，其几何中微妙的特征对于定理 1.1 的证明至关重要。

2.5. **狄拉克–拉蒙算子与维滕属**。 接下来，我们概述 Witten 为目标为弦流形的 $\mathcal{N} = (0, 1)$-超对称σ模型所作的部分构造。首先，对于实向量丛 $V \to X$，定义如下向量丛形式幂级数

$$W(V) = \bigotimes_{k\geq 0} \mathrm{Sym}_{q^k}(V \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{k\geq 0} q^k W_k(V) \tag{47}$$

其中 Sym$^l(V)$ 表示 V 的 l^{th} 对称幂，并且

$$\mathrm{Sym}_{q^k}(V \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{l\geq 0} q^{kl}\mathrm{Sym}^l(V \otimes \mathbb{C}) = \underline{\mathbb{C}} + q^k(V \otimes \mathbb{C}) + q^{2k}\mathrm{Sym}^2(V \otimes \mathbb{C}) + \dots \tag{48}$$

若 V配备了一个联络 ∇^V，则向量丛 $W_k(V)$ 继承一个联络 $W_k(\nabla^V)$，我们将这些联络的形式幂级数记为 $W(\nabla^V)$。

定义 2.6。 自旋流形 X 的 狄拉克–*Ramond* 算子是由 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$-线性扭曲狄拉克算子构成的形式幂级数（见 [Wit88a，式 17]）

$$\bar{G}_0 := \not{D} \otimes W(\nabla^{TX}) = \sum_{k\geq 0} q^k \not{D} \otimes W_k(\nabla^{TX}), \quad \bar{G}_0 \colon \Gamma(\mathbb{S} \otimes W(TX)) \to \Gamma(\mathbb{S} \otimes W(TX))$$

其中， $\not{D}$ 是作用在 X 上的 Cl_{-n}-线性狄拉克算子，而 ∇^{TX} 是 TX上的列维-奇维塔联络。将狄拉克–拉蒙算子的指标 定义为形式幂级数，

$$\mathrm{Ind}(\bar{G}_0) := \phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathrm{Ind}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(\not{D} \otimes W_k(TX)) \in \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt})(\!(q)\!) \tag{49}$$

其中，$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Cl}_{-n}}$ 是（实）克利福德指标， $\phi(q)$定义为

$$\phi(q) = \prod_{m>0} (1-q^m) \in \mathbb{C}(\!(q)\!). \tag{50}$$

注 2.7。 式 (49) 中以 $\phi(q)$ 进行归一化，源自对 n 份手性自由费米子的迹。代数 $\mathrm{Fer}_n(S^1_r)$ 与克利福德代数 Cl_n 莫里田等价。因此，对费米子取迹后，再以莫里田双模 (412) 的迹进行归一化，便与克利福德超迹相容；这恰好就是 $\phi(q)^n$。这种归一化也与 [Wit88a 的公式 17-18] 一致。

目标为 X 的超对称 σ-模型的 Ramond 扇区，其态空间为截面 $\mathcal{H} = \Gamma(X;\, \mathbb{S} \otimes W(TX))$。对于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，定义算子

$$\bar{G}_0 = \not{D} \otimes W(\nabla^{TX}), \qquad P|_{W_k(TX))} = k/r, \quad \Longrightarrow \bar{L}_0 = \bar{G}_0^2, \quad L_0 = \frac{1}{2}(H+P) = \bar{G}_0^2 + P.$$

代数 Cl_{-n} 作用于 $\mathcal{H}$ ，并与上述算子对易。使用注 2.7 中介绍的归一化迹，可得配分函数

$$Z := \phi(q)^n \mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_{-n}}(q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}) = \mathrm{Ind}(\bar{G}_0) \in \mathrm{KO}^{-n}(\mathrm{pt})(\!(q)\!). \tag{51}$$

因此， Z 对 H 中每个动量数 k对应的基态进行带符号计数。

也可以用路径积分形式计算配分函数（51）。为描述这一计算的结果，我们先回顾如下定义。

定义 2.8. 设 X 是一个黎曼流形，其列维-奇维塔联络为 ∇^X。 X 的*Witten* 形式 为

$$\mathrm{Wit}(\nabla^X) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\mathsf{Tr}(F^{2k}) E_{2k}(q)}{(2\pi i)^{2k}(2k)}\right) \in \Omega^\bullet(X; \mathbb{C}(\!(q)\!))$$

其中， $F = (\nabla^X)^2$ 是列维-奇维塔联络的曲率。 X的维滕属 为

$$\langle \mathrm{Wit}(\nabla^X), [X] \rangle = \int_X \mathrm{Wit}(\nabla^X) \in \mathbb{C}(\!(q)\!). \tag{52}$$

若 X 是偶维且具有弦结构（因此 $[\mathsf{Tr}(F^2)] = 0$），则维滕属是权为 $n/2$的模形式。注意，若 $n \neq 0$ 模 4，则（52）自动为零。

类似于式（35），配分函数的路径积分表达式可以通过局部化到 T^2-不动点来严格定义 [Wit99, §2.6], [BE]

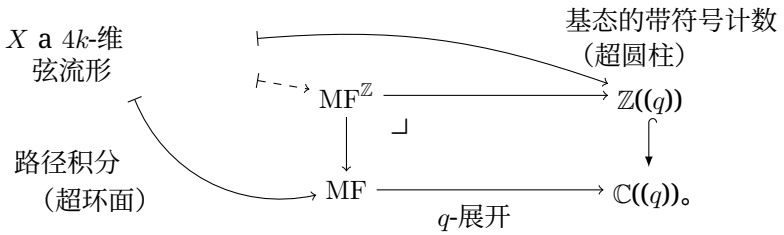
$$Z(\tau) = \int_{\mathsf{Map}(T_\tau, X)} e^{-S(\phi)} d\phi \overset{\mathrm{vol}\to 0}{=} \int_X \mathrm{Wit}(\nabla^X) \tag{53}$$

而对不动点定理的形式化应用会得到 Witten 形式的积分。然而，由于第二艾森斯坦级数是由条件收敛级数定义的，这一计算存在一些歧义。这是

an 反常：原则上，不同的选择会导致路径积分 (53) 得到不同的值 .
Ho不过，当 $[p_1(\nabla^X)] = 0$ 所有选择都给出相同结果时，反常便消失。

总之，目标为 X 的超对称 σ-模型的 Ramond 扇区配分函数可以通过两种方式计算：第一种是对基态进行带符号计数，第二种则利用局部化计算路径积分：

(54)



基态的带符号计数取自场论在超圆柱上的取值，而路径积分则计算场论在超环面上的取值。利用 Atiyah–Singer指标定理以及恒等式（在 [Zag86] 中证明），

$$\sigma(\tau, z) = \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z/2} \prod_{k>0} \frac{(1-q^k z)(1-q^k z^{-1})}{(1-q^k)^2} = \exp\left(-\sum_{k\geq 1} \frac{E_{2k}(q)}{2k(2\pi i)^{2k}} z^{2k} \right). \tag{55}$$

当 X 具有弦结构时，这两种配分函数计算彼此相容。因此，我们得到 $\mathbb{C}((q))$ 中元素的一个等式，

$$\mathbb{Z}(\!(q)\!) \ni \mathrm{Ind}(\bar{G}_0) = \int \mathrm{Wit}(\nabla^X) \in \mathrm{MF} \tag{56}$$

这表明维滕属是一个整模形式。

类比于关于指标定理（36）的物理学论证，等式（56）体现了拉格朗日形式（即路径积分）与哈密顿形式体系相一致。转向场论族时则出现了一个意外：类似的计算不再严格一致。相反，所得结果在同伦意义下相容，而场论本身指定了这一同伦的数据。这正是定理 1.1 背后的基本机制，它使得我们能够将 Witten 关于场论不变量的论证推广：对于取值于整模形式的不变量，将其视为环中的（严格）拉回（54）；对于取值于 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的不变量，则将其视为交换环谱中的（同伦）拉回（9）。

3. 用 KO 逼近 TMF

3.1. 上同调理论 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$. 上同调理论 TMF 构造为椭圆曲线模叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 上椭圆上同调理论层（或者更准确地说，其表示 E_∞-环）的导出整体截面，例如，概述请见 [Lur09, §1.3]。沿着分类 Tate 曲线穿孔形式邻域的映射 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}(\!(q)\!)) \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 限制截面，便构造出米勒特征

$$\mathrm{TMF} \to \mathrm{KO}(\!(q)\!). \tag{57}$$

事实上，与 Tate 曲线相关联的形式群律同构于乘法群，因此限制最初给出一个交换环谱的映射 $\mathrm{TMF} \to \mathrm{K}((q))$。然而，Tate 曲线具有一个 $\mathbb{Z}/2$-自同构作用，这意味着限制可分解为 $\mathbb{Z}/2$-同伦不动点 $\mathrm{K}((q))^{h\mathbb{Z}/2} \simeq \mathrm{KO}((q))$。

注 3.1. Lurie 构造椭圆上同调的方法将 (57) 构造成一个 E_∞-环之间的映射，参见 [Lur09, §4.3] 中的概要。 [HL16, Appendix A], 中明确构造了一个交换环谱之间的映射 (57)，其中 $\mathrm{KO}((q))$ 定义为

$$\mathrm{KO}(\!(q)\!) = q^{-1} \operatorname*{hocolim}_k \mathrm{KO} \wedge \{1, q, q^2, \ldots, q^{k-1}\}_+, \tag{58}$$

并证明映射 (57) 在同伦意义下是唯一的。下文只需将米勒特征视为交换环谱之间的映射。

将映射 (57) 与谱 $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ 作 smash 积，得到 (9) 中外侧的同伦交换方块，其中 MF 是弱全纯模形式环，并且我们使用

$$\pi_*(\mathrm{TMF})\otimes\mathbb{C}\simeq \mathrm{MF},\qquad \pi_*(\mathrm{KO}(\!(q)\!))\otimes\mathbb{C}\simeq \mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm 2}],\qquad |u^2|=-4.$$

定义 3.2. 将 (9) 中的 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 定义为交换环谱中的同伦拉回。令 K_{MF} 为类似定义的交换环谱，它是将 (9) 中的 KO((q)) 替换为 K((q)) 所得。

谱 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 根据泛性质 (9) 继承了一个来自 TMF 的映射，因此它是 TMF 的一种近似。

命题 3.3. K_{MF} 和 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的系数为

$$\pi_*\mathrm{K}_{\mathrm{MF}} \simeq \begin{cases} \mathrm{MF}_k^{\mathbb{Z}} & *=2k \\ \mathbb{C}(\!(q)\!)/(\mathbb{Z}(\!(q)\!)+\mathrm{MF}_{2k}) & k=2k-1 \end{cases} \tag{59}$$

$$\pi_*\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}} \simeq \begin{cases} \mathrm{MF}_{4k}^{\mathbb{Z}} & *=8k \\ \mathbb{Z}/2(\!(q)\!) & *=8k+1 \\ \mathbb{Z}/2(\!(q)\!) & *=8k+2 \\ \mathbb{C}(\!(q)\!)/(2\mathbb{Z}(\!(q)\!)+\mathrm{MF}_{4k+2}) & *=8k+3 \\ \mathrm{MF}_{4k+2}^{\mathbb{Z}} & *=8k+4 \\ 0 & *=8k+5 \\ 0 & *=8k+6 \\ \mathbb{C}(\!(q)\!)/(\mathbb{Z}(\!(q)\!)+\mathrm{MF}_{4k}) & *=8k-1 \end{cases} \tag{60}$$

其中 $\mathbb{C}(\!(q)\!)/(\mathbb{Z}(\!(q)\!)+\mathrm{MF}_{2k})$ 是具有 $\mathbb{C}$ 系数的洛朗级数的商，除以由具有 $\mathbb{Z}$ 系数的洛朗级数及 q-展开的像生成的子群。

证明。 我们利用以下表示进行计算

$$\pi_*\mathrm{K}\simeq\mathbb{Z}[u^{\pm1}],\qquad \pi_*\mathrm{KO}=\mathbb{Z}[\eta,\alpha,\beta^{\pm1}]/\langle 2\eta,\eta^3,\eta\alpha,\alpha^2-4\beta\rangle, \tag{61}$$

其中生成元的次数分别为 $|u|=-2$、$|\alpha|=-4$、$|\eta|=-1$ 和 $|\beta|=-8$。环同态 $\pi_*\mathrm{KO}\to\pi_*\mathrm{K}$ 由 $\beta\mapsto u^4$、$\alpha\mapsto 2u^2$、$\eta\mapsto 0$ 确定。(9) 中右侧的竖直箭头由实 K 理论中的庞特里亚金特征确定，它定义为复化与通常的陈特征的复合，

$$\mathrm{KO}\to\mathrm{K}\xrightarrow{\mathrm{Ch}}\mathrm{H}_{\mathbb{C}[u^{\pm1}]},\qquad \pi_*(\mathrm{K})\otimes\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}[u^{\pm1}],\qquad |u|=-2.$$

因此，该复合的像包含在 4-周期子环 $\mathbb{C}[u^{\pm2}]\subset\mathbb{C}[u^{\pm1}]$ 中。(9) 中下方的水平箭头可视为模形式 [Lau99] 的 q-展开式 (349)。

有了上述事实，结论便可由同伦拉回方块 (9) 的 Mayer–Vietoris 序列得出。对于 K_{MF}，该序列为

$$0\to\pi_{2k}\mathrm{K}_{\mathrm{MF}}\to u^{2k}\cdot\mathbb{Z}(\!(q)\!)\oplus\mathrm{MF}_{2k}\to u^{2k}\cdot\mathbb{C}(\!(q)\!)\to\pi_{2k-1}\mathrm{K}_{\mathrm{MF}}\to 0$$

利用 $\pi_*\mathrm{K}$ 集中在偶数次，因此（59）立即成立。实数情形的论证类似，利用以下序列的正合性

$$\begin{aligned}\pi_{*+1}\mathrm{KO}(\!(q)\!)\oplus\pi_{*+1}\mathrm{H}_{\mathrm{MF}} &\to \pi_{*+1}\mathrm{H}_{\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm2}]}\to\pi_*\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}\\ &\to \pi_*\mathrm{KO}(\!(q)\!)\oplus\pi_*\mathrm{H}_{\mathrm{MF}}\to\pi_*(\mathrm{H}_{\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm2}]})\end{aligned}$$

以及 KO 的 8 重周期性，从而确立上述 8 种情形。例如，对于 $*=8k$，我们有

$$\pi_{8k+1}\mathrm{H}_{\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm2}]}\simeq\{0\},\quad \pi_{8k}\mathrm{KO}(\!(q)\!)\oplus\pi_{8k}\mathrm{H}_{\mathrm{MF}}\simeq\beta^k\cdot\mathbb{Z}(\!(q)\!)\oplus\mathrm{MF}_{4k},$$
$$\pi_{8k}(\mathrm{H}_{\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm2}]})\simeq u^{4k}\cdot\mathbb{C}(\!(q)\!)$$

这证实了 $\pi_{8k}\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}} \simeq$模形式环$^{\mathbb{Z}}_{4k}$。 □

注记3.4。 $\pi_*\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 上的环结构需要多费些功夫才能阐明。不过，环同态 $\pi_*\mathrm{MString} \to \pi_*\mathrm{TMF} \to \pi_*\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 使我们能够利用弦配边或 $\pi_*\mathrm{TMF}$ 中已知的公式，计算大多数感兴趣的乘积。例如，生成元 $\nu \in \pi_3(\mathrm{TMF}) \simeq \mathbb{Z}/24$ 被映到 $\nu \in \pi_3\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$中的一个（非平凡）类，其阶为 24 [BN14, §3], ，且该类必然满足 $\eta^3 = 12\nu$，其中 $\eta \in \pi_1(\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}})$。

3.2. **弦流形族与族维滕形式**。下文将黎曼自旋流形族（例如，参见 [Fre87, 几何数据 1.1]）加以扩展，使其包含 [Wal13]意义下的几何弦结构。

定义 3.5。 一族黎曼弦流形是

(1) 流形的光滑纤维化 $\pi\colon\ X \to M$，其中垂直切丛$T(X/M) \to X$具有给定的度量 $g^{(X/M)}$和自旋结构；(2) 投影 $P\colon\ TX \to T(X/M)$；以及 (3) 与 $T(X/M)$ 上的自旋结构相关联的、带联络的陈–西蒙斯 2-丛的平凡化（见 [Wal13，定义 1.1.5。]）。

注 3.6。黎曼自旋流形的族由数据 (1) 和 (2) 构成；这些数据唯一确定了 $\nabla^{X/M}$在 $T(X/M)$ [Fre87，引理 1。3] 上的一个（Levi-Civita）联络，该联络如我们现在所述，决定了 (3) 中带联络的陈–西蒙斯 2-丛。对于每个$n \in \mathbb{N}$，陈–西蒙斯 2-丛是一个在对n维自旋丛及其联络进行分类的栈上的带联络 2-丛，记作 $*/\!\!/\mathrm{Spin}(n)^{\nabla}$。给定叠之间的映射$X \to */\!\!/\mathrm{Spin}(n)^{\nabla}$，它对具有相容联络 ∇^V及所选自旋结构的度量向量丛 V 进行分类，带联络的陈–西蒙斯 2-丛可以拉回到 X。所得 2-丛在 X 上的曲率恰好是 $\frac{p_1}{2}(\nabla^V)$，即 V的分数第一庞特里亚金形式。与 V相关联的陈–西蒙斯 2-丛的平凡化尤其是为 $\frac{p_1}{2}(\nabla^V)$选择一个余边界。在下面的构造中，我们将从定义 3.5 的第 (3) 部分使用的唯一信息，是 3-形式 $H \in \Omega^3(X)$，其中$dH = p_1(\nabla^{X/M}) \in \Omega^4(M;\mathbb{C})$ 由 4 次上同调循环 $\frac{p_1}{2}(\nabla^{X/M}) \in Z^4(X;\mathbb{Z})$ 的整数平凡化的像确定。

—

定义 3.7。 一族黎曼自旋流形的*Witten* 形式 为

$$\mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{u^{2k}\mathsf{Tr}(F^{2k})E_{2k}(q)}{2k(2\pi i)^{2k}}\right) \in \Omega^\bullet(X;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \tag{62}$$

其中 F 是 $\nabla^{X/M}$ 的曲率。

当 $M =$pt 时，上述定义还原为定义 2.8。我们强调， $E_2(q)$ 不是模形式，参见 § A.4。因此，对于具有弦结构的一族 $\pi\colon\ X \to M$，积分 $[\int_{X/M}\mathrm{Wit}(\nabla^{X/M})] \in \mathrm{H}(M;$模形式环) 确定了一个系数取值于模形式的上同调类。然而，微分形式 $\int_{X/M}\mathrm{Wit}(\nabla^{X/M})$ 的取值不必是模形式。我们有如下结论。

命题 3.8。 在族 $\pi\colon\ X \to M$ 上选取黎曼弦结构，将唯一确定一个奇微分形式 $\eta_H \in \Omega^\bullet(X;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$，它具有如下性质：

$$\mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) := \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) + d\eta_H \in \Omega^\bullet(X;\mathrm{MF}) \subset \Omega^\bullet(X;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \tag{63}$$

取值于模形式。沿纤维积分 $\pi\colon X \to M$,

$$\int_{X/M}\mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) = \int_{X/M}\mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) + d\int_{X/M}\eta_H \in \Omega^\bullet(M;\mathrm{MF}),$$

因此也会得到一个取值于模形式的微分形式。

证明。 我们回顾一下， $p_1(\nabla^{X/M}) = -\mathsf{Tr}(F^2)/8\pi^2$，而几何弦结构指定了一个 3-形式 H，满足 $dH = p_1(\nabla^{X/M}) \in \Omega^4(M;\mathbb{C})$，参见注 3.6。于是定义

$$\eta_H = \left(H \cdot \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) \cdot \frac{e^{E_2 p_1} - 1}{p_1} \right) \tag{64}$$

whe上述 $p_1 = p_1(\nabla^{X/M})$，并且我们利用 $e^{E_2 p_1} - 1$ 被 p_1 整除这一性质。于是 η_H 满足

$$d\eta_H = \left(e^{E_2 p_1} \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) - \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) \right).$$

由于

$$\mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) := e^{E_2 p_1} \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) = \exp\left(\sum_{k\geq 2} \frac{u^{2k} \mathsf{Tr}(F^{2k}) E_{2k}(q)}{2k(2\pi i)^{2k}} \right) \in \Omega^\bullet(X; \mathrm{MF}) \tag{65}$$

是取值于模形式的微分形式，因此结论成立。 □

为便于后续使用，我们也记录一个使用非全纯（但模）的第二艾森斯坦级数 $E_2^*(\tau,\ \bar\tau)$ 的族维滕形式版本，见（361）。定义

$$\mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M}) = \exp\left(\frac{u^2 \mathsf{Tr}(F^2) E_2^*(\tau,\bar\tau)}{2(2\pi i)^{2k}} + \sum_{k\geq 2} \frac{u^{2k} \mathsf{Tr}(F^{2k}) E_{2k}(\tau)}{2k(2\pi i)^{2k}} \right). \tag{66}$$

我们有 $\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M}) \in \Omega^\bullet(X;\ C^\infty(\mathfrak{H})[u^{\pm 2}])^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$，其中 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 作用于 $C^\infty(\mathfrak{H})[u^{\pm 1}]$ 的方式为

$$f(\tau,\bar\tau) \mapsto f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{a\bar\tau + b}{c\bar\tau + d} \right), \qquad u \mapsto \frac{u}{c\tau + d}.$$

因此，$\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M})$ 是取值于模形式的 C^∞ 版本中的微分形式，见 (348)。它与族维滕形式 (62) 的关系如下：

$$\mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) = \exp\left(\frac{2\pi i}{\tau - \bar\tau} p_1(\nabla^{X/M}) \right) \mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M}), \quad p_1(\nabla^{X/M}) = -\frac{u^2 \mathsf{Tr}(F^2)}{8\pi^2}, \tag{67}$$

并且 $\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M})$ 满足一个与 (63) 类似的公式，其中

$$\eta_H = \left(H \cdot \mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M}) \cdot \frac{e^{E_2^* p_1} - 1}{p_1} \right), \tag{68}$$

其中上文的 $p_1 = p_1(\nabla^{X/M})$。

注 3.9. $\partial_{\bar\tau}\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M})$ 的显式公式由 (362) 确定。利用该公式，可以将 $\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M})$ 扩展为一个取值于微分分次代数 $(\Omega^{0,*}(\mathfrak{H})[u^{\pm 1}], \bar\partial)$ 中的 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变微分形式；也就是说，$\mathsf{Wit}^*(\nabla^{X/M})$ 是栈 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上一个导出整体截面数据的一部分。

3.3. Bismut–Ramond 超联络。 我们回顾 Bismut 族指标定理 [Bis86]，的一些要素，另见下文 §D。对于 $\pi\colon X \to M$ 一个黎曼自旋流形族，其主自旋丛为 $P \to X$，定义其上的旋量丛为关联丛，

$$\mathbb{S} = P \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Cl}_n$$

其具有代数丛 $\mathsf{Cl}(T(X/M))$ 的纤维上的左作用，以及 Cl_n 的（可交换）纤维上的右作用。这导出一个 M 族的狄拉克算子 $\not{D}$，作用于 $\mathbb{S}$ 的截面上。由于 $\not{D}$ 与 Cl_n 的右作用分次交换，它与相应的 $\mathsf{Cl}_{-n} = \mathsf{Cl}_n^{\mathrm{op}}$ 左作用交换。对于带有相容联络 ∇^V 的度量实向量丛 $V \to X$，定义 Fr´échet 向量丛 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V) \to X$，其在 $x \in M$ 处的纤维是 Fr´échet 空间 $\Gamma((\mathbb{S} \otimes V)|_{X_x})$，其中 $X_x = \pi^{-1}(\{x\})$。狄拉克算子

$\not{D} \otimes \nabla^V$定义了 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V) \to M$ 的一个奇、Clifford 线性、自伴端同态。令 $\mathbb{B}^V$ 表示适配于 $\not{D} \otimes \nabla^V$ 的 Cl_{-n}-线性 Bismut 超联络，

$$\mathbb{B}^V = \not{D} + \nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)} - \frac{c(T)}{4} \tag{69}$$

其中 $\nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)}$ 是定义在 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 上的克利福德线性酉联络，而 $c(T)$ 是纤维丛 $\pi\colon X \to M$ 的曲率二形式 T 所给出的克利福德乘法。由 T 给出的克利福德乘法使用 $\mathrm{Cl}(T(X/M))$ 在旋量丛上的左作用，该作用与右 Cl_n 作用交换。由此可知，(69) 与左 Cl_{-n} 作用交换。关于 Bismut 超联络的标准参考文献是 [BGV92，第 10] 章；其克利福德线性推广见 [BE23a，第 §7] 节。最后，我们回顾 $\mathbb{R}_{>0}$ 缩放作用

$$\mathbb{B}^V(t) = t^{1/2}\not{D} + \nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)} - t^{-1/2}\frac{c(T)}{4}, \qquad t \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{70}$$

它给出一个单参数超联络族，其在 $t \to 0$ 和 $t \to \infty$ 下的行为决定了 Bismut 族指标定理 [Bis86], [BGV92，第 10] 章，是对 (29) 的推广。

定义 3.10。给定一族 $\pi\colon M \to X$ 黎曼自旋流形，将 ***Bismut–Ramond*** 超联络定义为 Cl_{-n}-线性超联络的直和

$$\mathbb{A} := \mathbb{B}^{W(T(X/M))} = \bigoplus_{k\geq 0} q^k \mathbb{B}^{W_k(T(X/M))} \tag{71}$$

定义在 X 上的 Fr´echet 向量丛上

$$\pi_*(\mathbb{S} \otimes W(T(X/M))) = \bigoplus_{k\geq 0} q^k \pi_*(\mathbb{S} \otimes W_k(T(X/M))). \tag{72}$$

我们采用如下记号

$$\mathcal{E} := \pi_*(\mathbb{S} \otimes W(T(X/M))) \qquad \mathcal{E}_k := \pi_*(\mathbb{S} \otimes W_k(T(X/M)))$$

使得 $\mathcal{E} = \bigoplus q^k \mathcal{E}_k$。类似地，令 $\mathbb{A}_k := \mathbb{A}|_{\mathcal{E}_k} = \mathbb{B}^{W_k(T(X/M))}$ 表示 $\mathcal{E}_k$ 上 Bismut–Ramond 超联络的直和项，使得 $\mathbb{A} = \bigoplus_k \mathbb{A}_k$。利用 Bismut 超联络上的 $\mathbb{R}_{>0}$-缩放作用 (70)，我们得到缩放后的 Bismut–Ramond 超联络，

$$\mathbb{A}(t) = \bigoplus_{k\geq 0} q^k \mathbb{A}_k(t), \qquad \mathbb{A}_k(t) = t^{1/2}\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M}) + \nabla^{\mathcal{E}_k} - t^{-1/2}\frac{c(T_k)}{4}. \tag{73}$$

定义 3.11。Bismut–Ramond 超联络的陈特征为

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) = \phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}l_{-n}}(e^{-u\mathbb{A}_k(u)^2}) \in \Omega^\bullet(M; \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$$

其中 $\phi(q)$ 在 (50) 中定义。注意，$\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 的总次数为 $-n$ （见定义 D.12）。

命题 3.12. 存在一个唯一确定的微分形式 $\eta_W \in \Omega^\bullet(X; \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$，

$$\int_{X/M} \mathrm{Wit}(\nabla^{X/M}) \quad = \quad \mathrm{Ch}(\mathbb{A}) + d\eta_W \tag{74}$$

它在 Bismut–Ramond 超联络的陈特征与族 π 的 Witten 形式积分之间起到桥梁作用：$X \to M$。

证明。 恒等式 (55) 给出了微分形式的等式，

$$\phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \int_{X/M} \hat{A}(\nabla^{X/M})\mathrm{Ch}(\nabla^{W_k(T(X/M))}) = \int_{X/M} \exp\left(\sum_{k\geq 0} \frac{\mathsf{Tr}(F^{2k})E_{2k}(q)}{2k(2\pi i)^{2k}}\right). \tag{75}$$

我们进一步有横截公式（参见 [BGV92，第 10.32] 定理，当 n 为偶数时；以及 [BF86，第 2.10] 定理，当 n 为奇数时）

$$\phi(q)^n \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}(e^{-\mathbb{A}_k(s)^2}) = \phi(q)^n \int_{X/M} \hat{A}(\nabla^{X/M}) \mathrm{Ch}(\nabla^{W_k(T(X/M))}) - d\int_0^s \alpha_k(t)dt,$$

它衡量 Bismut–Ramond 超联络的陈特征在按 (73) 重标度时的变化，其中

$$\alpha_k(s) := \phi(q)^n \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}\left(\frac{d\mathbb{A}_k(s)}{ds} e^{-(\mathbb{A}_k(s))^2}\right).$$

因此，若我们定义

$$\eta_W = \sum_{k\geq 0} q^k \int_0^1 \alpha_k(t)dt \tag{76}$$

结论便得证。 □

3.4. 具有向量丛核的狄拉克–拉蒙算子的族指标 .

命题 3.13。 对于每个 $k \geq 0$，假设纤维核

$$\mathcal{E}_k^0 := \ker(\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M})|_{M_x}) \subset (\mathcal{E}_k)_x$$

对 $x \in M$ 具有局部常秩。令 p_k: $\mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k^0$ 表示到核的纤维正交投影。于是存在唯一确定的微分形式 η_0，满足

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) - \phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathrm{Ch}(p_k \nabla^{\mathcal{E}_k} p_k) = d\eta_0 \in \Omega^\bullet(X; \mathbb{C}(\!(q)\!)) \tag{77}$$

它在超联络的陈特征与核丛的陈特征幂级数之间起桥接作用。

证明。 论证依据 Bismut 超联络的标准事实；我们回顾其中的关键要点。一族狄拉克算子的谱投影算子是平滑算子 [BGV92，命题 9.10], ，特别是投影 p_k: $\mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k^0$ 对每个 k 都是平滑算子。这意味着

$$\mathcal{E}_k^0 \to X, \qquad p_k \nabla^{\mathcal{E}_k} p_k, \tag{78}$$

是一个具有光滑联络的光滑向量丛。然后利用重标度超联络的单参数族 (73)，定义

$$\alpha_k(s) := \phi(q)^n \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}\left(\frac{d\mathbb{A}_k(s)}{ds} e^{-(\mathbb{A}_k(s))^2}\right), \qquad \eta_0 = \sum_{k\geq 0} q^k \int_1^\infty \alpha_k(t)dt.$$

在极限 $s \to \infty$ 中， $\mathbb{A}_k(s)$ 的陈形式趋近于 (78) 的陈形式 [BGV92，定理 9.19]。于是，只要无穷积分收敛，(77) 便由陈–西蒙斯形式的一般论证得出；收敛性源于关于 $\int_1^s \alpha(t)$ 的 C^l-范数的大 s 界 dt [BGV92，定理 9.23]。 □

命题 3.14. 在命题 3.13 的假设下，黎曼弦流形族 π: $X \to M$ 唯一确定一个类 $\sigma(X) \in \mathrm{KO}^{-n}$ 模形式环(M)。

证明. 由于算子 $\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M})$ 的核 $\mathcal{E}_k^0$ 是 M 上的 $\mathbb{Cl}_{-n}$-模丛，它们确定一个类

$$\phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k [\mathcal{E}_k^0] \in \mathrm{KO}^{-n}(M)(\!(q)\!) \tag{79}$$

通过 Atiyah–Bott–Shapiro构造 [ABS64]。事实上，对于每个 k，核丛都确定了一个映射，指向 [HST10 中构造的 KO 谱的点集模型，

定理 7.1], 参见 [BE23a, §4]。(79) 的陈特征的一个微分形式代表由 $\phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathrm{Ch}(p_k \nabla^{\mathcal{E}_k} p_k)$ 给出。另一方面，（模）Witten 形式的积分给出了一个余循环

$$\int_{X/M} \mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) \in \Omega^\bullet(M; \mathrm{MF}). \tag{80}$$

最后，我们利用命题 3.8、3.12 和 3.13，得到 (79) 的陈形式与 (80) 的 q展开之间的一个同伦，

$$\int_{X/M} \mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) = \phi(q)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathrm{Ch}(p_k \nabla^{\mathcal{E}_k} p_k) + d(\eta_0 + \eta_H + \eta_W) \tag{81}$$

根据 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 作为同伦拉回的定义 (9)，数据 (79)、(80) 和 (81) 确定了一个类 $[\sigma(X)] \in \mathrm{KO}^{-n}$ 模形式环(M)。□

3.5. **命题 1.5 的证明**。为去除命题 3.13 中的向量丛核假设，我们将族克利福德指标构造应用于每个超联络 $\mathbb{A}_k$；相关回顾请参阅 §D.3。根据 Bismut 超联络的标准性质，这些 $\mathbb{A}_k$ 在定义 D.14 的意义下具有光滑指标丛（见命题 D.16）。因此，对于每个 k，我们得到一个开覆盖

$$U_k^\lambda := \{x \in X \mid \lambda \notin \mathrm{Spec}((\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M}))^2_x)\} \subset X$$

并且对于每个 $(\lambda,\ k)$，在 U 上都有一个带联络的光滑有限秩向量丛 $\overset{\lambda}{k}$

$$\mathcal{E}_k^{<\lambda} := \bigoplus_{\mu<\lambda} \mathcal{E}_k^\mu, \qquad \nabla^{<\lambda} := p_k^\lambda \circ \mathbb{A}^{[1]}|_{U_\lambda} \circ p_k^\lambda, \quad p_k^\lambda \colon \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k^{<\lambda} \tag{82}$$

带有纤维上的 Cl_{-n} 作用。上文中，$\mathcal{E}_k^{<\lambda}$ 是由 $(\not{D}\otimes W_k(\nabla^{X/M})^2$ 对 $\mu<\lambda$ 的 μ 特征子空间构成的（有限）直和 (433)，而 p_k^λ 是投影 (434)。在每个交集 $U_k^\lambda \bigcap U_k^{\lambda'}$ 对 $\lambda<\lambda'$ 上，都有一个 Cl_{-n} 等变包含映射

$$\mathcal{E}_k^{<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{E}_k^{<\lambda'}$$

并且将 $\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M})$ 限制到正交补 $(\mathcal{E}_k^{<\lambda})^\perp \subset \mathcal{E}_k^{<\lambda'}$，便确定了一个 Cl_{-1} 作用 (440)，它由一个与 Cl_{-n} 作用交换的奇算子 $e_k^{\lambda\lambda'}$ 生成。若我们为离散子集 $\Lambda_k \subset \mathbb{R}_{>0}$ 选取一个局部有限子覆盖 $\{U_k^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_k}$，则上述构造确定了一个从 X 到 KO 谱 (438) 中第 $-n$ 个空间的一个模型的映射，

$$[\{U_k^\lambda, \mathcal{E}_k^{<\lambda}, e_k^{\lambda\lambda'}\}_{\lambda\in\Lambda_k}] \colon M \to \mathrm{KO}^{-n}. \tag{83}$$

在此构造中选择不同的方案，会得到同伦映射（并带有特定的同伦）。映射 (83) 所对应的类是 M族狄拉克算子$\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M})$ 的解析指标。

引理 3.15. 数据 (83) 确定了一个映射 $\sum_{k\geq 0}[\mathrm{Ind}^{\Lambda_k}(\mathbb{A}_k)] \colon M \to (\mathrm{KO}((q)))^{-n}$，它从 M 映射到谱 $\mathrm{KO}((q))$ 中第 $-n$ 个空间的一个模型。此构造中不同的选择会得到同伦映射，并带有特定的同伦。

证明。对每个 N，定义一个由 $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_N)$ 索引的 X 开覆盖 $\in \mathbb{R}^N_{>0}$

$$\begin{aligned} U^{\vec{\lambda}} &:= \{x \in X \mid \lambda_k \notin \mathrm{Spec}((\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M})^2_x)\} \subset X \text{ for } k \leq N\} \\ &= U_k^{\lambda_1} \bigcap \cdots \bigcap U_k^{\lambda_N} \end{aligned} \tag{84}$$

$\vec{}$也就是说，U^λ是针对 $k \leq N$ 的覆盖 $\{U_k^\lambda\}$ 的相互细化。对于每个 N，构造 (83) 给出一个映射

$$\left[\{U^{\vec{\lambda}}, \bigoplus_{k=0}^N \mathcal{E}_k^{<\lambda_k}, \bigoplus_{k=0}^N f_k^{\lambda\lambda'}\}_{\vec{\lambda}}\right] : X \to (\mathrm{KO} \wedge \{1, q, \ldots q^N\}_+)^{-n} \tag{85}$$

也就是说，一个映射到同伦余极限图 (58) 中第 N 个谱的第 $-n$ 个空间的映射。开覆盖的细化决定了切赫范畴之间的连续函子（见定义 D.6）；因此，根据 [Seg68，命题 2.1]，上述构造的映射对于 N 的不同取值都带有典范的同伦相容性。因此，映射 (85) 是映入同伦余极限图 (58) 的映射数据的一部分，进而定义了一个映入谱 $\mathrm{KO}((q))$ 的映射。对于局部有限覆盖 U_k^λ 的不同选择，根据命题 D.17，我们得到映射 (438) 之间的同伦，而这又给出了映入同伦余极限 (58) 的映射之间的同伦。□

引理3.16. 在引理 3.15 中构造的余循环的庞特里亚金特征与微分形式 $\sum q^k \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_k(t)) \in \Omega^\bullet(M;\, C^\infty(\mathbb{R}_{>0}((q))))$ 之间存在唯一确定的余边界，其中将 $t \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ 视为标准坐标函数。

证明. 根据引理 D.18，对于每个 (λ, k)，都存在唯一确定的余边界 s,

$$d\eta_k^\lambda = \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_k(t))|_{U_\lambda} - \mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda_k}). \tag{86}$$

˘ 对每个 N，在引理 3.15 中构造的余循环的庞特里亚金特征都是一个切赫–德拉姆余循环

$$\sum_{k\geq 0}^{N} q^k [U^{\vec{\lambda}}, \mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda_k}), \mathrm{CS}(\nabla^{<\lambda_k}, \nabla^{<\lambda'_k})] \in C^*(\{U^{\vec{\lambda}}\}, \Omega^\bullet(-; \mathbb{C}[q]/q^{N+1})). \tag{87}$$

不同的 N 之间的兼容性来自覆盖的细分。对于每个 N，沿覆盖细分限制余边界 (86)，会得到 ˘Cech–de Rham 复形中的一个余边界，介于 (87) 与 $\sum_{k\geq 0}^{N} q^k \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_k(t))$ 之间。□

命题 *1.5* 的证明。引理 3.15 和 3.16 给出了族指标 $\sum_{k\geq 0}[\mathrm{Ind}(\not{D} \otimes W_k(\nabla^{X/M}))] \in \mathrm{KO}^{-n}(M)((q))$ 的一个上循环代表元，以及一个余边界，它介于指标的庞特里亚金特征的一个上循环代表元与 Bismut–Ramond 超联络的庞特里亚金特征 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) \in \Omega^\bullet(M;\, \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$ 之间。然后，命题 3.8 和 3.12 给出了 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 与 $\int \mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M})$ 之间的同伦，其中 $\int \mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^{X/M}) \in \Omega^\bullet(M;$ 模形式环$)$。综上，这确定了一个连续映射 $\sigma(X)\colon M \to \mathrm{KO}^{-n}{}_{\text{模形式环}}$，其底层类为 $[\sigma(X)] \in \mathrm{KO}^{-n}{}_{\text{模形式环}}(M)$。先验地，该类取决于对每个 k 所选的 $\Lambda_k \subset \mathbb{R}_{>0}$，但根据命题 D.17 和陈–西蒙斯形式的标准性质，任意两种选择之间都存在具有指定同伦的同伦。□

推论 *1.7* 的证明。在维数 $4k$ 下，将整数模形式 $[\sigma(X)] \in \mathrm{KO}^{-4k}{}_{\text{模形式环}}(\mathrm{pt}) \simeq \mathrm{MF}^{\mathbb{Z}}_{2k}$ 与维滕属对应起来，可由 §2.5 中的经典论证得出。

在维数 $4k-1$ 下，我们将命题 1.5 中解析指标的值与 [BN14，定义 3.1] 中的不变量进行比较。设 X 是一个 $(4k-1)$ 维弦流形。出于次数方面的考虑，我们注意到 $\int_X \mathbb{W}\mathrm{it}(\nabla^X) = 0$，并且狄拉克–拉蒙算子及指标丛的陈特征为零，

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) = \sum \mathrm{Ch}(\not{D} \otimes W_j(TX)) = 0 \in \Omega^{-4k+1}(\mathrm{pt}; \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \simeq \{0\}.$$

因此，$[\sigma(X)] \in \mathrm{KO}^{-(4k-1)}{}_{\text{模形式环}}(\mathrm{pt})$ 中的类由以下内容决定：(i) Cl_{-4k+1}-线性狄拉克算子序列的指标 $\mathrm{Ind}^{\wedge_j}(\not{D} \otimes W_j(TX))\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{KO}^{-4k+1}$，以及 (ii) 一个由下式确定的、从零微分形式到其自身的同伦

$$\eta_H + \eta_W \in \Omega^{-4k}(\mathrm{pt}; \mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \simeq \mathbb{C}((q))$$

采用（64）和（76）中的记号。

我们进行一个同伦，使数据 (i) 平凡化，并修改数据 (ii)。指标 $\mathrm{Ker}(\not{D} \otimes W_j(TX))$ 是一个 Cl_{-4k+1}-模，必然存在一个扩张，使其具有 $\mathrm{Cl}_{-4k+1} \otimes \mathrm{Cl}_1$-模结构 [ABS64]。$\mathrm{Cl}_1$ 作用的生成元给出一个

变形 $(\not{D}\otimes W_j(TX))(t) := \not{D}\otimes W_j(TX) + \delta_j(t)$，对应于一族平滑算子$\delta_j(t)$，其中

$$\not{D}\otimes W_j(TX)+\delta_j(t) = \begin{cases} \not{D}\otimes W_j(TX) & t<1/2 \\ \text{invertible} & t>1 \end{cases} \tag{88}$$

这个超联络单参数族对应一个陈–西蒙斯形式 η_j，满足 [BGV92，第 9.26] 定理

$$\mathrm{Ch}(\not{D}\otimes W_j(TX)) = d\eta_j.$$

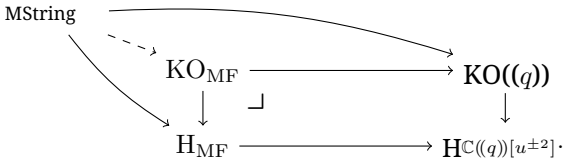
在 Bunke 的框架中 [Bun09]，，变形 (88) 是驯化驯化的数据，而形式 η_j 有一个显式描述，即一个积分 [Bun09, §1.2.7] 和 [BN14, 3.2]。类$[\sigma(X)] \in \mathrm{KO}^{-4k+1}$ 模形式环 (pt) 随后由商映射下的像确定

$$[\eta_H+\eta_W+\phi(q)^n\sum q^j\eta_j] \in \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}^{-4k+1}(\mathrm{pt}), \quad \mathbb{C}((q)) \to \mathbb{C}((q))/(\varepsilon\mathbb{Z}((q))+\mathrm{MF}_{2k}) \simeq \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}^{-4k+1}(\mathrm{pt}).$$

这便得到了 Bunke 和 Naumann 的公式 [BN14, Eq. 22]，用于描述他们针对弦流形的解析不变量。□

3.6. **The $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 指标定理。** 指标定理旨在比较虚线箭头

(89)



这类映射由 KO((q)) 和 H_{MF} 的字符串以及见证它们相容性的同伦刻画。下文将说明，当这种同伦相容性数据存在时，它在同伦意义下是唯一的。

引理 3.17. 存在一个正合列

$$0 \to [\mathrm{MString}, \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}] \hookrightarrow [\mathrm{MString}, \mathrm{KO}((q))] \times [\mathrm{MString}, \mathrm{H}_{\mathrm{MF}}] \to [\mathrm{MString}, \mathrm{H}_{\mathbb{C}((q))}]$$

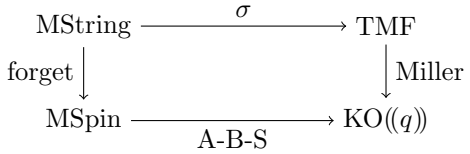
交换环谱之间的映射的同伦类。

证明。 同伦拉回的一般性质给出 Mayer–Vietoris 序列，

$$\begin{aligned} \cdots \quad \to \quad & [\mathrm{MString}, \Sigma^{-1}\mathrm{H}_{\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]}] \to [\mathrm{MString}, \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}] \\ & \hookrightarrow [\mathrm{MString}, \mathrm{KO}((q))] \times [\mathrm{MString}, \mathrm{H}_{\mathrm{MF}}] \twoheadrightarrow [\mathrm{MString}, \mathrm{H}_{\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]}] \end{aligned}$$

但 MString 在有理化后是偶的，因此 $[\mathrm{MString}\ \Sigma^{-1}\mathrm{H}_{\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]}] = 0$，引理得证。 □

定理 *1.6* 的证明。 根据引理 3.17，映射 MString $\to \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 同伦当且仅当它们的复合映射 MString $\to$ KO((q)) 和 MString $\to \mathrm{H}_{\mathrm{MF}}$ 同伦。对于拓扑指标 (3)，复合映射 MString $\to$KO((q)) 位于交换环谱的同伦交换图表 [AHR10] 中



对于映射 MSpin $\to$ KO((q))，它来自 Atiyah–Bott–Shapiro 定向的扩张，其在系数上的映射是自旋流形的维滕属。根据 Atiyah–Singer指标定理，这与命题 1.5 中对应于解析指标的映射同伦。另一方面，该映射

$$\mathrm{MString} \to \mathrm{TMF} \to \mathrm{H}_{\mathrm{MF}} \to \mathrm{H}_{\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]}. \tag{90}$$

是一个有理上同调理论的定向，因此与标准定向 MString $\to$ MSO $\to \mathrm{H}^{\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]}$ 相差一个由托姆类之比得到的黎曼–罗赫因子，例如参见 [AHR10, §3.3]。这个差类是可逆元

$$\exp\left(\sum_{k\geq 2}\frac{u^{2k}p_k E_{2k}(q)}{2k}\right)\in \mathrm{H}^0(\mathrm{BString};\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}]) \tag{91}$$

其中 p_k 是沿遗忘映射 BString $\to$BSO 拉回的泛庞特里亚金类。这与解析指标相关联的类 (80) 相同，因此复合映射 MString $\to \mathrm{H}_{\mathrm{MF}}$ 同伦。至此证明完成。□

3.7. **KO 的$_{\mathrm{MF}}$欧拉类**。一般而言，$\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 的弦定向 (3) 为具有弦结构的向量丛 $V\to M$ 确定欧拉类，

$$\mathrm{Eu}(V)\in \mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}^{\dim(V)}(M). \tag{92}$$

下面我们利用克利福德模和微分形式构造 Eu(V) 的一个代表元，并采用已知的 KO((q)) 和 H_{MF} 中弦向量丛欧拉类的描述。以下内容与定义 3.5 类似。

定义 3.18。给定一个带有度量相容联络 ∇^V 的实向量丛 $V\to M$，$(V,\ \nabla^V)$ 上的几何弦结构是

(1) V上的自旋结构；(2) 与 V 上的自旋结构相关联的、带联络的陈–西蒙斯 2-丛的平凡化（见 [Wal13，定义 1.1.5.]）。

注 3.19。 与注 3.6 类似，下文所需的、来自陈–西蒙斯 2-丛平凡化的唯一几何数据，是微分形式 $H\in\Omega^3(M)$；它是余循环 $p_1(V)\in Z^4(M;\mathbb{Z})$ 的整数平凡化的像。

n维向量丛 $V\to M$ 上的自旋结构确定了一个左 Cl_n =$\mathrm{Cl}^{\mathrm{op}}_{-n}$-模丛，

$$\mathbb{S}_V := P\times_{\mathrm{Spin}_n}\mathrm{Cl}_{-n},\qquad [\mathbb{S}_V]\in \mathrm{KO}^n(M) \tag{93}$$

它表示 V的 KO-欧拉类，例如，参见 [ST04，注 3.2.22], [FHT11，第 3 节。6] 或[Fre12，1. 92]。

引理 3.20。 对于带有几何弦结构的向量丛 $V\to M$，与弦定向相关联的 KO((q))-欧拉类为

$$\phi(q)^{-\dim(V)}[\mathbb{S}_V\otimes\bigotimes_{k\geq 0}\Lambda_{q^k}V]\in \mathrm{KO}^n(M)((q)) \tag{94}$$

其中

$$\Lambda_{q^k}V=\mathbb{C}\oplus q^k\Lambda^1V\oplus q^{2k}\Lambda^2V\oplus\cdots \tag{95}$$

证明。 由于 KO((q)) 的 MString 定向经由 MSpin 分解，因此弦定向对应的 KO((q)) 欧拉类与标准欧拉类 (93) 相差一个黎曼–罗赫因子，即 KO(BSpin)((q)) 中的一个差类。 Miller 计算了这个差类 [Mil89]，得到 (94)。□

注 3.21。 与 (48) 不同，我们注意到，当 V 为有限维时，总和 (95) 是有限的。它与 Witten 在环空间上的旋量丛 [Wit88a 中的公式 24]有关，二者的关系与通常的旋量丛 (422) 和 KO理论中的欧拉类 (93) 之间的关系相同。

同样，与 H_{MF} 的弦定向相关联的欧拉类与标准欧拉类相差一个黎曼–罗赫因子。

Le引理 3.22。 对于一个带有几何弦结构的向量丛 $V \to M$，H_{MF}-欧拉 r
clas与弦定向相关联的 s 是

$$[\mathrm{Pf}(F)\mathbb{W}\mathrm{it}^{-1}(\nabla^V)] \in \mathrm{H}^{\dim(V)}(M;\mathrm{MF}) \tag{96}$$

其中 Pf(F) 是 V 的普通欧拉类相对于 H_{MF} 的标准 MSO-定向的上循环代表元，即，Pf(F) 是 V 上联络的曲率的 Pfaffian。

证明。 证明是引理 3.20 证明的一个较简单版本，例如参见 [BE21, §3.3]。差类是模 Witten 形式，$\mathbb{W}\mathrm{it}^{-1}(\nabla^V)$，参见 (65)。□

命题 3.23。 与弦定向 (3) 相关联的 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类由 (94) 和 (96) 以及一个同伦（在证明中构造）确定，且在更高阶同伦意义下唯一。

证明。 我们通过在 $\Omega^\bullet(M;\mathbb{C}((q))[u^{\pm 2}])$ 中构造微分形式之间的同伦，将数据 (94) 和 (96) 扩展为 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 中的一个类。表示类 (94) 的余循环具有由 V 上的几何弦结构确定的陈形式：向量丛$\mathbb{S}_V \otimes \bigotimes_{k\geq 0}\Lambda_{q^k}V$从 V 上的联络继承一个联络。利用 (55) 和分裂原理，这个陈形式为

$$\begin{aligned}\phi(\tau)^{-\dim(V)}\mathrm{Ch}(\nabla^{\mathbb{S}_V\otimes\bigotimes_{k\geq 0}\Lambda_{q^k}V}) &= \mathrm{Pf}(F)\exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{\mathsf{Tr}(F^{2k})E_{2k}(q)}{(2\pi i)^{2k}(2k)}\right)\\ &= \mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1} \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{C}(\!(q)\!)[u^{\pm 2}]).\end{aligned} \tag{97}$$

V 上的几何弦结构进一步指定了一个余边界，它在陈形式 (97) 与 (96) 的 q-展开的微分形式代表元之间建立联系，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}(F)(\mathbb{W}\mathrm{it}^{-1}(\nabla^V) - \mathrm{Wit}^{-1}(\nabla^V)) = \mathrm{Pf}(F)d\eta_H,\\ &\eta_H = \left(H\cdot\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1}\cdot\frac{-e^{E_2p_1}-1}{p_1}\right).\end{aligned} \tag{98}$$

因此，我们发现，数据 (94)、(96) 和 (98) 确定了 $\mathrm{KO}^{\dim(V)}$模形式环(M) 中的一个余循环类。根据引理 3.17，同伦 (98) 在高阶同伦意义下是唯一的，因此该类必然是与弦定向 (3) 相关联的 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-欧拉类 (92)。□

4. Super Euclidean geometry in dimension 2

4.1. 超欧几里得几何。在专门讨论所关注的维数之前，我们先汇总一些关于任意超维数下超欧几里得几何的一般事实。以下内容推广了 Thurston 对模型几何 [Thu97, Definition 3.8.1]的概念。

定义 4.1([ST11, §2.5])。刚性几何由三元组 $(G,\mathbb{M},\mathbb{M}^c)$ 的数据构成，其中包括一个超流形 $\mathbb{M}$ 、一个在其上作用的超李群 G ，以及一个余维 1 超子流形 $\mathbb{M}^c \subset \mathbb{M}$。

定义 4.2 ([ST11，定义 2.26、2.28、2.33 和 4.4])。一个 S-族$(G,\ \mathbb{M})$-超流形是一个局部平凡纤维丛 $Y \to S$ ，以及 Y 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ ，其上有到开子超流形 f_i 的同构：$U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subset S\times\mathbb{M}$，还有转移数据$g_{ij}$： $V_i\bigcap V_j \to G$，它们通过 $\mathbb{M}$ 上的 G-作用与 f_i 相容，并满足余循环条件。

$(G,\ \mathbb{M})$-超流形之间的等距变换是一个映射 φ： $Y\to Y'$，其位于 S 之上，且相对于 Y 的开覆盖 $\{U_i\}$ 和 Y' 的开覆盖 $\{U_i'\}$，局部由 $\mathbb{M}$ 上的 G-作用给出，并满足与转移数据 g_{ij} 和 g'_{ij} 的相容条件。

一个 $(G,\mathbb{M})$-对 是超流形丛 (Y^c,Y) 在 S 上的一个对，带有一个在 S 上的包含 $Y^c\subset Y$，其中 Y 相对于图册 $\{U_i\}$ 具有 $(G,\mathbb{M})$- 结构，并且

$f_i(U_i \bigcap Y^c) \subset S \times \mathbb{M}^c \subset S \times \mathbb{M}$。等距变换在 $(G, \mathbb{M})$-对之间是满足以下条件的等距变换 $\varphi\colon Y \to Y'$ 使得 $\varphi(Y^c) = Y'^c \subset Y$。

沿基变换 $S' \to S$ 拉回丛后，$(G, \mathbb{M})$-对的范畴确定了超流形的站点上的一个栈；参见 [ST11，定义 2.33]，以及 [BBES22，注 A.23]。任何 S- 族的 $(G, \mathbb{M})$- 超流形都确定一个 $(G, \mathbb{M})$-对，其中包含 $Y^c = \emptyset$，因此 $(G, \mathbb{M})$-超流形构成了 $(G, \mathbb{M})$-对之栈的一个满子栈。

与 Stolz–Teichner 纲领相关的刚性几何定义如下；另请参见 [Fre99，第 3] 讲，其中讨论了（未经 Wick 旋转的）超庞加莱类比。

定义 4.3 ([ST11,§4.2])。一个超欧几里得几何是

$$(G, \mathbb{M}, \mathbb{M}^c) = (\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes \mathrm{Spin}(d), \mathbb{R}^{d|\delta}, \mathbb{R}^{(d-1)|\delta}), \qquad d, \delta \in \mathbb{N}$$

其中 $\mathbb{M}^c = \mathbb{R}^{(d-1)|\delta} \subset \mathbb{R}^{d|\delta} = \mathbb{M}$ 是标准包含，超李群$\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$Spin($d$)由以下数据构造而成：

i. Δ 一个 Spin(d) 的复旋量表示，其维数为 $\dim_{\mathbb{C}}(\Delta) = \delta$；ii. $\Gamma\colon \Delta \otimes_{\mathbb{C}} \Delta \to \mathbb{R}^d \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^d$一个 Spin($d$)-等变、非退化的对称配对，用于通过二重覆盖 Spin(d) $\to$ SO(d) 在 $\mathbb{R}^d$ 上的作用。

根据这些数据，定义一个超李群 $\mathbb{E}^{d|\delta}$，其底层超流形为 $\mathbb{R}^d \times \Pi\Delta \simeq \mathbb{R}^{d|\delta}$，乘法为

$$(v, \theta) \cdot (w, \eta) = (v + w + \Gamma(\theta, \eta), \theta + \eta), \qquad v, w \in \mathbb{R}^d(S),\ \theta, \eta \in \Pi\Delta(S), \tag{99}$$

利用 $\mathbb{R}^{d|\delta}$的点函子描述，见 (375)。半直积 $\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$Spin($d$) 在 $\mathbb{R}^{d|\delta}$ 上（从左侧）作用，由此确定一种刚性几何。

注 4.4。下文中，$\mathbb{E}^{d|\delta}$ 表示乘法为 (99) 的超欧几里得平移群，以区别于其作用所在的超流形 $\mathbb{R}^{d|\delta}$。需要提醒的是，记号 $\mathbb{E}^{d|\delta}$ 掩盖了数据 (Δ, Γ)（可能存在阻碍）。事实上，给定一个超维数 $d|\delta$，未必存在与之对应的超欧几里得几何。值得注意的是，$d|1$-欧几里得几何恰好存在于维数 $d = 0,1,2$ 中。此外，即使某一特定超维数下存在超欧几里得几何，它也未必唯一。例如，存在两种可能的 $2|1$-欧几里得几何，见下文定义 4.14。

例 4.5（无超对称的欧几里得几何）。在定义 4.3 中取 $\delta = 0$，配对 Γ 不再是额外数据。由此得到一种欧几里得几何（G，$\mathbb{M}$，$\mathbb{M}^c$）$\simeq$（$\mathbb{E}^d \rtimes$ Spin(d) $\mathbb{R}^d$，$\mathbb{R}^{d-1}$），其中欧几里得流形是带有平坦度量和自旋结构的 d-流形。这通过添加自旋结构 [扩充了 Thurston 对欧几里得流形的定义（Thu97，例 3.3.2 和 §4.2]）。与 Thurston 的情形一样，欧几里得流形的例子可由 $\mathbb{R}^d$ 对 $\mathbb{E}^d \rtimes$Spin(d) 中的离散子群取商得到，且该离散子群对应的商映射是覆盖空间；等价地说，$\mathbb{E}^d \rtimes$ Spin(d) 中的离散子群适当不连续地作用。欧几里得对 $Y^c \subset Y$是一个平坦的 d-流形 Y，并带有一个全测地余维一子流形 Y^c。我们将在下文 §4.2 中给出 $d = 2$ 的欧几里得对的具体例子。

定义 4.6。对于一个固定的超欧几里得几何和一个光滑流形 M，定义$d|\delta$-Euc(M) 为超流形的站点上的一个栈，其对象是 S-族超欧几里得对 $(Y^c \subset Y)$，并附带一个映射 $\Phi\colon Y \to M$。将$d|\delta$-Euc(M) 中的态射定义为超欧几里得对之间的等距变换 φ，且满足三角形交换：

$$\begin{array}{ccc} Y^c \subset Y & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & Y' \supset Y'^c \\ & {\scriptstyle\Phi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\Phi'} & \\ & M. & \end{array} \tag{100}$$

令 $d|\delta$-Euc $:= d|\delta$-Euc(pt)，并注意到光滑映射 $M \to N$ 确定了一个在 $d|\delta$-Euc 上方的栈之间的映射 $d|\delta$-Euc(M) $\to d|\delta$-Euc(N)。

引理 4.7. 假设已在 $\mathbb{R}^{d|\delta}$ 上指定了超欧几里得几何。那么存在一个忠实函子

$$\mathcal{S}\colon d|0\text{-Euc}(M) \to d|\delta\text{-Euc}(M). \tag{101}$$

In 特别地，具有平坦度量的自旋流形确定了一个超欧几里得流形。

证明。 这是对 [ST11 中公式 4 的进一步阐述，其中函子 (101) 称为超化。根据定义 4.3，约化流形 $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d|\delta}$ 到约化李群的包含映射是等变的

$$\mathbb{E}^d \rtimes \mathrm{Spin}(d) \subset \mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes \mathrm{Spin}(d). \tag{102}$$

给定一个欧几里得对族 $Y^c \subset Y \to S$，令 Spin(Y) $\to S$ 为垂直切丛 $Y \to S$ 的主 Spin(d) 丛。然后定义

$$\mathcal{S}(Y^c \subset Y) := (\Pi(\mathrm{Spin}(Y)|_{Y^c} \times_{\mathrm{Spin}(d)} \Delta) \subset \Pi(\mathrm{Spin}(Y) \times_{\mathrm{Spin}(d)} \Delta)),$$

其中 Π 是奇偶反转函子 (374)，它将普通流形上的复向量丛 $V \to N$ 映射到超流形 ΠV，并将 V 的纤维视为奇的。定义 Y 上超欧几里得结构的覆盖 $\{U_i\}$ 给出了 $\mathcal{S}(Y)$ 的覆盖 $\{\Pi$(Spin(Y)$|_{U_i} \times_{\mathrm{Spin}(d)} \Delta)\}$，其粘合数据来自 $\mathbb{E}^d \rtimes$Spin(d) $\subset \mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$Spin($d$)。因此，可在 $\mathcal{S}$ ($Y^c \subset Y$) 上得到一个典范的超欧几里得结构。此外，欧几里得对 (Y^c, Y) $\to$ (Y'^c, Y') 之间的映射确定了自旋丛之间的映射，进而导出所得超流形之间的映射，这些超流形属于 $\mathcal{S}$ 的像（利用 Π 是函子这一点）。在定义欧几里得结构的图册中进行计算，可以发现这些映射确实是超欧几里得等距变换。最后，我们取由复合给出的映射 $\mathcal{S}(Y) \to M$

$$\mathcal{S}(Y) = \Pi(\mathrm{Spin}(Y) \times_{\mathrm{Spin}(d)} \Delta)) \to Y \xrightarrow{\Phi} M$$

其中第一个箭头由投影诱导，第二个箭头则是 $d|0$-Euc(M) 中一个对象数据的一部分。此映射与 (102) 像中的超欧几里得等距变换相容，因此完成了 $\mathcal{S}$ 的构造。此函子忠实，当且仅当 (102) 是单射。□

引理 4.8. 给定一个 $d|\delta$-欧几里得对 $Y^c \subset Y \to S$，约化族 $Y^c_{\mathrm{red}} \subset Y_{\mathrm{red}} \to S_{\mathrm{red}}$ 具有例 4.3 中的 d 维欧几里得对的结构，即 $Y_{\mathrm{red}} \to S_{\mathrm{red}}$ 的纤维是平坦的黎曼自旋流形，而 Y^c_{red} 是一个（逐纤维的）全测地余维 1 子流形。这确定了一个栈之间的映射

$$d|\delta\text{-Euc}(M) \to d|0\text{-Euc}(M)$$

覆盖从超流形到流形的约化函子。

证明。 定义 Y 上超欧几里得结构的覆盖 $\{U_i\}$ 给出 Y_{red} 的覆盖 $\{(U_i)_{\mathrm{red}}\}$，其粘合数据取自 $\mathbb{E}^d \rtimes$Spin(d)。这定义了例 4.5 意义下的一个 S_{red}-族欧几里得流形。同样，(121) 的约化映射是标准包含$\mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$。因此，超欧几里得对的约化族是一个欧几里得自旋流形族和一个（逐纤维的）全测地余维 1 子流形。□

引理 4.9. 栈 $d|\delta$-Euc(M) 带有一个对合，它将一个 $d|\delta$ 维超欧几里得对对应到一个等距变换

$$\mathrm{fl}\colon (Y^c, Y) \to (Y^c, Y) \tag{103}$$

它在约化欧几里得族上的限制是自旋翻转自同构。

证明。 这是对 [ST11, §2.6] 的详细阐述。在 $Y \to S$的局部范围内，对合对应于作用于 $\mathbb{R}^{d|\delta}$ 上的自同构 $-1 \in$Spin(d)，其作用为

$$\mathfrak{fl}(v,\theta) = (v,-\theta), \qquad (v,\theta) \in \mathbb{R}^{d|\delta}(S). \tag{104}$$

-1 的作用与 $\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$Spin($d$)在 $\mathbb{R}^{d|\delta}$上的作用可交换。这意味着这些局部对合可以粘合起来，从而确定 $Y \to S$上的全局对合。由于包含映射$\mathbb{R}^{(d-1)|\delta} \hookrightarrow \mathbb{R}^{d|\delta}$ 在 $-1 \in$ Spin(d)的作用下保持不变，我们对每个 $d|\delta$维欧几里得对都得到一个对合 (103)。最后，我们注意到 $-1 \in$ Spin(d) $< \mathbb{E}^d \rtimes$Spin(d)在 $\mathbb{R}^d$ 上通过自旋翻转作用（在 $\mathbb{R}^d$上这是平凡作用，但会翻转标架丛自旋双覆盖的两张片），因此在约化族上通过自旋翻转作用。□

接下来我们注意到，超欧几里得等距群带有一个 $\mathbb{R}_{>0}$-作用 b y ho由.....确定的态射

$$\mu \cdot (v,\theta) = (\mu^2 v, \mu\theta), \qquad \mu \in \mathbb{R}_{>0}(S),\ (v,\theta) \in \mathbb{E}^{d|\delta}(S). \tag{105}$$

由（99）可得一个同态 rg$_\mu$: $\mathbb{E}^{d|\delta} \to \mathbb{E}^{d|\delta}$，它与 Spin($d$)-作用相交换。我们进一步注意到，（105）确定了一个映射 rg$_\mu$: $\mathbb{R}^{d|\delta} \to \mathbb{R}^{d|\delta}$，相对于由（105）确定的同态 $\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$ Spin(δ) $\to \mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes$Spin($\delta$)，该映射是等变的。

注 4.10。（105）中的记号源于膨胀作用在场论上诱导出重整化群流这一事实。

引理 4.11。 栈 $d|\delta$-Euc(M) 有一个 $\mathbb{R}_{>0}$-族自函子

$$\mathsf{RG}_\mu \colon d|\delta\text{-}\mathsf{Euc}(M) \to d|\delta\text{-}\mathsf{Euc}(M), \qquad \mathsf{RG}_\mu \circ \mathsf{RG}_{\mu'} \simeq \mathsf{RG}_{\mu\mu'}, \quad \mu,\mu' \in \mathbb{R}_{>0} \tag{106}$$

它通过将膨胀（105）作用于超欧几里得对的图册 $U_i \subset S \times \mathbb{R}^{d|\delta}$，并将膨胀作用（105）作用于超欧几里得等距而确定。

证明。 证明与引理 4.9 的证明完全类似。 □

例 4.12。 对于例 4.5 中不含超对称的欧几里得几何，引理 4.9 中的函子 RG$_\mu$ 将平坦黎曼流形上的度量按全局因子 μ^2缩放，其中平方根 μ 指定了该作用在旋量丛上的提升。

4.2. **二维欧几里得几何（无超对称）**。 为增进直观理解，我们进一步讨论例 4.5 中的 $d = 2$ 情形。这种几何以平坦黎曼自旋流形 $\mathbb{R}^2$ 为模型，其等距群为 $\mathbb{R}^2 \rtimes$Spin(2)，通过平移和旋转作用。因此，欧几里得对是带有自旋结构且嵌入一条测地线的平坦二维流形。

欧几里得自旋环面是紧致二维欧几里得流形的例子。暂且忽略自旋结构，每个欧几里得环面都有 $\mathbb{R}^2$ 作为其万有覆盖，因此是 $\mathbb{R}^2$ 关于欧几里得平移群的某个子群 $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^2$ 作用的商。令 Lat $\subset \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ 表示此类$\mathbb{Z}^2$子群中正向定向生成元构成的子流形，即开子流形

$$\mathsf{Lat} := \{\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \mid \ell_1, \ell_2 \text{ are a positively oriented basis of } \mathbb{R}^2\}. \tag{107}$$

向量 ℓ_1, ℓ_2生成一个（带基点、定向的）格 $\{n\ell_1 + m\ell_2 \in \mathbb{R}^2 \,|\, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$，由此我们得到一个以 Lat 为底空间的光滑纤维化，其纤维为环面 $T_{\ell_1,\ell_2} = \mathbb{R}^2/(\ell_1\mathbb{Z} \oplus \ell_2\mathbb{Z})$。要为这些纤维赋予自旋结构，我们需要一个提升的数据

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2) \\ & \overset{\langle \ell_1, \ell_2 \rangle}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \end{array}$$

到 $\mathbb{R}^2$ 上的一个保持自旋结构的 $\mathbb{Z}^2$ 作用。一个简短的计算（参见下文引理 4.26）表明，每个基本群生成元在 $\pm 1 \in$Spin(2) 中的选择都对应 4 种可能的提升

$$\langle (\ell_1, \pm 1), (\ell_2, \pm 1) \rangle \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2). \tag{108}$$

这 4 种选择通常分别称为 $(+1,+1)$ 的周期-周期、$(+1,-1)$ 的周期-反周期、$(-1,+1)$ 的反周期-周期，以及 $(-1,-1)$ 的反周期-反周期。因此，带基点的欧几里得自旋环面的模叠为

$$(\mathsf{Lat} \coprod \mathsf{Lat} \coprod \mathsf{Lat} \coprod \mathsf{Lat}) /\!\!/ \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \tag{109}$$

其中，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 改变格的基，而 Spin(2) 通过同态 Spin(2) $\to$ SO(2) 作用，将格旋转。周期-周期自旋结构是奇的（即非边界型），对应于标架丛的平凡二重覆盖；这一分量在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-作用下保持不变。其余三种选择是偶的（或边界型）自旋结构；它们在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-作用下彼此置换。因此，栈 (109) 有两个连通分支。在 (109) 中去掉基点，相当于加入环面对自身的平移作用，从而使 (109) 中的自同构群扩大$\mathbb{E}^2/(\ell_1\mathbb{Z} \oplus \ell_2\mathbb{Z})$。关于涉及 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的亚辛双覆盖的自旋环面模叠 (109) 的另一种描述，请参见 §A.3。

接下来，我们扩展栈 (109)，使其包含从欧几里得环面到光滑流形 M 的映射。首先注意，对于任意格，都存在一个微分同胚，

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2/(\ell_1\mathbb{Z} \oplus \ell_2\mathbb{Z}), \qquad (x, y) \mapsto (\ell_1 x, \ell_2 y) \tag{110}$$

到标准环面（即对应于单位正方形格 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{E}^2$ 的环面）。因此，对于周期-周期自旋结构，我们得到一个栈之间的映射

$$\mathcal{L}^2(M) /\!\!/ (\mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to \text{2-}\mathsf{Euc}(M), \quad (\phi, \ell_1, \ell_2) \mapsto \mathbb{R}^2/(\ell_1\mathbb{Z} \oplus \ell_2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} M,$$

其中映射空间

$$\mathcal{L}^2(M) := \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, M) \times \mathsf{Lat} \tag{111}$$

被视为一个层（以集合为值）。对于偶自旋结构，也存在类似的映射：要么限制到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中保持某个选定自旋结构的子群，要么考虑周期-反周期、反周期-周期和反周期-反周期自旋结构上的余积。

注记 4.13. 同构 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 使我们能够将欧几里得 2-环面视为复流形。(107) 中的对 ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{R}^2$ 的定向条件，转化为生成元之比具有正虚部

$$\mathsf{Lat} \simeq \{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times \mid \mathrm{im}(z_2/z_1) > 0\}. \tag{112}$$

同构 Spin(2) $\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq U(1) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 进一步将带基点欧几里得环面的等距变换与复流形之间的同构对应起来。在复几何中，自旋结构与典范丛 [Ati71] 的平方根是同一份数据。这个典范丛可平凡化，因此用单值化 $\{\pm 1\}$ rec 描述平方根，便可还原出 4 种自旋结构的选择（108）。

接下来，我们描述由带有一条嵌入的（闭）测地线的无限圆柱构成的二维欧几里得对。这些例子可由对与标准包含 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$相容的 $\mathbb{R}^2$上的 $\mathbb{Z}$作用取商得到。子空间 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ 的稳定子是

$$\mathbb{E}^1 \rtimes \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2), \tag{113}$$

而且，进一步的子群 $\mathbb{E}^1\times\mathbb{Z}/2\subset\mathbb{E}^1\rtimes\mathbb{Z}/4$ 保持 $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$上的定向。对于 $(\ell,\pm1)\in\mathbb{R}_{>0}\times\{\pm1\}\subset\mathbb{E}^1\times\{\pm1\}$，令

$$\mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell=\mathbb{R}/(\ell,+1)\mathbb{Z},\quad \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_\ell=\mathbb{R}/(\ell,-1)\mathbb{Z},\quad \mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell=\mathbb{R}^2/(\ell,+1)\mathbb{Z},\quad \mathrm{C}^{\mathrm{a}}_\ell=\mathbb{R}^2/(\ell,-1)\mathbb{Z},\tag{114}$$

表示周长为 ℓ 的圆和周长为 ℓ 的无限圆柱，并采用所示的周期或反周期自旋结构。对于 $\tau\in\mathbb{E}^2$，我们得到包含映射

$$i_\tau\colon \mathrm{S}^{\mathrm{p/a}}_\ell=\mathbb{R}/(\ell,\pm1)\mathbb{Z}\xhookrightarrow{i_0}\mathbb{R}^2/(\ell\mathbb{Z},\pm1)\xrightarrow{L_\tau}\mathbb{R}^2/(\ell\mathbb{Z},\pm1)=\mathrm{C}^{\mathrm{p/a}}_\ell\tag{115}$$

其中，i_0 由标准包含映射 $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ 确定，而映射 L_τ 是由 $\tau\in\mathbb{E}^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的（左）平移作用诱导的。注意，如果 τ 和 τ' 在商 $\mathbb{E}^2/\ell\mathbb{Z}$ 中的像相同，则 $i_\tau=i_{\tau'}$。因此，数据 (115) 确定了一个由 $(\pm1,\ \ell,\ \tau)\in\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^2)/\mathbb{Z}$ 参数化的超欧几里得对族，该商是关于 $\mathbb{Z}$ 作用的商

$$n\cdot(\ell,\tau)=(\ell,n\ell+\tau),\qquad n\in\mathbb{Z},\ \ell\in\mathbb{R}_{>0},\ \tau\in\mathbb{E}^2.\tag{116}$$

与 (110) 类似，存在微分同胚（它们不是欧几里得等距变换）

$$f_\ell\colon \mathrm{S}^{\mathrm{p/a}}_\ell\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}/\mathbb{Z},\qquad F_\ell\colon \mathrm{C}^{\mathrm{p/a}}_\ell\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\tag{117}$$

在周长为 ℓ 的圆和圆柱与（标准的）周长为 1 的圆和圆柱之间。因此，对于圆上的每种自旋结构，我们都得到一个叠之间的映射

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^2)/\ell\mathbb{Z}\to 2\text{-}\mathsf{Euc}(M),\qquad(\phi,\ell,\tau)\mapsto(\mathrm{S}^{\mathrm{p/a}}_\ell\xhookrightarrow{i_\tau}\mathrm{C}^{\mathrm{p/a}}_\ell\simeq\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\xrightarrow{\phi}M),$$

将源的一个 S-点映射为 M上的一个 S-族欧几里得对。子群(113)通过等距变换作用于所得的欧几里得对族。

4.3. $2|1$-欧几里得几何。 接下来我们转而关注维数为 $2|1$的超欧几里得几何。在这种情况下展开定义 4.3 中的数据，$\Delta=\mathbb{C}$ 和配对 Γ是一个 $\mathrm{Spin}(2)\simeq U(1)$-等变映射

$$\Gamma\colon\Delta\otimes_{\mathbb{C}}\Delta\simeq\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{R}^2\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}_2\oplus\mathbb{C}_{-2}.\tag{118}$$

在上述目标中，我们将 $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{C}$ 分解为 $U(1)$的权为 2 的不可约表示以及 -2。因此，在 Δ 上有两种可能的 $U(1)$作用，使得（118）成为一个等变映射，分别对应于 $\Delta=\mathbb{C}_{\pm1}$、权为 $+1$ 的表示和 -1 表示。固定这一选择后，Γ 就是将 $\mathbb{C}_{\pm1}\otimes\mathbb{C}_{\pm1}\simeq\mathbb{C}_{\pm2}$ 包含为一个直和项的包含映射。

定义 4.14（$2|1$ 维欧几里得几何）。令 $\mathbb{E}^{2|(0,1)}$ 表示与配对 (118) 相关联的超李群，其中选取 $\Delta=\mathbb{C}_{-1}$。那么 $\mathbb{E}^{2|(0,1)}$ 的底层超流形为 $\mathbb{R}^{2|1}$，其乘法为（使用 $\mathbb{R}^{2|1}$ 的点函子描述 (377)）

$$(z,\bar z,\theta)\cdot(z',\bar z',\theta')=(z+z',\bar z+\bar z'+\theta\theta',\theta+\theta'),\quad(z,\bar z,\theta),(z',\bar z',\theta')\in\mathbb{R}^{2|1}(S).\tag{119}$$

类似地，令 $\mathbb{E}^{2|(1,0)}$ 表示与配对 (118) 相关联的超李群，其中选取 $\Delta=\mathbb{C}_1$。由此得到乘法

$$(z,\bar z,\theta)\cdot(z',\bar z',\theta')=(z+z'+\theta\theta',\bar z+\bar z',\theta+\theta'),\quad(z,\bar z,\theta),(z',\bar z',\theta')\in\mathbb{R}^{2|1}(S).\tag{120}$$

考虑由作用定义的半直积 $\mathbb{E}^{2|(0,1)}\rtimes\mathrm{Spin}(2)$ 和 $\mathbb{E}^{2|(1,0)}\rtimes\mathrm{Spin}(2)$（使用 Spin(2) 的函子描述 (378)）

$$(u,\bar u)\cdot(z,\bar z,\theta)=(u^2z,\bar u^2\bar z,\bar u\theta),\qquad(u,\bar u)\in\mathrm{Spin}(2)(S).$$

上述内容定义了一对 $2|1$ 维超欧几里得几何

$$(G,\mathbb{M},\mathbb{M}^c)=\begin{cases}(\mathbb{E}^{2|(0,1)}\rtimes\mathrm{Spin}(2),\mathbb{R}^{2|1},\mathbb{R}^{1|1})\\(\mathbb{E}^{2|(1,0)}\rtimes\mathrm{Spin}(2),\mathbb{R}^{2|1},\mathbb{R}^{1|1})\end{cases}$$

由该映射给出的余维 1 子超流形

$$\mathbb{R}^{1|1}\hookrightarrow\mathbb{R}^{2|1},\quad(t,\theta)\mapsto(t,t,\theta)=(z,\bar z,\theta),\quad(t,\theta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S),\ (z,\bar z,\theta)\in\mathbb{R}^{2|1}(S).\tag{121}$$

2|1-欧几里得几何中的两种选择对应于二维超对称的两种可能手征性，通常称为 $\mathcal{N} = (1,0)$ 或 $\mathcal{N} = (0,1)$ 超对称。下文主要关注由 (119) 确定的 2|1-欧几里得几何，并且（遵循 [ST04, §4.3]）最终在这一选择明确时采用记号 $\mathbb{E}^{2|1} := \mathbb{E}^{2|(0,1)}$。不过，目前我们先说明定义 4.14 中这对超欧几里得几何之间的一些联系，这些联系与自旋流形的复共轭和定向反转有关；最终，这正是按照 §C.4 的含义为 2|1-欧几里得场论定义反射正性所需的结构。

引理 4.15. 超流形的映射

$$\mathsf{or}\colon \mathbb{R}^{2|1} \to \mathbb{R}^{2|1}, \qquad \mathsf{or}(z,\bar{z},\theta) = (\bar{z},z,\theta) \tag{122}$$

相对于同构，是超欧几里得群作用下的等变映射

$$\mathsf{or}\times\mathsf{inv}\colon \mathbb{E}^{2|(0,1)} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^{2|(1,0)} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \tag{123}$$

该同构由 (122) 与取逆同构的乘积确定（因为 Spin(2) 是阿贝尔群）

$$\mathsf{inv}\colon \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{Spin}(2), \qquad (u,\bar{u}) \mapsto (\bar{u},u). \tag{124}$$

此外，(122) 反转约化流形 $(\mathbb{R}^{2|1})_{\mathrm{red}} = \mathbb{R}^2$ 上的定向，并在子空间 $\mathbb{R}^{1|1} \subset \mathbb{R}^{2|1}$ 上限制为恒等映射。

证明. 直接根据定义可知，或确定一个超李群 $\mathbb{E}^{2|(0,1)} \simeq \mathbb{E}^{2|(1,0)}$的同构。由于与取逆复合会交换 Spin(2) 的表示$\mathbb{C}_{+2}$ 和 $\mathbb{C}_{-2} \simeq U(1)$，因此得到所述扩张，即半直积的映射 (123)。在 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{2|1}$ 上的实坐标 (376) 中，映射 (122) 为 $(x,y) \mapsto (x,-y)$，因此反转了 $\mathbb{R}^2$ 上的定向。最后，包含映射$\mathbb{R}^{1|1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2|1}$ 的定义 (121) 表明，或$|_{\mathbb{R}^{1|1}} = \mathsf{id}$。□

关于超流形上的共轭和实结构，请参见定义 B.10。

引理 4.16. 存在一个超流形同构

$$\mathsf{c}\colon \mathbb{R}^{2|1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{R}}^{2|1} \tag{125}$$

它相对于一个同构与作用等变

$$\mathbb{E}^{2|(0,1)} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{E}^{2|(1,0)} \rtimes \mathrm{Spin}(2)}, \tag{126}$$

其中，(125) 和 (126) 均由线性映射 $(\,)\colon \mathbb{C}_{-2} \to \mathbb{C}_{+2}$ （由复共轭得到）确定。此外，(125) 在约化流形 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{2|1}$ 上限制为恒等映射，并限制为子空间之间的映射 $\mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{1|1} \subset \mathbb{R}^{2|1}$。

证明. 复共轭确定了 $\mathbb{R}^2$ 上 Spin(2)-等变向量丛 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}_{-2} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}_{+2}$ 之间的一个同构。应用 (374) 中的函子 Π，便得到超流形映射 (125)，其在约化流形上的诱导映射为恒等映射。根据超欧几里得群的定义（利用 (118) 中的选项互为共轭这一事实），我们得到一个同态 $\mathbb{E}^{2|(0,1)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^{2|(1,0)}$。最后，向量丛映射的 Spin(2)-等变性给出了到半直积的扩张 (126)，其中我们使用了 Spin(2) 上的典范实结构。□

注记 4.17。 欧几里得几何的实结构 是一个同构 $\mathbb{R}^{d|\delta} \to \mathbb{R}^{d|\delta}$，它关于超李群的同构 $\mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes \mathrm{Spin}(\delta) \to \mathbb{E}^{d|\delta} \rtimes \mathrm{Spin}(\delta)$ 等变。这种实结构存在于 1|1-欧几里得几何中，参见 [HST10, 例 6.20]。引理 4.16 不是 2|1-欧几里得几何的实结构，因为超李群同构 (126) 改变了超对称的手征性。由于这种手征超对称性， 2|1-欧几里得几何不允许实结构。

命题 4.18。 引理 4.15 中的映射确定了一个栈态射

$$\mathsf{Or}\colon 2|(0,1)\text{-}\mathsf{Euc}(M)\to 2|(1,0)\text{-}\mathsf{Euc}(M), \tag{127}$$

该映射在二维欧几里得流形的约化族上反转纤维方向。引理 4.16 中的映射确定了一个栈态射

$$\mathsf{C}\colon 2|(1,0)\text{-}\mathsf{Euc}(M)\to 2|(0,1)\text{-}\mathsf{Euc}(M), \tag{128}$$

它覆盖超流形上的复共轭函子，即一个 S-族被映至一个S-族。

证明。 将 or 应用于带有 $(\mathbb{E}^{2|(0,1)\rtimes\mathrm{Spin}(2)},\mathbb{R}^{2|1})$-结构的族 $Y\to S$ 的图册，引理 4.15 构造出一个 $(\mathbb{E}^{2|(0,1)\rtimes\mathrm{Spin}(2)},\mathbb{R}^{2|1})$-结构。此外，由于 $\mathbb{R}^{1|1}\subset\mathbb{R}^{2|1}$ 在 or 下保持不变，这一构造将 S 上的一个 $(\mathbb{E}^{2|(0,1)\rtimes\mathrm{Spin}(2)},\mathbb{R}^{2|1})$-对 $(Y^c\subset Y)$ 映至 S 上的一个 $(\mathbb{E}^{2|(1,0)\rtimes\mathrm{Spin}(2)},\mathbb{R}^{2|1})$-对。这些构造改变了几何结构，却不改变超流形的底层族；特别地，映射 $\Phi\colon Y\to M$ 为任一几何结构确定了一个映射，因此我们已在对象上构造了函子 (127)。态射上的取值由同态 (123) 确定，这是利用了 (122) 关于该同态是等变的这一事实。

对于第二个陈述，我们从一个一般观察出发：对于一个 $(G,\mathbb{M})$-族$Y\to S$，其共轭族 $Y\to S$ 具有典范的 $(G,\mathbb{M})$ 结构。因此，对于一个带有 $(\mathbb{E}^{2|(1,0)}\rtimes\mathsf{Spin}(2)\ \mathbb{R}^{2|1})$-结构的族 $Y\to S$，族 $Y\to S$ 自动具有 $(\mathbb{E}^{2|(1,0)}\rtimes\mathsf{Spin}(2)\ \mathbb{R}^{2|1})$- 结构。利用引理 4.16，我们赋予 $Y\to S$ 一个 $(\mathbb{E}^{2|(0,1)}\rtimes\mathsf{Spin}(2)\ \mathbb{R}^{2|1})$-结构。与前一种情形一样，由于 c 将子空间 $\mathbb{R}^{1|1}$ 映到子空间 $\mathbb{R}^{1|1}$，这便延拓为对上的一个映射，即 $(Y^c\subset Y)$ 具有超欧几里得对的典范结构。最后，我们利用 M（作为普通流形）上的典范实结构，得到映射 $Y\to M$，其形式为 $Y\xrightarrow{\Phi}M\simeq M$。这就在对象上定义了函子 (128)。态射上的取值由同态 (126) 确定，并利用了 (125) 是等变的这一事实。□

De定义 4.19。 $2|1$-欧几里得超流形上的反射 函子是以下复合

$$2|(0,1)\text{-}\mathsf{Euc}(M)\xrightarrow{\mathsf{Or}}2|(1,0)\text{-}\mathsf{Euc}(M)\xrightarrow{\mathsf{C}}2|(0,1)\text{-}\mathsf{Euc}(M) \tag{129}$$

它是一个叠之间的映射，并在超流形范畴上覆于复共轭。

引理 4.20。 反射函子在栈 $2|(0,1)$-Euc(M) 上生成一个 $\mathbb{Z}/2$-作用。

证明。 由 (122) 和 (125) 可知，$(\mathsf{c}\circ\mathsf{or})\circ(\mathsf{c}\circ\overline{\mathsf{or}})=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2|1}}$。因此，超欧几里得对族上的恒等映射提供了定义栈上 $\mathbb{Z}/2$-作用所需的 2-态射，结论得证。□

最后，我们观察 $2|1$ 维欧几里得几何与 $1|1$ 维欧几里得几何之间的一些联系（例如，参见 [HST10, §6]）。定义 $\mathbb{E}^{1|1}$ 为赋有乘法的超流形 $\mathbb{R}^{1|1}$

$$(t,\theta)\cdot(s,\eta)=(t+s+i\theta\eta,\theta+\eta),\qquad (t,\theta),(s,\eta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S).$$

引理 4.21. 存在超李群的正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{E} & \to & \mathbb{E}^{2|(0,1)} & \to & \mathbb{E}^{1|1} & \to & 1,\\ & & t & \mapsto & (t,t,0),\ (z,\bar z,\theta) & \mapsto & (2\mathrm{im}(z),\theta) & & \end{array} \tag{130}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{E} & \to & \mathbb{E}^{2|(1,0)} & \to & \mathbb{E}^{1|1} & \to & 1,\\ & & t & \mapsto & (t,t,0),\ (z,\bar z,\theta) & \mapsto & (-2\mathrm{im}(z),\theta) & & \end{array}$$

wh此处所示公式应通过点函子来理解，而我们使用了 d
the （稍微滥用的）记号

$$\mathrm{im}(z) := \frac{z-\bar{z}}{2i} \in C^\infty(S), \qquad (z,\bar{z}) \in \mathbb{R}^2(S).$$

证明。 首先注意， S-点上的映射满足所需的实性条件，因此可得到所述的超流形之间的映射。要进一步证明这些映射是超李群的映射，归结为验证等式

$$\left(\frac{z-\bar{z}}{i} + \frac{w-\bar{w}}{i} + i\theta\eta, \theta+\eta\right) = \left(\frac{z+w-(\bar{z}+\bar{w}+\theta\eta)}{i}, \theta+\eta\right)$$

对于涉及 $\mathbb{E}^{2|(0,1)}$ 的序列成立，而涉及 $\mathbb{E}^{2|(1,0)}$ 的情形也有类似等式。序列的正合性显而易见： $\mathbb{E}$ 是正规子群（事实上是中心子群），其商为 $\mathbb{E}^{1|1}$。□

引理 4.22。 包含映射 (121) 关于四次单位根 $\mathbb{Z}/4 \subset U(1) \simeq$Spin(2) 的作用是 $\mathbb{Z}/4$-等变的。在反射函子下，此$\mathbb{Z}/4$-作用的生成元 $i \in U(1)$ 被映为 $-i \in U(1)$。

证明。 这由映射 (123) 是 Spin(2) 上的取逆映射这一事实得出 $\simeq U(1)$. □

注记 4.23。 前一个引理中的 $\mathbb{Z}/4$ 对 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的作用，恢复了 [HST10, Example 6.16], 中的“pin 生成元”；它是无定向 $1|1$-欧几里得场论中的一个重要结构。

4.4. **作为 $2|1$-欧几里得超流形的超环面**。

定义 4.24。 令 Hom($\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes$ Spin(2)) 表示超流形位点上的集合层，其 S-点为同态族

$$\Lambda\colon S \times \mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2)).$$

同态在基变换下拉回，因此 Hom($\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes$Spin(2)) 是一个预层；映射族满足粘合性质，这等价于层性质。定义一个子层

$$\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2))_{\mathsf{Lat}} \subset \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2)) \tag{131}$$

其 S-点为单同态族，这些单同态在约化流形上逐点确定了 $\mathbb{R}^2$ 在 S_{red} 中的一个定向基，见 (107)。 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 对 Hom($\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes$ Spin(2)) 的自然作用通过前复合，限制为对子层 (131) 的作用。

备注 4.25。 逐点基条件等价于复值函数z_1: $S_{\mathrm{red}} \times$(1， 0) $\to \mathbb{R}^2 \rtimes$Spin(2) $\to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 和 z_2: $S_{\mathrm{red}} \times$(1， 0) $\to \mathbb{R}^2 \rtimes$Spin(2) $\to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 具有性质 (112)。

定义子层 (131) 的条件保证了由 (131) 的一个 S-点 Λ 确定的 $\mathbb{Z}^2$ 对 $S \times \mathbb{R}^{2|1}$ 的作用是自由的，因此商是一个超流形，

$$T_\Lambda := (S \times \mathbb{R}^{2|1})/\Lambda. \tag{132}$$

此外，覆盖 $S \times \mathbb{R}^{2|1} \to T_\Lambda$ 在 T_Λ上确定了一个 $2|1$-欧几里得结构。因此，(132) 确定了一个由子层 (131) 参数化的 $2|1$-欧几里得超流形族。

引理 4.26。 层 (131) 是四个分量的余积

$$\mathsf{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2))_{\mathsf{Lat}} \simeq s\mathsf{Lat} \coprod s\mathsf{Lat}_{\mathrm{pa}} \coprod s\mathsf{Lat}_{\mathrm{ap}} \coprod s\mathsf{Lat}_{\mathrm{aa}} \tag{133}$$

其中每个分量由以下特征刻画

$$C^\infty(s\mathsf{Lat}) \simeq C^\infty(\mathsf{Lat})[\lambda_1, \lambda_2]/(\lambda_1\lambda_2), \quad C^\infty(s\mathsf{Lat}_{\mathrm{pa}}) \simeq C^\infty(\mathsf{Lat})[\lambda_2],$$

$$C^\infty(s\mathsf{Lat}_{\mathrm{pa}}) \simeq C^\infty(\mathsf{Lat})[\lambda_1], \quad C^\infty(s\mathsf{Lat}) \simeq C^\infty(\mathsf{Lat}_{\mathrm{aa}})[\lambda_1,\lambda_2]/(\lambda_1-\lambda_2),$$

其中奇函数 λ_i 将在证明中明确描述。

证明。 首先，我们建立一些记号，重新整理子层 (131) 的一个 Λ -点的信息。令

$$(\ell_1,\bar\ell_1,\lambda_1,u_1,\bar u_1)\colon S\times(1,0)\to \mathbb{E}^{2|1}\rtimes U(1),$$
$$(\ell_2,\bar\ell_2,\lambda_2,u_2,\bar u_2)\colon S\times(0,1)\to \mathbb{E}^{2|1}\rtimes U(1)$$

表示 Λ 在 $\mathbb{Z}^2$ 的生成元上的限制。要使这些 S-点确定一个 S-族的同态，必须满足交换条件

$$(\ell_1,\bar\ell_1,\lambda_1,u_1,\bar u_1)\cdot(\ell_2,\bar\ell_2,\lambda_2,u_2,\bar u_2)=(\ell_2,\bar\ell_2,\lambda_2,u_2,\bar u_2)\cdot(\ell_1,\bar\ell_1,\lambda_1,u_1,\bar u_1). \tag{134}$$

结合条件 (112)，可得 $u_1^2=u_2^2=1$。因此，我们找到四个分量，分别对应四种可能的解

$$(u_1,u_2)=(1,1):\ s\mathsf{Lat},\qquad (u_1,u_2)=(1,-1):\ s\mathsf{Lat}_{\mathrm{pa}},$$
$$(u_1,u_2)=(-1,1):\ s\mathsf{Lat}_{\mathrm{ap}},\qquad (u_1,u_2)=(-1,-1):\ s\mathsf{Lat}_{\mathrm{aa}},$$

这就证明了引理的第一条陈述。对于第二条陈述，可将上面的每个分量视为确定一个映射

$$(\ell_1,\bar\ell_1,\lambda_1,\ell_2,\bar\ell_2,\lambda_2)\colon S\to \mathbb{R}^{2|1}\times\mathbb{R}^{2|1}.$$

条件 (112) 要求在约化流形上，上述内容确定 $\mathsf{Lat}\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^{2|1}\times\mathbb{R}^{2|1}$ 的一个 S_{red}-点。带有指定值 u_1 和 u_2 的交换条件 (134) 还施加了以下条件

$$(u_1,u_2)=(1,1):\lambda_1\lambda_2=\lambda_2\lambda_1\qquad (u_1,u_2)=(1,-1):\ \lambda_1=0,$$
$$(u_1,u_2)=(-1,1):\ \lambda_2=0,\qquad (u_1,u_2)=(-1,-1):\ \lambda_1=\lambda_2.$$

综上，便得到了所述的函数描述。 □

注 4.27。 引理 4.26 表明，$s\mathsf{Lat}^{\mathrm{pa}}$，$s\mathsf{Lat}^{\mathrm{ap}}$，以及 $s\mathsf{Lat}_{\mathrm{aa}}$ 都是 $\mathbb{R}^{2|1}\times\mathbb{R}^{2|1}$ 的可表示子层，其约化流形为 Lat。另一方面，$s\mathsf{Lat}$ 不可表示，因为其函数并非任何超流形上的函数。这使得周期-周期超环面的几何更加微妙。

接下来，我们将上述内容加以扩展，从而得到光滑流形 M上的超欧几里得流形。我们将重点讨论 M上的周期-周期超环面，尽管其他情形也类似（而且最终会稍微简单一些）。首先我们注意到，对于任意周期-周期格，都存在一个 S [上的超流形同构 BE22，引理 3.9]，

$$S\times(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2)\xrightarrow{\sim} T_\Lambda,\quad (x,y,\theta)\mapsto(\ell_1x+\ell_2y, x(\bar\ell_1+\lambda_1\theta)+y(\bar\ell_2+\lambda_2\theta),\theta+x\lambda_1+y\lambda_2)$$

它与纤维为标准超环面 $\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2$的常值 S-族同构，该族由典范嵌入 $\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^{2|1}$确定。这个 S 上的超环面之间的同构由上述 $\mathbb{Z}^2$-等变映射 $S\times\mathbb{R}^{2|1}\to S\times\mathbb{R}^{2|1}$确定，并且通常不是 S上的欧几里得超环面同构。

定义 4.28。 将 M 的超欧几里得双环空间 定义为超流形上的层

$$\mathcal{L}^{2|1}(M):=\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2,M)\times s\mathsf{Lat}. \tag{135}$$

将一个 S-点（Λ，ϕ）$\in$（$\mathcal{L}^{2|1}$（M））（S）与

$$\Phi\colon T_\Lambda\simeq S\times\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\phi}M$$

给出从 $\mathcal{L}^{2|1}(M)\to 2|1\text{-}\mathsf{Euc}(M)$ 到 M 上的 $2|1$-欧几里得超流形栈的函子。

$\mathcal{L}^{2|1}(M)$ 上存在 $\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用，其中 $\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2)$ 通过等距变换作用于超环面，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 则通过改变格的基作用于 $s\mathrm{Lat}$。该作用在 [BE22, §3.3] 中得到了明确计算。根据构造，存在一个栈之间的映射 [BE22, 引理 3.15]

$$\mathcal{L}^{2|1}(M)/\!\!/(\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to 2|1\text{-}\mathrm{Euc}(M), \quad (\phi, \Lambda) \mapsto T_\Lambda \simeq S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi} M.$$

4.5. 示例： $2|1$**-欧几里得对**。一个 $2|1$-欧几里得对在 S 上的最基本示例来自标准包含（121）。其他示例则来自这个基本示例的 $\mathbb{Z}$-商。我们首先证明，所涉及的 $\mathbb{Z}$-作用的模空间与无超对称情形（115）中的相同。

引理 4.29。给定一个 S-点 $(\ell,\ \bar{\ell},\ \lambda,\ u,\ \bar{u}) \in (\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2))(S)$，考虑由下式生成的左 $\mathbb{Z}$-作用

$$S \times \mathbb{R}^{2|1} \xrightarrow{L_{\ell,\bar{\ell},\lambda,u,\bar{u}}} S \times \mathbb{R}^{2|1}, \qquad (z, \bar{z}, \theta) \mapsto (u^2(\ell + z), \bar{u}^2(\bar{\ell} + \bar{z} + \lambda\theta), \bar{u}(\lambda + \theta)). \tag{136}$$

这个 $2|1$-欧几里得等距变换保持子空间 $S \times \mathbb{R}^{1|1} \subset S \times \mathbb{R}^{2|1}$，且当且仅当生成元属于子群时，该作用是自由的

$$\mathbb{E}^\times \times \mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2). \tag{137}$$

最后，由 $(\ell,\ \pm 1) \in (\mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z}/2)(S)$ 生成的 $\mathbb{Z}$-作用，与由 $(-\ell,\ \pm 1)$ 生成的作用相同。

证明。该命题首先要求映射 (136) 沿 $S \times \mathbb{R}^{1|1} \subset S \times \mathbb{R}^{2|1}$ 限制，即存在一条虚线箭头使图表交换

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbb{R}^{1|1} & \hookrightarrow & S \times \mathbb{R}^{2|1} \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle L_{\ell,\bar{\ell},\lambda,u,\bar{u}}} \\ S \times \mathbb{R}^{1|1} & \hookrightarrow & S \times \mathbb{R}^{2|1}. \end{array}$$

根据公式 (121)，对于水平包含映射，我们要求 $(\ell, \ell, \lambda, u, \bar{u})$ 属于子群 $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2)$，其中 $\mathbb{Z}/4 \subset U(1) \simeq \mathrm{Spin}(2)$ 作为四次单位根包含在其中。由于作用通过普通李群 $\mathbb{E} \rtimes \mathbb{Z}/4$，可以在约化流形上检验作用的自由性，而该命题在约化流形上显然成立。□

给定 $(\tau, \bar{\tau}, \eta) \in \mathbb{E}^{2|1}(S)$，定义包含映射 $i_{\tau,\bar{\tau},\eta}$ 为以下复合

$$i_{\tau,\bar{\tau},\eta} \colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{i_0} S \times \mathbb{R}^{2|1} \xrightarrow{L_{\tau,\bar{\tau},\eta}} S \times \mathbb{R}^{2|1}, \tag{138}$$

其中 $i_0\colon\ S \times \mathbb{R}^{1|1} \hookrightarrow S \times \mathbb{R}^{2|1}$ 是标准包含，$L_{\tau,\ \bar{\tau},\ \eta}$ 是由 $(\tau,\ \bar{\tau},\ \eta) \in \mathbb{E}^{2|1}(S)$ 给出的左平移作用。

引理 4.30。映射 (138) 可下降到由 $(\ell,\ +1) \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Z}/2)(S) \subset (\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2))(S)$ 生成的 $\mathbb{Z}$-商，其中 $(\tau,\ \bar{\tau},\ \eta)$ 取任意值。映射 (138) 可下降到由 $(\ell,\ -1) \in (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Z}/2)(S)$ 生成的$\mathbb{Z}$-商，当且仅当 $\eta = 0$。

证明。该命题归结为验证图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbb{R}^{1|1} & \xrightarrow{i_{\tau,\bar{\tau},\eta}} & S \times \mathbb{R}^{2|1} \\ {\scriptstyle (\ell,\pm 1)\cdot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\ell,\pm 1)\cdot} \\ S \times \mathbb{R}^{1|1} & \xrightarrow[i_{\tau,\bar{\tau},\eta}]{} & S \times \mathbb{R}^{2|1}. \end{array}$$

对于一个 S 点（$t,\ \theta$）$\in \mathbb{R}^{1|1}(S)$，利用 (121)，这等价于

$$(t+\tau+\ell, t+\bar\tau+\eta\theta+\ell, \pm\eta\pm\theta) = (t+\ell+\tau, t+\ell+\bar\tau\pm\eta\theta, \eta\pm\theta).$$

上述论证要求 $\pm\eta\pm\theta=\eta\pm\theta$，结论随之得出。 □

按照 (114)，对于（$\ell,\ \pm1$）$\in$（$\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{Z}/2$）$(S)$，定义周长为 ℓ 的超圆 族和（无限）超圆柱 族

$$\mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{1|1})/(\ell,+1)\mathbb{Z},\quad \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{1|1})/(\ell,-1)\mathbb{Z}, \tag{139}$$

$$\mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{2|1}/(\ell,+1)\mathbb{Z},\quad \mathrm{C}^{\mathrm{a}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{2|1})/(\ell,-1)\mathbb{Z}, \tag{140}$$

分别对应于 p 和 a 的周期或反周期自旋结构。对于（$\tau,\ \bar\tau,\ \eta$）$\in\mathbb{E}^{2|1}(S)$，引理 4.30 给出了记作 $i_{\tau,\ \bar\tau,\ \eta}$ 的包含映射（比较 (115)）

$$i_{\tau,\bar\tau,\eta}\colon \mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{1|1})/(\ell,+1)\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i_0} (S\times\mathbb{R}^{2|1})/(\ell\mathbb{Z},+1) \xrightarrow{L_{\tau,\bar\tau,\eta}} (S\times\mathbb{R}^{2|1})/(\ell\mathbb{Z},+) = \mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell \tag{141}$$

$$i_{\tau,\bar\tau,0}\colon \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{1|1})/(\ell,-1)\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i_0} (S\times\mathbb{R}^{2|1})/(\ell\mathbb{Z},-1) \xrightarrow{L_{\tau,\bar\tau,0}} (S\times\mathbb{R}^{2|1})/(\ell\mathbb{Z},-) = \mathrm{C}^{\mathrm{a}}_\ell \tag{142}$$

其中，i_0 由标准包含映射 (121) 决定，而 $L_{\tau、\ \bar\tau、\ \eta}$ 来自 $(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)\in\mathbb{E}^{2|1}(S)$ 在 $\mathbb{R}^{2|1}$ 上的平移作用。注意，若 $(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)$ 和 $(\tau',\ \bar\tau',\ \eta')$ 在商 $(S\times\mathbb{E}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}$ 中的像相同，则 $i_{\tau、\ \bar\tau、\ \eta} = i_{\tau'、\ \bar\tau'、\ \eta'}$。因此，数据 (141) 确定了一个由 $(\ell,\ \tau)\in(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z}$ 参数化的超欧几里得对族，而 (142) 确定了一个由 $(\ell,\ \tau,\ \bar\tau)\in(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2})/\mathbb{Z}$ 参数化的超欧几里得对族；在这两种情况下，定义商的 $\mathbb{Z}$ 作用均由以下内容确定

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1}\to\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1},\qquad n\cdot(\ell,\tau,\bar\tau,\eta) = (\ell, n\ell+\tau, n\ell+\bar\tau,\eta). \tag{143}$$

我们可以将上述构造推广，从而在光滑流形 M 上得到欧几里得流形；下面描述周期自旋结构的情形，反周期的构造则完全类似。定义超圆和超圆柱的标准版本

$$\mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}$$

使其成为标准子群 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{E}^1\subset\mathbb{E}^{1|1}\subset\mathbb{E}^{2|1}$ 作用下的商。

引理 4.31. 对于 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}(S)$，存在超流形之间的同构，其定义在 S 上

$$(\mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell\subset\mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell)\simeq(S\times\mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z}\subset S\times\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}),$$

且与标准族相容。这些同构通常并非超欧几里得对的同构。

证明。我们先引入一些记号。将 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}(S)\subset C^\infty(S)^{\mathrm{ev}}$ 视为沿映射 $S\to\mathbb{R}_{>0}$ 对 $\mathbb{R}_{>0}$ 上标准坐标的拉回，可得函数 $\sqrt{\ell}\in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}}$，它是该坐标的（正）平方根的拉回。采用这一记号后，定义从族 (141) 到纤维为标准超圆柱的常值族的同构，

$$F_\ell\colon \mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell\xrightarrow{\sim} S\times\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}\qquad\text{via}\qquad (z,\bar z,\theta)\mapsto(\ell^{-1}z,\ell^{-1}\bar z,\ell^{-1/2}\theta). \tag{144}$$

不难验证，所示映射 $S\times\mathbb{R}^{2|1}\to S\times\mathbb{R}^{2|1}$ 可下降为式 (144) 中所述的 $\mathbb{Z}$-商空间之间的同构，并且会将子空间 $\mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell\subset\mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell$ 映射到相应的标准超圆。要使映射 (144) 成为 $2|1$-欧几里得等距变换，必须有 $\ell=1$ 且 $F_\ell=\mathrm{id}$。□

利用上述内容，定义一个函子

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z} &\to 2|1\text{-}\mathsf{Euc}(M),\\ (\phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &\mapsto (\mathrm{S}^{\mathrm{p}}_\ell\xhookrightarrow{i_{\tau,\bar\tau,\eta}}\mathrm{C}^{\mathrm{p}}_\ell\xrightarrow{F_\ell} S\times\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\phi} M)\end{aligned} \tag{145}$$

它将源中的一个 S-点映射到（141）中的 $2|1$-欧几里得对，并使用同构（144），通过上述复合给出到 M的映射。

5. Supercylinders in a smooth manifold

5.1.预备：流形中的欧几里得圆柱（不含超对称）。首先，我们将利用 §4.2 中的二维欧几里得几何，构造流形 M 中欧几里得圆柱的模空间。基本构件是欧几里得对 (115)，即嵌入带有自旋结构的欧几里得圆柱中的一个圆。我们关注的是周期自旋结构，因此将省略 p/a 装饰，在下文中令 $\mathsf{S}_\ell := \mathsf{S}^{\mathrm{p}}_\ell$ ， $\mathsf{C}_\ell := \mathsf{C}^{\mathrm{p}}_\ell$ 。采用标准识别 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$，定义闭上、下半空间

$$\mathbb{H}_+ := \{\tau \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) \geq 0\}, \qquad \mathbb{H}_- := \{\tau \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) \leq 0\} \tag{146}$$

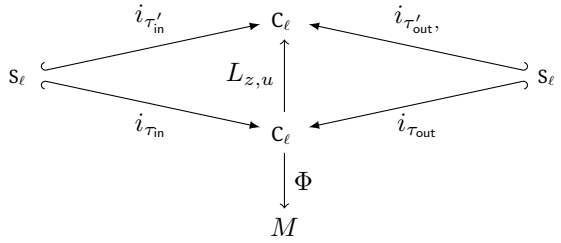
以及开上、下半空间，

$$\mathring{\mathbb{H}}_+ := \{\tau \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) > 0\}, \qquad \mathring{\mathbb{H}}_- := \{\tau \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) < 0\}. \tag{147}$$

注意，开上半平面有冗余记法 $\mathfrak{H} = \mathbb{H}_+$ ；当强调其作为 $\mathbb{H}_+$ 的子空间这一角色时，我们使用 $\mathbb{H}_+$。

定义 5.1。 M中的正向定向的欧几里得圆柱由数据 $(\Phi,\ \ell,\ \tau_{\mathsf{in}},\ \tau_{\mathsf{out}})$ 给出，其中 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, τ_{in}, $\tau_{\mathsf{out}} \in \mathbb{R}^2/\ell\mathbb{Z}$满足 $\tau_{\mathsf{out}} - \tau_{\mathsf{in}} \in \mathbb{H}_+/\ell\mathbb{Z}$，且 $\Phi\colon C_\ell \to M$。 M 中的负向定向的欧几里得圆柱由相同的数据给出，但 $\tau_{\mathsf{out}} - \tau_{\mathsf{in}} \in \mathbb{H}_-/\ell\mathbb{Z}$位于负半空间中。 M 中的欧几里得圆柱是 M中的正向定向或负向定向的欧几里得圆柱。周长 ℓ环路 $\Phi \circ i_{\tau_{\mathsf{in}}}\colon \mathsf{S}_\ell \to M$是 M 中根据 (115) 定义的欧几里得圆柱的入射边界，而 $\Phi \circ i_{\tau_{\mathsf{out}}}\colon \mathsf{S}_\ell \to M$ 是其出射边界。 M 中一对欧几里得圆柱之间的等距变换是欧几里得流形 $L_{z,\ u}\colon\ C_\ell \to C_\ell$ 之间的等距变换，并且它符合交换图

(148)



其中 $L_{z,u}$ 由 $(z,u)\ \in (\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2))(S)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的左作用确定，而该等距变换的源和目标分别是 $(\ell, \tau_{\mathsf{in}}, \tau_{\mathsf{out}}, \Phi)$ 和 $(\ell, \tau'_{\mathsf{in}}\ \tau'_{\mathsf{out}}, \Phi')$。

注记 5.2.（148）的交换性等价于 $\Phi' = \Phi \circ (L_{z,u})^{-1}$ 和

$$\tau'_{\mathsf{in}} = (z,u) \cdot \tau_{\mathsf{in}}, \qquad \tau'_{\mathsf{out}} = (z,u) \cdot \tau_{\mathsf{out}} \in \mathbb{R}^2.$$

通过取等距变换 $(z,u)\ = (-\tau_{\mathsf{in}}, 1)$， M中的欧几里得圆柱与一个具有 $\tau_{\mathsf{in}} = 0$ 的圆柱等距。因此，该空间（更准确地说，层）

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_+)/\mathbb{Z} \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_-)/\mathbb{Z} \tag{149}$$

存在一个到定义 5.1 中的范畴的满射映射。具体而言，中的一个点通过以下方式确定定义 5.1 中的数据 (149)

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z} \ni (\phi, \ell, \tau) \mapsto (\ell, 0, \tau, \phi \circ F_\ell) = (\ell, \tau_{\mathsf{in}}, \tau_{\mathsf{out}}, \Phi)$$

对于 F_ℓ 式 (117) 中的微分同胚。在此处及下文的记号中， $\phi\colon\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \to M$ 是从标准圆柱出发的映射，而 $\Phi\colon\ \mathsf{C}_\ell \to M$ 是从周长为 ℓ 的欧几里得圆柱出发的映射，因此 $\Phi = \phi \circ F_\ell$。

层 (149) 继承了欧几里得圆柱的等距变换作用；此类等距变换由稳定子子群 (113) 的作用确定。考虑 $\mathbb{Z}/4 \hookrightarrow \mathbb{E}^1 \rtimes \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{E}^2 \rtimes$Spin(2) 的生成元所给出的作用，即从 $\sqrt{-1} \in U(1) \simeq$ Spin(2) 下降得到的等距变换。这给出了 (149) 的一个 4 阶自同构，我们将其记为 $\sqrt{\mathsf{Fl}}$。注意, $\sqrt{-}\sqrt{\mathsf{Fl}}$ 会在 M 中交换正向定向和负向定向的欧几里得圆柱。此记号源于 $\sqrt{\mathsf{Fl}} \circ \sqrt{\mathsf{Fl}} = \mathsf{Fl}$ 是由引理 4.9 中的自旋翻转对合确定的 (149) 的自同构。

二维欧几里得几何为欧几里得圆柱赋予了一些额外结构。考虑保持包含映射的反向映射

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, -y) \tag{150}$$

，即 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$。欧几里得圆柱的定向反转应用（150），得到赋值

$$(\Phi, \ell, \tau_{\mathsf{in}}, \tau_{\mathsf{out}}, \phi) \mapsto (\Phi \circ \mathsf{or}^{-1}, \ell, \mathsf{or}(\tau_{\mathsf{in}}), \mathsf{or}(\tau_{\mathsf{out}})).$$

另一种结构来自这些微分同胚

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathsf{rg}_\mu} \mathbb{R}^2, \qquad \mathsf{rg}_\mu(x, y) = (\mu^2 x, \mu^2 y), \qquad \mu \in \mathbb{R}_{>0} \tag{151}$$

使 $\mathbb{R}^2$ 上的度量发生膨胀。要指定自旋流形之间的等距变换，作用必须通过膨胀因子的平方实现。欧几里得圆柱 $(\Phi,\ \ell,\ \tau_{\mathsf{in}},\ \tau_{\mathsf{out}})$ 的 μ-膨胀 应用微分同胚 (151)，得到如下赋值

$$(\Phi, \ell, \tau_{\mathsf{in}}, \tau_{\mathsf{out}}) \mapsto (\Phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}, \mu^2 \ell, \mathsf{rg}_\mu(\tau_{\mathsf{in}}), \mathsf{rg}_\mu(\tau_{\mathsf{out}}))$$

将 $\mathsf{or}(\tau)$ 与 $= \tau \in \mathbb{H}_\pm \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 认同，并利用欧几里得圆柱的描述 (149)，定向反转和 μ-膨胀由以下映射确定

$$\begin{aligned} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z} &\to (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\mp)/\mathbb{Z} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \\ (\Phi, \ell, \tau) &\mapsto (\Phi \circ \mathsf{or}^{-1}, \ell, \overline{\tau}) \end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z} &\to (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \\ (\Phi, \ell, \tau) &\mapsto (\Phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}, \mu^2 \ell, \mu^2 \tau). \end{aligned} \tag{153}$$

特别地，正向定向的欧几里得圆柱经过定向反转后，会变成负向定向的欧几里得圆柱。定向反转保持入边界和出边界不变，而 μ-膨胀会使它们发生膨胀。我们强调，(150) 和 (151) 并非来自二维欧几里得几何中的等距变换。

可以考虑 M 中的欧几里得圆柱在多大程度上能够构成一个范畴的态射，其源映射和目标映射由以下内容确定

$$\mathsf{in}, \mathsf{out} \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z} \rightrightarrows \mathsf{Map}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0},$$

将 M 中的一个欧几里得圆柱映射到其入射边界和出射边界。我们预期复合可由欧几里得圆柱的拼接得到。难点在于，光滑拼接仅部分有定义：一般的粘合未必会产生到 M 的光滑映射。解决这一问题的方法有多种，例如引入领圈，或采用部分定义的复合。不过，就我们的目的而言，只需将范围限制在 (149) 的一个子空间中，使拼接不再有困难： M 中的常值欧几里得圆柱。我们分两步定义这个范畴，首先介绍以下李范畴，也就是说，一个以内在于光滑流形的范畴。

~定义 5.3。 定义 $\mathscr{C}(M)$ 中常值欧几里得圆柱的 M李范畴，其对象和态射为光滑流形

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}}(M)) = \mathbb{R}_{>0} \times M \coprod \mathbb{R}_{>0} \times M,$$
$$\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}}(M)) = (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_+)/\mathbb{Z} \times M \coprod (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_-)/\mathbb{Z} \times M.$$

$\widetilde{\mathscr{C}}(M)$ 中的源映射和目标映射由投影给出。单位映射由在 $0 \in \mathbb{H}_{\pm}$ 处的包含映射确定，复合由 $\mathbb{H}_{\pm}$ 中的加法确定。

在常值映射的包含映射下

$$(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm})/\mathbb{Z} \times M \hookrightarrow (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm})/\mathbb{Z} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M) \tag{154}$$

（部分定义的）拼接运算对应于范畴 $\mathscr{C}(M)$ 中的复合。

4 阶自同构 $\sqrt{\mathsf{Fl}}$ 确定了 $\mathsf{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}}(M))$ 的一个自同构（通过限制 (152) 得到），并沿单位映射 $\mathsf{u} : \mathsf{Ob}(\mathscr{C}(M)) \to \mathsf{Mor}(\mathscr{C}(M))$ 限制为 $\mathsf{Ob}(\mathscr{C}(M))$ 的一个 4 阶自同构，其生成元置换这些分量。相对于 $\mathsf{Mor}(\mathscr{C}(M))$ 和 $\mathsf{Ob}(\mathscr{C}(M))$ 上的这些 $\mathbb{Z}/4$-作用，源、目标、单位和复合映射都是 $\mathbb{Z}/4$-等变的。这使得以下构造成为可能；关于 ST11] 中内在于栈的范畴的概述，参见 §C.1。

定义 5.4. 定义 M 中的常值欧几里得圆柱范畴，记作 $\mathscr{C}(M)$，它是一个内于层堆的范畴，其对象和态射为

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}(M)) = (\mathbb{R}_{>0} \times M \coprod \mathbb{R}_{>0} \times M)/\!\!/\mathbb{Z}/4,$$

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{C}(M)) = \Big(((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{+})/\mathbb{Z} \times M \coprod (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{-})/\mathbb{Z} \times M)\Big)/\!\!/\mathbb{Z}/4$$

其中，$\mathbb{Z}/4$ 的生成元通过 $\sqrt{\mathsf{Fl}}$ 作用于对象和态射。源、目标、单位和复合映射是 $\mathscr{C}(M)$ 中相应映射的 $\mathbb{Z}/4$- 等变扩张。

备注 5.5。我们注意到，$\mathscr{C}(M)$ 来自一个严格内于李群胚的范畴：源、目标、单位和复合函子都是李群胚之间的光滑函子。复合严格满足结合律，类似地，左右单位子都是平凡的。从李群胚到栈的函子将恢复上文定义的 $\mathscr{C}(M)$。李群胚的视角会更加具体一些。例如，显然的 $\mathbb{Z}/4$-覆盖

$$\widetilde{\mathscr{C}}(M) \to \mathscr{C}(M). \tag{155}$$

对于 $\mathbb{Z}/4$ 作用，在对象和态射上是一个群胚商。这使得我们可以通过从 $\mathscr{C}(M)$ 的对象和态射出发的 $\mathbb{Z}/4$-等变映射，构造一个从 $\mathscr{C}(M)$ 出发的函子。

根据前面的注记，赋值（152）和（153）可扩展为函子

$$\mathsf{Or}\colon \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M), \quad \mathsf{RG}_{\mu}\colon \mathscr{C}(M) \to \mathscr{C}(M), \tag{156}$$

其中，RG_{μ} for $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ 确定一个（严格的）$\mathbb{R}_{>0}$作用，而 Or 确定 $\mathscr{C}(M)$ 上的严格对合，即 $\mathsf{Or} \circ \mathsf{Or} = \mathrm{id}_{\mathscr{C}(M)}$。

接下来，我们说明 M 中欧几里得圆柱与欧几里得环面之间的关系。我们将重点讨论周期-周期环面（见 §4.2），不过对于其他自旋结构也有类似的讨论。（149）上有一个 $\mathbb{Z}$ 作用，其定义为 $(\Phi,\ \ell,\ \tau) \mapsto (n_\tau \cdot \Phi,\ \ell,\ \tau)$，其中 $n_\tau \cdot \Phi\colon \mathbb{R}^2/\ell\mathbb{Z} \to M$ 是映射

$$(n_\tau \cdot \Phi)(z) = \Phi(z + n\tau), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{157}$$

对于开上半平面中的 $\tau \in \mathbb{H}_{+} \subset \mathbb{H}_{+}$，考虑 $\mathbb{Z}$ 不变子空间

$$((\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_{+})/\mathbb{Z} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M))^{\mathbb{Z}} \subset (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{+})/\mathbb{Z} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}, M)$$

其点 $(\Phi,\ \ell,\ \tau)$ 满足 (157)。这些点可以视为 M 中的欧几里得圆柱$^{\circ}$，其环面的共形模数为 $\tau/\ell \in \mathbb{H}_{+}/\mathbb{Z}$，体积为 $\mathrm{im}(\tau)\ell \in \mathbb{R}_{>0}$。将范围限制为体积正定的常值欧几里得圆柱后，条件 (157) 显然成立，从而得到一个 span

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{C}(M)) \hookleftarrow (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_{\pm})/\mathbb{Z} \times M \hookrightarrow \mathcal{L}^2(M)/\!\!/(\mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \tag{158}$$

其中右侧的商栈定义见 §4.2。

5.2. **超欧几里得圆柱位于** M。与（非超）欧几里得圆柱的情形类似，下面的基本要素是超欧几里得对（141）。我们将关注周期自旋结构，因此省略 p/a 装饰

$$\mathrm{S}_\ell := S^{\mathrm{p}}_\ell = (S \times \mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z} \qquad \mathrm{C}_\ell := C^{\mathrm{p}}_\ell = (S \times \mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}$$

对于由 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}(S)$ 确定的 S-超流形族。通过它们的 S-点定义带边界的超流形

$$\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}(S) := \{(\tau, \bar\tau, \eta) \in \mathbb{R}^{2|1}(S) \mid (\tau, \bar\tau) \in \mathbb{H}_{\pm}(S) \subset \mathbb{R}^2(S)\}$$

或者等价地，将 $\mathbb{R}^{2|1}$ 的结构层限制到半空间（146）。类似地，通过开半空间（147）定义超流形 $\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm}$。在下文中，商空间 $(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z}$ 和 $(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 由 $\mathbb{Z}$ 作用（143）及其在 $\mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \subset \mathbb{E}^{2|1}$ 上的限制确定。

定义 5.6. A正向定向的 S族 2|1超欧几里得圆柱（位于 M）由 $(\ell,\ \tau_{\mathsf{in}},\ \bar\tau_{\mathsf{in}},\ \eta_{\mathsf{in}})$，$(\ell,\ \tau_{\mathsf{out}},\ \bar\tau_{\mathsf{out}},\ \eta_{\mathsf{out}}) \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z})(S)$ $\Phi\colon \mathrm{C}_\ell = (S \times \mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z} \to M$ (159) 给出，并满足条件

$$(\tau_{\mathsf{out}}, \bar\tau_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}) \cdot (\tau_{\mathsf{in}}, \bar\tau_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}})^{-1} \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{+})/\mathbb{Z})(S) \subset ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z})(S).$$

A 负向定向的 S族 2|1超欧几里得圆柱（位于 M）由相同的数据给出，但满足负半平面条件

$$(\tau_{\mathsf{out}}, \bar\tau_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}) \cdot (\tau_{\mathsf{in}}, \bar\tau_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}})^{-1} \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{-})/\mathbb{Z})(S) \subset ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{E}^{2|1})/\mathbb{Z})(S).$$

S族 2|1超欧几里得圆柱 在 M 中是指数据 (159)，它在 S的每个分支上确定一个正向或负向定向的超欧几里得圆柱。超环 S族 $\Phi\circ i_{\tau_{\mathsf{in}},\ \bar\tau_{\mathsf{in}},\ \eta_{\mathsf{in}}}\colon \mathrm{S}_\ell \to M$ 是超欧几里得圆柱的流入 边界，而 $\Phi\circ i_{\tau_{\mathsf{out}},\ \bar\tau_{\mathsf{out}},\ \eta_{\mathsf{out}}}\colon \mathrm{S}_\ell \to M$ 是流出 边界，其中 M 上的 $i_{\tau,\ \bar\tau,\ \eta}$ 按 (141) 定义。因此，M 中的 S族 2|1超欧几里得圆柱给出一个图表

(160)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}_\ell & \xrightarrow{\ i_{\tau_{\mathsf{in}},\bar\tau_{\mathsf{in}},\eta_{\mathsf{in}}}\ } & \mathrm{C}_\ell & \xleftarrow{\ i_{\tau_{\mathsf{out}},\bar\tau_{\mathsf{out}},\eta_{\mathsf{out}}}\ } & \mathrm{S}_\ell \\ & & \downarrow \Phi & & \\ & & M. & & \end{array}$$

M 中一对欧几里得超圆柱之间的等距变换 是超欧几里得流形的 S-族之间的等距变换 $L_{z,\ \bar z,\ \theta,\ u,\ \bar u}\colon\ C_\ell \to C_\ell$ 它适合交换图

(161)
$$\begin{array}{ccccc} & \overset{i_{\tau'_{\mathsf{in}},\bar\tau'_{\mathsf{in}},\eta'_{\mathsf{in}}}}{\nearrow} & \mathrm{C}_\ell & \overset{i_{\tau'_{\mathsf{out}},\bar\tau'_{\mathsf{out}},\eta'_{\mathsf{out}}}}{\nwarrow} & \\ \mathrm{S}_\ell & & \uparrow L_{z,\bar z,\theta,u,\bar u} & & \mathrm{S}_\ell \\ & \underset{i_{\tau_{\mathsf{in}},\bar\tau_{\mathsf{in}},\eta_{\mathsf{in}}}}{\searrow} & \mathrm{C}_\ell & \underset{i_{\tau_{\mathsf{out}},\bar\tau_{\mathsf{out}},\eta_{\mathsf{out}}}}{\swarrow} & \\ & & \downarrow \Phi & & \\ & & M & & \end{array}$$

其中，$L_{z,\ \bar z,\ \theta,\ u,\ \bar u}$ 由 $(z,\ \bar z,\ \theta,\ u,\ \bar u) \in (\mathbb{R}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2))(S)$ 的左平移（局部）确定，而 (161) 的源超圆柱和目标超圆柱分别为

$(\Phi\colon \mathrm{C}_\ell \to M, (\tau_{\mathsf{in}}, \bar\tau_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}}), (\tau_{\mathsf{out}}, \bar\tau_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}))$，$(\Phi\circ L^{-1}_{z,\bar z,\theta}\colon \mathrm{C}_\ell \to M, (\tau'_{\mathsf{in}}, \bar\tau'_{\mathsf{in}}, \eta'_{\mathsf{in}}), (\tau'_{\mathsf{out}}, \bar\tau'_{\mathsf{out}}, \eta'_{\mathsf{out}}))$，

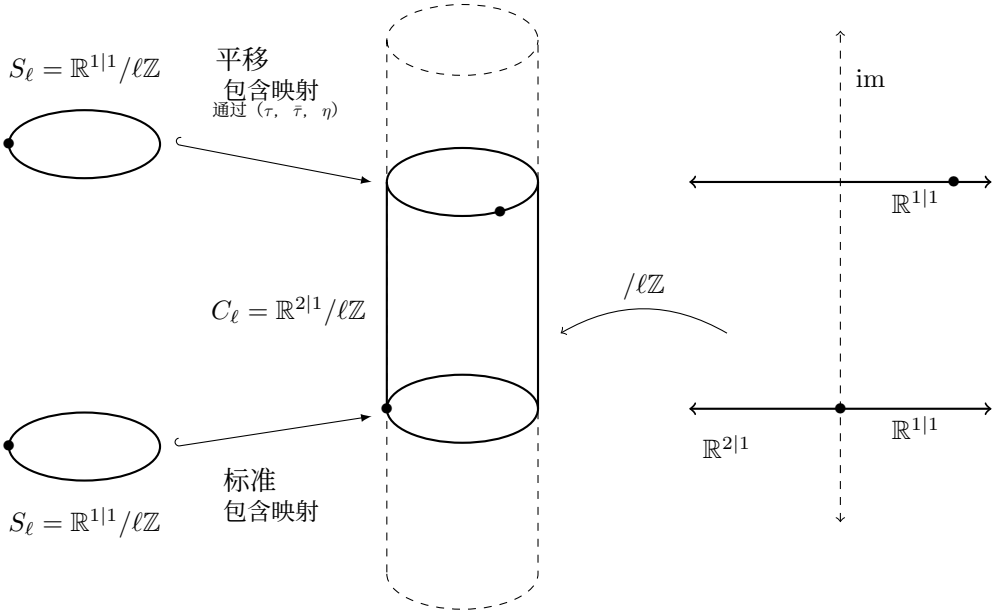


FIGURE 1. 一幅 2|1-欧几里得圆柱的图像。右侧， $\mathbb{R}^{2|1}$ 有两个嵌入的 $\mathbb{R}^{1|1}$ 副本：下方的副本是标准嵌入，上方的副本则是平移 $(\tau, \bar{\tau}, \eta) \in \mathbb{H}_+^{2|1}$ 所得。标记点对应于 $0 \in \mathbb{R}^{1|1}$的像。对 $\ell\mathbb{Z}$ 取商后，映射到一个含有一对嵌入超圆的超圆柱。标记点表示这些嵌入的参数化；参见（38）。

分别，其中

$$(162)\quad (\tau'_{\mathsf{in}}, \bar{\tau}'_{\mathsf{in}}, \eta'_{\mathsf{in}}) = (z, \bar{z}, \theta, u, \bar{u}) \cdot (\tau_{\mathsf{in}}, \bar{\tau}_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}}),\ (\tau'_{\mathsf{out}}, \bar{\tau}'_{\mathsf{out}}, \eta'_{\mathsf{out}}) = (z, \bar{z}, \theta, u, \bar{u}) \cdot (\tau_{\mathsf{out}}, \bar{\tau}_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}).$$

注记 5.7. 定义 5.6 对 2|1-欧几里得圆柱也有一个类似版本，其入射边界和出射边界是带有反周期自旋结构的超环，即 Neveu–Schwarz 扇区。根据引理 4.30，反周期圆柱的模空间是约化子空间 $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)\ /\mathbb{Z} \subset\ (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})\ /\mathbb{Z}$，因此不包含关于超李群 $\mathbb{E}^{2|1}$中奇方向的信息。因此，周期超圆柱的范畴比¯反周期超圆柱的范畴具有更丰富的超几何。特别是，奇算子 G_0 仅出现在与奇自旋圆相关的超半群表示（19）中。这与物理学文献相符：在黎曼曲面上研究 $\mathcal{N} = (0,1)$超对称时，（全局定义的）超对称算子要求存在一个处处非零的调和旋量；而只有当旋量丛可平凡化时，这种旋量才存在，例如参见 [AS02，2.2]。因此，对于¯圆柱，这个超对称算子 G_0 要求采用奇自旋结构。

引理 5.8. 由对象 (160) 和态射 (161) 构成的、在超流形上的群胚纤维范畴，存在一个来自集合预层的本质满函子

$$(163)\qquad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \left(\mathbb{H}_+^{2|1} \coprod \mathbb{H}_-^{2|1}\right))/\mathbb{Z}.$$

证明。 （163）中 $(\phi, \ell, \tau, \bar{\tau}, \eta)$ 的一个 S-点确定了一个 $2|1$-欧几里得圆柱族 via

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}_\ell & \xrightarrow{i_0} & \mathrm{C}_\ell & \xleftarrow{i_{\tau,\bar{\tau},\eta}} & \mathrm{S}_\ell \\ & & \downarrow \Phi & & \\ & & M, & & \end{array} \qquad \Phi\colon \mathrm{C}_\ell \xrightarrow{F_\ell} S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} M.$$

此赋值在 S 中是自然的，从而给出纤维范畴之间的函子。该函子是本质满的，因为任意一族 $2|1$-欧几里得圆柱都同构于一族具有 $(\tau_{\mathsf{in}},\ \bar{\tau}_{\mathsf{in}},\ \eta_{\mathsf{in}}) = 0$ 的圆柱，而这一同构由平移 $(z,\ \bar{z},\ \theta) = (-\tau_{\mathsf{in}},\ -\bar{\tau}_{\mathsf{in}},\ -\eta_{\mathsf{in}})$ 给出。□

预层（163）继承了超欧几里得等距变换的作用；根据引理 4.29，这些等距变换由 $\mathbb{E}^1 \rtimes \mathbb{Z}/4 \subset \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathsf{Spin}(2)$ 的 S-点确定。我们将特别关注 $\mathbb{Z}/4$ 的生成元，它对应于超欧几里得群的等距变换 $\sqrt{-1} \in U(1) \simeq \mathsf{Spin}(2) < \mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathsf{Spin}(2)$。该等距变换下降为 $2|1$-欧几里得圆柱之间的等距变换，记作 $\sqrt{\mathsf{fl}}$，

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbb{R}^{2|1} & \xrightarrow{(\sqrt{-1})\cdot} & S \times \mathbb{R}^{2|1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{C}_\ell & \xrightarrow[\sqrt{\mathsf{fl}}]{} & \mathrm{C}_\ell \end{array} \qquad \ell \in \mathbb{R}_{>0}(S) \tag{164}$$

其中，竖直箭头是式 (140) 中的 $\ell\mathbb{Z}$ 商映射，而这一记号源于 $\sqrt{\mathsf{fl}} \circ \sqrt{\mathsf{fl}} = \mathsf{fl}$ 是引理 4.9 中 C_ℓ 的自旋翻转对合。

引理 5.9. C_ℓ 的等距变换 (164) 确定了定义 5.6 中范畴的一个 4 阶自同构；将其限制到层 (163) 上时，该自同构由以下公式给出

$$(\Phi, \ell, (\tau, \bar{\tau}, \eta)) \mapsto (\Phi \circ \sqrt{\mathsf{fl}}^{-1}, \ell, (-\tau, -\bar{\tau}, \sqrt{-1}\eta)). \tag{165}$$

该自同构将正向和负向定向的 $2|1$ 欧几里得圆柱互换。

证明. 考虑式 (161) 的特化

$$\begin{array}{ccccc} & & i_{-\tau_{\mathsf{in}},-\bar{\tau}_{\mathsf{in}},\sqrt{-1}\eta_{\mathsf{in}}} & & \mathrm{C}_\ell & & i_{-\tau_{\mathsf{out}},-\bar{\tau}_{\mathsf{out}},\sqrt{-1}\eta_{\mathsf{out}}} & & \\ & \nearrow & & & \uparrow \sqrt{\mathsf{fl}} & & & \nwarrow & \\ \mathrm{S}_\ell & & & & & & & & \mathrm{S}_\ell \\ & \searrow & & & & & & \swarrow & \\ & & i_{\tau_{\mathsf{in}},\bar{\tau}_{\mathsf{in}},\eta_{\mathsf{in}}} & & \mathrm{C}_\ell & & i_{\tau_{\mathsf{out}},\bar{\tau}_{\mathsf{out}},\eta_{\mathsf{out}}} & & \\ & & & & \downarrow \Phi & & & & \\ & & & & M & & & & \end{array} \tag{166}$$

其中，超圆柱之间的等距变换是来自（164）的映射 $\sqrt{\mathsf{fl}}$。包含映射是使三角形交换的唯一箭头。图表（166）确定了对象（160）上的一个赋值，它通过将由（$z,\ \bar{z},\ \theta$）确定的等距变换（161）映射为由（$-z,\ -\bar{z},\ \sqrt{-1}\theta$）确定的等距变换，从而唯一地扩展为纤维化群胚范畴映射。将其特化到从（163）的一个 S-点得到的、在 M 上的 S-族 $2|1$-欧几里得圆柱，可得公式（165）。□

5.3. 关于 $2|1$中的 M-欧几里得圆柱的附加结构。 $2|1$-欧几里得几何具有一些附加结构，可丰富 $2|1$-欧几里得圆柱的几何。

引理 5.10。 超欧几里得流形的自同构 (106) 在 (163) 上确定了一个 $\mathbb{R}_{>0}$-作用，该作用（对于 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}(S)$）由下式给出

$$\mu \cdot (\Phi, \ell, (\tau, \bar{\tau}, \eta)) = (\Phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}, \mu^2 \ell, (\mu^2 \tau, \mu^2 \bar{\tau}, \mu \eta)). \tag{167}$$

证明。 论证与引理 5.9 的类似，但这里使用图表

$$\begin{array}{ccccc}
S_{\mu^2\ell} & \xrightarrow{i_{\mu^2\tau_{\mathsf{in}}, \mu^2\bar{\tau}_{\mathsf{in}}, \mu\eta_{\mathsf{in}}}} & C_{\mu^2\ell} & \xleftarrow{i_{\mu^2\tau_{\mathsf{out}}, \mu^2\bar{\tau}_{\mathsf{out}}, \mu\eta_{\mathsf{out}}}} & S_{\mu^2\ell} \\
\uparrow{\scriptstyle \mathsf{rg}_\mu} & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{rg}_\mu} & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{rg}_\mu} \\
\mathrm{S}_\ell & \xrightarrow[i_{\tau_{\mathsf{in}}, \bar{\tau}_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}}}]{} & \mathrm{C}_\ell & \xleftarrow[i_{\tau_{\mathsf{out}}, \bar{\tau}_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}}]{} & \mathrm{S}_\ell \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\
 & & M & &
\end{array} \tag{168}$$

其中竖直箭头由映射确定

$$\mathsf{rg}_\mu \colon \mathbb{R}^{2|1} \to \mathbb{R}^{2|1}, \qquad (z, \bar{z}, \theta) \mapsto (\mu^2 z, \mu^2 \bar{z}, \mu\theta) \tag{169}$$

该映射由对 (105) 作特化得到。 □

接下来，我们分析定向反转 (127) 和复共轭 (128) 的影响。对于超流形 N 的一个 S-点 $f \colon S \to N$，我们用记号 $\underline{f} \colon S \to N$ 表示由超流形共轭得到的 $\overline{N}$ 的对应 $\overline{S}$-点。因此，赋值 $N \mapsto \overline{N}$ 确定了一个层映射，它覆盖超流形上的复共轭函子；我们强调，它并不定义 N 与 $\overline{N}$ 之间的映射（这要求 N 具有实结构）。对于 $\mathbb{R}^{2|1}$ 的 S-点，这种记号会显得有些繁琐，但我们想不出更好的替代方案；例如，我们将写作

$$(\tau, \bar{\tau}, \eta) \in \mathbb{R}^{2|1}(S) \mapsto \overline{(\tau, \bar{\tau}, \eta)} \in \overline{\mathbb{R}}^{2|1}(\overline{S}).$$

最后，对于超流形上的层 $\mathcal{F}$，将共轭层定义为

$$\overline{\mathcal{F}}(S) := \mathcal{F}(\overline{S}). \tag{170}$$

注 5.11。 由 (170) 确定的预层函子，是超流形上的共轭函子与 Yoneda 嵌入复合后所得的 Kan 延拓。特别是，(170) 与可表层的标准记法相容。

引理 5.12. 将反射函子 (129) 限制到 $2|1$-欧几里得圆柱 over M 上后，它由从层 (163) 到其共轭层的一个映射确定

$$(\Phi, \ell, (\tau, \bar{\tau}, \eta)) \mapsto (\overline{\Phi} \circ \overline{\mathsf{or}}^{-1}, \bar{\ell}, \overline{(\bar{\tau}, \tau, \eta)}). \tag{171}$$

证明。 论证再次与上述论证平行，在其中我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}_{\bar{\ell}} & \xrightarrow[i_{\bar{\tau}_{\mathsf{in}}, \tau_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}}}]{} & \mathrm{C}_{\bar{\ell}} & \xleftarrow[i_{\bar{\tau}_{\mathsf{out}}, \tau_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}}]{} & \mathrm{S}_{\bar{\ell}} \\
\uparrow{\scriptstyle \overline{\mathsf{or}}} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\mathsf{or}}} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\mathsf{or}}} \\
\overline{\mathrm{S}_\ell} & \xrightarrow[\overline{i_{\tau_{\mathsf{in}}, \bar{\tau}_{\mathsf{in}}, \eta_{\mathsf{in}}}}]{} & \overline{\mathrm{C}_\ell} & \xleftarrow[\overline{i_{\tau_{\mathsf{out}}, \bar{\tau}_{\mathsf{out}}, \eta_{\mathsf{out}}}}]{} & \overline{\mathrm{S}_\ell} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\Phi}} & & \\
 & & \overline{M} \simeq M & &
\end{array} \tag{172}$$

其中 $S_{\bar\ell} = (\overline{S}\times \mathbb{R}^{1|1})/\bar\ell\mathbb{Z}$ 和 $C_{\bar\ell} = (\overline{S\times}\mathbb{R}^{2|1})/\bar\ell\mathbb{Z}$。中间一行是共轭函子作用于 M 上一个配边所得的值，而与上面一行的同构使用了定向反转映射。利用 (128)，我们在中间一行的S-族 $\mathsf{C}_{\bar\ell}\cong (S\rightthreetimes\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}$上得到一个 $2|$(1,0)-欧几里得结构，随后 (127) 为上面一行赋予一个 $2|$(0,1)-欧几里得结构。同构 $M\simeq M$ 使用了普通流形上的典范实结构。□

引理 5.13. 反射函子 (129) 将式 (164) 中定义的等距变换 $\sqrt{\mathrm{fl}}\colon C_\ell\to C_\ell$ 映射为等距变换 $\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1}\colon \mathsf{C}_{\bar\ell}\to C_{\bar\ell}$。等价地，映射 (165) 和 (171) 在族 C_ℓ 的自旋翻转自同构意义下交换，即 $\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1} = \mathrm{fl}\circ\sqrt{\mathrm{fl}}$。

证明. 该陈述基本上由引理 4.22 得出。为更明确地说明这一点，对图表 (166) 应用共轭函子，然后利用图表 (172)，我们得到一个 S-族的 $2|1$-欧几里得圆柱的等距变换

$$\mathrm{C}_{\bar\ell}\xrightarrow{\overline{\sqrt{\mathrm{fl}}}}\mathrm{C}_{\bar\ell}\xrightarrow{\overline{\mathsf{or}}}\mathrm{C}_{\bar\ell},\qquad (z,\bar z,\theta)\mapsto(-\bar z,-z,-i\theta),$$

而如果我们将 (172) 与 $\sqrt{\mathrm{fl}}$ 后复合，则得到一个等距变换

$$\mathrm{C}_{\bar\ell}\xrightarrow{\overline{\mathsf{or}}}\mathrm{C}_{\bar\ell}\xrightarrow{\sqrt{\mathrm{fl}}}\mathrm{C}_{\bar\ell},\qquad (z,\bar z,\theta)\mapsto(-\bar z,-z,i\theta),$$

Th这些映射相差 $-1\in\mathsf{Spin}(2)$ 的作用，即 C_ℓ 的自旋翻转自同构。□

5.4. **近乎常值超圆柱范畴**。将超欧几里得圆柱限制到其入射边界和出射边界，便确定了层的映射

$$\mathsf{in},\mathsf{out}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\rightrightarrows\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0}. \tag{173}$$

试图构造一个其源与靶数据由映射 (173) 确定的范畴，会遇到与无超对称情形相同的问题：$2|1$- 欧几里得圆柱的复合仅在部分情况下有定义，因为拼接未必光滑。不过，存在 (163) 的一个（有限维）子层，在其上光滑拼接是存在的，定义如下。

定义 5.14。 S-欧几里得圆柱的一个近乎常值族在 M 中是 (163) 的一个 S-点，且属于子层

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \subset & \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\\ (\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) & \mapsto & (\Phi_0\circ p,\ell,\tau,\bar\tau,\eta)\end{array} \tag{174}$$

对于映射 p

$$p\colon \mathrm{C}_\ell = (S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\to S\times\mathbb{R}^{0|1}$$

由标准投影 $\mathbb{R}^{2|1}\to\mathbb{R}^{0|1}$ 确定，$(z,\ \bar z,\ \theta)\mapsto\theta$。

将 (173) 限制到近乎常值的 $2|1$-欧几里得圆柱上，可得到映射

$$\mathsf{in},\mathsf{out}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\rightrightarrows\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times\mathbb{R}_{>0}, \tag{175}$$

其取值为

$$\mathsf{in}(\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) = (\Phi_0,\ell),\qquad \mathsf{out}(\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) = (\Phi_0\circ L_\eta^{-1},\ell). \tag{176}$$

其中 $L_\eta\colon\ S\times\mathbb{R}^{0|1}\to S\times\mathbb{R}^{0|1}$ 是由 $\eta\in\mathbb{E}^{0|1}(S)$ 给出的左平移。

引理 5.15. 假设 $\Sigma = (\Phi,\ \ell,\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta)$ 和 $\Sigma' = (\Phi',\ \ell,\ \tau',\ \bar\tau',\ \eta')$ 是 S 中正向定向（分别为负向定向）的近乎常值 $2|1$-欧几里得圆柱族，并且 $\mathsf{out}(\Sigma) = \mathsf{in}(\Sigma')$。那么存在定义良好的拼接 $\Sigma'*\Sigma$，它唯一确定了 (163) 的一个 S-点，其像位于 M 中近乎常值 $2|1$-欧几里得圆柱的子层内。

证明. 在普遍情形（即 S 是 (174) 中的可表子层）下，正向定向或负向定向超圆柱的拼接由下式给出

$$(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}) \times_{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0}} (\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z})$$
$$\simeq \text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{恒等} \times m} \text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z} \quad (177)$$

其中 m 由乘法在 $\mathbb{E}^{2|1}$ 上限制到 $\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}$ 所确定。结论得证。□

定义 5.16。 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的超李范畴，其对象和态射为，

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)) = \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0} \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0},$$

$$\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)) = \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{+}^{2|1})/\mathbb{Z} \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{-}^{2|1})/\mathbb{Z}$$

其中，源和目标由入射边界和出射边界 (175) 给出，而单位和复合由 $\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}$ 上的超半群结构确定（使用引理 5.15）。

引理 5.9 给出 $\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M))$ 上由 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 生成的一个 $\mathbb{Z}/4$-作用，其定义为公式 (165) 在子层 (174) 上的限制。沿着 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 中的单位映射进行限制，可得到 $\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M))$ 上的一个 $\mathbb{Z}/4$-作用，它对应于超圆上的 Pin 翻转，见注 4.23。$\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 中的源、目标、单位和复合映射都是 $\mathbb{Z}/4$-等变的。这使得我们可以构造以下内于层堆的范畴。

定义 5.17。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 中由近乎常值的欧几里得超圆柱构成的内范畴，其对象和态射为：

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{2|1}(M)) = (\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0} \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0})/\!\!/\mathbb{Z}/4,$$
$$\mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1}(M)) = (\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{+}^{2|1})/\mathbb{Z} \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{-}^{2|1})/\mathbb{Z})$$
$$/\!\!/\mathbb{Z}/4$$

其中，源、目标、单位和复合由 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 中的 $\mathbb{Z}/4$-等变结构映射确定。

注 5.18。 根据注 5.5， $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 来自一个严格内在于超李群胚的范畴，其中复合严格满足结合律。从李群胚到栈的函子恢复了上文定义的 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$。内范畴的 $\mathbb{Z}/4$-覆盖

$$\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M) \to \mathscr{C}^{2|1}(M) \tag{178}$$

在对象和态射上是一个群胚商。因此，可以通过从 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的对象和态射出发的 $\mathbb{Z}/4$-等变映射，构造一个从 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 出发的函子。

5.5. **通过 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上的微分形式刻画 M 的结构映射**。超流形 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \simeq \Pi T M_{\mathbb{C}}$ 与奇切丛的同构，给出了用微分形式描述 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的对象和态射上的函数的方式：

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0}) &\simeq C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \otimes C^\infty(\mathbb{R}_{>0}) \\ &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})), \end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}) &\simeq C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \otimes C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}) \\ &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z})). \end{aligned} \tag{180}$$

其中 $\otimes$是射影张量积（例如，参见 [HST10，例 49]）。我们进一步观察到，对奇坐标 $\eta \in C^\infty(\mathbb{H}_\pm^{2|1})$进行泰勒展开可给出一个代数同构

$$C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}) \simeq C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z})[\eta], \tag{181}$$

并且存在一个单射代数同态

$$C^\infty(\mathbb{R}_{>0}) \hookrightarrow C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}) \tag{182}$$

由投影 $(\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}\to \mathbb{R}_{>0}$ 诱导，即将 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的函数视为 $(\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}$ 上关于 $\mathbb{H}_\pm^{2|1}$ 为常值的函数。考虑投影和作用映射

$$\mathsf{pr}\colon ((\mathbb{R}_{>0}\times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)\to \mathbb{R}_{>0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$$

作用 $:((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})\times$ 上的映射$(\mathbb{R}^{0|1}, M)\xrightarrow{p}\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}^{0|1}\times$ 到映射$(\mathbb{R}^{0|1}, M)\xrightarrow{\mathrm{id}\ \mathbb{R}_{>0}\times a}\mathbb{R}_{>0}\times$ 到映射$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$，其中 p 是一个中间投影，而 a 是 $\mathbb{R}^{0|1}$ 在映射$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上通过前复合定义的左作用。

引理 5.19。利用 (179) 和 (180)，源映射和目标映射 $\mathsf{s},\mathsf{t}:\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))\rightrightarrows\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))$ 由以下超代数映射确定

$$\mathsf{s}^*,\mathsf{t}^*:\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))\to\Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}))$$

$$\mathsf{s}^*(\alpha)=\mathsf{pr}^*(\alpha)=\alpha,\qquad \mathsf{t}^*(\alpha)=\mathsf{act}^*(\alpha)=(\alpha-\eta d\alpha), \tag{183}$$

其中，我们使用由投影$\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1}\to\mathbb{R}_{>0}$诱导的单射映射 $C^\infty(\mathbb{R}_{>0})\hookrightarrow C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}$，将 $C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$-值形式视为 $C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}$-值形式。

证明。$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$上的 $\mathbb{R}^{0|1}$-作用可用微分形式上的一个映射来刻画 [HKST11，引理 3.8]

$$\begin{aligned}\Omega^\bullet(M)\simeq C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)) &\to C^\infty(\mathbb{R}^{0|1}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M))\simeq\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}^{0|1}))\\ \alpha &\mapsto \alpha-\eta d\alpha,\quad \alpha\in\Omega^\bullet(M)\quad C^\infty(\mathbb{R}^{0|1})\simeq C^\infty(\mathbb{R})[\eta]\end{aligned} \tag{184}$$

其中，d 是 $\Omega^\bullet(M)$ 上的德拉姆微分。由式 (176) 中对源映射和目标映射的描述，即可得出结论。□

注 5.20。公式 (184) 与 [HKST11，引理 3.8] 相差一个符号；他们的公式针对的是 $\Pi TM_{\mathbb{C}}$上的 $\mathbb{R}^{0|1}$ 右作用，而公式 (184) 针对的是左作用。

引理 5.21. 由 (165) 给出的 $\mathbb{Z}/4$ 在 $\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))$ 和 $\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))$ 上的作用由以下内容确定

$$\sqrt{\mathrm{fl}}\colon \mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))\to\mathrm{Mor}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M)),\quad (\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta)\mapsto(\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}},\ell,-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta). \tag{185}$$

用超代数映射表示，

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathrm{Fl}}^*:\Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) &\to \Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\mp^{2|1})/\mathbb{Z}))\\ \sqrt{\mathrm{Fl}}^*(\alpha) &= (\sqrt{-1})^{-|\alpha|}\alpha(\ell,-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta)\end{aligned} \tag{186}$$

证明. 这由引理 5.9 以及 $\mathbb{R}^{0|1}\rtimes\mathbb{C}^\times$ 在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上的作用的刻画得出，该刻画用代数映射 [HKST11, Lemma 3.8] 表示

$$\Omega^\bullet(M)\simeq C^\infty(\text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},\ M))\to C^\infty(\mathbb{R}^{0|1}\rtimes\mathbb{C}^\times\times\text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},\ M))\simeq\Omega^\bullet(M;\ C^\infty(\mathbb{C}^\times)[\eta]), \tag{187}$$

其中 (186) 限制为 $\mathbb{Z}/4\subset\mathbb{C}^\times$。□

引理 5.22. 映射 (167) 和 (171) 确定了光滑函子

$$\mathsf{RG}_\mu\colon \mathscr{C}^{2|1}(M)\to\mathscr{C}^{2|1}(M),\qquad (\Phi,\mu,\ell,\tau,\bar\tau,\eta,\sqrt{\mathrm{Fl}})\mapsto(\Phi\circ\mathsf{rg}_\mu^{-1},\mu^2\ell,\mu^2\tau,\mu^2\bar\tau,\mu\eta,\sqrt{\mathrm{Fl}})$$
$$\dagger\colon \mathscr{C}^{2|1}(M)\to\mathscr{C}^{2|1}(M),\qquad (\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta,\sqrt{\mathrm{Fl}})\mapsto\overline{(\Phi\circ\mathsf{or}^{-1},\ell,\bar\tau,\tau,\eta,\sqrt{\mathrm{Fl}}^{-1})}$$

由 $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1}(M))$ 中对象的 S-点上的指定映射给出。此外，我们有以下光滑函子等式

$$\mathsf{RG}_\mu\circ\mathsf{RG}_{\mu'}=\mathsf{RG}_{\mu\mu'},\qquad \bar\dagger\circ\dagger=\mathrm{id}, \tag{188}$$

也就是说，函子 RG_μ 确定了一个 $\mathbb{R}_{>0}$ 作用，而 $\dagger$ 确定了一个覆盖超流形共轭的对合。函子 $\dagger$ 在 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上确定了一个反射结构，其含义见定义 C.19。

证明。 $\mathbb{Z}/4$-覆盖 $\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M)$ 上的函子由引理 5.10 和 5.12 确定。由于$\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 与伸缩作用可交换，$\overline{}$ 因此函子 $\mathsf{RG}_\mu\colon \mathscr{C}^{2|1}(M)\to\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 所需的 $\mathbb{Z}/4$-等变性质显然成立。根据引理 5.13，函子 $\dagger$源自相对于 $\mathbb{Z}/4$ 上取逆同态的 $\mathbb{Z}/4$-等变性质，

$$\bar\dagger\circ\dagger=\mathrm{id},\quad \overline{\sqrt{\mathrm{fl}}}\circ\dagger=\dagger\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1} \tag{189}$$

根据定义，这确定了 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上的反射结构。 □

推论 5.23。 函子 RG_μ 和 $\dagger$ 由以下超代数映射确定 s

$$\begin{aligned}\mathsf{RG}_\mu^*\colon \Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}))&\to\Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}))\\ \mathsf{RG}_\mu^*(\alpha)&=\mu^{-|\alpha|}\alpha\end{aligned} \tag{190}$$

$$\begin{aligned}\dagger^*\colon \Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}))&\to\overline{\Omega^\bullet(M;C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\mp^{2|1})/\mathbb{Z}))}\\ \dagger^*(\alpha)&=\overline{\alpha}(\ell,\bar\tau,\tau,\eta)\end{aligned} \tag{191}$$

其中，$|\alpha|$ 表示 α 的 $\mathbb{Z}$ 分次（作为微分形式），α 是 α 的通常复共轭（作为定义在 $\mathbb{C}$ 上的微分形式），而 $\ell\in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ 和 $(\tau,\bar\tau,\eta)\in C^\infty(\mathbb{H}_\pm^{2|1})$ 是标准坐标。

证明。 将 (187) 限制到 $\mathbb{R}_{>0}\subset\mathbb{C}^\times$，即可得到 (190)；而 (191) 则利用了这样一个事实：$\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\simeq\Pi TM_{\mathbb{C}}$ 的共轭超流形对应于 $\mathbb{C}$ 值微分形式上的相反复结构。□

根据定义 4.28，我们回顾一下，$\mathcal{L}^{2|1}(M):=\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2,M)\times s\mathsf{Lat}$。

引理 5.24. 存在一个包含映射张成

$$\mathcal{L}^{2|1}(M)\hookleftarrow\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1}(M)) \tag{192}$$

将 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 中的一个态射子空间与 M 的超双环空间的 S-点识别起来。

证明. 右侧的包含映射显然由定义得出。左侧的包含映射由以下内容确定

$$(\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,0)\mapsto(\Phi_0\circ p,(\ell,\ell,0),(\tau,\bar\tau,0))=(\Phi,\Lambda)\in(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2,M)\times s\mathsf{Lat})(S).$$

°我们来验证上述定义是良定义的。将 $(\tau,\bar\tau,\theta)\in\mathbb{H}_+(S)\subset\mathbb{H}_+(S)$ 限制到开半平面，可确保这确实给出一个格，而上半平面条件则意味着该格带有定向。因此，上述公式给出了一个 S点$\Lambda\in s\mathsf{Lat}(S)$。映射空间上的包含映射来自对 (174) 的限制：根据 (176)（取 $\eta=0$），所得映射 $\Phi=\Phi_0\circ p\colon (S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\to M$ 可下降为一个从 $\mathbb{Z}^2$商出发、模掉 Λ 的映射。证明完毕。□

6. Supercylinders and supertori as 2|1-Euclidean bordisms

本节的主要目标是构造一个内部函子

$$\mathscr{C}^{2|1}(M) \to 2|1\text{-EBord}(M) \tag{193}$$

从 M 中的近乎常值超圆柱范畴（见定义 5.17）到 Stolz 和 Teichner 在 M 上的 $2|1$-欧几里得配边范畴。粗略地说，(193) 将构造 [BE22，引理 3.15]范畴化。

$$\mathcal{L}_0^{2|1}(M) \to 2|1\text{-EBord}(M), \tag{194}$$

该函子将 M 中的近常值超欧几里得环面（见定义 4.28）映到一个配边，其源和靶都是 M 中的空集 $2|1$-欧几里得流形。

为了解释 (193) 和 (194) 之间的关系，我们构造了 (193) 的变体，将超圆柱视为具有不同源与靶数据选择的配边，例如，视为从空集到超圆之对的配边（位于 M 中）。这些配边的复合对应于超圆柱的拼接，或粘合后形成超环面，因此推广了 (39) 中描绘的二维欧几里得场论的基本运算。总之， $2|1$-欧几里得配边的几何为第 2 节回顾的 Witten 论证提供了族的推广。

注 6.1。 以下构造均在 [ST11] 的框架内表述。不过，(193) 及其变体都是完全几何性的构造，我们认为它们适用于任何合理定义的 $2|1$-欧几里得配边范畴。

注 6.2。 归根结底，定理 1.1、1.2 和 1.3 只涉及映射到 M 后几乎为常值的超圆柱，见 §6.5。不过，为求完整，我们构造了映射到 M 的任意映射所对应的超圆柱族。在不交并和复合下，预期这些族能生成 $2|1$-EBord(M) 的整个 Ramond 扇区，即其对象为带周期自旋结构的 M 中超环的不交并的配边子范畴。这样，本节的结果便对 Stolz 和 Teichner 在 M [ST11, §4.3] 上的 $2|1$-欧几里得配边范畴中的“一半”给出了明确的几何描述。另一半（即 Neveu–Schwarz 扇区）也可以用以下技术描述。根据注 5.7，Neveu–Schwarz 扇区的结构稍显平淡。

6.1. 中的配边族 $2|1$-EBord(M)。

关于 Stolz 和 Teichner 的 $2|1$-欧几里得配边范畴在 M 上的定义和记号的简要回顾，请参见 §C.4。

定义 6.3。 定义叠映射

$$\mathsf{S}_M^+, \mathsf{S}_M^- \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \tag{195}$$

它将源中的一个 S-点 (ϕ, ℓ) 对应到群胚 Ob($2|1$-EBord(M))(S) 中的对象

$$\begin{gathered} \mathrm{S}_\ell = (S \times \mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z} = Y^c \subset Y = S \times \mathbb{R}^{2|1}/\ell\mathbb{Z} = \mathrm{C}_\ell \xrightarrow{\Phi} M \\ Y \setminus Y^c \simeq (S \times \mathring{\mathbb{H}}_+^{2|1})/\mathbb{Z} \coprod (S \times \mathring{\mathbb{H}}_-^{2|1})/\mathbb{Z} = \begin{cases} Y^+ \coprod Y^- & (\mathrm{S}_\ell^+, \Phi) \\ Y^- \coprod Y^+ & (\mathrm{S}_\ell^-, \Phi) \end{cases} \end{gathered} \tag{196}$$

其中 F_ℓ 是超流形之间的同构 (144)，而 $\Phi = \phi \circ F_\ell$。对于 (196) 中的对象，我们采用简写记号 $(\mathrm{S}_\ell^\pm, \Phi)$。如第二行所示，$(\mathrm{S}_\ell^+, \Phi)$ 和 $(\mathrm{S}_\ell^-, \Phi)$ 之间的区别在于领圈的划分。通过拉回族，上述对应在 S 中是自然的，因此得到所声称的叠映射 (195)。

注记 6.4. 我们继续使用小写记号 ϕ: $S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z} \to M$ 表示从 S 族标准圆柱出发的映射，并用 $\Phi = \phi \circ F_\ell$: $(S \times \mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z} \to M$ 表示由 ℓ 确定的、从欧几里得族出发的映射。特别地，Map($\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M$) 的 S-点 $\times \mathbb{R}_{>0}$

可表示为 (ℓ, ϕ) 或 (ℓ, Φ)，具体取决于使用 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)$ 的哪一种（等价的）参数化更方便。

注记 6.5。 $^{+}_{M}$ 与 $^{-}_{M}$ 这两个族在 $2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$ 中同构，其同构由等距变换 $\sqrt{\mathrm{fl}}$ 给出；该变换定义于（164），并交换领圈的划分；参见引理 6.22。就我们的目的而言，将这一同构作为附加数据加以保留会更方便：等距变换 $\sqrt{\mathrm{fl}}$ 最终将为态空间赋予实结构，本质上采用的是 [GPPV21, 3.2.2] 中的论证。

注记 6.6。 S 的一对 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)$ 中的点，在 $\mathsf{S}^{\pm}_{M}$ 下确定同构对象，只要映射 $S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z} \to M$ 在与 Y^{+} 对应的包含映射 $S \times \mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z} \hookrightarrow S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}$ 的单侧邻域上相同。因此，定义 6.3 中的族是从 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)$ 的一个商（在层范畴中）拉回的，该商以超圆柱的单侧芽参数化 M中的超圆。

定义 6.7。 定义叠映射

$$\begin{aligned} &\mathsf{C}^{+}_{M} \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{+})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ &\mathsf{C}^{-}_{M} \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{-})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{aligned} \tag{197}$$

它将源的一个 S-点（$\phi,\ \ell,\ \tau,\ \bar{\tau},\ \eta$）映射为 M 上的 S 族超流形，

$$\mathrm{S}_{\ell} \coprod \mathrm{S}_{\ell} = (S \times \mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z} \coprod (S \times \mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{i_0 \coprod i_{\tau,\bar{\tau},\eta}} \mathrm{C}_{\ell} = (S \times \mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi} M \tag{198}$$

其中 $i_{\tau,\ \bar{\tau},\ \eta}$ 是 (141) 中的包含映射，$\Phi := \phi \circ F_{\ell}$ 是 (144) 中为 F_{ℓ} 定义的映射。为了根据数据 (198) 构造群胚 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))(S)$ 中的一个对象，我们需要选择源和目标。取

$$(Y^{c}_{\mathsf{in}}, Y^{c}_{\mathsf{out}}) = \begin{cases} \left((\mathrm{S}^{+}_{\ell}, \Phi), (\mathrm{S}^{+}_{\ell}, \Phi \circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta})\right) & \Longrightarrow (\mathrm{C}^{+}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta}, \Phi), \quad (\ell, \tau, \bar{\tau}, \eta) \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{+})/\mathbb{Z})(S) \\ \left((\mathrm{S}^{-}_{\ell}, \Phi), (\mathrm{S}^{-}_{\ell}, \Phi \circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta})\right) & \Longrightarrow (\mathrm{C}^{-}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta}, \Phi), \quad (\ell, \tau, \bar{\tau}, \eta) \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{-})/\mathbb{Z})(S) \end{cases} \tag{199}$$

也就是说，(198) 中余积的排列顺序是先列出源，再列出目标。对于 (199) 中的对象，我们采用简写记号 $(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell\ \tau,\ \bar{\tau},\ \eta,\ \Phi})$。

注 6.8。 与注 6.6 类似，$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)\ \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 的 S-点在 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$ 下确定 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中的同构对象，前提是关联映射 $S \times \mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z} \to M$ 在配边核心的一个单侧邻域上相同；因此，该族可由层中的关联商拉回得到。

改变源与靶数据（199）会引起族（197）的变化。

定义 6.9. 定义叠映射

$$\begin{aligned} &\mathsf{L}^{\pm}_{M} \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ &\mathsf{R}^{\pm}_{M} \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{aligned} \tag{200}$$

如下。给定源的一个 S-点（$\Phi,\ \ell,\ \tau,\ \bar{\tau},\ \eta$），取如上所述的（198），但选择源与靶数据

$$(Y^{c}_{\mathsf{in}}, Y^{c}_{\mathsf{out}}) = \begin{cases} \left(((\mathrm{S}^{\pm}_{\ell}, \Phi) \coprod (\mathrm{S}^{\mp}_{\ell}, \Phi \circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta})), \emptyset\right) & \Longrightarrow (\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta}, \Phi) \quad (\ell, \tau, \bar{\tau}, \eta) \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z})(S) \\ \left(\emptyset, ((\mathrm{S}^{\mp}_{\ell}, \Phi) \coprod (\mathrm{S}^{\pm}_{\ell}, \Phi \circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta}))\right) & \Longrightarrow (\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta}, \Phi) \quad (\ell, \tau, \bar{\tau}, \eta) \in ((\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z})(S), \end{cases} \tag{201}$$

也就是说，第一行中目标为空，第二行中源为空。

备注 6.10。 定义 6.7 和 6.9 中还隐含地需要选择额外的领圈数据；这些选择必须满足栈 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 定义中的技术条件 [ST11，条件（+），第 30] 页。当领圈数据的选择存在时，任意一对选择都会在本质上通过取领圈的交集而导出 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中同构的对象

。在上述族中，所需的选择确实存在，因此函子 (197) 和 (200) 在典范同构意义下唯一。我们注意到，在 $(\mathsf{R}^{\pm}_{\ell},\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta,\ \Phi)$ 的情形下，将 $(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)$ 限制到开半平面是领圈数据存在的必要条件：当 $(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)$ 趋近边界 $\mathbb{R}^{1|1}\subset\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ 时，(200) 中的族 $(\mathsf{R}^{\pm}_{\ell},\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta,\ \Phi)$ 在 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中没有极限；参见 [ST11，第 3 节中“右圆柱”的模空间。2]

6.2. 配边的源、靶、单位与复合。 由 $\mathsf{C}^{\pm}_M$、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 分类的配边族的源与靶已在其定义中指定。等价地，这些源与靶数据可以用栈的 2-交换图来表述，其中 2-交换性数据为恒等映射。例如，我们有

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad\mathsf{C}^{\pm}_M\quad} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \downarrow{\scriptstyle(\mathsf{pr}_{\pm},\mathsf{act}_{\pm})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{s}\times\mathsf{t}}\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow[\mathsf{S}^{\pm}_M\times\mathsf{S}^{\pm}_M]{} & \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\times\mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}\tag{202}$$

其中 pr 和 act 分别是投影和作用映射（参见 (183)）

$$\begin{aligned}\mathsf{pr},\ \mathsf{act}\colon \mathbb{E}^{2|1}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M) &\to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\\ \mathsf{pr}(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau) &= (\Phi,\ell)\\ \mathsf{act}(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &= (\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta},\ell),\end{aligned}\tag{203}$$

对于 $(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)\ \in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{E}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z})(S)$ 和 $\Phi\colon(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\to M$，且 $\mathsf{pr}_{+},\mathsf{act}_{+}$（分别地，$\mathsf{pr}_{-},\mathsf{act}_{-}$）是 pr,act 在 $\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\subset\mathbb{E}^{2|1}$ 上的限制。$2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$ 中的其他结构映射会导出类似的 2-交换图；下面一系列命题将针对所关注的情形具体说明这些图。

命题 6.11。 设 u 是 $2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$ 中的单位函子。存在一个栈的 2-交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\quad\mathsf{S}^{\pm}_M\quad} & \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)}\times i_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{u}}\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\mathsf{C}^{\pm}_M]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}\tag{204}$$

其中 $i_0\colon\mathbb{R}_{>0}\hookrightarrow(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 是沿 $0\in\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ 的包含映射。设 c 是 $2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$ 中的复合函子。存在一个栈的 2-交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{C}^{\pm}_M\circ p_2\times\mathsf{C}^{\pm}_M\circ p_1} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}}\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\mathsf{C}^{\pm}_M]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}\tag{205}$$

其中顶部水平箭头由族 $\mathsf{C}^{\pm}_M$ 和映射确定

$$\begin{aligned}&p_i\colon\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\to\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z},\\ &p_1\big(\Phi,\ell,(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau,\bar\tau,\eta)\big)=(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta),\\ &p_2\big(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta')\big)=(\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta},\ell,\tau',\bar\tau',\eta')\end{aligned}\tag{206}$$

而 m 定义为

$$\mathsf{m}\big(\Phi,\ell,(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau,\bar\tau,\eta)\big)=(\Phi,\ell,\tau'+\tau,\bar\tau'+\bar\tau+\eta'\eta,\eta'+\eta).\tag{207}$$

证明。 图表 (204) 的交换性几乎是显而易见的；唯一微妙之处在于构造族 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$ 时对领圈的选择。实际上，这种选择带来的并非严格交换图，而是 2-交换性数据；这些数据来自通过收缩 (196) 中的领圈而得到的 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 对象之间的同构；参见注 6.10。

转向图表 (205)， S-族 $(\mathsf{C}^{\pm}_{\ell}{}_{\tau,\ ,\ \bar\tau,\ \eta},\ \Phi)$ 的定义以及映射 (206) 给出了一个映射，指向纤维积的 S-点（严格纤维积与弱纤维积相同，见注 C.29）

$$\big(\ell,(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau,\bar\tau,\eta),\Phi\big)\mapsto\big((\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau',\bar\tau',\eta'},\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}),(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi)\big).$$

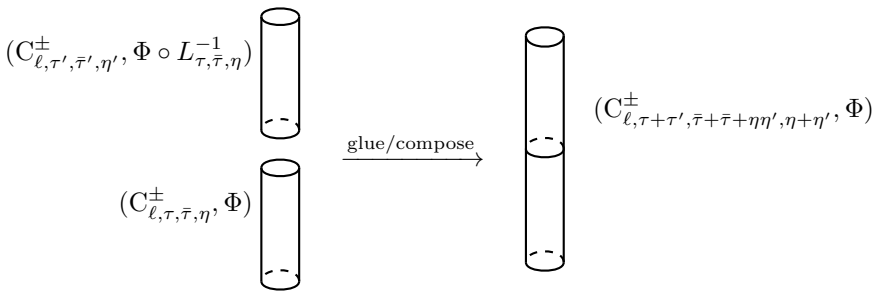
2-交换性数据的构造源于展开函子 c 的定义，该定义来自 [ST11，第 20] 页，即配边的复合。考虑图表

$$\mathrm{S}_{\ell}\coprod\mathrm{S}_{\ell}\coprod\mathrm{S}_{\ell}\xrightarrow{i_0\amalg i_{\tau,\bar\tau,\eta}\amalg i_{(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)}}(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\mathbb{Z}\xrightarrow{\Phi}M \tag{208}$$

其中包含映射如 (141) 所示。忘掉这三个包含映射中的任意一个，我们便得到 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$ 的源经由输入数据 (198) 的三个可能的 S-点：忘掉$i_{(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)}$ 得到配边族 $(\mathsf{C}^{\pm}_{\ell}{}_{\tau,\ ,\bar\tau,\eta},\Phi)$，忘掉 $i_{\tau,\bar\tau,\eta}$ 得到 S-配边族 $(\mathsf{C}^{\pm}_{\ell}{}_{(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)}\Phi)$，而忘掉 i_0 得到一个与 $(\mathsf{C}_{\ell,\tau',\bar\tau',\eta'},\Phi\circ L^{-1}_{\tau},_{\bar\tau,\eta})$ 同构的族，其同构由左平移映射 $L_{\tau,\bar\tau,\eta}$ 指定。这三个由 (208) 得到的配边族，分别与纤维积的两个投影以及函子 c 的取值相一致。图表 (205) 的交换性中唯一微妙之处，同样在于这些配边族定义中领圈的选择，而这又取决于函子 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$ 的构造中的选择。由于任意一对选择都会导出同构的配边，因此我们在 (205) 中得到典范 2-交换性数据。□

注记 6.12。 与 (205) 的交换性对应的图示为

(209)



也就是说，超圆柱的粘合，其中复合沿竖直方向表示，而 $(\ell,\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta)$，$(\ell,\ \tau',\ \bar\tau',\ \eta')\in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z})(S)$；参见 (39) 中左侧的图示。

记号 6.13。 令 $\mathsf{C}^{\pm}_{0}$表示复合 $\mathsf{u}\circ\mathsf{S}^{\pm}_{M}$，

$$\mathsf{C}^{\pm}_{0}\colon\mathbb{R}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\to\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)).$$

对于上方源中的一个 S-点，令 $(\mathsf{C}^{\pm}_{\ell}{}_{0,\ ,\ }\Phi)$ 表示与之关联的 S-族（恒等）2|1-欧几里得配边。

命题 6.14. 存在一个 2-交换的栈图表

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{L}^{\pm}_{M}\circ p_2\times(\mathsf{C}^{\pm}_{M}\circ p_1\amalg\mathsf{C}^{\mp}_{M}\circ p_3)} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]}\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}}\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\mathsf{L}^{\pm}_{M}]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array} \tag{210}$$

其中，上方的水平箭头由族 $\mathsf{L}_M^{\pm}$、$\mathsf{C}_M^{\pm}$ 和 $\mathsf{C}_M^{\mp}$ 及映射决定

$$p_i\colon \text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathbb{H}_{\mp}^{2|1})/\mathbb{Z}\to\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}$$

$$p_1(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau'',\bar\tau'',\eta''))=(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta), \tag{211}$$

$$p_2(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau'',\bar\tau'',\eta''))=(\Phi\circ L_{\tau,\bar\tau,\eta}^{-1},\tau',\bar\tau',\eta') \tag{212}$$

$$p_3\colon \text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathbb{H}_{\mp}^{2|1})/\mathbb{Z}\to\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\mp}^{2|1})/\mathbb{Z}$$

$$p_3(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau'',\bar\tau'',\eta''))=(\Phi\circ L_{\tau,\bar\tau,\eta}^{-1}\circ L_{\tau',\bar\tau',\eta'}^{-1},\ell,\tau'',\bar\tau'',\eta'')$$

左侧的竖直箭头则由 $\mathbb{E}^{2|1}$中的乘法决定，

$$(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau'',\bar\tau'',\eta''))\mapsto(\Phi,\ell,(-\tau'',-\bar\tau'',-\eta'')\cdot(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)) \tag{213}$$

证明。 根据源与靶数据的定义，(210) 中的上方映射确实给出纤维积中的一个对象；用 S-配边族来表示，即为

$$^{(\Phi,\ \ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'),(\tau'',\bar\tau'',\eta''))\mapsto\Big((\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau',\bar\tau',\theta},\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}),\big((\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi)\coprod(C^{\mp}_{\ell,\tau'',\bar\tau'',\eta''},\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}\circ L^{-1}_{\tau',\bar\tau',\eta'})\big)\Big).}$$

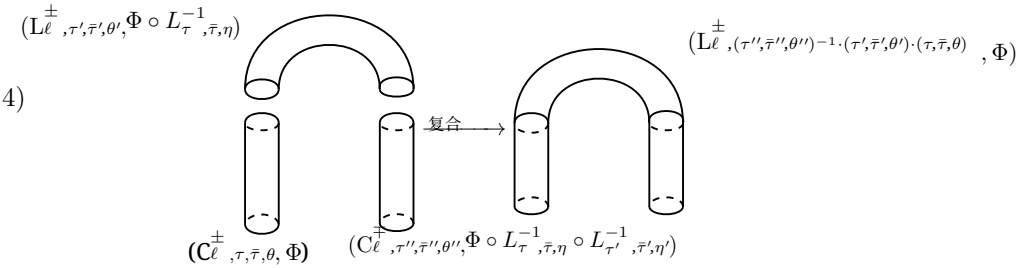
2-交换性数据再次来自展开函子 c 的定义。与之前类似，考虑图表

$$\mathrm{S}_\ell\coprod\mathrm{S}_\ell\coprod\mathrm{S}_\ell\coprod\mathrm{S}_\ell\xrightarrow{i_0\coprod i_{\tau,\bar\tau,\eta}\coprod i_{(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)}\coprod i_{(\tau'',\bar\tau'',\eta'')^{-1}\cdot(\tau',\bar\tau',\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)}}(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{\Phi}M.$$

在这种情况下，在余积中忘掉任意两个因子，就会得到一个S-bordism 族的输入数据。例如，忘掉中间两个因子，对应于 S- bordism 族 $(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell\ ,\ (\tau'',\ \bar\tau'',\ \eta'')^{-1}\cdot(\tau',\ \bar\tau',\ \eta')\cdot(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)}\Phi)$，这正是所声称的复合。类似地，通过忘掉适当的一对包含映射，并对 $(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}$ 施加平移作用，可以提取 (212) 中的配边。□

注 6.15。对应于 (210) 交换性的图示为

(214)



其中，配边的方向沿垂直方向定向，且 $(\ell,\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta)$，$(\ell,\ \tau',\ \bar\tau',\ \eta')\ \in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z})(S)$ 和 $(\ell,\ \tau'',\ \bar\tau'',\ \eta'')\ \in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\mp}^{2|1})/\mathbb{Z})(S)$。

下面说明，沿包含映射 $\mathring{\mathbb{H}}_{\pm}^{2|1}\subset\mathbb{H}^{2|1}$ 对配边族 $\mathsf{C}_M^{\pm}$ 的限制可分解为一个涉及 $\mathsf{L}_M^{\pm}$ 和 $\mathsf{R}_M^{\pm}$ 的复合。证明采用了与上文类似的技巧。

命题 6.16. 存在一个栈的 2-交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathring{\mathbb{H}}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{(\mathsf{L}_M^{\pm}\circ p_1\coprod\mathsf{C}_0^{\pm}\circ q_2)\times(\mathsf{C}_0^{\pm}\circ q_1\coprod\mathsf{R}_M^{\pm}\circ q_2)} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}}\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\mathsf{C}_M^{\pm}]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array} \tag{215}$$

其中顶部的水平箭头由族 $\mathsf{L}_M^{\pm}$、$\mathsf{R}_M^{\pm}$、$\mathsf{C}_0^{\pm}$ 以及映射确定

$$p_i\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathring{\mathbb{H}}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}\to\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}$$

$$p_1(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))=(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta), \tag{216}$$

$$p_2(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))=(\tau',\bar\tau',\eta',\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}), \tag{217}$$

$$q_i\colon:\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}\times\mathring{\mathbb{H}}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)$$

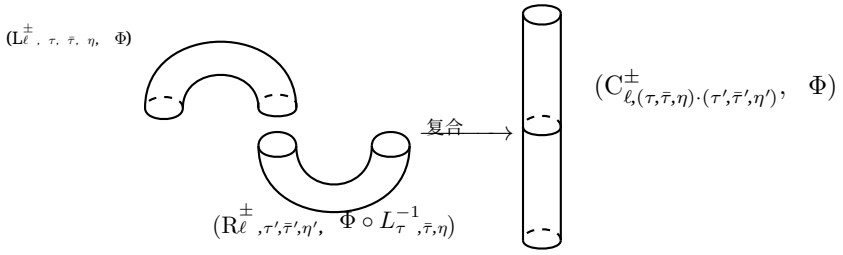
$$q_1(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))=(\ell,\Phi), \tag{218}$$

$$q_2(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))=(\ell,\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}\circ L^{-1}_{\tau',\bar\tau',\eta'}) \tag{219}$$

而 m 是 (207)。

注记 6.17。(215) 的交换性对应的图示为

(220)



其中图中省略了恒等配边，而 $(\ell,\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta)$，$(\ell,\ \tau',\ \bar\tau',\ \eta')\in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z})(S)$.

命题 6.18。存在栈的 2-交换图表

$$\begin{array}{ccc}(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{-}^{2|1}\times\mathring{\mathbb{H}}_{+}^{2|1})/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\mathsf{L}_M^{\mp}\circ p_1\times\mathsf{R}_M^{\pm}\circ p_2} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]}\\ \downarrow & & \downarrow\mathsf{c}\\ \mathcal{L}^{2|1}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array} \tag{221}$$

其中 $\mathbb{Z}$-不变子空间具有 S-点

$$\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}=\Phi\circ L^{-1}_{\tau',\bar\tau',\eta}\iff\Phi=\Phi\circ(L^{-1}_{(-\tau',-\bar\tau',-\eta')\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)})^n,\quad n\in\mathbb{Z} \tag{222}$$

顶部的垂直箭头由族 $\mathsf{L}_M^{\pm}$ 和 $\mathsf{R}_M^{\mp}$ 以及映射

$$\begin{aligned}p_1(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta))&=(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta),\\ p_2(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))&=(\Phi,\ell,\tau',\bar\tau',\eta')\end{aligned} \tag{223}$$

而左侧的垂直箭头由下式确定

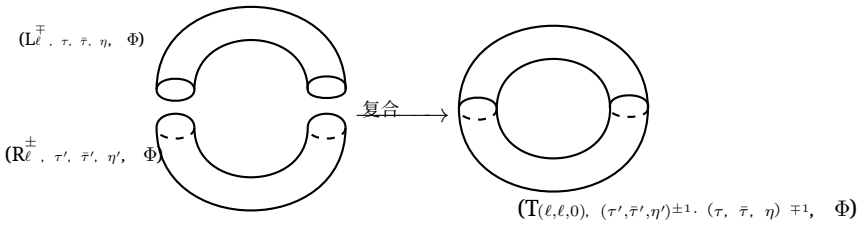
$$(\Phi,\ell,(\tau,\bar\tau,\eta),(\tau',\bar\tau',\eta'))\mapsto(\Phi,(\ell,\ell,0),(\tau',\bar\tau',\eta')^{\pm1}\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)^{\mp1})\in\mathcal{L}^{2|1}(M)(S) \tag{224}$$

其中 $((\ell,\ \ell,\ 0),\ (\tau',\ \bar\tau',\ \eta')^{\pm1}\cdot(\tau,\ \bar\tau,\ \eta)^{\mp1})\ \in s\mathsf{Lat}(S)$，并且映射 Φ 在相应的超环面上定义良好，这是因为条件 (222)。

证明。式 (222) 中的相容性 $\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar\tau,\eta}=\Phi\circ L^{-1}_{\tau',\bar\tau',\eta'}$ 保证 $(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau',\bar\tau',\eta'},\Phi)$ 的目标与 $(\mathrm{L}^{\mp}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi)$ 的源一致，因此这些配边确实可以复合。根据 $(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau',\bar\tau',\eta'},\Phi)$ 和 $(\mathrm{L}^{\mp}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi)$ 的定义，该复合必然是一个从空集到自身的配边。展开函子 c 的定义并考察周期性条件 (222)，可知该复合是 M 中与格 $((\ell,\ell,0),(\tau',\bar\tau',\eta')^{\pm1}\cdot(\tau,\bar\tau,\eta)^{\mp1})$ 相关联、且映射由 Φ 确定的欧几里得超环面，其目标为 M。□

注 6.19。与式 (221) 的交换性相对应的图为

(225)



其中 $(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)\ \in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z})(S)$ 和 $(\ell,\tau',\bar{\tau}',\eta')\ \in((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z})(S)$。

6.3. **来自配边等距变换的额外关系**。定义映射

$$\begin{aligned}\mathsf{inv}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z},\\ (\Phi,\ell,\tau,\bar{\tau},\eta) &\mapsto (\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta},\ell,-\tau,-\bar{\tau},-\eta).\end{aligned}\tag{226}$$

引理 6.20. 层映射之间存在如下等式

$$\mathsf{act}_{\pm}=\mathsf{pr}_{\mp}\circ\mathsf{inv},\qquad \mathsf{pr}_{\pm}=\mathsf{act}_{\mp}\circ\mathsf{inv}.$$

.

证明. 这由 (226) 以及 $\mathsf{pr}_{\pm}$ 和 $\mathsf{act}_{\pm}$ 的定义得出,

$$\mathsf{act}_{\pm}(\Phi,\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)=(\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta},\ell),\qquad \mathsf{pr}_{\pm}(\Phi,\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)=(\Phi,\ell)$$

它们由映射 (203) 的限制确定。 □

命题 6.21. 令 $\mathrm{L}^{\pm}_{M}\circ\sigma$ 表示函子 $\mathrm{L}^{\pm}_{M}$ 与 Mor(2|1-EBord(M)) 中交换目标分量顺序的同构复合，即,

$$\mathsf{t}(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta}\circ\sigma,\Phi)=(\mathrm{S}^{\mp}_{\ell},\Phi\circ L^{-1}_{\tau,\bar{\tau},\eta})\coprod(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell},\Phi).$$

存在一个 2-交换三角形

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \mathsf{L}^{\pm}_{M}\circ\sigma\ } & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{inv}} & & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\ \mathsf{L}^{\mp}_{M}\ ]{} & \end{array}\tag{227}$$

其左侧竖直箭头为 (226)。

证明。 从确定 $(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell\ \tau,,\bar{\tau},\eta},\Phi)$ 的数据开始,

$$(S\times\mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z}\coprod(S\times\mathbb{R}^{1|1})/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{i_0\coprod i_{\tau,\bar{\tau},\eta}}(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{\Phi}M.$$

交换余积的因子，并通过 $L^{-1}_{\tau\ ,\bar{\tau},\eta}=L_{-\tau,-\bar{\tau},-\eta}$作用于 $(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}$，即可得到确定 $(\mathrm{L}^{\mp}_{\ell\ ,-\tau,-\bar{\tau},-\eta},\Phi\circ L^{-1}_{\tau\ ,\bar{\tau},\eta})$ 的数据。□

下文将使用（退化的）记号 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 表示层映射

$$
\begin{aligned}
(228)\qquad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times\mathbb{R}_{>0} &\xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times\mathbb{R}_{>0}\\
(\Phi,\ell) &\mapsto (\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1},\ell).\\
(229)\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\\
(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &\mapsto (\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1},\ell,-\tau,-\bar\tau,-i\eta).\\
(230)\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\\
(\Phi,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &\mapsto (\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1},\ell,-\tau,-\bar\tau,-i\eta).
\end{aligned}
$$

其中具体的映射将根据上下文明确。所有这些映射都由式（164）中定义的等距变换欧几里得超圆柱 $\sqrt{\mathrm{fl}}$ 诱导。

引理 6.22。 存在 2-交换三角形

$$
(231)\qquad \begin{array}{ccc}
\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\mathsf{S}^{\pm}_M} & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sqrt{\mathrm{Fl}}} & & \text{Ob}(2|1\text{-EBord}(M))\\
\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\mathsf{S}^{\mp}_M} &
\end{array}
$$

$$
(232)\qquad \begin{array}{ccc}
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{C}^{\pm}_M,\mathsf{L}^{\pm}_M} & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sqrt{\mathrm{Fl}}} & & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{C}^{\mp}_M,\mathsf{L}^{\mp}_M} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{R}^{\pm}_M} & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \sqrt{\mathrm{Fl}}} & & \text{态射}(2|1\text{-EBord}(M))。\\
\text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{R}^{\mp}_M} &
\end{array}
$$

证明。 2-交换数据由 $\mathrm{Ob}(2|1\text{-EBord}(M))$ 和 $\mathrm{Mor}(2|1\text{-EBord}(M))$ 中的等距变换给出，这些等距变换由 (164) 中定义的 $\sqrt{\mathrm{fl}}$ 确定。具体而言， S-族的等距变换

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{Fl}}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell},\Phi) &\simeq (\mathrm{S}^{\mp}_{\ell},\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1})\\
\sqrt{\mathrm{Fl}}(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi) &\simeq (C^{\mp}_{\ell,-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta},\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1})\\
\sqrt{\mathrm{Fl}}(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi) &\simeq (L^{\mp}_{\ell,-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta},\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1})\\
\sqrt{\mathrm{Fl}}(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta},\Phi) &\simeq (R^{\mp}_{\ell,-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta},\Phi\circ\sqrt{\mathrm{fl}}^{-1}).
\end{aligned}
$$

事实上，在上述任一族上取值的等距变换 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$，由图表 (166) 在 $(\tau_{\mathsf{in}},\ \bar\tau_{\mathsf{in}},\ \eta_{\mathsf{in}}) = 0$ 下的特化决定。□

6.4. **附加结构的限制**。 与 (228)-(230) 类似，我们将使用层映射的记法

$$
\begin{aligned}
\dagger\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times \mathbb{R}_{>0} &\to \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times \overline{\mathbb{R}_{>0}},\\
(\Phi\colon (S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\to M) &\mapsto (\overline{S}\times\overline{\mathbb{R}}^{2|1})/\bar{\ell}\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{S}}\times\overline{\mathsf{or}}^{-1}}(\overline{S}\times\overline{\mathbb{R}}^{2|1})/\bar{\ell}\mathbb{Z}\xrightarrow{\overline{\Phi}}\overline{M}\simeq M).
\end{aligned}
\tag{233}
$$

$$
\begin{aligned}
\dagger\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times (\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\to \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times (\overline{\mathbb{R}_{>0}}\times\overline{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\\
(\Phi,\ell,(\tau,\bar{\tau},\eta)) &\mapsto (\overline{\Phi}\circ\overline{\mathsf{or}}^{-1},\bar{\ell},\overline{(\bar{\tau},\tau,\eta)})
\end{aligned}
\tag{234}
$$

$$
\begin{aligned}
\dagger\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times (\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\to \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times (\overline{\mathbb{R}_{>0}}\times\overline{\mathring{\mathbb{H}}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\\
(\Phi,\ell,(\tau,\bar{\tau},\eta)) &\mapsto (\overline{\Phi}\circ\overline{\mathsf{or}}^{-1},\bar{\ell},\overline{(\bar{\tau},\tau,\eta)})
\end{aligned}
\tag{235}
$$

它们在超流形上覆盖复共轭；在这种情况下，以上所有映射均由欧几里得超圆柱族之间的映射 (171) 确定。 $2|1$-EBord(M) 上的反射结构在引理 C.35 中构造。

命题 6.23。 $2|1$-EBord(M) 上反射结构 (396) 的限制给出了 2-交换方块

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\mathsf{S}^{\pm}_{M}} & \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
\dagger\downarrow & & \downarrow\dagger_0\\
\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times\overline{\mathbb{R}_{>0}} & \xrightarrow[\overline{\mathsf{S}}^{\mp}_{M}]{} & \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))
\end{array}
\tag{236}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{C}^{\pm}_{M}} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
\dagger\downarrow & & \downarrow\dagger_1\\
\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times(\overline{\mathbb{R}_{>0}}\times\overline{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\overline{\mathsf{C}}^{\mp}_{M}]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))
\end{array}
\tag{237}
$$

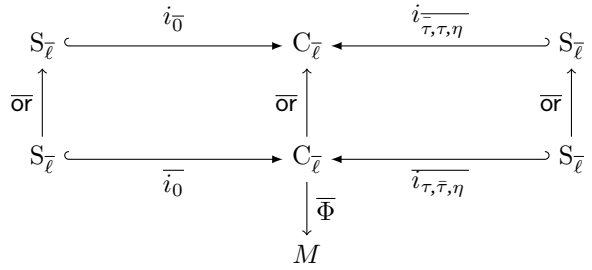
$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{L}^{\pm}_{M}} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
\dagger\downarrow & & \downarrow\dagger_1\\
\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times(\overline{\mathbb{R}_{>0}}\times\overline{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\overline{\mathsf{L}}^{\mp}_{M}]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))
\end{array}
\tag{238}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathsf{R}^{\pm}_{M}} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
\dagger\downarrow & & \downarrow\dagger_1\\
\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)}\times(\overline{\mathbb{R}_{>0}}\times\overline{\mathring{\mathbb{H}}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} & \xrightarrow[\overline{\mathsf{R}}^{\mp}_{M}]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)).
\end{array}
$$

证明。 2-交换数据由 Ob(2|1-EBord(M)) 和 Mor(2|1-EBord(M)) 中的等距变换给出

$$\begin{aligned}
\dagger(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell},\Phi) &\simeq (\mathrm{S}^{\mp}_{\ell},\overline{\Phi\circ \mathsf{or}^{-1}})\\
\dagger(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (C^{\mp}_{\overline{(\ell,(\bar{\tau},\tau,\eta))}},\overline{\Phi\circ \mathsf{or}^{-1}})\\
\dagger(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (L^{\mp}_{\overline{\ell},(\bar{\tau},\tau,\eta)},\overline{\Phi\circ \mathsf{or}^{-1}})\\
\dagger(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (R^{\mp}_{\ell,\overline{(\bar{\tau},\tau,\eta)}},\overline{\Phi\circ \mathsf{or}^{-1}})
\end{aligned} \tag{239}$$

由图表 (172) 的特化得到



其中（这里稍微滥用一下记号） $\overline{\Phi}\colon \mathrm{C}_{\ell}\to M$ 是与 Φ 共轭后再复合典范实结构 $M\simeq M$ 所得的映射，该典范实结构定义在普通流形 M上。为完成论证，我们注意到 or 交换子空间 $\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm}\subset\mathbb{R}^{2|1}$，因此在 (239) 下，配边的领圈数据也会交换。□

命题 6.24. 相对于命题 6.23 中的取值，反射结构 †将引理 6.22 中的等距变换映为其逆变换。

证明。 这由引理 5.13 得出：反射函子与等距变换$\sqrt{\mathsf{fl}}$ 对易至自旋翻转，且 $\sqrt{\mathsf{fl}}\circ\mathsf{fl}\ =\sqrt{\mathsf{fl}}^{-1}$。□

2|1-EBord(M) 上的重整化群作用在引理 C.33 中构造。

命题 6.25。 对于 $\mu\in\mathbb{R}_{>0}$， 2|1-EBord(M) 上的重整化群作用确定了配边族 $\mathrm{S}^{\pm}_{M}$、$\mathrm{C}^{\pm}_{M}$、$\mathrm{L}^{\pm}_{M}$ 和 $\mathrm{R}^{\pm}_{M}$ 的自同构，这些自同构由 S-点上的映射给出，

$$\begin{aligned}
\mathsf{RG}_{\mu}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell},\Phi) &\simeq (\mathrm{S}^{\pm}_{\mu^2\ell},\Phi\circ\mathsf{rg}^{-1}_{\mu})\\
\mathsf{RG}_{\mu}(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (\mathrm{C}^{\pm}_{\mu^2\ell,\mu^2\tau,\mu^2\bar{\tau},\mu\theta},\Phi\circ\mathsf{rg}^{-1}_{\mu})\\
\mathsf{RG}_{\mu}(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (\mathrm{L}^{\pm}_{\mu^2\ell,\mu^2\tau,\mu^2\bar{\tau},\mu\theta},\Phi\circ\mathsf{rg}^{-1}_{\mu})\\
\mathsf{RG}_{\mu}(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta},\Phi) &\simeq (\mathrm{R}^{\pm}_{\mu^2\ell,\mu^2\tau,\mu^2\bar{\tau},\mu\theta},\Phi\circ\mathsf{rg}^{-1}_{\mu})
\end{aligned}$$

其中，$\mathsf{rg}_{\mu}\colon (S\times\mathbb{R}^{2|1})/\ell\mathbb{Z}\to(S\times\mathbb{R}^{2|1})/\mu^2\ell\mathbb{Z}$ 由映射 (169) 确定。

证明。 论证与命题 6.23 的证明类似，使用图表 (168) 的一个特化。注意，rg_{μ} 保持子空间 $\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm}\subset\mathbb{R}^{2|1}$，因此领圈的划分也保持不变。□

6.5. **小配边与近乎常值超圆柱**。

定义 6.26. 考虑由对（195）、（197）和（200）的限制所关联的栈映射配边族

$$\begin{aligned}
&\mathsf{s}^{\pm}_{M}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times\mathbb{R}_{>0}\to \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
&\mathsf{c}^{\pm}_{M}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
&\mathsf{l}^{\pm}_{M}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\
&\mathsf{r}^{\pm}_{M}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}\to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))
\end{aligned} \tag{240}$$

到（有限维）子空间

$$\begin{aligned}(241)\qquad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times\mathbb{R}_{>0} &\hookrightarrow \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0},\\ (\Phi_0,\ell) &\mapsto (\Phi\colon S\times\mathbb{R}^{2|1}/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{p}S\times\mathbb{R}^{0|1}\xrightarrow{\Phi_0}M,\ell).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\hookrightarrow \text{映射}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z},\\ (\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &\mapsto (\Phi\colon S\times\mathbb{R}^{2|1}/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{p}S\times\mathbb{R}^{0|1}\xrightarrow{\Phi_0}M,\ell,\tau,\bar\tau,\eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} &\hookrightarrow \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z},\\ (\Phi_0,\ell,\tau,\bar\tau,\eta) &\mapsto (\Phi\colon S\times\mathbb{R}^{2|1}/\ell\mathbb{Z}\xrightarrow{p}S\times\mathbb{R}^{0|1}\xrightarrow{\Phi_0}M,\ell,\tau,\bar\tau,\eta).\end{aligned}$$

我们将受限的族 (240) 称为 M 中的小配边 。

注 6.27。 从直观上说，小配边的复合与不交并生成 M 中由小配边构成的子范畴 $2|1$-ebord(M) $\subset 2|1$-EBord(M)，而定理 1.1 中的 $2|1$-eft^n(M) 考虑定义在这些子范畴上的次数为 n 的场论。然而，在对称幺半群叠内部的范畴中表述生成子范畴这一概念，会变得相当技术性。

特别地，族 (240) 和引理 6.22 确定了叠映射

$$(242)\qquad \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{2|1}(M))\to\mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)),\quad \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1}(M))\to\mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$$

对于定义 5.17 中的对象与态射叠。

命题 6.28. 叠映射 (242) 是内部函子 (193) 数据的一部分。该函子从 M 上的近乎常值超圆柱内范畴映至 M 上的 $2|1$-欧几里得配边范畴。在此函子下，对 $2|1$-EBord(M) 上反射 $\dagger$ 和 RG-作用 RG$^\mu$ 的限制（见引理 C.33 和 C.35），与引理 5.22 中 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上的结构相容。

证明. 根据内部函子的定义 C.3，除了叠映射 (242)，还需要提供复合与单位的相容数据。这些数据由对命题 6.11 中 2-态射的限制给出。该命题中的 2-态射是典范的（源于配边领圈的相交），因此这些 2-同构的相干性自动成立。至此，内部函子 (193) 的构造完成。

函子 (193) 与附加结构的相容性由命题 6.23 和 6.25 得出：将这些命题中的同构沿 (240) 限制后，便提供了 2-交换性数据，

$$(243)\qquad \begin{array}{ccc}\mathscr{C}^{2|1}(M) & \longrightarrow & 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\\ {\scriptstyle \mathsf{RG}_\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{RG}_\mu}\\ \mathscr{C}^{2|1}(M) & \longrightarrow & 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\end{array}\qquad \begin{array}{ccc}\mathscr{C}^{2|1}(M) & \longrightarrow & 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\\ {\scriptstyle \dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \dagger}\\ \mathscr{C}^{2|1}(M) & \longrightarrow & 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\end{array}$$

从而证明所声称的相容性。 □

7. $2|1$-Euclidean field theories of degree n

在本节中，我们计算扭曲的 $2|1$-欧几里得场论在上一节构造的 M配边上的取值。根据注 6.2，我们预计这能刻画扭曲的 $2|1$-欧几里得场论数据中的“一半”，也就是 Ramond 扇区的取值。随后，我们将专门讨论与猜想（1）相关的次数 n 扭曲。次数 n 扭曲的完整构造尚未出现；预计它是以下对象唯一的

超对称扩张：ST11 第 5 节构造的二维手征自由费米子 [，§5-6], 参见假设 7.10。下文将证明，这种超对称扩张在上一节的 Ramond 扇区配边上存在且唯一。这一部分构造已足以满足我们的目的。在注 7.20 中，我们指出了 Fer_n 的完整构造，该构造依赖于 $2|1$-EBord(pt) 的生成元与关系表示；这一表示由 [ST11] 提出。

7.1. **扭曲场论的取值**。关于 $2|1$-欧几里得配边范畴在 M 上的一个扭曲，是一个以 Morita 范畴为取值的内部函子 $\mathscr{T}\colon 2|1\text{-EBord}(M) \to \mathsf{TA}$。一个关于 M 的扭曲 $2|1$-欧几里得场论是一个内部自然变换 E

$$2|1\text{-EBord}(M) \underset{\mathscr{T}}{\overset{\mathbb{1}}{\Downarrow E}} \mathsf{TA}. \tag{244}$$

关于这些定义的回顾，请参见 §C 中的 [ST11]。在下面一系列命题中，我们描述了扭曲 $2|1$-欧几里得场论在上一节构造的配边族上的取值。

命题 7.1。一个扭曲 $\mathscr{T}\colon 2|1\text{-EBord}(M) \to \mathsf{TA}$ 确定了以下数据

i. 一个定义在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的代数丛 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)$;

ii. 双模丛

$$\mathsf{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M)_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)}, \quad \mathbb{C}\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M)_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)\otimes\mathsf{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)},$$

在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 以及

$\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$上，$_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)\otimes\mathsf{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)}\mathscr{T}(\mathsf{R}^{\pm}_M)_{\mathbb{C}}$

iii. 一个 $\mathbb{E}^{2|1}\rtimes\mathrm{Spin}(2)\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-等变向量丛 $\mathscr{T}(\mathcal{L}^{2|1}(M))$，定义在 (111) 中所定义的层 $\mathcal{L}^{2|1}(M)$ 上。

证明。根据内部函子的定义 C.3，扭曲确定了叠映射

$$\mathrm{Ob}(2|1\text{-EBord}(M)) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{TA}), \qquad \mathrm{Mor}(2|1\text{-EBord}(M)) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{TA})$$

它们与源函子和目标函子相容。在源栈的指定对象族上对这些映射求值，即可得到命题中的陈述。□

命题 7.2。采用命题 7.1 中的记号，一个 $\mathscr{T}$-扭曲场论 E确定了如下数据

i. 左模丛 $_{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)}E(\mathsf{S}^{\pm}_M)$ 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上，

ii. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上的双模丛映射

$$E(\mathsf{C}^{\pm}_M)\colon \mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M) \otimes_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)} \mathsf{pr}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \to \mathsf{act}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_M),$$

$$E(\mathsf{L}^{\pm}_M)\colon \mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M) \otimes_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)\otimes\mathsf{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)} \mathsf{pr}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \otimes \mathsf{act}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\mp}_M) \to \underline{\mathbb{C}},$$

以及在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上的双模丛映射

$$E(\mathsf{R}^{\pm}_M)\colon \mathscr{T}(\mathsf{R}^{\pm}_M) \to \mathsf{pr}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\mp}_M) \otimes \mathsf{act}^*_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_M),$$

对于 (203) 中定义的投影映射 $\mathsf{pr}^{\pm}$ 和作用映射 $\mathsf{act}^{\pm}$，以及 iii. 一个 $\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变的等变向量丛映射

$$E(\mathcal{L}^{2|1}(M))\colon \mathscr{T}(\mathcal{L}^{2|1}(M)) \to \underline{\mathbb{C}}$$

在层 $\mathcal{L}^{2|1}(M)$ 上，并在 $\mathbb{C}$ 上取平凡的等变结构。 _

证明。 根据内部自然变换的定义 C.4，扭曲场论提供了如下叠之间的映射数据： η: Ob(2|1-EBord(M)) $\to$ Mor(TA)，因此，在族 $E(\mathsf{S}^{\pm}_M)$ 上求值确定了 Map($\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M$) $\times \mathbb{R}_{>0}$ 上的双模丛

$$E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \in \mathrm{Mor}(\mathsf{TA}), \quad \text{with} \quad \mathsf{t}(E(\mathsf{S}^{\pm}_M)) = \mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M),\ \mathsf{s}(E(\mathsf{S}^{\pm}_M)) = \underline{\mathbb{C}}.$$

$\mathbb{C}$ 的右作用不包含额外数据，因此 $E(\mathsf{S}^{\pm}_M)$ 只是左模丛。内部自然变换还为 Mor(2|1-EBord(M)) 中的每个族指定 (382) 中的相容性 2-态射 ρ；根据 [ST11 第 52] 页的论证，这便给出了 (ii) 和 (iii) 中的数据。例如，在族 $\mathsf{C}^{\pm}_M$ 上取值时， ρ 是左模之间的映射

$$E(\mathsf{C}^{\pm}_M)\colon \mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M) \otimes_{\mathsf{pr}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M)} \mathsf{pr}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \to \mathsf{act}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M)$$

这就是上文列出的双模映射中的第一个映射。 □

注 7.3。 根据注 6.6 和 6.8，命题 7.1 和 7.2 中的代数丛和双模丛满足一个额外性质：它们同构于沿一个商映射拉回的丛，该商映射将收缩的领圈识别起来。例如，代数丛 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)$ 沿商映射 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)/\sim$ 拉回，其中目标是 M 中带有超圆柱单侧芽的欧几里得超环路层。

在以下两个命题中，我们记录了扭曲及扭曲场论为 §6.2 中计算的配边复合所赋予的数据和性质。

命题 7.4。 扭曲 $\mathscr{T}$ 确定以下数据

i. 一个 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)$-双模映射，

$$p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M) \otimes_{p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)} p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M) \to \mathsf{m}^*\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M), \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} \tag{245}$$

其中 p_1， p_2 是 (206) 中的映射，m 是 (207)；

ii. 一个右 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M) \otimes \mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)$-模丛映射

$$p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M) \otimes_{p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)\otimes p_3^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)} \mathscr{T}(p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_M) \otimes p_3^*\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\mp}_M)) \to \mathsf{m}^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M), \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z} \tag{246}$$

其中 p_1， p_2， p_3 是 (212) 中的映射，m 是 (213)；

iii. 向量丛同构

$$p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M) \otimes_{p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M)\otimes p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_M)} p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{R}^{\mp}(M)) \to \mathsf{m}^*\mathscr{T}(\mathcal{L}^{2|1}(M)), \quad \text{over} \quad (\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\mp})/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \tag{247}$$

对于 p_1， p_2 映射为 (223) 中的映射，m 为 (224)。

上述与复合相关的同构还须满足进一步的相容条件，这些条件由内部函子的定义所规定。

证明。 根据定义 C.3，内部函子会为任意配边的复合指定一个双模丛映射。于是，(i) 来自命题 6.11 中的复合，(ii) 来自命题 6.14 中的复合，而 (iii) 来自命题 6.18 中的复合。 □

命题 7.5。 A $\mathscr{T}$-扭曲场论满足以下条件

i. 双模丛的映射相等

$$p_1^*E(\mathsf{C}^{+}_M) \circ p_2^*E(\mathsf{C}^{+}_M) = \mathsf{m}^*E(\mathsf{C}^{+}_M), \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z} \tag{248}$$

相对于双模丛的映射 (245)，其中 p_1, p_2 是映射 (206)，m 是 (207)；

ii. 右模丛的映射相等

$$p_2^* E(\mathsf{L}_M^+) \circ (p_1^* E(\mathsf{C}_M^+) \otimes p_3^* E(\mathsf{C}_M^-)) = \mathsf{m}^* E(\mathsf{L}_M^+), \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1} \times \mathbb{H}_\mp^{2|1})/\mathbb{Z} \tag{249}$$

相对于右模丛的映射 (246)，其中 p_1，p_2，p_3 是 (212) 中的映射，m 是 (213)；

iii. 向量丛的映射相等

$$p_1^* E(\mathsf{L}_M^\mp) \circ p_2^* E(\mathsf{R}_M^\pm) = \mathsf{m}^* E(\mathcal{L}^{2|1}(M)), \quad \text{over} \quad (\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\mp^{2|1} \times \mathring{\mathbb{H}}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \tag{250}$$

相对于 (247)，其中 p_1，p_2 是到 (223) 中各因子的投影，m 是 (224)。

证明。根据定义 C.4，内部自然变换要求命题 7.2 中的数据满足内范畴 $2|1$-EBord(M) 中复合的相容性。具体而言，(248) 由与命题 6.11 中计算的族 $\mathsf{C}_M^\pm$ 的复合相容性得出。等式 (249) 由族 $\mathsf{L}_M^\pm$ 和 $\mathsf{C}_M^\pm \coprod \mathsf{C}_M^\mp$ 的复合相容性得出，该相容性在命题 6.14 中计算。等式 (250) 由 $\mathsf{L}_M^\mp$ 和 $\mathsf{R}_M^\pm$ 的复合相容性得出，该相容性在命题 6.18 中计算。□

引理 7.6。 扭曲确定了右作用的同构数据：${}^*_\pm\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^\mp) \otimes \mathrm{pr}_\pm^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^\pm)$-模丛

$$\mathsf{inv}^*\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^\mp) \simeq \mathscr{T}(\mathsf{L}_M^\pm \circ \sigma) \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z} \tag{251}$$

其中 inv 是层映射 (226)。相对于这些相容数据，扭曲场论必须满足相容性

$$\mathsf{inv}^* E(\mathsf{L}_M^\mp) = E(\mathsf{L}_M^\pm \circ \sigma) \quad \text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}. \tag{252}$$

证明。 命题 6.21 中的 2-交换数据是到栈 Mor($2|1$-EBord(M)) 的映射之间的一个同构。因此，扭曲 $\mathscr{T}$: $2|1$-EBord(M) $\to$TA 将这个到栈的映射之间的同构对应到相应模丛之间的一个同构 (251)。类似地，取值一个扭曲场论会施加性质 (252)。□

与前面一样，令 $\overline{\sqrt{\mathrm{Fl}}}$ 表示生成 $\mathbb{Z}/4$-作用的层映射 (228)-(230)。

引理 7.7。 扭曲确定了代数丛的一个同构 $\alpha_\pm$: $\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^\pm) \to \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^\mp)$，其定义在 $\overline{\mathsf{Map}}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上，并满足 $\alpha_\pm \circ \alpha_\mp$ 是奇偶反演。相对于 $\alpha_\pm$，存在模的同构

$$\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^\pm) \simeq \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^\mp), \quad \mathscr{T}(\mathsf{L}_M^\pm) \simeq \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^\mp), \quad \mathscr{T}(\mathsf{R}_M^\pm) \simeq \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathscr{T}(\mathsf{R}_M^\mp) \tag{253}$$

在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}$ 和 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}$ 上。扭曲场论提供了一个同构的数据

$$\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^\pm) E(\mathsf{S}_M^\pm) \xrightarrow{\sim}_{\sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}^\pm)} \sqrt{\mathrm{Fl}}^* E(\mathsf{S}_M^\mp) \tag{254}$$

其平方等于奇偶反演，并具有相容性，这些相容性以如下形式给出：
模的交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\pm})\otimes_{\mathsf{pr}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\pm})}\mathsf{pr}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm}) & \xrightarrow{E(\mathsf{C}_M^{\pm})} & \mathsf{act}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm}) \\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\
\sqrt{\mathrm{Fl}}^*(\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\mp})\otimes_{\mathsf{pr}_{\mp}^*\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\mp})}\mathsf{pr}_{\mp}^*E(\mathsf{S}_M^{\mp})) & \xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}^*E(\mathsf{C}_M^{\mp})} & \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\mathsf{act}_{\mp}^*E(\mathsf{S}_M^{\mp})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^{\pm})\otimes_{\mathsf{pr}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})\otimes\mathsf{act}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})}\mathsf{pr}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm})\otimes\mathsf{act}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\mp}) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}_M^{\pm})} & \underline{\mathbb{C}} \\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\
\sqrt{\mathrm{Fl}}^*(\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^{\mp})\otimes_{\mathsf{pr}_{\mp}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})\otimes\mathsf{act}_{\mp}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})}\mathsf{pr}_{\mp}^*E(\mathsf{S}_M^{\mp})\otimes\mathsf{act}_{\mp}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm})) & \xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}^*E(\mathsf{L}_M^{\mp})} & \sqrt{\mathrm{Fl}}^*\underline{\mathbb{C}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{T}(\mathsf{R}_M^{\pm}) & \xrightarrow{E(\mathsf{R}_M^{\pm})} & \mathsf{pr}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\mp})\otimes\mathsf{act}_{\pm}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm}) \\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\
\sqrt{\mathrm{Fl}}^*E(\mathsf{R}_M^{\mp}) & \xrightarrow{\sqrt{\mathrm{Fl}}^*E(\mathsf{R}_M^{\mp})} & \sqrt{\mathrm{Fl}}^*(\mathsf{pr}_{\mp}^*E(\mathsf{S}_M^{\pm})\otimes\mathsf{act}_{\mp}^*E(\mathsf{S}^{\mp}))
\end{array}$$

在 $\mathbf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}$ 和 $\mathbf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}$ 上，其中我们再次省略了代数同构 $\alpha_{\pm}$。

证明。 引理 6.22 中的等距变换给出了从映射到 $\mathbf{Ob}(2|1\text{-}\mathbf{EBord}(M))$ 与 $\mathbf{Mor}(2|1\text{-}\mathbf{EBord}(M))$ 之间的同构。在对族 $\mathsf{S}_M^{\pm}$ 上的扭曲求值时，我们得到代数丛 $\alpha_{\pm}=\mathscr{T}(\sqrt{\mathrm{Fl}})$ 的同构。要推导出 $\alpha_{\pm}\circ\alpha_{\mp}$ 是奇偶反演这一性质，需利用扭曲场论是一个保持翻转的内部自然变换（见 [ST11, §2.6]），其中超欧几里得族的自旋反演 (103) 给出了翻转 $\mathrm{Fl}=\sqrt{\mathrm{Fl}}\circ\sqrt{\mathrm{Fl}}$。类似地，同构 (253) 是将内部函子 $\mathscr{T}$ 应用于引理 6.22 中的交换图所得。对于扭曲场论，$\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 给出了模的同构 (254)。其余交换图由引理 6.22 中的图表以及内部自然变换的定义推出。□

7.2. **反射结构**。 接下来，我们展开 §C.3 中关于扭曲及扭曲场论的反射结构数据。回顾记号 (170)，即作用于层的共轭函子，以及命题 6.23 中用于描述 $2|1\text{-}\mathbf{EBord}(M)$ 上反射结构限制的层映射 (233)-(235)。

引理 7.8。 扭曲 $\mathscr{T}\colon 2|1\text{-}\mathbf{EBord}(M)\to\mathrm{TA}$ 的反射结构确定了可逆的 $\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})$-$\dagger^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})$-双模 $\mathscr{R}^{\pm}\to\overline{\mathbf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)\times\mathbb{R}_{>0}}$，并带有到恒等双模的同构

$$\mathscr{R}^{\pm}\otimes_{\dagger^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})}}\dagger^*\overline{\mathscr{R}}^{\mp}\simeq\mathrm{id}_{\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})}. \tag{255}$$

$\mathscr{T}$ 的反射结构进一步指定双模之间的同构

$$\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\pm})\otimes_{\mathsf{act}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})}\mathsf{act}_{\pm}^*\mathscr{R}^{\pm}\xrightarrow{\sim}\mathsf{pr}_{\pm}^*\mathscr{R}^{\pm}\otimes_{\dagger^*\overline{\mathsf{pr}}_{\mp}^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})}}\dagger^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{C}_M^{\mp})},$$

$$\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^{\pm})\otimes_{\mathsf{pr}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\pm})\otimes\mathsf{act}_{\pm}^*\mathscr{T}(\mathsf{S}_M^{\mp})}(\mathsf{pr}_{\pm}^*\mathscr{R}^{\pm}\otimes\mathsf{act}_{\pm}^*\mathscr{R}^{\mp})\xrightarrow{\sim}\dagger^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{L}_M^{-})},$$

在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上，以及

$$\mathscr{T}(\mathsf{R}^{+}_{M}) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{pr}^{*}_{\pm}\mathscr{R}^{\mp} \otimes \mathsf{act}^{*}_{\pm}\mathscr{R}^{\pm}) \otimes_{\dagger^{*}(\overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} \otimes \overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})})} \dagger^{*}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{R}^{-}_{M})}, \tag{256}$$

在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上满足对合性质。

证明。 根据定义 C.31，扭曲 $\mathscr{T}$的反射结构确定一个可逆内部自然同构，即一个栈之间的映射

$$\eta\colon \mathrm{Ob}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(\mathrm{pt})) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{TA})^{\times}$$

其取值于可逆双模，并附带满足相关性质的相干数据 ρ。将 η应用于族 $\mathsf{S}^{\pm}_{M}$，得到可逆双模丛 $\mathscr{R}^{\pm}$。将 ρ限制到族 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$、$\mathsf{L}^{\pm}_{M}$和 $\mathsf{R}^{\pm}_{M}$，反射结构便给出所述的双模同构。反射结构还指定了对合数据（参见注记 C.22）；在 $\mathsf{S}^{\pm}_{M}$ 上对其求值会得到同构 (255)，并为双模同构施加对合性质。□

引理 7.9。 固定一个扭曲 $\mathscr{T}$ 的反射结构：$2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to \mathsf{TA}$。于是，一个 $\mathscr{T}$-扭曲场论的反射结构是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上左 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})$-模丛的同构

$$E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}^{\pm} \otimes_{\dagger^{*}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})}} \dagger^{*}\overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})}. \tag{257}$$

这些同构必须满足关于族 $\mathsf{L}^{\pm}(M)$、$\mathsf{R}^{\pm}(M)$ 和 $\mathsf{C}^{\pm}(M)$ 的相容条件，即满足交换方块，

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(\mathsf{C}^{\pm}_{M}) \otimes_{\mathsf{pr}^{*}_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} \mathsf{pr}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) & \xrightarrow{E(\mathsf{C}^{\pm}_{M})} & \mathsf{act}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \dagger^{*}\Big(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{C}^{\mp}_{M})} \otimes_{\overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})}} \overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})}\Big) & \xrightarrow[\dagger^{*}\overline{E(\mathsf{C}^{\mp}_{M})}]{} & \dagger^{*}\overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})} \end{array} \tag{258}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_{M}) \otimes_{\mathsf{pr}^{*}_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \otimes \mathsf{act}^{*}_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})} \mathsf{pr}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \otimes \mathsf{act}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\mp}_{M}) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}^{\pm}_{M})} & \underline{\mathbb{C}} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \dagger^{*}(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\mp}_{M})} \otimes_{\overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})} \otimes \overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})}} \overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})} \otimes \overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} & \xrightarrow[\dagger^{*}\overline{E(\mathsf{L}^{\mp}_{M})}]{} & \dagger^{*}\overline{\underline{\mathbb{C}}} \end{array} \tag{259}$$

在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上，以及在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},\ M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{E(\mathsf{R}^{\pm}_{M})} & \mathscr{T}(\mathsf{R}^{\pm}_{M}) \otimes_{\mathsf{pr}^{*}_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M}) \otimes \mathsf{act}^{*}_{\pm}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} \mathsf{pr}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\mp}_{M}) \otimes \mathsf{act}^{*}_{\pm}E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \dagger^{*}\overline{\underline{\mathbb{C}}} & \xrightarrow[\dagger^{*}\overline{E(\mathsf{R}^{\mp}_{M})}]{} & \dagger^{*}(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{R}^{\mp}_{M})} \otimes_{\overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} \otimes \overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp}_{M})}} \overline{\mathsf{pr}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\pm}_{M})} \otimes \overline{\mathsf{act}}^{*}_{\mp}\overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})} \end{array}$$

其中竖直箭头使用引理 7.8 和 (257) 中的数据。以上我们省略了与双模 $\mathscr{R}^{\pm}$ 的张量积；这些双模在 $\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm})$-模与 $\dagger^{*}\mathscr{T}(\mathsf{S}^{\mp})$-模之间起中介作用，以避免记号变得（更加）繁杂。

证明。 根据定义 C.31，扭曲场论的反射正性数据确定了叠映射 Ob(2|1-EBord(M)) $\to$ Mor(TA) 之间的一个同构。在族 $\mathsf{S}^{\pm}_{M}$ 上取该同构的值，即得到数据 (257)。

要使数据 (257) 确定内部自然变换之间的同构，Mor(2|1-EBord(M)) 中的每个对象都必须满足相容性要求。在族 $\mathsf{C}^{\pm}_{M}$、$\mathsf{L}^{\pm}_{M}$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_{M}$ 上求值，即可得到所述交换方块，作为这些相容数据。□

7.3. **次数为 n 超对称扭曲及其限制**。 在 §C.5 中，我们回顾 Stolz 和 Teichner 对手征自由费米子扭曲 Fer$_n$: 2-EBord(M) $\to$ TA 的构造，它是一个从二维欧几里得配边范畴（不含超对称）出发的函子。我们回顾引理 4.7 中的函子 $\mathcal{S}$: 2-EBord(M) $\to$ 2|1-EBord(M)，它将欧几里得配边映射为超欧几里得配边。

假设 7.10. 在 [ST11, §5.3] 中构造的 n手征自由费米子具有一个超对称扩张，记作 sFer$_n$

(260)
$$\begin{array}{ccc} \text{2-EBord} & \xrightarrow{\quad\mathrm{Fer}_n\quad} & \text{TA} \\ {\scriptstyle\mathcal{S}}\big\downarrow & \varphi\ \Downarrow & \nearrow {\scriptstyle s\mathrm{Fer}_n} \\ \text{2|1-EBord}(\mathrm{pt}) & & \end{array}$$

它在内部自然同构 φ意义下唯一。手征费米子的反射结构（见 (409)）具有一个超对称扩张，该扩张在内部自然变换的同构意义下唯一。

注 7.11. 假设 7.10 是一个更宏大设想的一部分：二维手征共形场论应当确定 $\mathcal{N}=(0,1)$ 超对称场论，例如参见 [JF20, 第 12]页，或 [LP22, §1]。这种联系是 Segal 早期工作 [Seg88, Seg04] 与 Stolz–Teichner 计划之间的桥梁；参见 [ST04, 第 50-51] 页以及 [ST11, §5.2]。核心思想是¯手征理论具有 $L_0=0$ （使用 §2.4 中的记号），因此，超对称¯扩张可通过取 $G_0=0$唯一确定。这种对超李代数的操作会指数化为圆柱半群。特别是，这一论证适用于手征自由费米子，见命题 7.15。

记号 7.12。 在本小节中，我们用记号 sFer$_n$ 表示超度量扩张 (260)，以免与（非超对称）扭曲 Fer$_n$混淆；在后续小节中，我们将恢复使用更简单的记号 Fer$_n$： 2|1-EBord $\to$ TA。

接下来的目标是在 Ramond 扇区中验证假设 7.10，也就是说，针对定理 1.1 所涉及的 2|1-欧几里得配边。我们先给出一个定义。

定义 7.13。 若超半群表示 φ: $\mathbb{H}_{\pm}\to$ End(V) 满足 $\partial_{\bar\tau}\varphi=0$，则称其为全纯。等价地，对于一个 S-点 $(\tau,\bar\tau)\in\mathbb{H}_{\pm}(S)$，我们有 $\varphi(\tau,\bar\tau)=\varphi(\tau)\colon S\to$End($V$) 与 $\bar\tau$ 无关。

Stolz 和 Teichner 此前曾利用以下内容将手征场论提升为超欧几里得场论，例如参见 [ST11，定理 1.15 的证明，第二部分]。

引理 7.14。 半群 $\mathbb{H}_{\pm}$ 的全纯表示沿着典范嵌入 $\mathbb{H}_{\pm}\subset\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ 存在唯一的扩张，使其成为超半群 $\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ 的一个表示。

证明。 对于 p 投影，考虑复合

(261)
$$\tilde\varphi\colon \mathbb{H}^{2|1}_{\pm}\xrightarrow{p}\mathbb{H}_{\pm}\xrightarrow{\varphi}\mathrm{End}(V).$$

这个复合是一个超半群表示

$$\tilde{\varphi}(\tau,\bar{\tau},\eta)\cdot\tilde{\varphi}(\tau',\bar{\tau}',\eta') = \varphi(\tau)\cdot\tilde{\varphi}(\tau') = \varphi(\tau+\tau') = \tilde{\varphi}(\tau+\tau',\bar{\tau}+\bar{\tau}'+\eta\eta',\eta+\eta').$$

我们提醒读者，投影 p 不是同态，而 $\tilde{\varphi}$ 满足半群同态性质，关键在于 φ的全纯性。由于 p 是典范嵌入 $\mathbb{H}_{\pm}\subset\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}$ 的单侧逆，复合 (261) 确实是 φ的唯一扩张。□

我们回顾定义 5.4 中由欧几里得圆柱构成的李范畴 $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\mathrm{pt})$。

命题 7.15。 考虑 Fer_n 在欧几里得圆柱子范畴 $\mathscr{C}$ 上的限制。它可以扩张到欧几里得超圆柱范畴 $\mathscr{C}^{2|1}$,

(262)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{\quad\mathrm{Fer}_n\quad} & \mathsf{TA} \\ {\scriptstyle\mathcal{S}}\big\downarrow & \Downarrow & \nearrow_{s\mathrm{Fer}_n} \\ \mathscr{C}^{2|1} & & \end{array}$$

沿着 $\mathcal{S}$，Stolz 和 Teichner 的超化函子 (101)。此外，Fer_n 上的反射结构 (409) 可以唯一扩张到 $s\mathrm{Fer}_n$ ，其中使用了内范畴 $\mathscr{C}^{2|1}$上的反射结构 (188)。

证明。 只需证明该引理对 $n=-1$成立。Fer_{-1} 到 $\mathscr{C}$ 的限制由 (402) 中的第一族双模以及反对合 (407) 描述。欧几里得圆柱上的超化函子 (101) 由以下内部函子给出

$$\mathscr{C}=\begin{pmatrix}((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+)/\mathbb{Z}\coprod(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_-)/\mathbb{Z})/\!\!/\mathbb{Z}/4\\ \downarrow\downarrow\\ (\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathbb{R}_{>0})/\!\!/\mathbb{Z}/4\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathcal{S}}\begin{pmatrix}((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+^{2|1})/\mathbb{Z}\coprod(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_-^{2|1})/\mathbb{Z})/\!\!/\mathbb{Z}/4\\ \downarrow\downarrow\\ (\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathbb{R}_{>0})/\!\!/\mathbb{Z}/4\end{pmatrix}=\mathscr{C}^{2|1}.$$

在对象上， $\mathcal{S}$ 是恒等映射；在态射上， $\mathcal{S}$ 由约化流形的典范嵌入确定。我们将 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{2|1})$ 上的扩张 $s\mathrm{Fer}_{-1}$ 定义为 Fer_{-1} 在 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 上的值 (399)，即代数丛 $\mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell})$，其中 $\mathbb{Z}/4$ 的生成元通过反对合 (407) 作用。Fer_{-1} 在 $\mathscr{C}$ 中各态射上的取值来自 $\mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell})$ 上一个 $\mathbb{R}_{>0}$ 族的全纯 $\mathbb{H}$ 作用。根据引理 7.14，这些作用唯一地扩张为 $\mathbb{H}_{\pm}^{2|1}$ 作用，其公式为

$$\tilde{\varphi}^{\pm}_{\ell}(\tau,\bar{\tau},\eta)=\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau), \tag{263}$$

其中 $\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau)$ 由 (401) 确定。固定这一点后， $s\mathrm{Fer}_{-1}$ 的定义方式与 Fer_{-1} 相同： $s\mathrm{Fer}_{-1}$ 在 $\mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1})$ 上的取值，是将 $\mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell})$ 视为自身上的双模，并使其左作用由代数自同构族 (263) 扭曲后得到的双模族。复合和单位元数据由以下事实唯一确定：$\tilde{\varphi}^{\pm}_{\ell}(0)=\mathrm{id}$ 且 $\tilde{\varphi}^{\pm}_{\ell}(\tau)\cdot\tilde{\varphi}^{\pm}_{\ell}(\tau')=\tilde{\varphi}^{\pm}_{\ell}(\tau+\tau')$。所得双模族上的 $\mathbb{Z}/4$- 作用同样来自 (407)。至此，内部函子 $s\mathrm{Fer}_{-1}$: $\mathscr{C}^{2|1}\to\mathsf{TA}$ 的构造完成，并且（经检查）图表 (262) 严格交换。

Fer_{-1} 的反射结构由代数 $\mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell})$ 上的 $*$-超代数结构 (409) 确定，而该结构又确定了 $\mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell})$ 上的对合，并将其视为双模。由于 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}^{2|1}$ 中的对象相同，这个反射结构可以使用相同的 $*$-超代数结构唯一地扩展到$s\mathrm{Fer}_{-1}$。□

推论 7.16. 利用 (263)，内部函子 Fer_{-1}: 2-EBord $\to\mathsf{TA}$ 的取值 (402) 可以唯一地扩展为超对称族，

$$s\mathrm{Fer}_n(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta})=(\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell})_{\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}\otimes^{\tau}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}}\qquad s\mathrm{Fer}_n(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar{\tau},\eta})={}_{\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell}\otimes^{\tau}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}$$

并且这些值与 $2|1$-EBord 中的复合相容。此外，反射结构 (409) 唯一地扩张到上述各族。

定义 7.17。 将*Clifford* 扭曲 定义为内部函子 $\mathrm{Cl}_n\colon \mathscr{C} \to \mathsf{TA}$ 或 $\mathrm{Cl}_n\colon \mathscr{C}^{2|1} \to \mathsf{TA}$，其在对象上的取值为平凡代数丛的余积

$$\underline{\mathbb{Cl}}_{+n} \coprod \underline{\mathbb{Cl}}_{-n} \to (\mathbb{R}_{>0} \coprod \mathbb{R}_{>0}) /\!\!/ \mathbb{Z}/4 = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{2|1})$$

其中， $\mathbb{Z}/4$ 的生成元通过代数同构作用

$$\alpha_{\mp}\colon \mathbb{Cl}_{\mp 1} \to \mathbb{Cl}_{\pm 1}, \quad v \mapsto \pm iv, \quad v \in \mathbb{C}. \tag{264}$$

Clifford 扭曲在态射上的取值，是将平凡双模丛视为其自身上的双模后得到的余积，其中 $\mathbb{Cl}_{\pm n}$ 上的 $\mathbb{Z}/4$-等变结构仍由 (264) 确定。单位和复合数据由双模 $\mathbb{Cl}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{Cl}_{\pm n}} \mathbb{Cl}_{\pm n} \simeq \mathbb{Cl}_{\pm n}$ 的典范同构确定。

我们回顾 Clifford 扭曲与 Fer_n 到 $\mathscr{C}$ 的限制之间的等价关系 [ST11, §6]，见下文 (410)。

推论 7.18. 超对称扩张 $s\mathrm{Fer}_n$ 与 Clifford 扭曲之间存在内部自然同构，

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathrm{Cl}_n}{\curvearrowright} & \\ \mathscr{C}^{2|1} & \Downarrow s\mathcal{F} & \mathsf{TA} \\ & \underset{s\mathrm{Fer}_n}{\curvearrowright} & \end{array} \tag{265}$$

且 $s\mathcal{F}$ 沿 $\mathcal{S}\colon \mathscr{C} \hookrightarrow \mathscr{C}^{2|1}$ 限制为等价 (410)。类似地，推论 7.16 中配边 $\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\,\tau,\,\bar\tau,\,\eta}$ 和 $\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\,\tau,\,\bar\tau,\,\eta}$ 上的取值，与双模的平凡丛同构（在 Mor(TA) 中），

$$s\mathrm{Fer}_n(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta}) \simeq (\mathbb{Cl}_{\pm n})_{\mathbb{Cl}_{\pm n}\otimes\mathbb{Cl}_{\mp n}} \qquad s\mathrm{Fer}_n(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau,\bar\tau,\eta}) \simeq {}_{\mathbb{Cl}_{\mp n}\otimes\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\mathbb{Cl}_{\pm n}). \tag{266}$$

在上述同构下， $s\mathrm{Fer}_n$ 上的反射结构与 $\mathbb{Cl}_{\pm n}$ 上的 $*$-超代数结构 (411) 相容。

证明. 同样，只需考虑 $n = -1$ 的情形。实现等价 (410) 的 $\mathbb{R}_{>0}$-族双模 (412) 带有一个全纯的 $\mathbb{H}_{\pm}$-作用 (414)；根据引理 7.14，它唯一地扩张为 $\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ 的作用。此双模上的 $\mathbb{Z}/4$-等变结构也唯一地扩张为 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^{2|1})$ 上的 $\mathbb{Z}/4$-等变结构。由此构造出具有所述性质的等价 (265)。带有 $\mathbb{H}^{2|1}_{\pm}$ -作用的同一双模也构造出同构 (266)。所有情形下的反射结构均来自

$*$克利福德代数上的超代数结构，因此与实现这些同构的双模 (412) 相容。□

命题 7.19. Fer_n 在欧几里得环面上的取值可扩张为

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Lat}/\!\!/(\mathrm{Spin}(2)\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\quad \mathrm{Fer}^{\otimes n} \quad} & \mathrm{Mor}(\mathsf{TA}) \\ \mathcal{S}\downarrow & \Downarrow & \nearrow \\ s\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathrm{Spin}(2)\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) & & \end{array} \tag{267}$$

该对象在同构意义下唯一。等价地，根据 (403)，周期-周期自旋结构对应的 Pfaffian 线丛在 $2|1$-欧几里得环面上有唯一的扩张。此外， $s\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 上的截面能够下降为 $s\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathrm{Spin}(2) \rtimes \mathbb{E}^{2|1} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 上的截面，当且仅当其在 $\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 上的限制是 Pfaffian 的全纯截面。

证明。 利用引理 4.26 对 sLat 的描述，沿包含映射 Lat $\subset$ sLat 拉回，会在 Lat 上的线丛范畴与 sLat 上的线丛范畴之间诱导范畴等价。因此，唯一的线丛同构类由平凡线丛给出。于是，只需考虑 Lat 上平凡线丛的等变结构扩张。平凡线丛的自同构预层 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ 的特征为

$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})(S) = C^\infty(S)^{\mathrm{ev},\times}.$$

我们有如下同构

$$C^\infty(s\mathsf{Lat} \times \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))^{\mathrm{ev},\times} \simeq C^\infty(\mathsf{Lat} \times \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))^{\mathrm{ev},\times},$$

也就是说， sLat 上线丛的自同构由沿 Lat $\hookrightarrow$ sLat 的限制决定。因此， sLat 上线丛的任何 Spin(2) $\times$SL$_2(\mathbb{Z})$-等变结构都由其在 Lat 上的限制决定。关于截面下降到无标记点层的其余断言，可由命题 1.18 在 $M = \mathrm{pt}$. $\square$ 下推出。

注 7.20。 假设 $2|1$-EBord 具有 [ST11《证明定理 1.15，第二部分》], 中所述的生成元与关系表示，则可以在 [ST11] 的框架下验证假设 7.10。命题 7.15 和 7.19 建立了 Ramond 扇区中的扩张。根据注 5.7，Neveu–Schwarz 扇区的超圆柱汇集成一个模空间，该空间与欧几里得圆柱的（非超对称）模空间同构。因此，该扇区上的超对称扩张显然是唯一的。

7.4. **次数为 n 的场论的取值**。

推论 7.21. 假设假设 7.10，次数为 n 的场论 $E\colon \mathbb{1} \Rightarrow \mathrm{Fer}_n$ （如式 (13) 所示）确定了

i. Map$(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛 $E(\mathsf{S}^\pm_M)$；ii. Map$(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}$ 上的左 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛映射

$$E(\mathsf{C}^\pm_M)\colon \mathsf{pr}^*_\pm E(\mathsf{S}^\pm_M) \to \mathsf{act}^*_\pm E(\mathsf{S}^\pm_M),$$

与复合 (248) 相容；

Map$(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}$ 上的向量丛映射

$$E(\mathsf{L}^\pm_M)\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}} \left(\mathsf{pr}^*_\pm E(\mathsf{S}^\pm_M) \otimes \mathsf{act}^*_\pm E(\mathsf{S}^\mp_M)\right) \to \underline{\mathbb{C}}, \tag{268}$$

满足伴随关系 (249) 和对称关系 (252)；

iv. $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛在 Map$(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}$ 上的映射

$$E(\mathsf{R}^\pm_M)\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \to \mathsf{pr}^*_\pm E(\mathsf{S}^\mp_M) \otimes \mathsf{act}^*_\pm E(\mathsf{S}^\pm_M),$$

v. $\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变函数的一个等式

$$p_1^* E(\mathsf{L}^\mp_M) \circ p_2^* E(\mathsf{R}^\pm_M) = \mathsf{m}^* E(\mathcal{L}^{2|1}(M)) \in C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_\mp \times \mathring{\mathbb{H}}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}) \tag{269}$$

相对于式 (415) 中平凡线丛的同构，其中 (269) 左端是经过适当归一化的克利福德超迹，右端则是截面 $E(\mathcal{L}^{2|1}(M))$：先将其拉回到 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathfrak{H}$ 上 Pfaffian 线丛的标准平凡化，再沿 (224) 中的 m 拉回。

证明。 命题 7.2 和 7.5 描述了扭曲及扭曲场论的一般数据。命题 7.15 和推论 7.16 给出了扭曲 Fer_n 在超圆柱上的取值，而命题 7.19 则给出了其在超环面上的取值。由此可得到上述数据的相应版本，其对象为代数 (399) 上的模。推论 7.18 和 7.19 以及引理 C.40 使我们能够用克利福德代数上的模和克利福德超迹来重新表述这些数据。$\square$

推论 7.22。 假设 7.10 成立，则度为 n 场论E: $\mathbb{1} \to \mathrm{Fer}_n$ 上的一个反射结构确定了相对于层映射 (233) 和 (234) 的丛映射:

i. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 上， $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的一个同构

$$E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \xrightarrow{\sim} \dagger^* \overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_M)}, \tag{270}$$

相对于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的 $*$-超代数结构;

ii. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上， $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{pr}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) & \xrightarrow{E(\mathsf{C}^{\pm}_M)} & \mathsf{act}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \dagger^* \overline{\mathsf{pr}}^*_{\mp} \overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_M)} & \xrightarrow[\dagger^* \overline{E(\mathsf{C}^{\mp}_M)}]{} & \dagger^* \overline{\mathsf{act}}^*_{\mp} \overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_M)} \end{array} \tag{271}$$

iii. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上，向量丛的一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}} \left(\mathsf{pr}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \otimes \mathsf{act}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\mp}_M) \right) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}^{\pm}_M)} & \underline{\mathbb{C}} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \dagger^* \left(\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n} \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n} \otimes \overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n}} \left(\overline{\mathsf{pr}}^*_{\mp} \overline{E(\mathsf{S}^{\mp}_M)} \otimes \overline{\mathsf{act}}^*_{\mp} \overline{E(\mathsf{S}^{\pm}_M)} \right) \right) & \xrightarrow[\dagger^* \overline{E(\mathsf{L}^{\mp}_M)}]{} & \dagger^* \overline{\underline{\mathbb{C}}} \end{array} \tag{272}$$

over $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$.

证明。 证明与前一个推论类似，不过是将引理 7.9 特化到扭曲 Fer_n，然后利用推论 7.18 将其转述为关于克利福德模的陈述。 □

推论 7.23. 在假设 7.10 下，扭曲场论 E 确定了与层同构 (228)–(230) 相对应的丛映射:

i. $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M)$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛同构 $\times \mathbb{R}_{>0}$

$$E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \xrightarrow{\sim} \sqrt{\mathrm{Fl}}^* E(\mathsf{S}^{\mp}_M), \tag{273}$$

相对于 (264) 中定义的反自同构 α: $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\mathrm{l}^{\mathsf{op}}_{\pm n} = \mathbb{C}\mathrm{l}^{\mp n}$;

ii. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{pr}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) & \xrightarrow{E(\mathsf{C}^{\pm}_M)} & \mathsf{act}^*_{\pm} E(\mathsf{S}^{\pm}_M) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \sqrt{\mathrm{Fl}}^* \mathsf{pr}^*_{\mp} E(\mathsf{S}^{\mp}_M) & \xrightarrow[\sqrt{\mathrm{Fl}}^* E(\mathsf{C}^{\mp}_M)]{} & \sqrt{\mathrm{Fl}}^* \mathsf{act}^*_{\mp} E(\mathsf{S}^{\mp}_M), \end{array} \tag{274}$$

iii. 在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$ 上的向量丛交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}} \left(\mathsf{pr}_{\pm}^{*} E(\mathsf{S}^{\pm}_{M}) \otimes \mathsf{act}_{\pm}^{*} E(\mathsf{S}^{\mp}_{M})\right) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}^{\pm}_{M})} & \underline{\mathbb{C}} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \sqrt{\mathrm{Fl}}^{*}\left(\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \left(\mathsf{pr}_{\mp}^{*} E(\mathsf{S}^{\mp}_{M}) \otimes \mathsf{act}_{\mp}^{*} E(\mathsf{S}^{\pm}_{M})\right)\right) & \xrightarrow[\sqrt{\mathrm{Fl}}^{*} E(\mathsf{L}^{\mp}_{M})]{} & \sqrt{\mathrm{Fl}}^{*}\underline{\mathbb{C}} \end{array} \tag{275}$$

over $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}^{2|1}_{\pm})/\mathbb{Z}$.

证明。 利用引理 7.7，证明与前面的完全类似。 □

推论 7.21 和 7.23 中的结构可沿包含映射$M \times \mathbb{R}_{>0} \subset \Pi TM \times \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0} \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}, M) \times \mathbb{R}_{>0}$加以限制，从而得到 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛

$$\mathcal{E}_{\pm} := E(\mathsf{S}^{\pm}_{M})|_{M\times\mathbb{R}_{>0}}. \tag{277}$$

特别地，(268) 和 (270) 的限制结合起来给出一个映射

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \left(\overline{\mathcal{E}}_{\pm} \otimes \mathcal{E}_{\pm}\right) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \left(\mathcal{E}_{\mp} \otimes \mathcal{E}_{\pm}\right) \to \underline{\mathbb{C}}$$

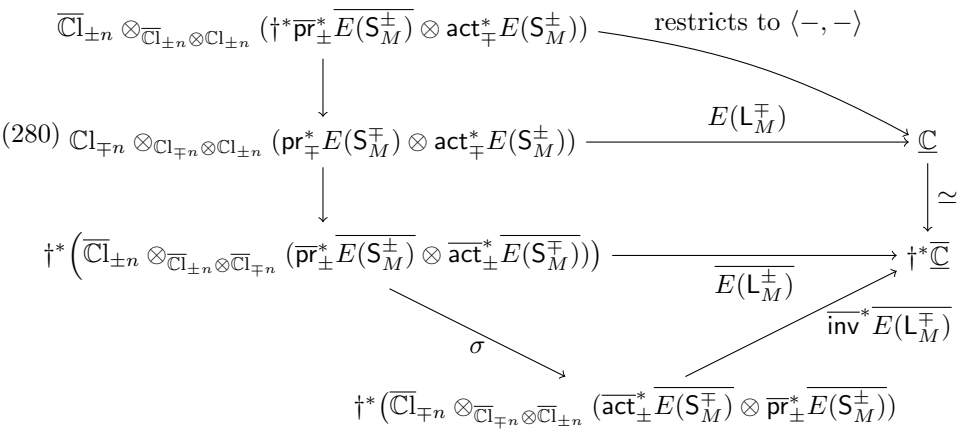
它确定了一个配对，使得 Clifford 作用互为伴随，

$$\langle -, - \rangle \colon \overline{\mathcal{E}}_{+} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{n}} \mathcal{E}_{+} \to \underline{\mathbb{C}}, \qquad \langle \omega^{*} \cdot x, y\rangle = (-1)^{|\omega||x|}\langle x, \omega \cdot y\rangle,\ \omega \in \mathbb{C}\mathrm{l}_{n}. \tag{278}$$

引理 7.24。 配对 (278) 在 $\mathbb{Z}/2$-分次意义下是厄米的

$$\langle x, y\rangle = (-1)^{|x||y|}\overline{\langle y, x\rangle}. \tag{279}$$

证明。 论证使用了与 [HST10 第一部分类似的思路，见推论 625], ，不过这里的符号有所不同，因为我们讨论的是定向情形（而 [HST10]采用的是非定向框架）。考虑如下图表



(280)

其中， $*$超代数在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的结构在全文中均被隐式使用。右上方标出的箭头按定义限制为配对 $\langle -, - \rangle$ 。下方三角形的交换性由 (252) 得出。内部方形的交换性即为反射正性数据所满足的条件 (272)。从左上角出发并沿下方三角形复合箭头，得到 (279) 的右侧，因此，将此图表沿 (276) 限制即可推出所声称的公式；(279) 中的符号来自下方三角形中（分次）张量积的对称同构 σ 。□

关于扭曲场论上的反射结构这一概念，参见定义 C.31。下文中，我们取 $2|1$-EBord(M) 上的反射结构 (396)，以及由 (409) 确定的次数 n 扭曲对应的反射结构。关于 $\mathbb{Z}/2$-分次厄米配对的正性性质中涉及的符号，参见 (364)。

定义 7.25. 假设满足假设 7.10，具有反射结构的度为 n 的 $2|1$-欧几里得场论若其配对 (278)是超向量丛 $\mathcal{E}_+$ 在 $M \times \mathbb{R}_{>0}$上的（分次）正定厄米配对，则称其为反射正的 。

注 7.26. 对于反射正场论，(278)意味着 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$对 $\mathcal{E}_+$的作用自动是相对于厄米内积的 $*$-表示。

定义 7.27. 假设满足假设 7.10，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，定义群胚 $2|1$-扩展场论$^n(M)$，其对象为度为 n的反射正 $2|1$-欧几里得场论，态射为与反射结构相容的度为 n 的场论之间的同构。

8. Extracting geometric data from a degree n field theory

本节的主要目标是证明命题 1.13：从 $2|1$-EFT$^n(M)$ 的一个对象中提取具有附加结构和性质的超联络。产生这些几何数据的机制，是将场论限制到欧几里得超圆柱上，

$$\mathscr{C}^{2|1}(M) \longrightarrow 2|1\text{-EBord}(M) \underset{\mathrm{Fer}_n}{\overset{\mathbb{1}}{\Rightarrow}} \mathsf{TA}. \tag{281}$$

为了使本节中的几何构造尽可能灵活，主要构造不依赖于 §6 和 §7 中的定义。为此，下面的定义均表述为 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的扭曲表示，如定义 8.1 所示，不再提及式 (281) 中的中间次数 n 场论。每个小节的末尾，我们都会给出陈述，说明 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的表示理论与式 (281) 下的次数 n 场论之间的联系。

定义 8.1. 一个次数 n 表示 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 是一个内部自然变换

$$\mathscr{C}^{2|1}(M) \underset{\mathrm{Cl}_n}{\overset{\mathbb{1}}{\Rightarrow}} \mathsf{TA} \tag{282}$$

其中 $\mathrm{Cl}_n : \mathscr{C}^{2|1}(M) \to \mathsf{TA}$ 是沿着函子 $\mathscr{C}^{2|1}(M) \to \mathscr{C}^{2|1}(\mathrm{pt}) = \mathscr{C}^{2|1}$ 对 Clifford 扭曲（定义 7.17）的拉回；该函子由典范映射 $M \to \mathrm{pt}$ 诱导。次数为 n 的表示构成一个群胚，其对象为内部自然变换 (282)，态射为这些内部自然变换之间的同构。

8.1. **来自次数 n 的 Clifford 线性超联络表示** $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$。考虑沿着 $\mathbb{Z}/4$-覆盖（178）对次数为 n 的表示（282）取限制；我们也将由此得到的 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的扭曲表示称为次数为 n 的表示。需要注意的是，上一节中的记号（277）与本节以下命题及全文中使用的记号 $\mathcal{E}_\pm$ 略有不同。

命题 8.2. 一个 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的 n 次表示确定了向量丛 $\mathcal{E}_+ \to M$ 和 $\mathcal{E}_- \to M$，它们分别带有逐纤维的 $S^1 \times \mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用和 $S^1 \times \mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$-作用。此外，这些丛 $\mathcal{E}_\pm$ 赋有一族光滑单参数族超联络 $\mathbb{A}^\pm_\ell$ 的结构，适用于 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$，且这些超联络是 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-线性的并且 S^1-不变。

*Pro*来自。根据定义 C.4，内部自然变换 E 的部分数据属于 (282) is a 叠之间的映射

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{TA})$$

带有指定的源与靶数据。这等价于左克利福德模丛

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{+n} \curvearrowright \widetilde{\mathcal{E}}_+ \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0}, \quad \mathbb{C}\mathrm{l}_{-n} \curvearrowright \widetilde{\mathcal{E}}_- \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times \mathbb{R}_{>0} \tag{283}$$

位于 Ob($\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$) 的每个分支上。内部自然变换的下一项数据是态射 Mor($\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$) $\to$ Mor(TA) 之间的一个同构（见 (382)），它由丛映射给出

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \mathsf{pr}_\pm^* \Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) \to \mathsf{act}_\pm \Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) \\ &\text{over} \quad \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{284}$$

还要求映射 (284) 满足关于 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 中复合的一个条件。为了从 M 的微分几何角度解析这一点，我们首先注意到有如下同构

$$\Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) \simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M, \mathcal{E}_\pm), \qquad \mathcal{E}_\pm = \widetilde{\mathcal{E}}_\pm|_{M\times\{1\}} \tag{285}$$

作为 C^∞(Map($\mathbb{R}^{0|1}, M$) $\times \mathbb{R}_{>0}$) $\simeq$Ω•(M; C^∞($\mathbb{R}_{>0}$)) 上的模。这里用到了以下事实：向量丛（在同构意义下）在 Map($\mathbb{R}^{0|1}, M$) 上可由 M 上的丛拉回得到（见引理 B.13），而 $M \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的向量丛同构于一个沿投影$\sim$ $\sim M \times \mathbb{R}_{>0} \to M$拉回得到的向量丛。沿 p 拉回 $\mathsf{pr}_\pm^*\mathcal{E}_\pm$ 和 $\mathsf{act}_\pm^*\mathcal{E}_\pm$，即可得到这些同构

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathsf{pr}_\pm^*\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes_{\Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))} \Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) \\ &\simeq C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes \Omega^\bullet(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\mathcal{E}_\pm) \\ &\simeq C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes \Omega^\bullet(M; \mathcal{E}_\pm) \end{aligned} \tag{286}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathsf{act}_\pm^*\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes_{\Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))} \Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm) \\ &\simeq C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes \Omega^\bullet(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\mathcal{E}_\pm) \\ &\simeq C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes \Omega^\bullet(M; \mathcal{E}_\pm) \end{aligned} \tag{287}$$

全程采用射影张量积及同构 (285)。向量丛映射 (284) 是 Ω•(M; C^∞(($\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1}$)/$\mathbb{Z}$))-模 (286) 与 (287) 之间的映射，其模结构由代数映射 $\mathsf{pr}_\pm^*$ 和 $\mathsf{act}_\pm^*$ 确定，而这些代数映射由 (203) 确定。该映射是 C^∞(($\mathbb{H}_\pm^{2|1} \times \mathbb{R}_{>0}$)/$\mathbb{Z}$))-线性映射，因此可将 (284) 描述为一个取值于克利福德线性自同态的函数，

$$\rho_\pm \in C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}; \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}}(\Omega^\bullet(M; \mathcal{E}_\pm))). \tag{288}$$

利用引理 5.19 中对 $\mathsf{pr}_\pm^*$ 和 $\mathsf{act}_\pm^*$ 的描述，$\rho_\pm$ 必须满足以下性质

$$\rho_\pm(\ell, \tau, \bar\tau, \eta)(\alpha v) = (\alpha - \eta d\alpha)\rho_\pm(\ell, \tau, \bar\tau, \eta)(v), \quad \begin{array}{l} \alpha \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)/\mathbb{Z}), \\ v \in C^\infty((\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z})) \otimes \Omega^\bullet(M; \mathcal{E}_\pm). \end{array} \tag{289}$$

此外，引理 5.15 表明，ρ_+ 和 ρ_- 确定了一个 $\mathbb{R}_{>0}$-族超半群表示，

$$\rho_\pm(\ell, \tau, \bar\tau, \eta) \circ \rho_\pm(\ell, \tau', \bar\tau', \eta') = \rho_\pm(\ell, \tau + \tau', \bar\tau + \bar\tau' + \eta\eta', \eta + \eta')$$

因为 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 中的复合对应于 $\mathbb{H}_\pm^{2|1}$ 中的乘法。

为了进一步分析（288）的几何性质，在奇变量 $-\eta\in$ 中对 $\rho_{\pm}\,C^{\infty}((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z})$ 作泰勒展开，从而得到偶端态射 $\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\ \tau,\ \bar{\tau})$ 和奇端同态 $\mathsf{b}_{\pm}(\ell,\ \tau,\ \bar{\tau})$

$$\rho_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)=\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})-\eta\mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau}),\qquad \begin{array}{l}\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})\in\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\Omega^{\bullet}(M;\mathcal{E}_{\pm}))^{\mathrm{ev}},\\ \mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})\in\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\Omega^{\bullet}(M;\mathcal{E}_{\pm}))^{\mathrm{odd}}.\end{array}\tag{290}$$

限制到 $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}\subset\mathbb{H}_{\pm}/\ell\mathbb{Z}\subset(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_{\pm}^{2|1})/\mathbb{Z}$，对于 ℓ 的每个取值，我们得到一个作用，$\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}\to\mathrm{End}^{\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\Omega^{\bullet}(M;\,\mathcal{E}_{\pm}))$。根据 (289)，$\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$-作用是 $\Omega^{\bullet}(M;\,C^{\infty}(\mathbb{R}_{>0}))$ 上的线性作用。因此，$\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$-作用是通过克利福德线性丛端态射实现的

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}\to\Gamma(\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\mathcal{E}_{\pm})),\\ &t\mapsto\mathsf{a}_{\pm}(\ell,t,t),\ \ \mathsf{a}_{\pm}(\ell,s,s)\circ\mathsf{a}_{\pm}(\ell,t,t)=\mathsf{a}_{\pm}(\ell,s+t,s+t).\end{aligned}\tag{291}$$

这些作用必然随 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$ 平滑变化。因此，在每个纤维 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$ 上用 $t\mapsto\ell t$ 重新参数化，并选择使同构 (285) 为 S^1-等变的方式，便得到一个与 Clifford 作用可交换的单一 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-作用。

接下来考虑 $\Omega^{\bullet}(M;\,\mathcal{E}_{\pm})$ 上的端同态

$$\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}:=\mathsf{b}_{\pm}(\ell,0,0)\in\mathrm{End}_{\mathbb{Cl}_{\pm n}}(\Omega^{\bullet}(M;\mathcal{E}_{\pm}))^{\mathrm{odd}}.\tag{292}$$

由于 $\mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})$ 是奇的，因此 $\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 也是奇的。此外，由于 $\mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})$ 是 $\mathbb{Cl}_{\pm n}$-线性的，因此 $\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 也是如此。方程 (289) 表明，对于任意 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$，$\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 都是 $\Omega^{\bullet}(M;\,\mathcal{E}_{\pm})$ 的一个端同态，因此我们将 $\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 视为一个 $\mathbb{R}_{>0}$-算子族。方程 (289) 还表明，$\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 与 $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$-作用 (291) 可交换，因此也与作用在 $\mathcal{E}_{\pm}$ 上的 S^1-作用可交换。最后，将 (289) 应用于 (290)，得到以下一对方程

$$\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})(\alpha v)=\alpha\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})(v),\qquad \mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})(\alpha v)=d\alpha\mathsf{a}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})(v)+(-1)^{|\alpha|}\alpha\mathsf{b}_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau})(v).$$

利用 $\mathsf{a}_{\pm}(\ell,0,0)=\mathrm{id}$，第二个方程在 $(\tau,\bar{\tau})=(0,0)$ 处的取值就是关于 $\mathbb{A}_{\ell}^{\pm}$ 的莱布尼茨法则，因此我们得出 $\mathbb{A}_{\ell}^{+}$ 和 $\mathbb{A}_{\ell}^{-}$ 是超联络。至此，命题的证明完成。□

引理 8.3。假设 7.10 成立，则沿 (281) 对次数为 n 的扭曲作限制，等价于 Clifford 扭曲 Cl_n。在此等价下，我们有如下识别

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}\simeq E(\mathsf{s}_M^{\pm})\tag{293}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}$ 是向量丛 (283)，而 $\mathsf{s}_M^{\pm}$ 是 (240) 中定义的小配边族。

证明。这可直接由定义 7.17、推论 7.18 和推论 7.21 得出。□

备注 8.4。鉴于推论 7.18，定义 8.1 中的群胚等价形式涉及自由费米子代数 (399) 的张量幂上的模。可逆双模 (412) 给出了这两种观点之间的等价。因此，若不经过与 Clifford 扭曲的等价，值 (293) 就变为

$$E(\mathsf{s}_M^{\pm})\simeq(_{\mathrm{Fer}_{\ell}^{\pm}}(\mathbb{Cl}_{\pm 1}\bigotimes_{m>0}\Lambda^{\bullet}\mathbb{C}_{\ell,\mp m}))^{\otimes -n}\otimes_{\mathbb{Cl}_{\pm n}}\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}.\tag{294}$$

$\widetilde{\ }$为了最终从 $\mathcal{E}_{\pm}$ 中提取 KO((q))-类，本文采用式 (293) 中的 Clifford 模来进行讨论会更方便。

8.2. **翻转保持表示**。接下来，我们考虑 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$ 的 degree n表示沿 $\mathbb{Z}/4$-覆盖 (178) 的下降数据。对于从场论限制而来的 degree n 表示，这些下降数据必须满足一个与自旋统计定理相关的条件，详见 [HST10，定义 6.44]和 [HST10，注释 6.45]。

我们从一个一般性观察开始。超流形范畴带有一个 $\mathbb{Z}/2$-作用，它通过超流形函数环上的奇偶反演来作用；超流形之间的映射自动对这一 $\mathbb{Z}/2$-作用等变。由自然性可知，任何超李范畴的对象和态射也都继承了规范的 $\mathbb{Z}/2$-作用，使得源、目标、单位和复合映射都是 $\mathbb{Z}/2$-等变的。对于超李范畴 $\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M)$，这些规范的 $\mathbb{Z}/2$-作用在几何上对应于超欧几里得流形上的自旋翻转（见引理 4.9 和 5.22）。特别地，$\mathbb{Z}/4$-覆盖 (178) 可分解为如下复合

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{C}}^{2|1}(M) &= \begin{pmatrix}(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+\coprod\mathbb{H}_-)/\mathbb{Z}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\\ \mathsf{s}\downdownarrows\mathsf{t}\\ (\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathbb{R}_{>0})\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\end{pmatrix}\\ &\to \begin{pmatrix}(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+\coprod\mathbb{H}_-)/\mathbb{Z}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)/\!\!/\mathbb{Z}/2\\ \mathsf{s}\downdownarrows\mathsf{t}\\ (\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathbb{R}_{>0})\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)/\!\!/\mathbb{Z}/2\end{pmatrix}\\ &\to \begin{pmatrix}(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+\coprod\mathbb{H}_-)/\mathbb{Z}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)/\!\!/\mathbb{Z}/4\\ \mathsf{s}\downdownarrows\mathsf{t}\\ (\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathbb{R}_{>0})\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)/\!\!/\mathbb{Z}/4\end{pmatrix}=\mathscr{C}^{2|1}(M)\end{aligned} \tag{295}$$

其中，在中间一行，$\mathbb{Z}/2$-作用是我们认定为自旋翻转 Fl 的规范作用；在最后一行，$\mathbb{Z}/4$ 的生成元通过平方根 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 作用。

定义 8.5. </style}一个 () 的 阶表示称为 保翻转的，如果限制到 (295) 后，$\mathbb{Z}/2$ 的生成元在 Clifford 代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\tilde{}$ 上通过奇偶反演作用，并在命题 8.2 的记号中在 Clifford 模 $\mathcal{E}_\pm$ 上通过奇偶反演作用。

引理 8.6. 一个 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的保翻转 n 阶表示由以下同构数据构成

$$\alpha_\pm\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\to\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n},\qquad \mathsf{f}_\pm\colon\widetilde{\mathcal{E}}_\pm\xrightarrow{\sim}\sqrt{\mathrm{Fl}}^*\widetilde{\mathcal{E}}_\mp. \tag{296}$$

使得 $\alpha_\pm\circ\alpha_\mp$ 和 $\mathsf{f}_\pm\circ\mathsf{f}_\mp$ 是奇偶反演。此外，同构 $\mathsf{f}_\pm$ 关于 S^1 上的取逆同态 $t\mapsto -t$ 是 S^1-等变的，并且命题 8.2 中的超联络满足

$$\mathbb{A}^\pm_\ell=(-i)^{\deg+1}\mathbb{A}^\mp_\ell \tag{297}$$

相对于同构 $\mathsf{f}_\pm$。

证明。对于 $\mathbb{Z}/4$ 作用的生成元 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$，其等变数据等价于同构 (296)。保翻转条件要求 $\alpha_\pm$ 和 $\mathsf{f}_\pm$ 的平方分别为相应的奇偶反演。根据内部自然变换的定义，我们得到关于超半群表示 (288) 的条件

$$\rho_\pm(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)=\sqrt{\mathrm{Fl}}^*\rho_\mp(-\tau,-\bar\tau,\sqrt{-1}\eta)\in C^\infty(\mathbb{H}^{2|1}_\pm,\mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}}(\Gamma(\widetilde{\mathcal{E}}_\pm))).$$

使用 (290) 中的记号以及 (186) 对 $\sqrt{\mathrm{Fl}}^*$ 的描述，我们得到

$$\mathsf{a}_\pm(\ell,\tau,\bar\tau)-\eta\mathsf{b}_\pm(\ell,\tau,\bar\tau)=(-i)^{\deg}(\mathsf{a}_\mp(-\tau,-\bar\tau)-i\eta\mathsf{b}_\mp(-\tau,-\bar\tau))$$

其中等式隐含地用到了同构 (296)。由此我们推得，同构 (296) 相对于 $\mathbb{R}$ 的自同构 $t\mapsto -t$，对于作用 (291) 是 $\mathbb{R}$-等变的，并且超联络满足 (297)。□

引理 8.6 的结论是，对于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的保翻转次数 n 表示，命题 8.2 中的向量丛 $\mathcal{E}_+$ 和 $\mathcal{E}_-$ 由一个带有 $\mathbb{R}_{>0}$ 族 $S^1\times\mathbb{C}l_n$-线性超联络的 S^1-等变丛唯一确定

$$\mathcal{E}:=\mathcal{E}_+\to M,\qquad \mathbb{A}_\ell:=\mathbb{A}_\ell^+. \tag{298}$$

（296）中有两种可能的选择 $\alpha_\pm$ ，它们相差一个奇偶自同构；不失一般性，我们假设 $\alpha_\pm$ 是标准的反自同构(264)。

引理 8.7. 假设假设 7.10，次数为 n 的场论 (281) 决定了 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$的一个翻转保持次数为 n 的表示。

证明。 这由引理 6.22 以及扭曲场论被定义为翻转保持函子的事实得出，参见 [ST11, §2.6]以及下文的 §C.4。□

8.3. **次数为 n 且带有配对的表示**。将映射 (226) 沿包含映射 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\subset\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z},M)$ 限制，得到映射

$$\mathsf{inv}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}\to\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_\mp)/\mathbb{Z}, \tag{299}$$

我们也将其记为 inv。

引理 8.8。 (284) 沿 inv 的拉回给出一个向量丛映射

$$\mathsf{act}_\mp^*\widetilde{\mathcal{E}}_\pm\to\mathsf{pr}_\mp^*\widetilde{\mathcal{E}}_\pm$$

在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_+)/\mathbb{Z}$ 上与 $\mathbb{C}l_{\pm n}$-作用相容。

证明。 这由引理 6.20 得出。 □

定义 8.9。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示上的一个配对 是一个向量丛映射

$$\beta\colon \mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}l_{-n}\otimes\mathbb{C}l_n}(\widetilde{\mathcal{E}}_-\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_+)\to\underline{\mathbb{C}} \tag{300}$$

在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times\mathbb{R}_{>0}$ 上，且满足向量丛在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}$ 上的图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}l_{-n}\otimes\mathbb{C}l_n}(\mathsf{act}_+^*\widetilde{\mathcal{E}}_-\otimes\mathsf{pr}_+^*\widetilde{\mathcal{E}}_+) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\rho_+} & \mathsf{act}_+^*(\mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}l_{-n}\otimes\mathbb{C}l_n}(\widetilde{\mathcal{E}}_-\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_+)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{inv}^*\rho_-\otimes\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{act}_+^*\beta} \\
\mathsf{pr}_+^*(\mathbb{C}l_n\otimes_{\mathbb{C}l_{-n}\otimes\mathbb{C}l_n}(\widetilde{\mathcal{E}}_-\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_+)) & \xrightarrow[\mathsf{pr}_+^*\beta]{} & \underline{\mathbb{C}}.
\end{array} \tag{301}$$

命题 8.10。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示上的一个配对决定了一个 $\mathbb{R}_{>0}$-族 $S^1\times\mathbb{C}l_{\pm n}$-不变配对 β_ℓ ，其定义在 $\mathcal{E}_\pm$ 上，并满足来自命题 8.2 的超联络单参数族 $\mathbb{A}_\ell^+,\mathbb{A}_\ell^-$ 满足伴随公式，

$$\beta_\ell(\mathbb{A}_\ell^-v,w)+(-1)^{|v|}\beta_\ell(v,\mathbb{A}_\ell^+w)=d\beta_\ell(v,w). \tag{302}$$

~ ~证明。 根据引理 5.19 中关于 $\mathsf{pr}_\pm^*\mathcal{E}_\pm$ 和 $\mathsf{act}_\pm^*\mathcal{E}_\pm$ 作为 $\Omega^\bullet(M;\,C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}^{2|1}_\pm)/\mathbb{Z}))$ 上的模的描述，式 (301) 的交换性意味着

$$\begin{aligned}
(\mathsf{pr}_+^*\beta_\ell)((\mathsf{inv}^*\rho_-)(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)v,w) &= \beta_\ell(\rho_-(\ell,-\tau,-\bar\tau,-\eta)v,w)\\
&= \beta_\ell((\mathsf{a}_-(\ell,-\tau,-\bar\tau)+\eta\mathsf{b}_-(\ell,-\tau,-\bar\tau))v,w)\\
&= (\mathsf{act}_+^*\beta_\ell)(v,\rho_+(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)w)\\
&= \beta_\ell(v,\rho_+(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)w)+\eta d\beta_\ell(v,\rho_+(\ell,\tau,\bar\tau,\eta)w)\\
&= \beta_\ell(v,(\mathsf{a}_+(\ell,\tau,\bar\tau)-\eta\mathsf{b}_+(\ell,\tau,\bar\tau))w)\\
&\quad +\eta d\beta_\ell(v,(\mathsf{a}_+(\ell,\tau,\bar\tau)-\eta\mathsf{b}_+(\ell,\tau,\bar\tau))w),
\end{aligned}$$

其中，上述等式两边的元素属于 $\Omega^\bullet(M;\, C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_\pm^{2|1})/\mathbb{Z}))$。令$\eta=0$和 $(\tau,\ \bar{\tau})\ =(t,\ t)$，可见该配对关于 $\mathbb{R}\subset\mathbb{H}_\pm$ 是 $\mathbb{R}$-不变的；这就推出了所声称的 S^1-不变性。汇集含有 η 的项，令 $(\tau,\ \bar{\tau})\ =(0,\ 0)$，并利用超联络 $\mathbb{A}_\ell^+$ 和 $\mathbb{A}_\ell^-$ 的定义 (292)，即可得到方程 (302)。□

引理 8.11. 假设假设 7.10，沿着 (281) 限制一个次数为 n 的场论，会为所得的 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示赋予一个配对。

证明。 数据 (300) 可由沿着 (241) 限制推论 7.21 中的 $E(\mathrm{L}_M^-)$ 得出。性质 (301) 可由命题 7.5 中的 (249) 得出。□

8.4. **反射与实结构**。 引理 5.22 中的函子 † 确定了 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上的一个反射结构，其含义见定义 C.19。

引理 8.12. </style}根据定义 C.25 的含义， $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的 Clifford 扭曲的一个反射结构由一个 $*$-超代数结构 $*\colon \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\to\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}^{\mathsf{op}}=\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}$ 确定，该结构具有以下性质

$$\overline{\alpha}_\pm\circ(-)^*=(-1)^{\mathsf{F}}\circ(-)^*\circ\alpha_\mp, \tag{303}$$

关于奇偶反演 $(-1)^{\mathsf{F}}$ 以及 $\alpha_\pm\,\mathrm{l}_{\pm n}$ 的反自同构 $\mathbb{C}$，见（264）。特别地，克利福德扭曲的反射结构决定了克利福德代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的实结构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\to\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$。

证明。 展开定义 C.25，扭曲 $\mathrm{Cl}_n\colon \mathscr{C}^{2|1}(M)\ \to$TA 的反射结构是一个等变代数丛平凡丛同构 $\mathbb{Z}/4$

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\coprod\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}\simeq\dagger^*(\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n}\coprod\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n})$$

在 $\mathrm{Ob}(\widetilde{\mathscr{C}^{2|1}}(M))\ \simeq\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\ \times\mathbb{R}_{>0}\coprod\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\ \times\mathbb{R}_{>0}$ 上，并带有附加的对合数据。只需考虑 $M=$pt 的情形。代数同构

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\simeq\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n}=\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n}^{\mathsf{op}} \tag{304}$$

决定了这样一个可逆双模，其中该双模的对合数据继承自（304）的对合性质。事实上，上述内容使我们可以将 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 视为一个 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}^{\mathsf{op}}$-$\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 双模。对合代数同构（304）恰好就是以下数据：

$*$超代数结构。根据引理 5.13，该反射结构的 $\mathbb{Z}/4$-等变性条件，就是 $*$-超代数结构与反对合 (264) 之间的相容性 (303)。最后，我们注意到， $*$超代数结构与反对合结合起来，定义了一个实结构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$。□

定义 8.13. 在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上定义一个 $*$-超代数结构（参见定义 B.4），它由生成元上的映射作 $\mathbb{C}$-反线性扩张得到：

$$f_j^*=-if_j,\qquad e_j^*=ie_j. \tag{305}$$

这里使用 (417) 中克利福德代数生成元的记号。

注记 8.14. 在 $*$-超代数与 $\mathbb{Z}/2$-分次代数上的 $*$-结构之间的转换下（例如参见 [DEF+99，第 91] 页），(305) 对应于克利福德代数上的标准 $*$-结构 (418)。我们注意到，标准反自同构 (264) 与 $*$-超代数结构 (305) 满足相容性 (303)。这些结构结合起来定义标准实结构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$，它确定了实克利福德代数 $\mathrm{Cl}_{\pm n}\subset\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$。

对于由 (305) 给出的克利福德扭曲的选定反射结构，次数为 n 的表示 E of $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上的反射结构指定了 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)\times\mathbb{R}_{>0}$ 上克利福德模丛的同构（参见定义 C.25 ）

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\mp}\xrightarrow{\sim}\dagger^{*}\overline{\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}}, \tag{306}$$

相对于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的 $*$-超代数结构 (305)。

定义 8.15。 假设给定 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个次数为 n 的表示 E 上的反射结构，并带有配对 β。那么，若配对满足以下条件， E 就是 反射正的

$$\langle-,-\rangle\colon\ \dagger^{*}\overline{\widetilde{\mathcal{E}}_{+}}\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}\widetilde{\mathcal{E}}_{+}\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\dagger^{*}\overline{\widetilde{\mathcal{E}}_{+}}\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_{+})\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\widetilde{\mathcal{E}}_{-}\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_{+})\xrightarrow{\beta}\underline{\mathbb{C}}$$

沿 $M\times\mathbb{R}_{>0}\subset\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)\times\mathbb{R}_{>0}$ 的限制是一个正定厄米配对（在 $\mathbb{Z}/2$-分次意义下），其中上面的第二个同构使用了 (306)。

命题 8.16。 对于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个次数为 n 的反射正表示 E，其关联的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性超联络单参数族 $\mathbb{A}_\ell$ 对每个 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$ 都是自伴的， S^1-作用是酉的，而 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm}$-作用相对于定义 8.15 中的配对 $\langle-,-\rangle$ 是自伴的。

证明。 相对于同构 (306)， E 上的反射结构要求超半群表示 (288) 满足

$$\rho_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)=(\dagger^{*}\overline{\rho}_{\mp})(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta)=i^{\deg}\overline{\rho}_{\mp}(\ell,\bar{\tau},\tau,\eta)$$

按照 (290) 进行泰勒展开，我们发现超联络 $\mathbb{A}_\ell^{-}$ 在同构 (306) 下映为 $-i^{\deg+1}\mathbb{A}_\ell^{+}$ 。接着根据伴随公式 (302) 和厄米配对的定义，可得 $\mathbb{A}_\ell^{+}$ 所需的自伴性性质。 S^1作用的酉性同理可得。根据 Clifford 扭曲的反射结构定义，利用 $*$-超代数结构 (305) 以及配对 $\langle-,-\rangle$ 的定义，可得 Clifford 作用的自伴性。□

命题 8.17。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的反射正次数 n 表示 E 赋予向量丛 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{+}$ 一个实结构，使得定义 8.15 中的配对来自 Cl_n- 模底层实向量丛上的普通（即非 $\mathbb{Z}/2$- 分次）实配对，并且自伴超联络的单参数族 $\mathbb{A}_\ell=\mathbb{A}_\ell^{+}$ 是超联络的实族。

证明。 同构 (296) 与反射结构 (306) 结合，得到一个同构

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}\xrightarrow{\sim}\dagger^{*}(\overline{\sqrt{\mathrm{Fl}}})^{*}\overline{\widetilde{\mathcal{E}}_{\pm}} \tag{307}$$

将其限制到 $M\times\mathbb{R}_{>0}\subset\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)\times\mathbb{R}_{>0}$ 时，它就是一族 $\mathbb{R}_{>0}$ 实结构 $\mathcal{E}_{\pm}\simeq\mathcal{E}_{\pm}$，相对于由 $*$-结构 (305) 和反自同构 (408) 指定的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上的实结构。下文用 $x\mapsto x$ 表示截面在这族实结构下的像。我们声称该配对满足条件

$$\langle x,y\rangle=(-1)^{|x|}\overline{\langle x,y\rangle} \tag{308}$$

对于 $x,\ y\in\Gamma(\mathcal{E}_{+})$。这是由 (189) 得出的：对易 $\dagger$ 和 $\sqrt{\mathrm{Fl}}$ 会引入一个取决于奇偶性的符号。条件 (308) 意味着，偶截面之间的配对为实数，偶截面与奇截面之间的配对为零，而奇截面之间的配对为纯虚数。超希尔伯特空间与 $\mathbb{Z}/2$-分次希尔伯特空间之间的转换为（比较 [DEF+99，第 91] 页）

$$\langle v,w\rangle_0:=\begin{cases}\langle v,w\rangle & v,w\in\Gamma(\mathcal{E}_{+})^{\mathrm{ev}}\\ i^{-1}\langle v,w\rangle & v,w\in\Gamma(\mathcal{E}_{+})^{\mathrm{odd}}\\ 0 & \text{else}\end{cases} \tag{309}$$

因此我们看到，条件 (308) 经过这种转换后，会在通常意义下导出实配对。最后，超半群表示 (288) 必须在实结构 (307) 下拉回自身

$$\rho_{\pm}(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta) = (\dagger^{*}(\overline{\sqrt{\mathrm{Fl}}})^{*}\overline{\rho}_{\pm})(\ell,\tau,\bar{\tau},\eta). \tag{310}$$

特别地，泰勒分量 b+(ℓ，0，0)（如式 (290) 所示）拉回后保持不变。这正是超联络为实的条件。□

命题 8.18. 假设假设 7.10，沿着 (281) 限制度数为 n, $2|1$ 的欧几里得场论上的反射结构，可确定一个度数为 n 的表示，该表示属于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$。沿着 (281) 限制度数为 n, $2|1$ 的反射正欧几里得场论，可确定一个度数为 n 的表示，该表示属于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$，且该表示是反射正的。

证明。 假设 7.10 意味着，度数为 n 的扭曲的反射结构来自 $*$-超代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上的超代数结构。接着进一步考察命题 7.8 和推论 7.21 中的数据，可知沿着 (241) 限制一个反射正场论，确定了一个度数为 n 的反射正表示；该表示对应于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 上由 $\dagger$ 给出的反射结构。定义 8.15 中配对的对称性由引理 7.24 得出。最后，我们注意到，定义 7.25 中的正性条件等价于定义 8.15 中的正性条件。□

8.5. **迹类表示。** 我们回顾定义 4.28 中的超欧几里得双环空间 $\mathcal{L}^{2|1}(M)$，它带有 $\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用，以及将 M 中超圆柱的一个子空间视为 M 中超环面的跨图 (192)。定义近乎常值超双环的子空间，

$$\mathcal{L}_0^{2|1}(M) := \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times s\mathsf{Lat} \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{2|1}/\mathbb{Z}^2, M) \times s\mathsf{Lat} = \mathcal{L}^{2|1}(M). \tag{311}$$

$\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用保持包含映射 (311)。赋值$M \mapsto \mathcal{L}_0^{2|1}(M)/\!\!/(\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 关于流形 M 是自然的，因此存在一个到超欧几里得环面栈的典范映射，

$$\mathcal{L}_0^{2|1}(M)/\!\!/(\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to s\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})). \tag{312}$$

在上述映射的目标上，我们取命题 7.19 所指定的 Pfaffian 线丛扩张。具体而言，这个线丛由叠之间的映射分类：

$$s\mathsf{Lat}/\!\!/\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{pt}/\!\!/U(1), \quad \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to U(1), \tag{313}$$

由 (350) 中指定的同态确定。对于沿叠之间的映射 (312) 拉回由 (313) 分类的线丛，我们仍使用相同记号 Pf。为明确描述 Pf 在 $\mathcal{L}_0^{2|1}(M)$ 上的截面，我们采用记号

$$C^{\infty}_{j/2,k/2}(\mathsf{Lat}) := \{f \in C^{\infty}(\mathsf{Lat}) \mid (u,\bar{u}) \cdot f = u^j \bar{u}^k f,\ (u,\bar{u}) \in \mathrm{Spin}(2)\} \subset \mathbb{C}^{\infty}(\mathsf{Lat})$$

表示 Lat 上在 $\mathrm{Spin}(2) \simeq U(1)$ 作用下按权 $(j,\ k)$ 变换的函数。

注记 8.19。 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变元 $C^{\infty}_{j/2,\ k/2}(\mathsf{Lat})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ 确定 $\mathrm{Pf}^{-j/2} \otimes \mathrm{Pf}^{-k/2}$ 的全局截面，其中 Pf 和 Pf 是（非超）欧几里得自旋环面的模叠上的 Pfaffian 线丛及其共轭线丛；参见 §A.2。

命题 *1.18* 的证明。存在一个单射

$$\Gamma(\mathcal{L}_0^{2|1}(M)/\!\!/(\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})); \mathrm{Pf}^{\otimes n}) \hookrightarrow C^{\infty}(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \times s\mathsf{Lat})$$

将截面实现为定义在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \times s\mathsf{Lat}$ 上的函数，这些函数在 $\mathbb{E}^{2|1} \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用下按相应方式变换。具体而言，截面在该

$\mathbb{E}^{2|1}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-作用下保持不变，并在 $\mathrm{Spin}(2)\simeq U(1)$-作用下按权变换。利用这一识别，

$$C^\infty(\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times s\mathsf{Lat})\simeq C^\infty(s\mathsf{Lat};\, C^\infty(\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)))\simeq C^\infty(\mathsf{Lat};\,\Omega^\bullet(M)[\lambda_1,\lambda_2]/(\lambda_1\lambda_2)),$$

它对奇变量 $\lambda_1,\lambda_2\in C^\infty(s\mathsf{Lat})$ 作泰勒展开后，任意函数都可以写成

$$\begin{aligned}\omega &= (2\mathrm{vol})^{\deg/2}(\omega_0+\lambda_1(2\mathrm{vol})^{1/2}\omega_1+\lambda_2(2\mathrm{vol})^{1/2}\omega_2),\\ &\quad \omega_i\in C^\infty(\mathsf{Lat};\Omega^\bullet(M))\simeq\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathsf{Lat}))\end{aligned}\tag{314}$$

其中 $\mathrm{vol}:=\frac{\ell_1\bar\ell_2-\ell_1\bar\ell_2}{2i}\in C^\infty(\mathsf{Lat})^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ 是一个取实值且处处非零的函数。根据 [BE22，引理 3.19]，，函数 ω 是 $\mathbb{E}^{2|1}$-不变量，当且仅当[2]

$$d\omega_0=0,\quad \partial_{\bar\ell_i}\omega_0=\frac{1}{2}d\omega_i,\quad i=1,2.\tag{315}$$

接下来我们考察 $\mathrm{Spin}(2)$-等变性：对于 $(u,\bar u)\in U(1)\simeq\mathrm{Spin}(2)$，我们将用到 $(u,\ \bar u)\cdot$体积$^{1/2}=u\bar u$体积$^{1/2}$，$(u,\ \bar u)\cdot\lambda_i=\bar u\lambda_i$，$(u,\ \bar u)\cdot\alpha=\bar u^{-k}\alpha,\quad \alpha\in\Omega^k(M)\subset\Omega^k(M;\,C^\infty(\mathsf{Lat}))$，其中在最后一步计算中，我们通过常值函数 $\mathbb{C}\hookrightarrow C^\infty(\mathsf{Lat})$ 的包含映射，将一个 k-形式视为 $\Omega^k(M;\,C^\infty(\mathsf{Lat}))$ 中的一个微分形式。由上可知，要使 ω_i 属于 $U(1)$-作用的 n^{th} 权空间，必须满足

$$\omega_0\in\bigoplus_{k+j=n}\Omega^k(M;C^\infty_{j/2,0}(\mathsf{Lat})),\quad \omega_i\in\bigoplus_{k+j=n-1}\Omega^k(M;C^\infty_{j/2,1}(\mathsf{Lat})).$$

我们进一步注意到，ω_0 必须是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变量，因此由引理 A.4 和 (356)，沿 $\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}\hookrightarrow\mathsf{Lat}$ 的限制给出

$$\begin{aligned}Z &:= \ell^{(\deg-n)/2}(\omega_0|_{\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}})=(\ell^{(\deg-n)/2}(2\mathrm{vol})^{-\deg/2}\omega)|_{\mathring{\mathbb{H}}\times\mathbb{R}_{>0}}\\ &= \ell^{-n/2}(2\mathrm{im}(\tau))^{-\deg/2}(\omega|_{\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}})\in\bigoplus_{j+k=n}\Omega^j(M;\mathrm{mf}^{k,0})\end{aligned}\tag{316}$$

其中在第二行中，我们用到了 $\mathrm{vol}|_{\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}}=\mathrm{im}(\tau)\ell$。展开 §A 中的记号，$Z$ 是一个取值于 $C^\infty(\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0})$ 的微分形式，其变换性质为

$$Z\mapsto(cz+d)^{(\deg-n)/2}Z,\qquad z=\tau/\ell\tag{317}$$

关于系数上的 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-作用。注意到微分同胚

$$\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0},\qquad(\tau,\bar\tau,\ell)\mapsto(\tau/\ell,\bar\tau/\ell,\ell\mathrm{im}(\tau))$$

它用关联环面的共形模数 $(z,\ \bar z)=(\tau/\ell,\ \bar\tau/\ell)$ 和总体积 $v=\ell\mathrm{im}(\tau)$ 为 $\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}$ 提供坐标。根据 [BE22，引理 3.21]，，ω_1，ω_2 的数据等价于

$$Z_v\in\bigoplus_{j+k=n-1}\Omega^j(M;\mathrm{mf}^{(k-2),-2})\tag{318}$$

$$Z_{\bar z}\in\bigoplus_{j+k=n-1}\Omega^j(M;\mathrm{mf}^{k,-2})\tag{319}$$

即取值于 $C^\infty(\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0})$ 且具有变换性质的微分形式

$$Z_{\bar z}\mapsto(cz+d)^{(\deg-n-1)/2}(c\bar z+d)Z_{\bar z},\qquad Z_v\mapsto(cz+n)^{(\deg-n-3)/2}(c\bar z+d)Z_v$$

关于系数上的 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-作用。根据 [BE22，引理 3.21]，性质 (315) 等价于

$$\partial_{\bar z}Z=dZ_{\bar z},\qquad \partial_vZ=dZ.$$

[2]方程 (315) 与 [BE22，引理 3.19] 相差一个因子 $1/2$，因为上述选取的 ω 归一化多出一个因子 $2^{\deg/2}$，这在下文会更方便。

证明至此完成。 □

元素 $\Gamma_n \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 在 (419) 中定义，并确定了克利福德超迹 (420)。

定义 8.20。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个迹类 度表示由 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个 n 度表示 E 和一个截面 $(Z, Z_\tau, Z_v) \in \Gamma(\mathcal{L}_0^{2|1}(M); \mathsf{Pf}^{\otimes n})$ 组成。我们要求这些数据满足以下性质：

(i)（普通）迹存在

$$\mathsf{Tr}(\Gamma_n \circ \rho_+|_{M\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z}}) \in C^\infty(M; C^\infty((\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z})) \tag{320}$$

and

(ii) 超迹满足相容条件

$$Z = \phi(\ell,\ z)^{-n}(2\mathrm{im}(z))^{-\deg/2}\mathsf{Tr}^{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\rho_+|_{\text{映射}(\mathbb{R}^{0|1}M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\ \mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z}}) \in \Omega^\bullet(M; (C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z})) \tag{321}$$

其中，$\mathsf{Tr}^{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}$ 表示克利福德超迹，并且

$$\phi(\ell,\tau) = \prod_{n>0}(1-e^{2\pi i\tau/\ell}) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)$$

与 Dedekind η-函数密切相关。

备注 8.21。 条件 (321) 等价于要求 Z 等于 $\mathsf{Fer}_\ell^{\pm n}$ -模中超半群表示的克利福德超迹，参见 (294)。

命题 8.22。 假设假设 7.10，则沿 (281) 限制一个度为 n 的场论，可确定 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个迹类度为 n 的表示。

证明。 论证遵循 [ST11，引理 3.20]。用 [ST12], 的术语来说，复合的像中的配边是

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{Mor}(\mathscr{C}^{2|1}(M)) \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \tag{322}$$

是配边范畴中的厚 态射：这直接由命题 6.16 中的分解得出。厚态射的范畴迹是幺半群单位元的一个端同态。命题 6.18 表明，这个范畴迹是以下复合的像

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z} \to \mathcal{L}_0^{2|1}(M) \to \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)). \tag{323}$$

将度为 n 的场论应用于这些族，推论 7.21 表明，族 (322) 的范畴迹被映射为以下复合

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n \to \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}\otimes \mathsf{r}_M^+} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\widetilde{\mathcal{E}}_+\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_-) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\widetilde{\mathcal{E}}_-\otimes\widetilde{\mathcal{E}}_+) \xrightarrow{\mathring{\mathsf{l}}_M^-} \underline{\mathbb{C}} \tag{324}$$

对于来自 (240) 的小配边族 r_M^+ 和 l_M^-，其中 $\mathring{\mathsf{l}}_M^-$ 表示 l_M^- 沿 $0 \in \mathbb{H}_-^{2|1}$ 的限制。元素 Γ_n 给出了 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \simeq \mathbb{C}$ 与平凡线丛之间的一个识别，而复合 (324) 就成为克利福德超迹。利用核 Fr´echet 空间具有逼近性质 [Sch71, 第 109], 页，我们发现上述范畴迹与增厚体的选择无关 [ST12, 定理 1.7]。最后，引理 C.40 在 Clifford 迹与 Fer_n关联的迹之间进行转换，从而得到性质 (321)。性质 (320) 的迹性质论证类似，但需通过自旋翻转自同构修改 (323) 的像中超圆柱的出边界。这会将超迹变为普通迹。

为导出所声称的相容性公式（321），上述论证给出

$$\omega|_{\mathfrak{H}\times\mathbb{R}_{>0}} = \ell^{n/2}\phi(\ell,\tau)^{-n}\mathsf{Tr}^{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\rho_+|_{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\times(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+)/\mathbb{Z}}) \tag{325}$$

ω 式（314）中的函数，它确定了 $\mathrm{Pf}^{-\otimes n}$ 的截面。（325）中 Clifford 超迹前的前因子，是可逆双模（412）$^\circ$ 的特征在 $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+$ 上作为函数时的 $-n$ 次幂，见（416）。于是由（316），我们得到（321）。□

9. Energy cutoffs and the cocycle map

本节中，我们使用记号 (298) 表示超向量丛 $\mathcal{E}$ 及其相关联的超联络单参数族 $\mathbb{A}_\ell$，该族对应于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的次数为 n 的表示。对于$\ell\in\mathbb{R}_{>0}$，我们还设 $\rho_\ell(\tau,\ \bar\tau,\ \eta):=\rho_+(\ell,\ \tau,\ \bar\tau,\ \eta)$，也就是说，$\rho_\ell$是 (288) 中的 ρ_+ 在固定的 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$ 上的限制。

9.1. 提取超联络序列。

引理 9.1. 一个次数为 n 的 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 反射正表示（定义 8.15 中的含义）确定了度量超向量丛的一个正交直和

$$\mathcal{E}\simeq\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{E}_k,\qquad \mathcal{E}_k\to M, \tag{326}$$

相对于该作用，$\mathbb{H}_+^{2|1}/\ell\mathbb{Z}$ 由下式给出

$$\rho_\ell(\tau,\bar\tau,\eta)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi ik\tau/\ell}\rho_{\ell,k}(\mathrm{im}(\tau),\theta), \tag{327}$$

其中，对每个 $(\ell,\ k)\ \in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{Z}$, $\rho_{\ell,\ k}\colon\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\to\mathrm{End}(\Omega^\bullet(M;\mathcal{E}_{k,\ \ell}))$，这是一个 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$-线性的超半群表示。若该表示还是迹类的，则 $\mathcal{E}_k=\{0\}$ 对 $k\ll 0$。

Proof. 超李群的正合列 (130) 给出了超半群的对每个 $\ell\in\mathbb{R}_{>0}$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z} & \to & \mathbb{H}_+^{2|1}/\ell\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} & \to & 1,\\ & & t & \mapsto & (t,t,0),\ (\tau,\bar\tau,\eta) & \mapsto & (2\mathrm{im}(\tau),\eta). & & \end{array} \tag{328}$$

由命题 8.16，$\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{E}$ 上的作用是酉的，因此我们得到 (326)，它是权空间的正交直和。对于 $p_k\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}_k$，令其为到一个权空间的正交投影，定义超半群表示

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\ell,k}\colon\mathbb{H}_+^{2|1}/\ell\mathbb{Z} & \to & \mathrm{End}(\Omega^\bullet(M;\mathcal{E}_{k,\ell}))\\ \rho_{\ell,k}(\tau,\bar\tau,\eta) & := & e^{-2\pi ik\tau/\ell}\otimes(p_k\circ\rho_\ell(\tau,\bar\tau,\eta)\circ p_k) \end{array} \tag{329}$$

其中，$e^{-2\pi ik\tau/\ell}\colon\ \mathbb{H}_+^{2|1}/\ell\mathbb{Z}\to\mathrm{End}(\mathbb{C})$ 是一个一维表示。子群 $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}\subset\mathbb{H}_+^{2|1}/\ell\mathbb{Z}$ 作用平凡，因此正合列 (328) 表明，(329) 由商的一个表示确定。这就给出了描述 (327)。

最后，对于充分负的 k，迹类条件蕴含 $\mathcal{E}_k=\{0\}$，这可由一个标准论证得出，例如参见 [ST11，第 43]页，或 [ST04，定理 3.3 的证明。14]简言之，$\rho_{\ell,\ k}$ 必须具有零迹，迹 (320) 才能收敛。迹对参数 $(\tau,\ \bar\tau,\ 0)$ 的连续性意味着恒等算子 $\rho_{\ell,\ k}(0,\ 0,\ 0)\ =\mathrm{id}_{\mathcal{E}_{\ell,\ k}}$是零算子，因此 $k\ll 0$，并且 $\mathcal{E}_k=\{0\}$ 对于 $k\ll 0$成立。□

引理 9.2. 命题 8.2 中的超联络单参数族，按照 (326) 分解为实 Clifford 线性、自伴超联络的无限直和，

$$\mathbb{A}_\ell=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{A}_{\ell,k},\qquad \mathbb{A}_{\ell,k}\colon\Omega^\bullet(M;\mathcal{E}_k)\to\Omega^\bullet(M;\mathcal{E}_k). \tag{330}$$

证明. 超联络的无限直和来自对 (327) 右侧关于奇变量 η 进行泰勒展开，并应用命题 8.2 证明中的论证；其中，自伴性由命题 8.16 得出，实结构则来自命题 8.17。□

定义 9.3. 若反射正的次数 n 表示 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 具有光滑指标丛，则对于所有 $(\ell,\ k) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Z}$，超联络 (330) 均按定义 D.14 的意义具有光滑指标丛。

命题 9.4. 具有光滑指标丛的反射正次数 n 表示 E（定义于 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$）确定一个类

$$[E] \in \mathrm{KO}^n(M)((q)). \tag{331}$$

证明。 我们声称，只需考虑 $\mathcal{E}_k = \{0\}$对于 $k < 0$ 的情形。为此，将表示 (327) 乘以 q^J，取足够大的幂，使所得表示 $q^J E$ 满足 $\mathcal{E}_k = \{0\}$ 对于 $k < 0$。接下来的论证将构造一个指标 $[q^J E] \in \mathrm{KO}^n(M)[\![q]\!]$。最后，将 (331) 定义为 $[E] := q^{-J}[q^J E] \in \mathrm{KO}^n(M)((q))$。若 M 不紧，则全局幂 J 可能不存在；但通过在 M 上选取一个耗尽函数，并在紧子集上构造相容的类，我们可以得到相同的约化。

下面，令 $\mathbb{A}_k := \mathbb{A}_{1,\ k}$，即将超联络 (330) 的第 k 个单参数族特化到 $\ell = 1$。我们按照引理 3.15 的证明，类似地将指标丛构造应用于超联络序列$\mathbb{A}_k$。对每个 N，定义一个由 $\vec{\lambda} = (\lambda_0,\ \ldots\ldots,\ \lambda_N) \in \mathbb{R}^N_{>0}$ 编号的 X 的开覆盖

$$U^{\vec{\lambda}} \quad := \quad \{x \in X \mid \lambda_k \notin \mathrm{Spec}((\mathbb{A}_k^{[0]})^2_x)\} \subset X \text{ for } k \leq N\}.$$

在该覆盖的每个分支上，都有有限秩向量丛 $\mathcal{E}_k^{<\lambda_k} \to U^{\vec{\lambda}}$，而在$\vec{\ }$ $\vec{\ }$交叠区域 $U^{\lambda} \bigcap U^{\lambda'}$ 上，对于 $k \leq N$ 存在奇端同态，

$$f_k^{\lambda_k \lambda'_k} \in \mathrm{End}(U^{\vec{\lambda}} \bigcap U^{\vec{\lambda'}}, (\mathcal{E}_k^{<\lambda})^{\perp}), \qquad \lambda_k < \lambda'_k$$

其定义在包含映射 $\mathcal{E}_k^{<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{E}_k^{<\lambda'}$ 的正交补上。因此，对每个 N，命题 D.17 给出一个映射

$$\left[\{U^{\vec{\lambda}}, \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{E}_k^{<\lambda_k}, \bigoplus_{k=0}^{N} f_k^{\lambda_k \lambda'_k}\}_{\vec{\lambda}}\right] : X \to (\mathrm{KO} \wedge \{1, q, \ldots q^N\}_+)^n \tag{332}$$

由从 $\{U^{\vec{\lambda}}\}$ 的切赫范畴到某个拓扑范畴的拓扑函子（见（427））确定，其分类空间表示同伦余极限图（58）中 N 谱的第 n 个空间。开覆盖的细化确定了切赫范畴之间的一个函子，并诱导出一个等价；因此，根据 [Seg68，命题 2.1]，上述构造的映射配备了随 N 增大而变化的典范同伦相容性。因此，映射（332）是映入同伦余极限图（58）的映射数据的一部分，因而定义了一个映入谱 $\mathrm{KO}[\![q]\!]$ 的映射。□

9.2. **模不变性与庞特里亚金特征**。

定义 9.5。 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的自伴表示称为无穷小生成的，如果 $\rho_\ell(\tau,\ \bar{\tau},\ \eta)$ 由以下公式确定

$$\rho_\ell(\tau, \bar{\tau}, \eta) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k \tau/\ell} \rho_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau), \eta) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k \tau/\ell} e^{-2\mathrm{im}(\tau)\mathbb{A}^2_{\ell,k} + \eta \mathbb{A}_{\ell,k}} \tag{333}$$

对于这一列自伴的 Clifford 线性超联络，

$$\mathbb{A}_{\ell,k} := p_k \circ \mathbb{A}_\ell \circ p_k$$

其中 $\mathbb{A}_\ell$ 是（298）中的 $\mathcal{E}$ 上的自伴超联络单参数族，$p_k\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}_k$ 是正交投影。

注 9.6。 假设常微分方程的解存在且唯一，则 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的自伴表示自动是无穷小生成的，例如，当所有 k 下的向量丛 $\mathcal{E}_k$ 都是有限维时。然而，在一般的拓扑向量空间中，解的存在性和唯一性可能失效，参见 [Ham82，例 5.6。1] 中给出了 Fr´echet 空间的反例。从物理学的角度来看，人们预期场论由无穷小数据决定。若要将能量等物理量解释为算子的特征值，这一点至关重要；而这又是讨论有效场论中的能量截断的前提。为确保解的存在性和唯一性，可以修改场论的泛函分析框架，例如改用驯顺 Fr´echet 空间和驯顺映射，或某种希尔伯特丛与连续映射的变体。更具威尔逊式方法色彩的做法是考虑归纳有限维向量丛中的表示，并要求它们通过能量滤过满足相容性。这类条件很快就会变得技术性很强，而在猜想（1）中将其延伸至点所需的恰当分析学背景，目前尚不清楚。因此，我们倾向于让这些分析方面的选择保持灵活，于是得到定义 9.5。

命题 9.7。 对于从 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的无穷小生成迹类次数 n 表示中提取出的一列超联络，归一化的克利福德超迹

$$Z=\phi(\ell,\tau)^{-n}\sum q^k\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau)))^2})\in\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathring{\mathbb{H}}\times\mathbb{R}_{>0}))$$

在 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 对 $\mathbb{H}_+\times\mathbb{R}_{>0}$ 的作用下按式 (317) 变换，即作为 $\mathrm{Pf}^{-\otimes n}$ 的一个截面变换。上文中，$\mathbb{A}_{\ell,\ k}(2\mathrm{im}(\tau))$ 是超联络 $\mathbb{A}_{\ell,\ k}$ 按 $2\mathrm{im}(\tau)$ 缩放后的结果，如式 (70) 所示。

证明。 利用迹类表示的定义，命题 8.20 中的等式 (321) 得出

$$\begin{aligned}Z&=(2\mathrm{im}(\tau))^{-\deg/2}\phi(\ell,\tau)^{-n}\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(\rho_+(\tau,\bar\tau,0))\\&=\phi(\ell,\tau)^{-n}\sum q^k(2\mathrm{im}(\tau))^{-\deg/2}\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-2\mathrm{im}(\tau)\mathbb{A}^2_{\ell,k}})\\&=\phi(\ell,\tau)^{-n}\sum q^k\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}),\end{aligned}\tag{334}$$

其中 Z 根据式 (316) 是模的。证明完毕。 □

9.3. 指标丛与配分函数的同伦相容性

引理 9.8。 命题 9.4 中构造的余循环的庞特里亚金特征与微分形式之间存在唯一确定的余边界

$$\phi(1,\tau)^{-n}\sum q^k\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-\mathbb{A}_k(2\mathrm{im}(\tau))^2})\in\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}_{>0})(\!(q)\!))=Z|_{\ell=1}\tag{335}$$

其中，我们将重标度参数 $2\mathrm{im}(\tau)\ \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})\ \subset C^\infty(\mathbb{R}_{>0})(\!(q)\!)$ 视为标准坐标。

证明。 指标丛的存在性意味着，对于每个 $(\lambda,\ k)$，都存在唯一确定的余边界（见引理 D.18）

$$d\omega_k^\lambda=\mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-\mathbb{A}_k(2\mathrm{im}(\tau))^2})|_{U_\lambda}-\mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda_k})\in\Omega(U_{\lambda_k};\mathbb{C}[u^{\pm2}]).\tag{336}$$

˘ 命题 9.4 中构造的余循环的庞特里亚金特征，对于每个 N （比较（87））都是一个切赫–德拉姆余循环；不同的 N 之间的相容性来自覆盖的细分。对于每个 N，沿覆盖的细分限制余边界（336），会在指标丛的庞特里亚金特征与（335）之间得到切赫–德拉姆复形中的一个余边界。□

引理 9.9。给定 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的一个无穷小生成的自伴表示，存在与该 ℓ-参数超联络族相关联的陈–西蒙斯形式，从而得到

$$\sum q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}) = \sum q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{1,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}) + d\sum q^k \zeta_k \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})((q)))$$

证明。超迹 $\mathsf{sTr}(_{e^{-\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}})$ 随 ℓ 平滑变化。于是，将陈–西蒙斯形式的标准构造应用于以参数 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ 为参数的超联络单参数族 $\mathbb{A}_{\ell,k}$，即可得到该引理，

$$\begin{aligned} \zeta_k(\ell) &= \int_1^\ell \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}\left(\frac{d\mathbb{A}_{s,k}(2\mathrm{im}(\tau))}{ds} e^{-\mathbb{A}_{s,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}\right) ds \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})) \\ d\zeta_k(\ell) &= \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau)))^2}) - \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{1,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}) \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})) \end{aligned}$$

其中（如前所述），$2\mathrm{im}(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ 被认定为系数环中的标准坐标函数。□

9.4. 群胚 $2|1$-eft$^n(M)$ 与定理 1.1 的证明。 根据群胚 $2|1$-eft$^n(M)$ 的定义 1.21，对象 $E \in 2|1\text{-eft}^n(M)$ 确定了命题 1.13 中满足定义 1.14 所述截断性质的几何数据。

定理 1.1 的证明。 命题 9.4 给出一个余循环 $\mathrm{Ind}(E)$，它代表类 $[\mathrm{Ind}(E)] \in \mathrm{KO}^{-n}(M)((q))$，该类取决于截断的选择。选取一个 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-等变的 $\partial_{\bar{z}}$-原像 $T$of $Z_{\bar{z}}$，使得

$$(337)\quad Z - dT \in \Omega^\bullet(M; \mathcal{O}(\mathfrak{H}) \otimes C^\infty(\mathbb{R})))^{\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})}, \quad (Z - dT)|_{\mathrm{vol}=1} \in \Omega^\bullet(M; \mathcal{O}(\mathfrak{H}))^{\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})}.$$

对 $\mathrm{vol} = 1$ 的限制是通过限制到体积为 1 的格的子空间$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0} \subset \mathrm{Lat}$ 而诱导的系数映射。根据 (334)，我们可以选择 T，使得 $(Z - dT)|_{\mathrm{vol}=1}$ 的 q-展开在包含于某个紧子空间的任意子集上都只有有限个 q 的负次幂。

引理 9.8 和 9.9 给出了一个余边界，它在 E 的庞特里亚金特征的上循环代表元与 $Z \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0}))^{\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})}$ 之间建立联系。结合 T，我们得到一个余边界，它连接指标丛的庞特里亚金特征与 $(Z - dT)|_{\mathrm{vol}=1}$。具体而言，对于每个 N 和 $\vec{\lambda}$，我们都有 $\Omega^\bullet(U^{\vec{\lambda}}; \mathbb{C}((q))/q^{N+1})$ 中元素的一个等式

$$((Z - dT)|_{\mathrm{vol}=1})|_{U^{\vec{\lambda}}} = \sum^N q^k \mathsf{sTr}(e^{-(\nabla^{<\lambda_k})^2}) - \phi(\tau)^{-n} d(\sum^N q^k(\omega_k^\lambda + \zeta_k|_{U^{\vec{\lambda}}}) + T|_{U^{\vec{\lambda}}})|_{\mathrm{vol}=1}$$

˘ 全局定义的形式的限制与切赫–德拉姆余循环的分量之间。上文中，ω_k^λ 来自引理 9.8，而 ζ_k 来自引理 9.9。余循环 $\mathrm{Ind}(E)$ 和 $Z - dT$ 连同上述同伦共同确定了一个类 $[E] \in \mathrm{KO}^n_{\mathrm{MF}}(M)$。

原则上，这个类取决于 $\partial_{\bar{z}}$ 原像 T 的选择，以及为每个 N 选择截断$\{\vec{\lambda}\}$，以确定局部有限覆盖 $\{U^{\vec{\lambda}}\}$。截断选择的独立性可由一般的指标丛考量推出，见命题 D.17。另一方面，T 的任意一对选择之差都是 $\Omega^\bullet(M;$ 模形式环$)$ 中的一个元素。这会使类 $[Z] \in \mathrm{H}^\bullet(M;$ 模形式环$)$ 的代表元 $Z - dT$ 相差 $\Omega^\bullet(M;$ 模形式环$)$ 中的一个余边界，同时修改同伦相容性数据 T。这确定了一个到谱 nth 空间的同伦映射，该谱表示 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$，因此不会改变类 $[E] \in \mathrm{KO}^n_{\mathrm{MF}}(M)$。□

9.5. **KO$_{\mathrm{MF}}$-欧拉类的场论代表元**。我们有以下构造 $2|1$-eft$^n(M)$ 中对象的方案。

命题 9.10. 考虑以下数据

i. Fr´echet 向量丛 $\mathcal{E}_k \to M$，其纤维上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用，以及 $\mathcal{E}_k = \{0\}$ for $k \ll 0$; ii. 超联络 $\mathbb{A}_{k,\ell}$ 在 $\mathcal{E}_k$ for $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ 上的光滑单参数族，且它们是$\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性的；iii. 在每个 $\mathcal{E}_k$ 上的厄米度量，相对于这些度量，$\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用为自伴，且超联络 $\mathbb{A}_{k,\ell}$ 为自伴；iv. $\mathcal{E}_k$ 上的实结构，以及与 Clifford 作用和超联络相容的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$；以及 v. 微分形式

$$(Z, Z_{\bar{z}}, Z_v) \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0})[u^{\pm 2}]), \qquad |u^2| = -4$$

其中 Z 的总次数为 n, $Z_{\bar{z}}, Z_v$ 的总次数为 $n-1$，它们满足 MP$_2(\mathbb{Z})$-不变性条件 (316)、(318) 和 (319)，并且

$$dZ = 0, \quad \partial_{\bar{z}} Z = dZ_{\bar{z}}, \quad \partial_v Z = dZ_v$$

其中 $v \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ 是标准实坐标，而 $(z,\ \bar{z}) \in C^\infty(\mathfrak{H})$ 是标准复坐标。

接下来，假设数据 (i)-(v) 满足以下性质

i. $\Omega^\bullet(M;\ \mathcal{E}) = \Omega^\bullet(M;\ \bigoplus \mathcal{E}_k)$ 上的端同态 $\bigoplus q^k e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}$ 有迹（即为核算子），并且有如下微分形式等式

$$Z = \phi(\ell,\tau)^{-n} \sum q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(e^{-(\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}), \tag{338}$$

and

ii. 超联络 $\mathbb{A}_{k,\ \ell}$ 在定义 D.14 的意义下存在指标丛。

那么，上述数据确定一个对象 $E \in 2|1$-扩展场论$^n(M)$。

证明。由这一列超联络，利用 (333) 可确定一个无穷小生成的 n 次表示 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$。厄米内积、自伴性和实结构保证该表示是反射正的。微分形式 $(Z,\ Z_{\bar{z}},\ Z_v)$ 以及性质 (338) 表明该表示也是迹类的。最后，指标丛的存在意味着满足截断条件。因此，根据定义 1.21，我们得到一个对象 $E \in 2|1$-扩展场论$^n(M)$。□

设 $V \to M$ 是一个带有几何弦结构的实向量丛。在 §3.7 中，我们构造了 V 的 KO$_{\mathrm{MF}}$-欧拉类。我们将其提升为一个对象的构造：Eu$(V) \in 2|1$-eft$^n(M)$，它在余循环映射 (2) 下的像是 V 的 KO$_{\mathrm{MF}}$-欧拉类。利用 (333)，我们从由以下内容确定的超联络单参数族构造出 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的无穷小生成的 n 次表示

$$\mathcal{E} = \mathbb{S}_V \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \Lambda_{q^k} V, \qquad \mathbb{A}_k = \nabla_k + 2\pi\ell H, \qquad \nabla_k = \nabla^{\mathbb{S}_V \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \Lambda_{q^k} V}|_{\mathcal{E}_k} \tag{339}$$

其中 $H \in \Omega^3(M) \hookrightarrow \Omega^3(M; \mathrm{End}(\mathcal{E}_k))$ 是几何弦结构数据的一部分。$\mathcal{E}$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-作用继承自 $\mathbb{S}_V$ 上的作用，参见 (421)。这确定了命题 9.10 中的数据 (i)–(iv)。

由 (339) 可计算得

$$\begin{aligned} Z &= \phi(z)^{-\dim(V)} \sum_{k\geq 0} q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(e^{-\nabla_k^2 + \frac{2\pi\ell}{2\mathrm{im}(\tau)}dH}) = \mathrm{Ch}(\nabla^{\mathbb{S}_V} \otimes \bigotimes_{k\geq 0} \Lambda_{q^k} V) e^{\frac{p_1}{\mathrm{im}(z)}} \\ &= \mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1} e^{\frac{\pi p_1}{\mathrm{im}(z)}} \\ &= \mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}^*(\nabla^V)^{-1} \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{H}\times\mathbb{R}_{>0})[u^{\pm 1}])^{\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})} \end{aligned} \tag{340}$$

利用 (66)、(97)、(338)，其中 $z = \tau/\ell$。由此我们得到

$$\partial_v Z = 0, \quad \partial_{\bar{z}} Z = \tfrac{ip_1/2}{\mathrm{im}(z)^2}\mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1}e^{\frac{p_1}{\mathrm{im}(z)}} = d\left(\tfrac{iH/2}{\mathrm{im}(z)^2}\mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1}e^{\frac{p_1}{\mathrm{im}(z)}}\right) \tag{341}$$

这提供了命题 9.10 中的数据 (v),

$$Z_v = 0, \qquad Z_{\bar{z}} = \frac{iH/2}{\mathrm{im}(\tau)^2}\mathrm{Pf}(F)\mathrm{Wit}(\nabla^V)^{-1}e^{\frac{p_1}{\mathrm{im}(\tau)}}$$

并且这些数据满足性质 (i)。

De定义 9.11。根据数据 (339) 和 (341) 定义对象 $\mathrm{Eu}(V) \in 2|1\text{-eft}^n(M)$。

定理 *1.2* 的证明。为了验证对象 Eu(V) 的构造，上述讨论提供了命题 9.10 中的数据 (i)–(v) 以及性质 (i)；剩下的任务是验证性质 (ii)。但这可由以下事实得出：向量丛 $\mathcal{E}_k$ 是有限秩的，而有限秩丛上的超联络总是存在指标丛，参见 [BGV92，定理 9.7]。利用模 Witten 类与全纯 Witten 类之间的转换 (67)，我们观察到，$\mathrm{Eu}(V) \in 2|1\text{-eft}^{\dim(V)}(M)$ 根据 §3.7 对该类的描述以及余循环映射 (2) 的构造，细化了 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$-Euler。□

注记 9.12。为了将上面的对象 Eu(V) 与 Stolz 和 Teichner 在 [ST04, Theorem 1.0.3] 中提出的 TMF-欧拉类进行比较，必须通过 (294) 将 $S^1 \times \mathbb{Cl}_n$ 对 $\mathcal{E}$ 的作用扩张为 $S^1 \rtimes \mathrm{Cl}(L\mathbb{R}^n)$-作用，也就是说，将 $\mathcal{E}$ 与可逆双模 (412) 作张量积。由此得到的 $S^1 \rtimes \mathbb{Cl}(L\mathbb{R}^n)$-模丛在 M 上恢复了 Stolz 和 Teichner 的 stringor 丛在常值环路上的限制。扩张到近乎常值的超环路则编码了 stringor 联络的一个版本。

9.6. **超对称 σ-模型的部分构造**。对于一族黎曼弦流形 $\pi\colon X \to M$，其纤维为 n 维，我们使用命题 9.10 提供对象 $\sigma(X) \in 2|1$-扩展场论$^{-n}(M)$ 的数据。当 $M = \mathrm{pt}$ 时，我们验证这些数据满足定义此类对象所需的性质。

首先，利用 (333)，根据由以下内容确定的超联络单参数族，定义 n (M) 的无穷小生成 n 表示$\mathscr{C}^{2|1}$:

$$\mathcal{E} := \bigoplus_{k\geq 0} q^k \pi_*(\mathbb{S}\otimes W_k(T(X/M))) \to M, \qquad \mathbb{A}_{\ell,k} := \mathbb{B}(W_k(T(X/M)))(\ell) + 2\pi\ell^2 H \tag{342}$$

其中，$\mathbb{B}(W_k(T(X/M)))(\ell)$ 是狄拉克算子$\not{D}_{\otimes\nabla^{W_k(T(X/M))}}$对应的 ℓ-重缩放 Bismut 超联络，而 $\mathbb{A}_{\ell,\ k}$ 则利用来自几何弦结构的数据 $H \in \Omega^3(X)$ 对其进行修正。这确定了命题 9.10 中的数据 (i)–(iv)。

我们将 $\mathscr{C}^{2|1}(M)$ 的相关 n 表示的归一化迹视为形式幂级数，

$$Z = \phi(z)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}(e^{-\mathbb{A}_{\ell,k}(2\mathrm{im}(\tau))^2}) = \phi(z)^n \sum_{k\geq 0} q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}(e^{-\mathbb{A}_k(2\mathrm{vol})^2}) \tag{343}$$

利用 $2\mathrm{im}(z)\ell = 2$体积。

引理 9.13。 迹的形式和 (343) 的极限为

$$\lim_{\mathrm{vol}\to 0} Z = \int_{X/M} \mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M})$$

并且存在唯一确定的形式 $\alpha_k(t)$，满足

$$Z = \int_{X/M} \mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M}) + d\left(\sum_{k\geq 0} q^k \int_0^{2\mathrm{vol}} \alpha_k(t)dt\right). \tag{344}$$

证明。 这由 Bismut 局部指标定理 [BGV92，定理 10.23 和 10.32],推出，其中 $\alpha_k(t)$ 是与重标度超联络相关的陈–西蒙斯形式。具体而言，我们需要向量丛上的超联络版本的局部指标定理 [Kah11，定理 5.33 和 5.41]。利用这一点，上述公式可由(67)和(74)推出。 □

定义 9.14。 定义 $\Omega^\bullet(M;\, C^\infty(\mathbb{R}_{>0})((q)))$ 中的微分形式，

$$Z_v = \sum_{k\geq 0} q^k \alpha_k(2\mathrm{vol}) \tag{345}$$

$$Z_{\bar z} = \int_{X/M} \frac{-iH/2}{\mathrm{im}(z)^2} \mathrm{Wit}^*(\nabla^{X/M}) + \partial_{\bar z}\left(\sum_{k\geq 0} q^k \int_0^{2\mathrm{vol}} \alpha_k(t)dt\right), \tag{346}$$

其中 H 源自几何弦结构的数据。

引理 9.15。 形式 (345) 和 (346) 满足

$$\partial_v Z = dZ_v, \quad \partial_{\bar z} Z = dZ_{\bar z}.$$

证明。 这直接由（344）得出。 □

命题 9.16。 给定一族 $\pi\colon X \to M$ 黎曼弦流形，数据（342）、（343）、（345）和（346）确定一个对象 $\sigma(X) \in 2|1\text{-扩展场论}^{-n}(M)$，当且仅当（$Z$、$Z_v$、$Z_{\bar z}$）满足 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-等变性质（316）、（318）和（319）。

证明。 这由命题 9.10 得出：所需数据如所示给出，性质 (ii) 由 Bismut 超联络的标准结果推出（见命题 D.16），因此只需验证性质 (i)。□

定理 *1.3* 的证明。 $M = \mathrm{pt}$ 上的超联络是构成狄拉克–拉蒙算子的扭曲狄拉克算子（见定义 2.6 ），记作 $\not{D}_k = \mathbb{A}_k$。将上述构造特化到 $M = \mathrm{pt}$，我们由 McKean–Singer 定理 [MS67] 得知， Z 与体积 vol 无关：超迹

$$\sum q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}(e^{-2\mathrm{im}(\tau)\ell \not{D}_k}) = \sum q^k \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_{-n}}(e^{-2\mathrm{vol}\not{D}_k})$$

与参数体积无关，且等于指标形式和的陈特征。因此，在此情形下有 $Z_v = 0$ ，而 (346) 中的第二项也消失。 Z 和 $Z_{\bar z}$ 的 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$-等变性质显然，因此由命题 9.16 可得一个类 $\sigma(X) \in 2|1\text{-eft}^{-n}(\mathrm{pt})$。从构造可知，它与 $\mathrm{KO}_{\mathrm{MF}}$ 值解析指标一致。□

Appendix A. Pfaffian lines and modular forms

下面我们回顾将模形式描述为 Pfaffian 线丛张量幂的截面的方式。这是一个经典结果，例如参见 [Qui85], [Fre87, §4] and [ST11, §5]。不过，我们需要文献中似乎尚未出现的显式公式。

A.1。**模形式的约定**。全文中，$\tau \in \mathfrak{H} \subset \mathbb{C}$ 是标准坐标 -nat在上半平面上的 e。

定义 A.1. 对于 $k \in \mathbb{Z}$，定义权 k 弱模形式a 的向量空间 s

$$\mathrm{MF}_k^\omega := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathfrak{H}) \mid f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau),\ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

弱模形式环是 $\mathrm{MF}^\omega := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{MF}_k^\omega$，其乘法继承自 $\mathfrak{H}$ 上函数的乘法。若弱模形式是弱全纯的，则 $f(\tau)$ 作为 $\tau \to i\infty$ 是亚纯的。令 $\mathrm{MF} = \bigoplus_k \mathrm{MF}_k$ 表示弱全纯模形式环。

将模形式和弱模形式视为分次环时，分次分量定义为

$$\mathrm{MF}^k := \begin{cases} \mathrm{MF}_{-k/2} & k \text{ even} \\ 0 & l \text{ odd} \end{cases} \qquad (\mathrm{MF}^\omega)^k := \begin{cases} \mathrm{MF}^\omega_{-k/2} & k \text{ even} \\ 0 & l \text{ odd} \end{cases} \tag{347}$$

由此得到分次交换乘积结构。

注 A.2。分次环 MF^ω 的一种等价描述是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变量

$$\mathrm{MF}^\omega \simeq (\mathcal{O}(\mathfrak{H})[u^{\pm 1}])^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \qquad |u| = -2 \tag{348}$$

它们在 $\mathfrak{H}$ 和 $u \mapsto u/(c\tau+d)$ 上的分式线性变换作用下成立。

模形式也可以等价地表示为 $\mathbb{C}$中单位圆去心圆盘上的 $q = e^{2\pi i\tau}$ 函数。泰勒展开定义了一个单射环同态

$$q\text{-expand}\colon \mathrm{MF} \hookrightarrow \mathbb{C}((q)). \tag{349}$$

令 $\mathrm{MF}_k^{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{MF}_k$ 表示权为 k 的整模形式子群，其定义为具有整洛朗级数 $\mathbb{Z}((q)) \subset \mathbb{C}((q))$ 中的 q-展开。

A.2. **欧几里得自旋环面上的 Pfaffian 线**。我们回顾注 4.13 中对欧几里得自旋环面的描述：它是一个复流形 $\mathbb{C}/\Lambda$，配备了其典范丛的一个选定平方根。在此描述中，手征狄拉克算子是由典范丛扭曲的 ∂-算子。

偶自旋结构对应的手征狄拉克算子可逆（关于环面上的自旋结构，参见 §4.2），因此，Pfaffian 线丛由其 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2)$-不变的 Pfaffian 截面典范地平凡化。[3] 奇自旋结构对应的手征狄拉克算子有一个一维核，因此，Pfaffian 线丛是 Lat 上的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{Spin}(2)$-等变线丛，其在 $(\ell_1, \ell_2) \in \mathrm{Lat}$ 处的纤维是调和自旋子的对偶空间。由于 $\mathrm{Spin}(2) \simeq U(1)$ 通过权 1 表示作用于调和自旋子，Pfaffian 线 $\mathrm{Pf} \to \mathrm{Lat}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2)$ 由以下叠之间的映射分类

$$\mathrm{Lat}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{pt}/\!\!/U(1),\ \ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{Spin}(2) \simeq U(1) \xrightarrow{(-)^{-1}} U(1) \tag{350}$$

该映射由投影同态、$\mathrm{Spin}(2) \simeq U(1)$ 的识别以及对 $U(1)$ 取逆所确定。取逆源于 Pfaffian 线是调和自旋子的对偶 这一事实。Pfaffian 的张量幂则由以下同态确定

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{Spin}(2) \simeq U(1) \xrightarrow{k} U(1) \iff \mathrm{Pf}^{\otimes -k} \to \mathrm{Lat}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2) \tag{351}$$

其中第一个箭头是投影，第二个箭头是 k重覆盖映射，$z \mapsto z^k$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$。因此，$\mathrm{Pf}^{\otimes -k}$ 的全局截面是定义在 Lat 上的函数，它们在 $U(1)$ $\mathrm{Spin}(2)$ 作用下按权 k 变换，并且在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 作用下保持不变。

[3]这个平凡化与 Quillen 度量不相容：具有偶自旋结构的环面上，Pfaffian 截面的范数本质上由经过适当归一化的三个韦伯模函数给出；例如，可以将 [Fre87，第 4 条命题10] 专门化到雅可比簇中的实点来验证这一点。

存在一个线丛 $\mathrm{Pf}^{\otimes -k} \to \mathsf{Lat}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2)$，其定义方式与 (351) 类似，但使用 $U(1)$ 的共轭特征 $z \mapsto z^k$。格的体积的（正定）平方根确定了一个函数

$$\mathrm{vol}^{-1/2} \in C^\infty(\mathsf{Lat}), \qquad \mathrm{vol}(\ell_1, \ell_2) = \frac{\ell_1 \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1 \ell_2}{2i}$$

它下降为 $\mathrm{Pf} \otimes \overline{\mathrm{Pf}}$ 的一个处处非零整体截面，即一个平凡化。因此，线丛之间存在一个同构

$$\mathrm{Pf} \simeq \overline{\mathrm{Pf}}^\vee = \overline{\mathrm{Pf}}^{\otimes -1}$$

在 $\mathsf{Lat}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2)$ 上，由 $\mathrm{vol}^{-1/2}$ 确定。

为便于后文参考，我们注意到以下函子

$$\mathsf{Lat}/\!\!/\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{forget}} \mathsf{Lat}/\!\!/\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{vol}} \mathbb{R}_{>0}$$

其中，第一个箭头忘掉奇自旋结构（或者等价地，由二重覆盖 $\mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{SO}(2)$ 确定），第二个箭头取欧几里得环面的体积。$v \in \mathbb{R}_{>0}$ 处的纤维确定了 Lat 中一个 $\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变子空间，该子空间由那些关联的欧几里得自旋环面体积为 v 的格组成。

A.3. **Pfaffian 线的截面与模形式**。接下来，我们解释 $\mathrm{Pf}^{\otimes k}$ 及其截面与模形式之间的关系。这里，采用欧几里得环面栈的一种不同表示会很有帮助，该栈带有周期-周期自旋结构。令 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 表示元辛群，即 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的非平凡二重覆盖。该群有如下显式描述

$$\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \simeq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \epsilon \in \mathcal{O}(\mathfrak{H})^\times \mid \epsilon(z)^2 = cz + d \right\}$$

其中乘法由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的乘法、$\mathcal{O}(\mathfrak{H})^\times$ 中的乘法，以及 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 通过分式线性变换对 $\mathcal{O}(\mathfrak{H})^\times$ 的作用决定。下文描述 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 的元素时，将用记号 $\sqrt{cz+d}$ 表示函数 $\epsilon(z)$。定义作用下的商栈 $\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sqrt{cz+d} \right) \cdot (\tau, \ell) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \ell |c\tau + d| \right).$$

其中我们注意到，此作用可通过同态 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 分解。商栈 $\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 支持由 $k \in \mathbb{Z}$ 索引、由函子 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{pt}/\!\!/\mathbb{C}^\times$ 分类的线丛，这些函子由下式确定

$$\mathfrak{H} \times \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^\times, \qquad \left(\tau, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sqrt{cz+d} \right) \to (c\tau + d)^{k/2}. \tag{352}$$

类似地，映射

$$\mathfrak{H} \times \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^\times, \qquad \left(\tau, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sqrt{cz+d} \right) \to (c\overline{\tau} + d)^{l/2}. \tag{353}$$

确定由 $l \in \mathbb{Z}$ 索引的共轭线丛。

定义 A.3。对于 $(k,\ l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，令 $\mathrm{mf}^{k,\ l}$ 表示线丛 (352) 和 (353) 的张量积的全局截面。因此，我们有

$$\mathrm{mf}^{k,l} = \left\{ f \in C^\infty(\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0}) \mid f\left(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}, \ell |c\tau + d| \right) = (c\tau + d)^{-k/2} (c\overline{\tau} + d)^{-l/2} f(\tau, \ell) \right\} \tag{354}$$

引理 A.4。 存在一个栈的等价

$$\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0} /\!\!/ \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Lat} /\!\!/ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2) \tag{355}$$

并且，(351) 中各线丛 $\mathrm{Pf}^{\otimes -k}$ 的拉回与 (352) 中的线丛同构。类似地，$\mathrm{Pf}^{\otimes -k}$ 的拉回与 (353) 中的线丛同构。特别地，我们得到整体截面上的同构，

$$\mathrm{mf}^{k,l} \simeq \Gamma(\mathsf{Lat} /\!\!/ (\mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})); \mathrm{Pf}^{\otimes k} \otimes \overline{\mathrm{Pf}}^{\otimes l}).$$

证明。 考虑由以下映射定义的李群胚之间的函子

$$\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathsf{Lat}, \qquad (\tau, \ell) \mapsto (\ell\tau, \ell)$$

and

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Spin}(2), \\ \left(\tau, \ell, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sqrt{c\tau + d}\right) & \mapsto & \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \frac{(c\tau+d)^{1/2}}{|c\tau+d|^{1/2}}\right). \end{array}$$

经过简短计算可知，这些映射组合起来确定了一个全忠实且本质满的函子 (355)，从而得到所述的栈等价。

为验证线丛的同构，我们将截面视为$\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的、满足变换性质的光滑函数。于是，乘以 $\ell^{k/2}$ 即可给出所需的截面之间的同构；事实上，对于 $f(\tau, \ell) \in C^\infty(\mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0})$，要使 $\ell^{k/2} f(\tau, \ell)$ 成为沿 (355) 对 $\mathrm{Pf}^{\otimes k}$ 拉回的截面，其变换性质等式为（利用 (351)）

$$\begin{array}{rcl} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sqrt{c\tau + d}\right) \cdot (\ell^{k/2} f(\tau, \ell)) & = & (\ell|c\tau + d|)^{k/2} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \ell|c\tau + d|\right) \\ & = & \frac{|c\tau+d|^{k/2}}{(c\tau+d)^{k/2}} \ell^{k/2} f(\tau, \ell), \end{array} \tag{356}$$

这等价于 $f(\tau, \ell)$ 按照权 $-k/2$ 变换，见式 (352)。$\mathrm{Pf}^{\otimes k}$ 的论证类似。□

椭圆曲线的模空间栈由复解析商栈$\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 表示，其中 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 通过分式线性变换作用。定义线丛 $\mathrm{Mf}_k \to \mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，其映射为

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathfrak{H})^\times, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to (c\tau + d)^k. \tag{357}$$

Mf_k 的全纯截面是权为 k 的弱模形式，因此得此记号。带有周期-周期自旋结构的椭圆曲线的模空间栈由复解析商栈 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 表示，其中在 $\mathfrak{H}$ 上的作用通过同态 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 分解。显然存在一个函子 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$；从几何上看，该函子会遗忘椭圆曲线上的自旋结构。沿此遗忘函子拉回线丛 (357)，可得到一个平方根，记为 $\mathrm{Mf}^{k/2}$，其由特征 (352) 确定。取底层光滑栈后，存在一个从欧几里得自旋环面到椭圆曲线的函子，由以下复合给出，

$$f\colon \mathsf{Lat} /\!\!/ \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{H} \times \mathbb{R}_{>0} /\!\!/ \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathfrak{H} /\!\!/ \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathfrak{H} /\!\!/ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \tag{358}$$

其中，第一个箭头由投影诱导。于是我们得到引理 A.4 的以下推论。

推论 A.5. 沿复合映射 (358) 拉回由 (357) 确定的线丛，与由 (351) 确定的线丛同构：

$$f^* \mathrm{Mf}_k \simeq \mathrm{Pf}^{\otimes 2k}.$$

特别地，权为 k 的弱全纯模形式拉回为 $\mathrm{Pf}^{\otimes 2k}$ 的截面。更一般地，$\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 上 $\mathrm{Mf}_{k/2}\otimes\mathrm{Mf}^{l/2}$ 的光滑截面拉回为 $\mathrm{Pf}^{\otimes k}\otimes\mathrm{Pf}^{\otimes l}$ 的光滑截面。

A.4. **Dedekind η 函数与第二艾森斯坦级数的几何**。回顾 Dedekind η 函数，

$$\eta(q) := q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i z}. \tag{359}$$

下面的引理有助于解释物理学文献中的某些归一化。具体而言，如果一个定义在 $\mathfrak{H}$ 上的函数在 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 作用下按 $U(1)$ 相位变换，那么乘以 η 的某个幂后，就会得到一个按模形式变换的函数。用栈的几何语言重新表述，可得如下结论。

引理 A.6. Dedekind η 函数确定了由 (352) 决定的 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 上的线丛与由以下特征决定的线丛之间的一个同构

$$\mu\colon \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})/[\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z}),\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})] \simeq \mathbb{Z}/24 \subset U(1) \tag{360}$$

该特征通过将 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 的阿贝尔化嵌入 24 次单位根给出。

证明。 η 函数在 $\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 作用下的变换公式 is

$$\eta(\gamma z) = (\mu(\gamma)^{-1}\sqrt{(cz+d)})\eta(z), \qquad \gamma\in\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$$

因此 η 是由 (352) 确定的线丛与由 (360) 确定的线丛的对偶丛之张量积的整体截面。根据 (359)，$\eta(z)$ 是处处非零函数，因此确定了这个线丛张量积在 $\mathfrak{H}/\!\!/\mathrm{MP}_2(\mathbb{Z})$ 上的一个处处非零截面。这就证明了该引理。□

第二艾森斯坦级数有两种常见形式

$$\begin{aligned} E_2(z) &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2}, \\ E_2^*(z,\bar z) &= E_2(z) - \frac{\pi}{\mathrm{im}(z)} = E_2(z) - \frac{2\pi i}{z-\bar z}. \end{aligned} \tag{361}$$

我们回顾一下 [Zag08, 第 19] 页，其中 $E_2(z)$ 是全纯但非模的，而 $E_2^*(z,\ \bar z)$ 不是全纯的，但其权为 2,

$$E_2^*\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 E_2^*(z).$$

这可以改述如下。

引理 A.7. 非全纯第二艾森斯坦级数 E_2^* 定义了由 (352) 确定的线丛的四次张量幂的一个光滑截面。这个光滑截面满足

$$\partial_{\bar z} E_2^* = -\frac{2\pi i}{(z-\bar z)^2}. \tag{362}$$

Appendix B. Super background

B.1. 实结构与超厄米配对。 超向量空间 范畴是配备分次张量积的 $\mathbb{Z}/2$分次向量空间范畴。形容词“超”指的是该张量积的编织同构中的符号

$$\sigma\colon V\otimes W \xrightarrow{\sim} W\otimes V \qquad v\otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w\otimes v \quad v\in V,\ w\in W$$

其中 v 和 w 是次数为 $|v|$的 $|w| \in \mathbb{Z}/2$齐次元素。令 $V_{\text{偶}} \oplus V_{\text{奇}}$ 表示 V 按偶子空间和奇子空间的直和分解。分次对合是线性映射 $(-1)^{\mathsf{F}}\colon V \to V$，其在 $V_{\text{偶}}$ 上作用为 $+1$，在 $V_{\text{奇}}$上作用为 -1。

超向量空间范畴上存在一个对合，它在对象上反转复结构，$V \mapsto \overline{V}$，即 V 是通过将 $\mathbb{C}$ 的作用与复共轭复合，从 V 得到的。

定义 B.1. 超向量空间 V 上的实结构 是一个超向量空间同构 $r\colon V \xrightarrow{\sim} \overline{V}$，满足 $r \circ \overline{r} = \mathrm{id}_V$。与实结构相关联的实子空间 是 r的不动点集 $V_{\mathbb{R}} \subset V$。

定义 B.2. 超向量空间 V 上的厄米形式 是一个映射$\langle -, - \rangle\colon V \otimes \overline{V} \to \mathbb{C}$，使图表交换，

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} \otimes V & \xrightarrow{\langle -,- \rangle} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\overline{\ })} \\ V \otimes \overline{V} & \xrightarrow[\overline{\langle -,- \rangle}]{} & \overline{\mathbb{C}} \end{array} \tag{363}$$

或者等价地，对齐次元素满足公式 $\langle x, y \rangle = (-1)^{|x||y|}\overline{\langle y, x \rangle}$。如果正定，则称厄米形式为正定

$$\langle x, x \rangle > 0, \quad x \neq 0 \text{ even} \quad \text{and} \quad i^{-1}\langle x, x \rangle > 0, \quad x \neq 0 \text{ odd}. \tag{364}$$

具有实结构的超向量空间上的实厄米形式，是指限制在$(V_{\mathbb{R}})^{\mathrm{ev}} \subset V$上取值于 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，且限制在$(V_{\mathbb{R}})^{\mathrm{odd}} \subset V$上取值于 $i^{-1}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$的厄米形式。

上述意义下的正定厄米形式，按照以下公式，在底层（未分次）向量空间 V 上确定一个通常意义下的正定配对$(-,\ -)$

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & |x| \neq |y| \\ \langle x, y \rangle & x, y \text{ even} \\ i\langle x, y \rangle & x, y \text{ odd}. \end{cases} \tag{365}$$

当 V 具有实结构时，这一转换会将实厄米形式映射为 $V_{\mathbb{R}}$上的实内积。

定义 B.3. 设 V是配备了正定厄米形式 $\langle -, - \rangle$的超向量空间。算子 $T\colon V \to V$的超伴随由下式刻画：

$$\langle x, Ty \rangle = (-1)^{|x||A|}\langle T^* x, y \rangle. \tag{366}$$

在转换为普通配对 (365) 时，我们有

$$T^* = \begin{cases} T^\dagger & T \text{ even} \\ iT^\dagger & T \text{ odd} \end{cases} \tag{367}$$

其中$(-)^\dagger$ 表示关于正定配对$(-,\ -)$的通常的伴随。

B.2. **超代数及其模**。 A超代数 是超向量空间范畴中的一个代数对象（即 $\mathbb{Z}/2$-分次向量空间），配备了 $\mathbb{Z}/2$-分次张量积。超代数构成一个幺半范畴中的对象，其中超代数 A 和 B 的张量积是超向量空间 $A \otimes B$，其乘法为

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'.$$

The 反代数 是超代数 A 的反代数，它是一个超代数 A^{op}，具有相同的底层超 r vec张量空间与乘法

$$a \cdot_{\mathsf{op}} b := (-1)^{|a||b|} b \cdot a \tag{368}$$

其中 $b \cdot a$ 是 A中的乘法。

定义 B.4. A $*$-超代数 是一个超代数，并附带一个同态 $(-)^*\colon A \to A^{\mathsf{op}}$，该同态在 A上平方后为恒等映射，其中对代数取分次意义下的对代数。

给定一个超代数 A，令 ${}_A\mathsf{Mod}$ 和 Mod_A 分别表示左、右A-模的范畴，其对象是带有（分次） A-作用的超向量空间。这些范畴具有由 A-模的直和所诱导的对称幺半结构。类似地，令 ${}_A\mathsf{Mod}_B$表示 $A-B$-双模的范畴。存在范畴的典范等价

$$\mathsf{Mod}_{A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}} \simeq {}_A\mathsf{Mod}_{B^{\mathsf{op}}} \simeq {}_{A\otimes B}\mathsf{Mod} \tag{369}$$

其中，左 $A\otimes B$-双模 W被映射为具有相同底层超向量空间和作用的 $A-B^{\mathsf{op}}$-双模

$$a \cdot w \cdot b := (-1)^{|w||b|}(a\otimes b)\cdot w$$

类似的公式定义了右 $A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}$-模。我们常用如下记法：用 ${}_AW$表示 ${}_A\mathsf{Mod}$ 中的对象，用 ${}_AW_B$ 表示 ${}_A\mathsf{Mod}_B$ 中的对象。

端同态 $T\colon V\to V$的超迹 为

$$\mathsf{sTr}(T) := \mathsf{Tr}((-1)^{\mathsf{F}}\circ T) \tag{370}$$

其中 Tr 是普通迹。超代数中元素的超交换子 为

$$[a,b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba \qquad a,b\in A. \tag{371}$$

超代数上的超迹 是一个超向量空间之间的映射

$$\mathsf{sTr}_A\colon A\to\mathbb{C}, \qquad \mathsf{sTr}_A([a,b]) = 0 \tag{372}$$

它在超交换子上取值为零，因此由线性映射 $A/[A,A]\to\mathbb{C}$确定。

超代数 A 上的超迹会在（有限维） A-模的范畴上诱导出超迹。对于右 A-模，该超迹来自复合

$$\mathrm{End}_A(W) \xleftarrow{\sim} W\otimes_A W^\vee \to A/[A,A] \xrightarrow{\mathsf{sTr}_A} \mathbb{C} \tag{373}$$

其中 $W^\vee := \mathrm{Hom}_A(W,\ A)$ 是对偶（左） A-模，而到 $A/[A,A]$ 的映射是由求值配对诱导的 Hattori–Stallings迹，

$$\mathrm{eval}\colon W\otimes_{\mathbb{C}} W^\vee \to A.$$

利用 (36，可以从 $A\otimes B^{\mathsf{op}}$ 上的迹得到双模（以及左模）的迹 9).

B.3. （实）超流形。 Stolz 和 Teichner 的超对称场论采用超流形的语言来表述，其结构层定义在 $\mathbb{C}$ 上；这称为 [DM99] 中的 cs-超流形范畴。我们所需的大部分内容都涵盖在简明的导论 [ST11, §4.1]，中，但下面仍会介绍少量记号。

根据定义，任意超流形在局部都同构于由其结构层的全局截面所刻画的超流形 $\mathbb{R}^{n|m}$，即 $C^\infty(\mathbb{R}^{n|m}) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^\bullet\mathbb{C}^m$。我们强调，这是 $\mathbb{C}$ 上的超（即 $\mathbb{Z}/2$-分次）代数层。

令 Π 表示函子

$$\Pi\colon \mathsf{Vect}_{/\mathsf{Mfld}}\to\mathsf{SMfld}, \qquad (E\to N)\mapsto \Pi E \tag{374}$$

它将普通流形 N 上的复向量丛 $E\to N$ 映射到超流形 ΠE，其结构层是 $\Lambda^\bullet E^\vee$ 的截面层，并将其视为一个

$\mathbb{Z}/2$-分次代数。对于超流形 S，记 S_{red} 为其约化流形；这是一个普通流形，可通过将 S 的结构层除以其幂零理想，作为局部环化空间得到。每个超流形都可以写成 $S \simeq \Pi E$，其中 $E \to S_{\mathrm{red}}$ 是定义在 79] 上的复向量丛 [。特别地，超流形 $\mathbb{R}^{n|m}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的平凡秩 m 丛，即 $E = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^{n|m})_{\mathrm{red}}$。

人们常使用点函子在超流形上进行计算。这种形式化方法将超流形视为可表预层。

例 B.5. 与 $\mathbb{R}^{n|m}$ 相关联的可表预层将超流形 S 赋值为集合

$$\mathbb{R}^{n|m}(S) := \{t_1, t_2, \dots, t_n \in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \in C^\infty(S)^{\mathrm{odd}} \mid (t_i)_{\mathrm{red}} = \overline{(t_i)}_{\mathrm{red}}\} \tag{375}$$

其中 $(t_i)_{\mathrm{red}}$ 表示函数在约化流形 $S_{\mathrm{red}} \hookrightarrow S$ 上的限制，而 $\overline{(t_i)_{\mathrm{red}}}$ 是光滑流形 S_{red} 上复值函数 $(t_i)_{\mathrm{red}}$ 的共轭。本文始终采用这种点函子描述，通常用罗马字母表示偶函数，用希腊字母表示奇函数。

例 B.6. 我们记录 $\mathbb{R}^{2|1}$ 的点函子的两种等价描述

$$\mathbb{R}^{2|1}(S) \simeq \{x, y \in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}},\ \theta \in C^\infty(S)^{\mathrm{odd}} \mid (x)_{\mathrm{red}} = \overline{(x)}_{\mathrm{red}}, (y)_{\mathrm{red}} = \overline{(y)}_{\mathrm{red}}\} \tag{376}$$

$$\simeq \{z, w \in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}}, \theta \in C^\infty(S)^{\mathrm{odd}} \mid (z)_{\mathrm{red}} = \overline{(w)}_{\mathrm{red}}\}. \tag{377}$$

(376) 与 (377) 之间的同构为 $(x, y) \mapsto (x + iy, x - iy) = (z, w)$。下文采用标准（尽管可能会造成误解）的记法 $z := w$。

定义 B.7. 超李群 是超流形范畴中的一个群对象。

根据定义，超流形 G 上的超李群结构，是通过赋予集合 $G(S)$ 群结构而得到的，该结构关于 S 是自然的。本文中的大多数超李群都将以这种方式定义。我们还指出，每个普通李群都确定一个超李群。

例 B.8. 考虑由普通李群 $U(1) \subset \mathbb{C}$（即单位复数）确定的超李群。我们采用点函子描述

$$U(1)(S) = \{u, \bar{u} \in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}} \mid (u)_{\mathrm{red}} = \overline{(\bar{u})}_{\mathrm{red}},\ u\bar{u} = 1\}, \tag{378}$$

类似于在（377）之后引入的 S-点的 $\mathbb{R}^{2|1}$ 记法。

定义 B.9. 超流形 S 的开覆盖是一个集合 $\{\varphi\colon U_i \to S\}$，其中 φ_i 对每个 i 都是局部同构，并且 $\{\varphi_{\mathrm{red}}\colon (U_i)_{\mathrm{red}} \to S_{\mathrm{red}}\}$ 是流形 S_{red} 的普通开覆盖。

定义 B.10. 超流形范畴上存在一个对合，

$$(\overline{\ }) \colon \mathsf{SMfld} \to \mathsf{SMfld}, \qquad S \mapsto \overline{S} \tag{379}$$

将超流形映射到相同的局部环化空间，但其层上的复数作用是通过复共轭实现的。超流形上的实结构 S 是一个同构 $r_S\colon\ S \xrightarrow{\sim} \bar{S}$，满足 $r \circ r = \mathrm{id}_S$。超流形之间的映射 $f\colon\ S' \to S$ 若带有实结构，则称为实映射，当且仅当 $r_S \circ f = f \circ r_{S'}$。

由于 (379) 是一个函子，超李群 G 有一个共轭超李群 $\overline{G}$（它通常与 G不同构）。超李群上的实结构是其底层超流形上的实结构，并且所有结构映射都是实映射。

例 B.11. 将超流形表示为 $S = \Pi E$，相当于在复向量丛 $E \to S_{\mathrm{red}}$ 上选取一个实结构。特别是，实结构可能不存在；即使存在，也不一定唯一。不过，

视为超流形的普通流形具有典范实结构，其中映射 $M \to M$ 来源于对 M 上取值于 $\mathbb{C}$ 的函数进行复共轭。同样，视为超李群的普通李群也具有典范实结构。

例 B.12. 对于复向量丛 $E \to N$， E （作为向量丛）上的实结构通过复共轭确定了 ΠE （作为超流形）上的实结构

$$C^\infty(\Pi E) \simeq \Gamma(N; \Lambda^\bullet E^\vee) \simeq \Gamma(N; (\Lambda E^\vee_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}) \qquad (E_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C} \simeq E.$$

事实上，复共轭是一个 $\mathbb{C}$-反线性映射 $C^\infty(\Pi E) \to C^\infty(\Pi E)$，它确定了超流形的一个同构 $\Pi E \xrightarrow{\sim} \Pi E$。

最后，我们需要一个技术引理。给定一个向量丛 $V \to M$，通过沿投影 $p\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \simeq \Pi TM \to M$ 拉回，我们得到一个向量丛 $p^*V \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$。

引理 B.13. 对于任意向量丛 $\mathcal{V} \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$，存在一个同构 $\mathcal{V} \simeq p^*V$，其中 $V \to M$ 是 M 上的向量丛。

证明。令 $i\colon M \hookrightarrow \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 表示约化流形的包含映射。给定向量丛 $\mathcal{V} \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$，引理陈述中的 $V \to M$ 的候选对象是 $V := i^*\mathcal{V}$。事实上，复合 $i \circ p$ 与 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上的恒等映射同伦。例如，考虑同伦 $\mathbb{R} \times \Pi TM_{\mathbb{C}} \to \Pi TM_{\mathbb{C}}$，它通过标量 $t \in \mathbb{R}$ 对 $\Pi TM_{\mathbb{C}} \to M$ 的奇纤维进行缩放；在点函子中，此映射为 $(t, x, \psi) \mapsto (x, t\psi)$，其中 $t \in \mathbb{R}(S)$，且 $(x, \psi) \in \Pi TM_{\mathbb{C}}(S) \simeq \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)(S)$。现在利用沿同伦映射的拉回会得到同构的向量丛，由此得出 $p^*V = p^*i^*\mathcal{V} \simeq (i \circ p)^*\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{V}$ 同构。□

Appendix C. Stolz and Teichner's twisted geometric field theories

关于本文系列的配套论文 [BE23b, 附录 B]，其中对 [ST11] 中构造的几何配边范畴作了更详细的概述。下文汇集本文所用的主要定义和记号，并给出扭曲场论的反射结构定义（见 §C.3）。下文的阐述强调，扭曲场论属于内在范畴的扭曲表示这一更广阔的背景；这一背景还包括此前在李群胚几何和扭曲等变 K 理论中研究过的例子。

C.1. **内在于层中的范畴**。

定义 C.1 ([ST11，定义 2.13])。 一个范畴 C 内在于层中是由层 Ob(C) 和 Mor(C)，以及源、目标、单位和复合函子

$$\mathsf{s}, \mathsf{t}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \quad \mathsf{u}\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{C}), \quad \mathsf{c}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})} \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \tag{380}$$

以及满足相容性条件的其他相干数据（例如结合子和单位子）。内在于对称幺半叠的范畴和带对合的、内在于对称幺半叠的范畴的定义与此类似。

栈构成一个（2，1）-范畴，因此我们将栈之间的映射称为 1-态射，并将这些 1-态射之间的同构称为 2-态射。下面的定义适用于内在于栈中的范畴、内在于对称幺半叠中的范畴，或内在于带对合的对称幺半叠中的范畴。当这三种情况都适用时，我们统一称之为内范畴。

注 C.2. 对于 [ST11] 中的范畴论基础（以 [模形式环06]为基础），复合函子使用栈的严格纤维积。这在尝试定义内范畴等价的正确概念时会带来问题，因为复合函子

与栈等价的相容性不佳。不过，有一个简单的解决办法：如果源函子与靶函子 s 和 t 是栈的纤维化，那么这个严格纤维积就与通常的（同伦）栈纤维积一致。几何配边范畴具有这种纤维化性质；见注 C.29。

定义 C.3 ([ST11，定义 2.18])。对于内范畴 C、D，一个内部函子$F = (F_0,\ F_1,\ \mu,\ \varepsilon)$: C $\to$ D 由 1-态射 F_0: Ob(C) $\to$ Ob(D)、 F_1: Mor(C) $\to$Mor(D)，以及 2-态射 μ 和 ϵ组成，

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})} \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\mathsf{c}} & \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \\
{\scriptstyle F_1 \times F_1}\downarrow & \mu & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\
\mathrm{Mor}(\mathsf{D}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})} \mathrm{Mor}(\mathsf{D}) & \xrightarrow[\mathsf{c}]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{F_0} & \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) \\
{\scriptstyle \mathsf{u}}\downarrow & \varepsilon & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{u}} \\
\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow[F_1]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D}).
\end{array}
\tag{381}
$$

这些数据还必须满足涉及结合子和单位子的其他性质。

定义 C.4 ([ST11，定义 2.19])。内函子 $F,\ G$: C $\to$D 之间的内部自然变换 $(\eta,\ \rho)$ 是一个 1- 态射 η: Ob(C) $\to$Mor(D) 和一个 2- 态射 ρ

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\eta \circ \mathsf{t} \times F_1} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})} \mathrm{Mor}(\mathsf{D}) \\
{\scriptstyle G_1 \times \eta \circ \mathsf{s}}\downarrow & \rho & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}} \\
\mathrm{Mor}(\mathsf{D}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})} \mathrm{Mor}(\mathsf{D}) & \xrightarrow[\mathsf{c}]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D}).
\end{array}
\tag{382}
$$

这些数据还必须满足额外的相干性条件。定义内部自然变换 之间的同构 $(\eta,\ \rho) \Rightarrow (\eta',\ \rho')$ 为一个 2- 态射 $\eta \Rightarrow \eta'$，沿此 2- 态射，ρ' 拉回为 ρ。

例 C.5. 超李范畴是一个以内嵌于超流形中的范畴，其源映射和目标映射都是下沉。这是定义 C.1 的一个版本，其中 Ob(C) 和 Mor(C) 是超流形，即可表层。超李范畴中不存在更高阶的相干数据，因此结合子和单位子必然都是平凡的。超李范畴之间的光滑函子 F: C $\to$ D 是超流形之间的一对映射F_0: Ob(C) $\to$ Ob(D)、 F_1: Mor(C) $\to$Mor(D)，并满足函子的公理。光滑自然变换 η: $F \Rightarrow G$ 是超流形之间的映射 η: Ob(C) $\to$ Mor(D)，并满足函子之间自然变换的公理。根据栈的米田引理，光滑函子确定一个内部函子，而光滑自然变换确定一个内部自然变换。

例 C.6. 作为前一个例子的特例，每个（超）李群胚都确定一个内范畴。特别地，每个超李群 G都确定超李群胚 $*/\!\!/G$，后者又提供一个内于栈的范畴。对于由普通流形 M确定的（离散）李群胚， M上的分次丛决定一个可逆代数丛（可能需要先将 M 替换为等价的李群胚，见 [Fre12，例 1.74]）。因此，丛为与 M关联的内范畴提供了扭曲的实例。关于1|1维场论与扭曲 K 理论之间的相关联系，参见 [Sto19] 。

C.2. **内范畴的扭曲表示。**

定义 C.7 （ [ST11，定义 5.1] 的概要）。将带对合的对称幺半叠中的内部范畴 内部 ***Morita*** 范畴 TA 定义如下。其栈

Ob(TA) 对局部平凡的核算子 Fr´echet 超代数丛及代数丛的同构进行分类。栈 Mor(TA) 对拓扑代数上的局部平凡核算子 Fr´echet 双模丛进行分类。TA 中的复合是双模丛的射影张量积，

$$\mathsf{c}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{TA}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{TA})} \mathrm{Mor}(\mathsf{TA}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{TA}), \qquad \mathsf{c}(B, B') = B \otimes_A B'.$$

将代数丛视为自身上的双模，可构造单位映射 u: Ob(TA) →Mor(TA)。利用底超流形的结构层上代数丛与双模丛的射影张量积，为 Ob(TA) 和 Mor(TA)赋予幺半结构。栈 Ob(TA) 和 Mor(TA) 上的对合来自丛上的奇偶反演，而所有结构映射对于这些对合都是 $\mathbb{Z}/2$-等变的。

注 C.8。 定义 C.7 与 [ST11] 中的定义有两处不同。首先，我们要求拓扑向量空间层是局部自由的，即向量丛。Stolz 和 Teichner 在工作中采用更一般的层，其动机在注 1.4 中有所说明。其次，我们将范围从一般的局部凸拓扑向量空间缩小到核算子 Fr´échet 空间。我们作此选择，是为了确保量子场论函子式定义中的某些形式范畴结构与物理学中的标准结构一致：Fr´échet 空间具有逼近性质 [Sch71，第 109]，页，因此核算子的迹理论具有良好的性质，参见 [ST12, §4.5]。此外，本文中所有期望的例子最终都得到核算子 Fr´échet 空间的向量丛。关于核算子 Fr´échet 空间的简要概述，参见 [Cos11b, 附录 2] 。

注记 C.9。 可以忘掉栈上的对合，也可以忘掉其幺半结构。因此，定义 C.7 给出三个内范畴：内于带对合的对称幺半叠的范畴、内于对称幺半叠的范畴，以及内于栈的范畴。我们用 TA 表示这三种情况中的任意一种，具体采用哪一种应由上下文判断。

定义 C.10。 内范畴 C 的一个扭曲 是一个内部函子 $\mathscr{T}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{TA}$。平凡扭曲 是如下函子：

$$\mathbb{1}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{TA} \tag{383}$$

它恒等于 TA 的幺半群单位元。例如，所有对象 $Y \in$Ob(C)(S) 都映到 S 上的平凡代数丛，所有对象 $\Sigma \in$ Mor(C)(S) 都映到 S 上的平凡双模丛，而 Ob(C)(S) 和 Mor(C)(S) 中的所有态射都映到平凡丛的平凡自同构。

定义 C.11。 内范畴 C 的一个 $\mathscr{T}$-扭曲表示 是一个内部自然变换 E

$$\mathsf{C} \;\underset{\mathscr{T}}{\overset{\mathbb{1}}{\overset{\Downarrow E}{\rightrightarrows}}}\; \mathsf{TA}. \tag{384}$$

扭曲之间的同构是内部自然同构 $\mathscr{T} \Rightarrow \mathscr{T}'$。扭曲表示之间的同构是内部自然变换之间的同构 $E \simeq E'$。

例 C.12. 李群胚表示的标准定义 [Mac87, Definition 1.7.1] 为相关内范畴确定了一个平凡扭曲下的扭曲表示（参见例 C.6） $\mathscr{T} = \mathbb{1}$。

例 C.13. 当 C 是李群胚时，Freed 在 C 上的可逆代数丛[Fre12，定义 1.59] 确定了相关内范畴的扭曲。可逆

alge代数丛确定了等变 K 理论的扭曲 [Fre12，定义 1.7.8], 另请参见 Karoubi [Kar68]和 Donovan–Karoubi [DK70]。

例 C.14. 对于一个视为内范畴的普通流形（见例 C.6），扭曲是其上的代数丛。扭曲表示是一个丛，其纤维为模。

例 C.15. 对于一个视为内范畴的超李群，扭曲是一个代数，连同一个位于其上的双模丛，以及一个覆盖乘法的丛映射。当此时，这些数据与该超李群的中心扩张相同。扭曲表示是一个模，带有（弱）作用；当此时，这些数据与该超李群的射影表示相同。

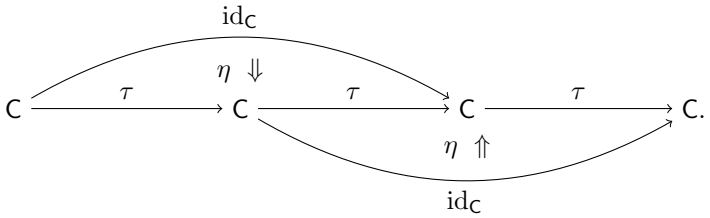
C.3. **扭曲表示的反射结构**。 以下关于内对合和等变数据的概念扩展了 HST10，定义 6。以下定义中特别强调，是指通常的范畴，而非内范畴。

定义 C.16 ([FH22，定义 B.1])。对于范畴 $\mathscr{S}$，一个对合是一个函子 $\overline{(\,)}\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$，以及一个自然变换 $\varepsilon\colon \mathrm{id}_{\mathscr{S}} \Rightarrow \overline{(\,)} \circ \overline{(\,)}$，满足 $\overline{(\,)}$ 与自身三重复合时的相容条件。

例 C.17. 下面我们将考察超流形范畴上的两个对合。第一个是平凡对合，第二个是定义 B.10 中的共轭函子$\overline{(\,)}$，它会改变超流形结构层上的复结构。在这两种情况下，对合的平方都是等于恒等函子的函子，因此我们取 ε 为恒等函子。

下面我们将（对称幺半）栈（带对合）视为纤维化在 SMfld 上的范畴，因此可以询问是否存在一个覆盖 SMfld 上某个对合的叠之间的映射。

定义 C.18. 固定超流形范畴上的一个对合 $\mathrm{SMfld} \to \mathrm{SMfld}$。对于一个内范畴 C，一个内反 *involution* 由以下数据构成：一个内部函子 $\tau\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$，它覆盖超流形上给定的对合；一个内部自然同构 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow \tau \circ \tau$，它覆盖 SMfld 上该对合的同构数据；以及一个同构 δ，它是图表中内部自然同构 $\tau \simeq \tau \circ \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \circ \tau \simeq \tau$ 之间的同构



同构 δ 满足与 η 相容的条件，即针对 τ 与自身的四重复合。

定义 C.19. 内范畴 C 上的一个反射 是相对于 SMfld 上的共轭函子 (379) 的内反 involution。

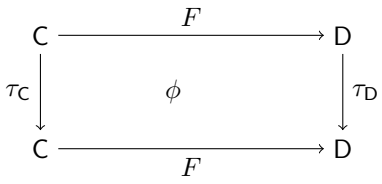
引理 C.20. 内范畴 TA 具有一个反射，该反射来自对代数、双模及双模映射的复共轭，

$$\overline{(\,)}\colon \mathsf{TA} \to \mathsf{TA}, \quad (A \to S) \mapsto (\overline{A} \to \overline{S}), \tag{385}$$

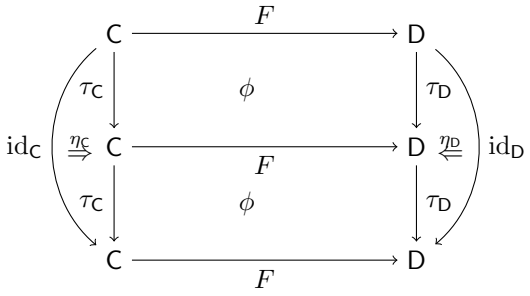
其中 $\overline{(\,)} \circ \overline{(\,)} \equiv \mathrm{id}$。

下文将 [FH22，定义 B.6]推广至内范畴。

定义 C.21. 设 (C $\tau_{\mathsf{C}}, \eta_{\mathsf{C}}, \delta_{\mathsf{C}}$) 和 (D $\tau_{\mathsf{D}}, \eta_{\mathsf{D}}, \delta_{\mathsf{D}}$) 为带有内反 involution 的内范畴，并设 F: C $\to$ D 为函子。的等变数据 是一个内部自然变换 ϕ

(386)


以及内部自然变换之间的一个同构 β: $\phi^2 \circ \eta_{\mathsf{C}} \to \eta_{\mathsf{D}}$

(387)


其中 β 满足与 δ_{C} 和 δ_{D}相容的条件。

注 C.22。 在本文关注的例子中，定义 C.18 中的相干数据 η 和 δ 将是平凡的。在这种情况下，（387）中的数据变成 ϕ^2 与 F上的恒等态射之间的一个同构，即 ϕ 是一个对合 2-态射。

例 C.23。 平凡扭曲 1: C $\to$ TA 对源上的任意反射结构都有典范等变数据。

内在于栈中的范畴也存在内部自然变换的等变数据概念，定义如下。

定义 C.24. 设 (C $\tau_{\mathsf{C}}, \eta_{\mathsf{C}}, \delta_{\mathsf{C}}$) 和 (D $\tau_{\mathsf{D}}, \eta_{\mathsf{D}}, \delta_{\mathsf{D}}$) 是带有内反 involution 的内范畴，并设 F, G: C $\to$D 是带有等变数据 (ϕ_F, β_F) 和 (ϕ_G, β_G) 的内部函子。内部自然变换 E: $F \Rightarrow G$ 的等变数据是一个自然变换的同构 σ: $\phi_G \circ E \simeq E \circ \phi_F$，并满足与 β_F 和 β_G 的相容条件。

上述内容共同定义了内范畴的扭曲表示上的反射结构。

定义 C.25. 给定一个带有反射结构 (τ, η, δ) 的内范畴 C，扭曲 $\mathscr{T}$: C $\to$ TA 的反射结构是相对于引理 C.20 中 TA 上的反射结构，针对 $\mathscr{T}$ 的等变数据（按定义 C.21 的含义）。带有反射结构的扭曲之间的同构是带有等变数据（按定义 C.24 的含义）的内部自然同构 $\mathscr{T} \Rightarrow \mathscr{T}'$。

给定一个 $\mathscr{T}$扭曲表示 E (384) 以及 $\mathscr{T}$的反射结构， E 的反射结构 是定义 C.24 意义下内部自然变换 E 的等变数据。带反射结构的扭曲表示之间的同构，是内部自然变换 $E \simeq E'$ 之间与等变数据 σ相容的同构。

例 C.26. 基于将普通流形 M 视为内部范畴的例 C.14，扭曲的反射结构是代数丛上的实结构 A

over M。扭曲表示 E 的反射结构是 E fo 上的实结构 r
which, A-作用是实的。

例 C.27. 基于例 C.15 中将超李群 G 视为内范畴的情形，由 A 确定的扭曲的反射结构，是 A 上的实结构，以及 G上 $A-\mathbb{C}$ 双模丛的相容实结构。扭曲表示 E 的反射结构，是 E 上的实结构，且与 A 上的实结构以及 G的作用相容。当 $A=\mathbb{C}$时，该扭曲的实结构与 G的 $\mathbb{Z}/2$-扩张是相同的数据，而 E 上的实结构则与实射影表示是相同的数据。

C.4. **扭曲几何场论与反射结构**。参见§4.1，了解刚性几何的概述。

定义 C.28（[ST11 的概要，第 2.21、2.46 条定义、第 2.48 节末尾及第 4.4] 节）。给定一个带对合的刚性几何（$G,\mathbb{M}$），令（$G,\mathbb{M}$）-Bord(M)表示 Stolz 和 Teichner 在 M 上的（$G,\mathbb{M}$）-配边范畴，将其视为带对合的对称幺半群叠中的内范畴。因此，（$G,\mathbb{M}$）-Bord(M)包含带对合的对称幺半群叠的数据

$$\mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)),\qquad \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)) \tag{388}$$

以及带对合的对称幺半叠之间的源、目标、单位和复合函子

$$\begin{aligned}&\mathsf{s},\mathsf{t}\colon \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))\to \mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)),\\ &\mathsf{u}\colon \mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))\to \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)),\\ &\mathsf{c}\colon \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))^{[2]}\to \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)).\end{aligned} \tag{389}$$

此外还有结合子和单位子数据，它们满足进一步的相容性条件。

以上及下文中，我们用记号

$$\mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))^{[k]}:=\underbrace{\mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))\times_{\mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))}\cdots\times_{\mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))}\mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))}_{k-\text{fold fibered product}}$$

表示 Mor((G, M)-Bord(M)) 关于映射 s 和 t 在 Ob((G, M)-Bord(M)) 上的 k 重纤维积；因此，Mor((G, M)-Bord(M))$^{[d]}$ 的 S 点是 k 元可复合配边。

注 C.29。在 [BE23b, 附录 B.3], 中，证明了构造 (G, M)-Bord(M) 时的源函子和目标函子 (389) 是栈的纤维化，因此栈的严格纤维积与弱纤维积一致。在考虑配边的复合时，我们始终使用这一事实。

我们概述将 (G, M)-Bord(M) 构造成一个内范畴的过程。栈 Ob((G, M)-Bord(M)) 的对象由以下数据指定：(i) S 上的一个 (G, M)-对 (Y^c, Y)，(ii) 一个映射 $\Phi\colon Y\to M$，以及 (iii) $Y\setminus Y^c$ 的一个划分：

$$(Y^c\subset Y),\qquad Y\xrightarrow{\Phi}M,\qquad Y\setminus Y^c\simeq Y^-\coprod Y^+. \tag{390}$$

S族 $Y\to S$ 是一个领圈，而该划分指定了一个入射领圈 Y^- 和一个出射领圈 Y^+。要求核 $Y^c\to S$在 S上是适当的。这些对象具有由$(G,\mathbb{M})$-几何上的对合决定的对合，以及由超流形的不交并诱导的幺半结构。Ob((G, M)-Bord(M)中的同构是$(G,\mathbb{M})$-等距嵌入 $Y\hookleftarrow W\hookrightarrow Y'$ 所构成的跨度，满足与 Y^c 和 $Y^{\pitchfork}$的相容性条件，并且视为在允许缩小领圈的等价关系下的同构。

类似地，栈 Mor((G, M)-Bord(M)) 的一个对象由以下数据指定：

$$Y^c_{\mathsf{in}}\subset Y_{\mathsf{in}}\hookrightarrow\Sigma\hookleftarrow Y_{\mathsf{out}}\supset Y^c_{\mathsf{out}},\qquad \Phi\colon\Sigma\to M, \tag{391}$$

其中，$(Y^{c_{\text{进/出}}}\ Y_{\mathsf{in/out}})$ 是与配边的源和目标相关联的 $(G,\mathbb{M})$-对。类似地定义了核 Σ^c：$=\Sigma\setminus(i_{\mathrm{in}}(Y^{-}{}_{\text{进}})\cup i_{\mathrm{out}}(Y^{+}_{\mathrm{out}}))$，并要求它在 S 上是适当的。$\mathsf{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))$ 中的同构仍由等距嵌入 $\Sigma\hookleftarrow W\hookrightarrow\Sigma'$ 的跨度指定，这些跨度满足相容性条件，并受允许缩短领圈的等价关系约束。我们注意到，完整定义将 (391) 中的包含映射替换为跨度，这对于注 C.29 中所述的纤维化性质至关重要。本文只需要 (391) 形式的配边。

定义 C.30 ([ST11，定义 5.2])。一个扭曲几何场论 是$(G,\ \mathbb{M})$-$\mathsf{Bord}(M)$的一个扭曲表示，即一个内部自然变换 E

$$(392)\qquad (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)\ \underset{\mathscr{T}}{\overset{\mathbb{1}}{\Downarrow E}}\ \mathsf{TA}$$

其中 $\mathscr{T}$ 是一个扭曲函子，而 $\mathbb{1}$ 是 (383)。扭曲场论是一个群胚的对象，其态射是内部自然变换之间的同构。

场论的反射结构是定义 C.21 和 C.24 的特例。

定义 C.31。给定$(G,\ \mathbb{M})$-$\mathsf{Bord}(M)$的一个反射 $\dagger$，一个扭曲的反射结构 以及一个扭曲场论的反射结构 由定义 C.25 给出。

引理 C.32. 几何配边范畴 $(G,\mathbb{M})$-$\underline{\mathsf{Bord}}(M)$ 上的反射结构由映射 $\dagger\colon\underline{\mathbb{M}}\to\mathbb{M}$和同态 $\alpha\colon G\to G$ 确定，并满足

$$(393)\qquad \overline{\dagger}\circ\dagger=\mathrm{id}_{\mathbb{M}},\qquad \dagger|_{\mathbb{M}^c}=\overline{\mathbb{M}}^c\subset\overline{\mathbb{M}},\qquad \overline{\alpha}\circ\alpha=\mathrm{id}_G.$$

证明。该结论可由 [HST10, 引理 6.19]中的论证推出。给定一个 S-族的 $(G,\mathbb{M})$-超流形 ($Y\to S$)，映射 (393) 为 S-族 $(Y\to S)$ 给出唯一的 $(G,\mathbb{M})$-结构。它可扩展为一个内部函子

$$(394)\quad (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)\to(G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M),\qquad (S\leftarrow Y\to M)\mapsto(\overline{S}\leftarrow\overline{Y}\to\overline{M}\simeq M).$$

识别 $M\simeq M$ 利用了 M 是一个普通流形这一点，因此将其视为超流形时，它具有典范实结构。通过遗忘函子 $(G,\mathbb{M})$-$\mathsf{Bord}(M)$ $\to$SMfld（它将一个 S-族的配边映射到 S），内部函子 (394) 覆盖了超流形上的共轭函子。□

赋值 $M\mapsto(G,\ \mathbb{M})$-$\mathsf{Bord}(M)$ 关于 M 是自然的：光滑映射 $f\colon M'\to M$ 会诱导一个内部函子

$$(395)\qquad f_*\colon(G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M')\to(G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)$$

通过将 (391) 中的映射 Φ 与 f 复合。这意味着，带有反射结构的扭曲几何场论确定了一个从流形到群胚的反变函子。

我们主要关注 $2|1$维欧几里得配边范畴，其底空间为 M，记作 $2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$；它定义为定义 4.14 中几何配边范畴，其几何结构为 $(\mathbb{E}^{2|(0,1)}\rtimes\mathsf{Spin}(2)\ \mathbb{R}^{2|1},\ \mathbb{R}^{1|1})$，对合来自自旋翻转，见引理 4.9。我们将介绍 $2|1$-欧几里得配边范畴上的一些结构，以及这些结构对扭曲场论的影响。

引理 C.33。对于 $\mu\in\mathbb{R}_{>0}$，内范畴 $2|1$-$\mathsf{EBord}(M)$ 存在一个内部自函子 $\mathsf{RG}^{\mu}\colon 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\to 2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)$，它将超欧几里得配边按 μ 进行伸缩。此外，对于 $\mu,\ \mu'\in\mathbb{R}_{>0}$ 存在内部自然同构 $\mathsf{RG}^{\mu}\circ\mathsf{RG}_{\mu'}\simeq\mathsf{RG}^{\mu\mu'}$。

证明略。 函子 RG$^{\mu}$ 继承自引理 4.11 给出的 $2|1$-欧几里得超流形上的自函子。这确定了 $2|1$-EBord(M) 的对象栈和态射栈上的映射，剩下的工作是补充 (381) 中的 2-态射并验证它们的相容性。□

定义 C.34。 重整化群流 是扭曲的$2|1$欧几里得场论上的（弱） $\mathbb{R}_{>0}$作用，定义为沿引理 C.33 中 $2|1$欧几里得配边范畴的自函子，拉回内部自然变换（392）所得。

引理 C.35。 内范畴 $2|1$-EBord(M) 具有一个反射

$$\dagger\colon 2|1\text{-EBord}(M) \to 2|1\text{-EBord}(M), \qquad \dagger \circ \dagger \simeq \mathrm{id}. \tag{396}$$

证明。 $2|1$-EBord(M) 的对合继承自定义 4.19 中 $2|1$-欧几里得超流形上的对合。□

C.5. 欧几里得配边范畴上的度数 n 扭曲。 我们回顾来自 [ST11, §5-6], 的自由费米子扭曲（也称为度数扭曲），它是由 $\otimes$可逆内部函子构成的一组特定对象

$$\mathrm{Fer}_n\colon 2\text{-EBord} \to \mathsf{TA}, \qquad \mathrm{Fer}_n \otimes \mathrm{Fer}_n \simeq \mathrm{Fer}_{n+m} \tag{397}$$

由 $n \in \mathbb{Z}$ 索引，并配有指定的内部自然同构。上文中，2-EBord $=$ 2-EBord(pt) 是二维欧几里得配边范畴 （在 $M = \mathrm{pt}$ 上），即与§4.2 中定义的二维欧几里得几何相关联的几何配边范畴。该配边范畴中的态射（粗略地说）是带有自旋结构和测地边界的平坦二维流形。

注记 C.36。 自由费米子已在数学文献中用多种语言进行了广泛研究，例如参见 [Was98、Seg04、ST04、DH11]。

我们先回顾 [ST11, §3.2]中的一些欧几里得配边族。存在叠映射 [ST11, page 34]

$$\mathsf{S}^{\pm}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathrm{Ob}(2\text{-EBord}), \qquad \ell \mapsto \mathrm{S}^{\pm}_{\ell}$$

将 $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ 映到一个周长为 ℓ 的、带有周期自旋结构的欧几里得圆，以及一种领圈选择（由 $\pm$ 指示），这与（196）类似。类比于（197）和（200），存在叠映射 [ST11, page 34-35]

$$\begin{aligned} \mathsf{C}^{\pm}&\colon (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2\text{-EBord}), \qquad (\ell,\tau) \mapsto \mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau} \\ \mathsf{L}^{\pm}&\colon (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2\text{-EBord}), \qquad (\ell,\tau) \mapsto \mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau} \\ \mathsf{R}^{\pm}&\colon (\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_{\pm})/\mathbb{Z} \to \mathrm{Mor}(2\text{-EBord}), \qquad (\ell,\tau) \mapsto \mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau} \end{aligned} \tag{398}$$

它们分类了配边族，其核是直径为 ℓ、高度为 im(τ) 的平坦圆柱。函子（398）之间的区别源于源与靶数据的选择。族（398）之间的复合由 $\mathbb{H}_{\pm}$中的加法决定；有关其中一些复合的示意图，请参见图（209）、（214）和（220）。公式可由（205）、（210）、（215）和（221）推得。例如，欧几里得圆柱的拼接给出 [ST11, 命题 3.5], 见（209）

$$\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau'} \circ \mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau} \simeq \mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau'+\tau}.$$

按照 [ST11, §5.3], ，我们将描述 Fer_{-1} 在（397）中的取值，即作用于边界（398）及其复合上的取值。定义代数丛 Fer($\mathsf{S}^{\pm}$) $\to \mathbb{R}_{>0}$ ，其在 $\mathrm{S}^{\pm}_{\ell}$ 处的纤维为 [ST11, Equation 6.1]

$$\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell} := \mathrm{Fer}(\mathrm{S}^{\pm}_{\ell}) = \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm 1} \otimes \bigotimes_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m}), \tag{399}$$

用于以下对上述因子的定义。对于 $m \in \mathbb{R}$，令 $\mathbb{C}_{\ell,\, m}$ 表示 $\mathbb{R}$ 的一维表示，其作用为 $e^{2\pi i m t/\ell}$，其中 $t \in \mathbb{R}$。克利福德代数$\mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\, m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\, -m})$由 $\mathbb{R}$-不变（双曲）配对确定

$$\omega \colon \mathbb{C}_{\ell,m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,-m} \to \mathbb{C}, \qquad \omega((v_m, v_{-m}), (w_m, w_{-m})) = v_m w_{-m} + v_{-m} w_m. \tag{400}$$

最后，(399) 中的无限张量积是受限张量积，即由有限多个张量积的和 $\otimes_m v_m$（其中 $v_m = 1$ 对除有限多个 m 以外的所有情况都成立）取闭包得到。全文中我们将使用典范同构

$$(\mathrm{Fer}_\ell^{\pm})^{\mathsf{op}} = \mathrm{Fer}_\ell^{\mp}$$

其在底层集合上的映射是恒等映射。

接下来，按照 [ST11，第 59]页，在代数 (399) 上构造一个 $\mathbb{H}_{\pm}$-作用。令$\tau \in \mathbb{H}_{\pm}$ 通过 $e^{2\pi i m\tau/\ell}$ 作用于 $\mathbb{C}_{\ell,\, m}$。将其对角地作用于 $\mathbb{C}_{\ell,\, m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\, -m}$时，这个 $\mathbb{H}_{\pm}$-作用保持配对 (400)，因此确定一个自同构

$$\varphi^{\pm}_{\ell,m}(\tau) \colon \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,-m}) \to \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,-m}), \qquad \tau \in \mathbb{H}_{\pm} \tag{401}$$

它扩展了 (399) 上的 $\mathbb{R}$-作用。改变 m，这些自同构组装成一个 $\mathbb{H}_{\pm}$-自同构族 $\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau)$: $\mathsf{Fer}^{\pm}_{\ell} \to \mathsf{Fer}^{\pm}_{\ell}$。定义 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm}$ 上的双模丛，其纤维记为 ${}_{\tau}\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell}(\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell})^{\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell}}$；该丛通过将 $\mathsf{Fer}^{\pm}_{\ell}$ 视为其自身上的双模来定义，其中左作用由自同构 $\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau)$ 扭曲。由于代数映射$\varphi_{\ell,\, m}(\tau + \ell) = \varphi_{\ell,\, m}(\tau)$ 相等，这个双模丛下降到商空间 $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_{\pm})/\mathbb{Z}$。扭曲 (397) 将双模丛赋给族 (398)，其在 $(\ell,\ \tau)$ 处的纤维为

$$\begin{aligned} \mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{C}^{\pm})_{\ell,\tau} = \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}^{\pm}_{\ell,\tau}) &= {}_{\tau\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}}(\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell})_{\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}} \\ \mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{L}^{\pm})_{\ell,\tau} = \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{L}^{\pm}_{\ell,\tau}) &= (\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell})_{\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell} \otimes {}_{\tau}\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell}} \\ \mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{R}^{\pm})_{\ell,\tau} = \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{R}^{\pm}_{\ell,\tau}) &= {}_{\mathrm{Fer}^{\pm}_{\ell} \otimes {}_{\tau}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}. \end{aligned} \tag{402}$$

式 (397) 在欧几里得环面的模空间上的取值是 Pfaffian 线丛 [ST11，第 56] 页

$$\mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{Lat}/\!\!/(\mathbb{E}^2 \rtimes \mathrm{Spin}(2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))) = \mathrm{Pf}, \tag{403}$$

我们将其视为格 Lat 上平凡丛的 $\mathbb{E}^2 \rtimes$Spin(2)$\times$SL$_2(\mathbb{Z})$-等变结构；关于此线丛的回顾，请参见 §A。

注记 C.37。 反周期版本的欧几里得圆柱 (398) 上的取值遵循与上文类似的讨论，但起点是 $\mathbb{R}_{>0} \coprod \mathbb{R}_{>0}$ 上的代数丛，其在 $(\ell,\ \pm)$ 处的纤维为 [ST11，方程 6.1]

$$\bigotimes_{m \in \mathbb{N}_0 + 1/2} \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m}). \tag{404}$$

Fer_{-1} 在自旋环面模叠的其他分量 (109) 上的取值仍然是 Pfaffian 线；在这些分量上，Pfaffian 截面将其典范平凡化（对于偶自旋结构，狄拉克算子可逆）。

原则上，内函子 (397) 需要为复合和单位提供额外数据。这些数据大多可由以下事实给出：双模 (402) 的复合对应于代数映射 $\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau)$ 的复合，例如，存在典范的双模映射

$$\mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}_{\ell,\tau'}) \circ \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}_{\ell,\tau}) = \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}_{\ell,\tau'}) \otimes_{{}_{\tau}\mathrm{Fer}^{\mp}_{\ell}} \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}_{\ell,\tau}) \to \mathrm{Fer}_{-1}(\mathrm{C}_{\ell,\tau'+\tau}) \tag{405}$$

由于 $\varphi^{\pm}_{\ell}(\tau') \circ \varphi^{\pm}_{\ell}(\tau) = \varphi^{\pm}_{\ell}(\tau' + \tau)$。剩余待指定的数据对应于将圆柱粘合成环面的复合 [ST11，公式 3.11]（见图（225））。对于

这样的复合，扭曲将线丛在 $\mathbb{R}_{>0} \times^{\mathbb{H}_\pm}$ 上的同构数据赋予出来

$$\mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{L}^{\mp})_{\ell,\tau} \circ \mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{R}^{\pm})_{\ell,\tau} \simeq \mathrm{Fer}_\ell^{\pm} \otimes_{\mathrm{Fer}_\ell^{\pm} \otimes^{\tau} \mathrm{Fer}_\ell^{\mp}} \mathrm{Fer}_\ell^{\mp} \overset{\mathrm{data}}{\simeq} \mathrm{Pf}|_{(\ell,\tau)} \tag{406}$$

在所示张量积与沿包含映射$\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_+ \hookrightarrow$ Lat对Pfaffian的限制之间。上文实质上是对双模 ${}^{\tau}\mathsf{Fer}_\ell^{\pm}$ 上的迹的选择，我们将在下文的引理 C.40 中对其进行刻画。

通过计算等距变换上的扭曲，我们在代数 (399) 上获得了更多结构，例如，由 $\sqrt{-1} \in U(1) \simeq$ Spin(2)的作用所确定的等距变换 $\mathsf{S}_\ell^{\pm} \simeq \mathsf{S}_\ell^{\mp}$ （类似于引理 6.22）给出一个同构

$$\mathbb{Cl}_{\mp 1} \otimes \bigotimes_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\mp m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\pm m}) \overset{\mathrm{data}}{\simeq} \mathbb{Cl}_{\pm 1} \otimes \bigotimes_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m}), \tag{407}$$

其平方等于奇偶反演。映射 (407) 除相差一个符号外是唯一的，其表达式为

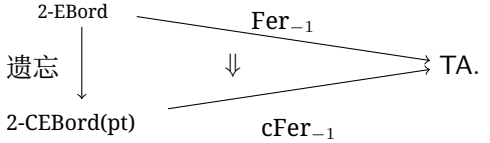
$$\mathbb{Cl}_{\mp 1} \to \mathbb{Cl}_{\pm 1}, \quad v \mapsto \pm iv, \quad v \in \mathbb{C} \tag{408}$$

$\mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\mp m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\pm m}) \to \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m}), (v,w) \mapsto (iw, iv), (v,w) \in \mathbb{C}_m \oplus \mathbb{C}_{-m}$).类似地，$\mathrm{Fer}_{-1}$ 上的反射结构由代数的共轭线性对合自同构确定，

$$\begin{aligned} \mathbb{Cl}_{\mp 1} &\to \overline{\mathbb{Cl}}_{\pm 1}, \quad v \mapsto \pm i\overline{v}, \quad v \in \mathbb{C} \\ \mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\mp m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\pm m}) &\to \overline{\mathbb{Cl}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m})} \simeq \mathbb{Cl}(\overline{\mathbb{C}}_{\ell,\mp m} \oplus \overline{\mathbb{C}}_{\ell,\pm m}) \\ (v,w) &\mapsto (\pm i\overline{w}, \mp i\overline{v}), \quad (v,w) \in \mathbb{C}_{\mp m} \oplus \mathbb{C}_{\pm m}) \end{aligned} \tag{409}$$

也就是说，这是克利福德代数上 $*$-结构 (418) 的 $\mathbb{Z}/2$-分次版本。上述内容确定了双模 (402) 之间的共轭线性映射，因此也确定了通过限制反射结构所得到的数据；参见引理 7.8。

注记 C.38。 度数 n 扭曲被定义为一个从欧几里得配边范畴出发的函子，见 [ST11，第 56]，页；随后又被描述为一个从“共形欧几里得”配边范畴出发的函子，见 [ST11，第 6] 节。下面说明这两种描述之间的转换。首先，共形欧几里得配边范畴将重整化群作用包含为一个等距变换；也就是说，共形欧几里得几何是 $(\mathbb{E}^2 \rtimes \mathbb{C}^\times, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，其中通过识别 Spin(2) $\times \mathbb{R}_{>0} \simeq \mathbb{C}^\times$。分解为傅里叶模后，可得一个 $\mathbb{R}$-等变代数同构，它连接 (399) 与周期圆 (41) 上旋量丛的（偶）截面空间上的克利福德代数。这从对象上恢复了 Stolz 和 Teichner 在 [ST11，第 56] 页所定义的欧几里得扭曲。我们指出，(404) 是 (41) 的一个版本，其中旋量丛对应于反周期自旋结构。代数丛 (399) 同构于纤维为 $\mathrm{Fer}_{-1}(\mathsf{S}_1^{\mp})$ 的平凡丛（即 $\ell = 1$ 处的纤维）；在负圆 S_ℓ^- 上，这恢复了 [ST11 方程 6.1] 中的共形欧几里得扭曲。相对于每个纤维处半群之间的同态，该平凡化是 $\mathbb{H}_\pm$-等变的。由此勾勒出了一个 2-交换三角形的数据



其中 Fer_{-1} 是 [ST11 第 56]，页中定义的 (397)，而 cFer_{-1} 是 [ST11 第 §6]，节中该函子的共形版本，并且 2-交换数据基本上由 $\mathbb{H}_\pm$-等变代数丛之间的同构决定。换言之，二维中的度数扭曲是 RG-不变的，在这一框架下，这要求提供上文 2-交换图表中的附加（下降）数据。

我们回顾定义 5.4 中欧几里得圆柱的内部 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathrm{pt})$。

引理 C.39 ([ST11，公式 6.2])。 考虑将 Fer_n 限制到由欧几里得圆柱构成的子范畴 $\mathscr{C} \hookrightarrow 2\text{-}\mathsf{EBord}$。存在一个内部自然同构

$$\mathscr{C} \underset{\mathrm{Fer}_n}{\overset{\mathrm{Cl}_n}{\xrightarrow[\mathcal{F}\Downarrow]{}}} \mathsf{TA} \tag{410}$$

来自定义 7.17 中的内部函子 Cl_n 。此外，内部自然同构 $\mathcal{F}$ 相对于由 Fer_n 的共轭线性反自同构 (409) 所确定的内部函子的反射结构，以及 $*$-超代数结构，具有反射结构

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \quad \to \quad \overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n}, \quad v \mapsto \mp i\overline{v}, \quad v \in \mathbb{C}^n. \tag{411}$$

证明。 为了构造 (410) 中的内部自然同构 $\mathcal{F}$，只需考虑 $n = -1$ 的情形。基本要素是 $\mathbb{R}_{>0} \coprod \mathbb{R}_{>0}$ 上的一个可逆双模丛，其纤维为 [ST11，公式 6.2],

$$\mathrm{Fer}_\ell^{\mp}(\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1} \bigotimes_{m>0} \Lambda^\bullet \mathbb{C}_{\ell,\pm m})_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1}} \tag{412}$$

其中 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm 1}$ 被视为其自身上的双模，而 $\Lambda^\bullet \mathbb{C}_{\ell,\pm m}$ 是一个左 $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m})$-模，其作用由拉格朗日子空间 $\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \subset \mathbb{C}_{\ell,\pm m} \oplus \mathbb{C}_{\ell,\mp m}$确定。[4]丛 (412) 提供了栈之间的映射 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathsf{Mor}(\mathsf{TA})^\times$ 的部分数据；其余数据是一个 $\mathbb{Z}/4$-等变结构，由 $\pm i$ 对 $\mathbb{C}_{\ell,\pm m}$ 的作用以及 (408) 中的映射 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm 1} \to \mathbb{C}\mathrm{l}^{\mp 1}$ 确定。这构成了内部自然同构 (410) 的第一部分数据。其余数据是双模 $(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_\pm)$ 上的 $\mathbb{Z}/4$-等变同构 $/\mathbb{Z}$

$${}_{\tau}\mathrm{Fer}_\ell^{\mp}(\mathrm{Fer}_\ell^{\mp}) \otimes_{\mathrm{Fer}_\ell^{\mp}} (\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1} \bigotimes_{m>0} \Lambda^\bullet \mathbb{C}_{\ell,\pm m})_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1}} \to {}_{\mathrm{Fer}_\ell^{\mp}}(\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1} \bigotimes_{m>0} \Lambda^\bullet \mathbb{C}_{\ell,\pm m}) \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1}} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1}. \tag{413}$$

将源识别为双模 (412)，但其左作用由 $\varphi_\ell^{\pm}(\tau)$ 扭曲，则映射 (413) 由下式给出

$$\mathbb{C}_{\ell,\pm m} \to \mathbb{C}_{\ell,\pm m}, \qquad v \mapsto e^{\pm 2\pi i \tau m/\ell} v. \tag{414}$$

至此，自然同构 (410) 的构造完成。在此情形下， $\mathcal{F}$ 上的反射结构是一种性质，对应于反线性对合 (409) 和 (411) 的相容性。□

最后，我们刻画 Stolz 和 Teichner 在其构造中指定的同构 (406)；该映射隐含于 [ST04, 引理 2.3.14] 以及 [ST11, 定理 1 的证明。16],不过，那里的表述略显简略。就我们的目的而言，以下内容可以作为定义，而非引理。除了一个可吸收到 Pf 的平凡化中的常数相位外，以下内容也与物理学文献中的惯例一致，例如参见 [GJF19, 第 6], 页，以及 [ST04, 公式 3.3.10]。

°**引理 C.40** ([ST11, §6])。 </style}在 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{H}_+$ 上，存在一个线丛的交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fer}_\ell^{\mp} \otimes_{\mathrm{Fer}_\ell^{\mp} \otimes {}^{\tau}\mathrm{Fer}_\ell^{\pm}} \mathrm{Fer}_\ell^{\pm} & \xrightarrow{\quad\simeq\quad} & \underline{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Pf}|_{\mathbb{R}_{>0} \times \mathring{\mathbb{H}}_+} \\ \simeq \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp 1} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm 1}} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm 1} & & \end{array} \tag{415}$$

[4]例如，参见 [ST04，定义 2.2。4] 关于由拉格朗日子空间构造的克利福德模 .

其中，上方的同构是来自内部函子 Fer 的数据 (406)，而°Pfaffian 在 $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{H}_+ \hookrightarrow$ Lat 上的平凡化是典范的（由限制 Lat 上的平凡丛得到）。那么，虚线箭头由截面上的映射给出

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+;\mathbb{C}l_{-1}/[\mathbb{C}l_{-1},\mathbb{C}l_{-1}]) &\to C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times\mathring{\mathbb{H}}_+) \\ \Gamma &\mapsto \ell^{1/2}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau/\ell}) \end{aligned} \tag{416}$$

其中 $\Gamma=\Gamma_1\in\mathbb{C}l_1$ 如（419）中所定义。

证明思路。（412）中的可逆双模给出了（415）中的垂直同构。（415）中的上方同构是双模 ${}^\tau\mathsf{Fer}^\pm_\ell$ 上的纤维上的迹。它由克利福德代数上的迹决定，并由可逆双模（412）的特征加以修正。由于每个因子 $\Lambda^\bullet\mathbb{C}_{\ell,m}$ 的特征都是 $1-e^{2\pi i\tau m/\ell}$，总特征便是所述的无穷乘积。$\ell^{1/2}$ 这一因子源于（41）中的零模是与 ℓ 乘以标准度量相关联的克利福德代数；参见描述（41）。这个克利福德代数与 $\mathbb{C}l^{\mp 1}$ 同构，但自然的克利福德超迹相差一个 $\ell^{1/2}$ 因子。事实上，根据 [BGV92，命题 3.2，1] 克利福德超迹由 $\Lambda^{\mathrm{top}}\mathbb{R}^n$ 的（度量）平凡化决定，而这会引入 $\ell^{1/2}$ 因子。□

Appendix D. The families index in KO-theory

D.1. **克利福德代数、自旋结构与狄拉克算子**。定义（复）克利福德代数

$$\mathbb{C}l_n := \begin{cases} \langle f_1,\dots f_n \mid [f_j,f_k]=-2\delta_{jk}\rangle & n\geq 0 \\ \langle e_1,\dots e_n \mid [e_j,e_k]=2\delta_{jk}\rangle & n<0 \end{cases} \tag{417}$$

其中，$\{e_1,\dots,e_n\}$ 或 $\{f_1,\dots,f_n\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$的标准基。这些克利福德代数具有显然的实结构，以及由下式确定的 $*$结构

$$f_j^\dagger=-f_j,\qquad e_j^\dagger=e_j. \tag{418}$$

定义 Γ_n 为 n^{th} 克利福德代数中的元素

$$\Gamma_n := \begin{cases} 2^{-n/2}f_1f_2\dots f_n & n\geq 0 \\ 2^{n/2}e_1e_2\dots e_n & n<0. \end{cases} \tag{419}$$

$\mathbb{C}l_{-n}$-线性端同态 T：$V\to V$的克利福德超迹为（见§B.2）

$$\mathsf{sTr}_{\mathbb{C}l_n}(T) := \mathsf{sTr}(\Gamma_n\circ T). \tag{420}$$

定义 D.1。秩为 n 的实定向度量向量丛$V\to M$ 上的自旋结构是一个Spin(n)主丛 $P_V\to M$，配备一个双重覆盖 $P_V\to$ Fr(V)，覆盖 V的定向标架丛，并且相对于Spin(n) →SO(n)具有等变性。

V 上的自旋结构构成一个范畴（可能为空），其态射是与到 V的标架丛的映射相容的主丛同构。黎曼流形族 π：$X\to M$ 上的自旋结构，是垂直切丛 $T(X/M)$ =ker($d\pi$) $\subset TM$ 上的自旋结构。我们将需要两类由自旋结构构造而来的克利福德模丛。下文中，对于度量向量丛 $V\to M$，丛Cl(V) $\to M$ 是逐纤维的克利福德代数丛。

De定义 D.2. 给定一个具有自旋结构 $V\to M$ 的向量丛，其欧拉丛 为

$$\mathbb{S}_V = P_V\times_{\mathrm{Spin}(n)}\mathrm{Cl}_{-n}, \tag{421}$$

它是由可逆的 Cl(V)-Cl$_{-n}$-双模构成的丛。因此，在 $\mathbb{S}_V$ 上可得到一个左 $\mathsf{Cl}_n=\mathsf{Cl}^{\mathsf{op}}_{-n}$-模结构，该结构与 Cl($V$)-作用分次交换。对于 π： $X\to M$ a

带有选定自旋结构的黎曼流形丛，定义在 $T(X/M)$ 上，其 旋量丛为

$$\mathbb{S}_{X/M} = P_{T(X/M)} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Cl}_n, \tag{422}$$

它是一个可逆 $\mathsf{Cl}(T(X/M))$-Cl_n 双模丛。右侧的 Cl_n 作用确定了一个左侧的 $\mathsf{Cl}_{-n} = \mathsf{Cl}_n^{\mathrm{op}}$ 作用，该作用与左侧的 $\mathsf{Cl}(T(X/M))$ 作用分次交换。这使得我们可以构造作用于 $\mathbb{S}_{X/M}$ 截面上的 Cl_{-n}-线性狄拉克算子。

D.2. **克利福德模与 KO理论**。 我们概述一个由 [Che07, §1.3-1.4] 和 [HST10, 定理 7.1], 提出的 KO 谱模型；另见 [BE23a, §4]。令 $\mathcal{H}_n$ 表示一个无限维的 $\mathbb{Z}/2$-分次可分希尔伯特空间，其上带有 Cl_n 的自伴作用，并且 Cl_n 的每个不可约表示都以无限重数出现在 $\mathcal{H}_n$ 中。令 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ 表示 $\mathcal{H}_n$ 上 Cl_n-线性有界算子的代数，并赋予范数拓扑。

定义 D.3. 令 $\mathcal{M}_n$ 为一个范畴，其对象是有限维 Cl_n-子模$W \subset \mathcal{H}_n$ ，其态射为

$$\mathrm{Mor}(W_0, W_1) := \begin{cases} \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1} - \text{action on } W_0^\perp \\ \text{extending the } \mathrm{Cl}_n\text{−action} & \text{if } W_0 \subseteq W_1 \subset \mathcal{H}_n \\ \\ \emptyset & \text{else} \end{cases} \tag{423}$$

其中 $W_0^\perp \subseteq W_1$ 表示子空间 $W_0 \subseteq W_1$的正交补。对于嵌套包含映射 $W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2$ 的复合，使用克利福德模的直和，在 $W_0 \subseteq W_2$的正交补上赋予 $\mathsf{Cl}_n \otimes \mathsf{Cl}_{-1}$-模结构。为此范畴中的对象和态射赋予嵌入所诱导的子空间拓扑

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{M}_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n), \qquad \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)^{\times 3} \tag{424}$$

其中，该映射将子模 $W_0 \subset \mathcal{H}_n$ 与一个有限秩投影算子相对应，而 $(W_0,\ W_1,\ e) \in \mathsf{Mor}(\mathcal{M}_n)$确定一对有限秩投影算子和一个有界算子。

定义 D.4. 拓扑范畴 $\mathcal{C}$ 的脉络 是一个单纯空间，其 k-单形为 $N_k\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ ，其中 $k = 0,\ 1$；对于 $k > 1$ ，则为长度为 k 的可复合态射链

$$\begin{aligned} N_k\mathcal{C} &= \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_k} x_k \mid x_i \in \mathcal{C}_0, f_i \in \mathcal{C}_1\} \\ &= \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \cdots \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1, \end{aligned}$$

拓扑化为纤维积。 $N_\bullet\mathcal{C}$ 中的面映射由复合态射确定，而退化映射由 $\mathcal{C}$中的单位映射确定。

单纯空间 $Z_\bullet$ 的几何实现为

$$|Z_\bullet| := (\coprod_n Z_n \times \Delta^n)/\sim \qquad (f^*x, t) \sim (x, f_*t) \quad \forall f\colon [l] \to [k] \tag{425}$$

其中 Δ^n 是标准的 n-单纯形， $f\colon [l] \to [k]$ 是保序映射。几何实现具有自然性：单纯空间的映射 $F\colon Z_\bullet \to Y_\bullet$ 确定了实现之间的映射， $|F|\colon |Z_\bullet| \to |Y_\bullet|$。

命题 D.5 ([Che07, §1.3-1.4], [HST10, 定理7.1], [BE23a, §4])。 分类空间 $\mathrm{B}\mathcal{M}_n$ 表示函子 $\mathrm{KO}^n(-)$。

给定一个拓扑空间 Z 及其开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，对于非空有限子集 $\sigma \subset I$，定义 $U_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} U_i$ 为其交集。

定义 D.6. 设 Z 为一个拓扑空间，$\{U_i\}_{i\in I}$ 为一个开覆盖，*Čech* 范畴记作 $\check{\mathsf{C}}(U_i)$，它是一个拓扑范畴，其对象为 $\check{\mathsf{C}}(U_i)_0 = \coprod_\sigma U_\sigma$，态射空间为 $\check{\mathsf{C}}(U_i)_1 = \coprod_{\sigma\subseteq\tau} U_\tau$。源映射和目标映射由投影和包含映射 $U_\tau \subseteq U_\sigma$确定，单位由恒等映射 $U_\sigma \to U_\sigma$诱导，复合则来自嵌套的包含映射。

引理 D.7 ([Seg68，命题 4.12], [DI04，定理 2.1])。对于 Z 拓扑空间和 $\{U_i\}_{i\in I}$ 开覆盖，典范映射

$$\mathrm{B}\check{C}(U_i) \xrightarrow{\sim} Z, \tag{426}$$

是同伦等价。

推论 D.8。对于 Z 拓扑空间和 $\{U_i\}_{i\in I}$ 开覆盖，连续函子

$$\check{\mathrm{C}}(U_i) \to \mathcal{M}_n \tag{427}$$

确定一个映射 $Z \to B\mathcal{M}_n \simeq \mathsf{KO}^n$，其值位于 KO谱的第 n 个空间中。

证明。这可由命题 D.5 和引理 D.7 得出。 □

D.3. **超联络与族指标丛**。

定义 D.9. 设 $\mathcal{E} \to M$ 是一个实向量丛，带有逐纤维的 Cl_n-作用。$\mathcal{E}$ 上的*Clifford* 线性超联络 $\mathbb{A}$ 是一个奇的、Cl_n-线性的 Fr´echet 空间映射，并满足莱布尼茨法则

$$\mathbb{A}\colon \Omega^\bullet(M;\mathcal{E}) \to \Omega^\bullet(M;\mathcal{E}), \quad \mathbb{A}(\alpha\cdot v) = d\alpha\cdot v + (-1)^{|\alpha|}\alpha\cdot \mathbb{A}v \tag{428}$$

其中 $v \in \Omega^\bullet(M;\,\mathcal{E})$ 且 $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$。

利用微分形式上的 $\mathbb{Z}$-分次，超联络可写为

$$\mathbb{A} = \sum \mathbb{A}^{[k]}, \qquad \mathbb{A}^{[k]}\colon \Omega^\bullet(M;\mathcal{E}) \to \Omega^{\bullet+k}(M;\mathcal{E}) \tag{429}$$

其中 $\mathbb{A}^{[1]} = \nabla$ 是 $\mathcal{E}$上的普通联络，而 $\mathbb{A}^{[2k]} \in \Omega^{2k}(M;\,\mathrm{End}(\mathcal{E})^{\mathrm{odd}})$、$\mathbb{A}^{[2k+1]} \in \Omega^{2k+1}(M;\,\mathrm{End}(\mathcal{E})^{\mathrm{ev}})$ 是取值于端同态的微分形式。

定义 D.10. 设 $\langle -,-\rangle\colon \mathcal{E}\otimes\mathcal{E} \to \mathbb{C}$ 是一个正定（超）厄米配对。那么，$\mathcal{E}$ 上的超联络 $\mathbb{A}$ 是自伴的，当且仅当

$$\langle \mathbb{A}^{[1]}x, y\rangle + (-1)^{|x||y|}\langle x, \mathbb{A}^{[1]}y\rangle = d\langle x,y\rangle, \qquad (\mathbb{A}^{[k]})^* = i^{k+1}\overline{\mathbb{A}}^{[k]}, \qquad k\neq 1, \tag{430}$$

其中 $(\mathbb{A}^{[k]})^*$ 表示 $\mathbb{A}^{[k]}$ 的超伴随。

注 D.11. 按照式 (367) 将超伴随转换为普通伴随后，上述内容等价于自伴超联络的标准定义 [BGV92，第 117], 页，即普通联络 $\mathbb{A}^{[1]} = \nabla$ 的通常度量保持条件，以及

$$(\mathbb{A}^{[k]})^\dagger = \begin{cases} \mathbb{A}^{[k]} & k = 1 \mod 4 \\ -\mathbb{A}^{[k]} & k = 1 \mod 4 \\ -\mathbb{A}^{[k]} & k = 2 \mod 4 \\ \mathbb{A}^{[k]} & k = 0 \mod 4 \end{cases} \qquad k\neq 1$$

wh其中 $(\mathbb{A}^{[k]})^\dagger$ 表示相对于普通厄米内积的非分次伴随 .

对于超联络 $\mathbb{A}$，定义

$$\mathbb{A}(u) := u^{-1/2}\mathbb{A}^{[0]} + \mathbb{A}^{[1]} + u^{1/2}\mathbb{A}^{[2]} + \cdots + u^{j/2}\mathbb{A}^{[j]} + \ldots$$

对于一个次数为 $+1$ 的形式参数 $u^{-1/2}$。

定义 D.12。 Cl_n-线性超联络的陈形式 是 Clifford 超迹（对于无限秩丛，它未必存在）

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) := \mathsf{sTr}_{\mathbb{Cl}_n}(u^{-n/2}e^{-u\mathbb{A}(u)^2}) = \mathsf{sTr}(\Gamma_n u^{-n/2}e^{-u\mathbb{A}(u)^2}) \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{C}[u^{\pm 2}])) \tag{431}$$

对于式 (420) 中定义的克利福德超迹。

u 在 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 中不存在分数次幂，这一事实源于奇端同态的超迹为零。自伴超联络的陈形式只含有 u 的偶次幂。以下是一个标准的代数论证，例如 [BGV92, §1.5]。

引理 D.13. 若存在，Cl_n-线性超联络 $\mathbb{A}$ 的陈形式是闭的，且总次数为 n。

给定一个自伴的、Cl_n-线性超联络 $\mathbb{A}$，定义在 Fr´echet 向量丛 $\mathcal{E}\to M$ 上，令 $\mathcal{H}_m$ 表示 $\mathcal{E}$ 在 $m\in M$ 处纤维的希尔伯特空间完备化。按如下方式定义 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$ 的子集 $U_\lambda\subset M$。若 λ 不是作用在 $\mathcal{H}_m$ 上的（非负）算子 $(\mathbb{A}^{[0]})^2_m$ 的特征值，则点 $m\in M$ 属于 U_λ：

$$U_\lambda =: \{m\in M \mid \lambda\notin \mathrm{Spec}((\mathbb{A}^{[0]})^2_m)\}\subset M. \tag{432}$$

在每个子集 $U_\lambda\subset M$ 上，将子集 $\mathcal{H}^{<\lambda}\subset\coprod_{m\in U_\lambda}\mathcal{H}_m$ 定义为 ν 特征值为 $\nu<\lambda$ 的特征空间 $\mathcal{H}^\nu_m$ 的直和，其中这些特征空间对应于 $(\mathbb{A}^{[0]})^2_m$

$$\mathcal{H}^{<\lambda}_m := \bigoplus_{\nu<\lambda}\mathcal{H}^\nu_m\subset\mathcal{H}_m. \tag{433}$$

令 m 变化， $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 表示 $\coprod_{m\in U_\lambda}\mathcal{H}_m$ 的 Cl_n-不变子集，其纤维为 $\mathcal{H}^{<\lambda}_m$。定义 U_λ 上的集合映射

$$p^\lambda\colon \coprod_{m\in U_\lambda}\mathcal{H}_m\to\mathcal{H}^{<\lambda},\qquad i_\lambda\colon\mathcal{H}^{<\lambda}\to\coprod_{m\in U_\lambda}\mathcal{H}_m \tag{434}$$

其中 p^λ 是纤维正交投影，而 i_λ 是纤维包含映射。

定义 D.14. 设 $\mathbb{A}$ 是一个自伴 Cl_n-线性超联络，且其微分形式值陈特征 (431) 有定义。若满足以下性质，则 $\mathbb{A}$ 具有光滑指标丛:

(1) 在 (432) 中定义的子集族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}$ 构成 M 的光滑开覆盖；(2) 子集 $\mathcal{H}^{<\lambda}\subset\mathcal{E}|_{U_\lambda}\to U_\lambda$ 是光滑向量子丛；(3) 复合定义了一个光滑联络:

$$\nabla^{<\lambda} := p^\lambda\circ\mathbb{A}^{[1]}|_{U_\lambda}\circ p^\lambda\colon\Gamma(\mathcal{H}^{<\lambda})\to\Omega^1(U_\lambda;\mathcal{H}^{<\lambda}),$$

(4) 陈–西蒙斯形式的极限

$$\eta_\lambda := \lim_{r\to\infty}\int_1^r \mathsf{sTr}_{\mathrm{Cl}_n}\Big(\frac{d\mathbb{A}_\lambda(s)}{ds}\exp(\mathbb{A}_\lambda(s))\Big)ds\in\Omega^\bullet(U_\lambda;C^\infty(\mathbb{R}_{>0})[u^{\pm1}]) \tag{435}$$

存在且满足

$$d\eta_\lambda = \mathrm{Ch}(\mathbb{A})|_{U_\lambda} - \mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda}) \tag{436}$$

其中在 (435) 中， $\mathbb{A}_\lambda(s)$ 是 $\mathcal{E}|_{U_\lambda}\oplus\Pi\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上超联络的单参数族,

$$\mathbb{A}_\lambda(s) = \mathbb{A}_\lambda(s)^{[0]} + \mathbb{A}^{[1]}\oplus\nabla^{<\lambda} + \sum_{i>1}s^{-i}\mathbb{A}^{[i]}\oplus 0_{\Pi\mathcal{H}^{<\lambda}},\quad \mathbb{A}_\lambda(s)^{[0]} = \begin{bmatrix}\mathbb{A}^{[0]} & s\cdot i_\lambda\\ s\cdot p^\lambda & 0\end{bmatrix} \tag{437}$$

其中 i_λ 和 p^λ 是映射 (434)。

注记 D.15. 条件 (1) 和 (2) 是为了得到取值于 $\mathrm{KO}^n(M)$ 中的 $\mathbb{A}$ 指标。条件 (3) 和 (4) 是为了将表示该指标丛的陈特征的切赫-德拉姆上循环与 $\mathbb{A}$ 的陈特征联系起来。我们还注意到，对于 $M = \mathrm{pt}$ 上丛的超联络，条件 (1)–(3) 自动满足；因此，此时的截断条件是积分 (437) 收敛，而这又要求特征值 $\mathbb{A}^{[0]}$ 增长得足够快。

命题 D.16. 任意有限秩自伴 Cl_n-线性超联络都存在光滑指标丛。适用于 Clifford 线性 Dirac 算子族的 Clifford 线性 Bismut 超联络也存在光滑指标丛。

证明。 对于 $\mathrm{Cl}_0 = \mathbb{R}$，有限秩情形见 [BGV92，第 9.7] 定理；对于 Bismut 超联络，这可由 [BGV92，命题 9.10 和定理 9.26]，得出；另见 [FL10，第 7.2] 节。将这些结果直接推广到 Clifford 线性超联络，见 [BE23a，第 8.2–8.3] 节。□

对于存在光滑指标丛的超联络，我们回顾 [BE23a，第 8.2–8.3] 节中的指标丛构造。

命题 D.17 ([BE23a，第 8.2] 节)。 假设一个 Cl_n-线性超联络存在光滑指标丛。那么，与离散子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$ 相关联的局部有限开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个选取，确定了一个连续函子，

$$\check{\mathrm{C}}(U_\lambda) \to \mathcal{M}_n \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})\colon M \to \mathrm{KO}^n, \tag{438}$$

其实现是一个映射，指向 KO 谱中的第 n 个空间。给定由开覆盖细化 $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}_{>0}$ 联系起来的选择，相关映射之间存在一个唯一确定的同伦 (438)。

证明。 Cl_n-模 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 对每个 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 都确定了 $\mathrm{KO}^n(U_\lambda)$ 中的类 $[\mathcal{H}^{<\lambda}] \in$ 。在交叠区域 $U_\lambda \bigcap U_\mu$ 上，对于 $\lambda < \mu$，存在典范嵌入

$$g_{\lambda\mu}\colon \mathcal{H}^{<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{H}^{<\mu} \tag{439}$$

并且，$g_{\lambda\mu}$ 的像的正交补带有一个 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-作用，该作用扩展了 Cl_n-作用，并由以下可逆奇端同态确定

$$e^{\lambda\mu}|_{\mathcal{H}_b^\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\mathbb{A}^{[0]}|_{\mathcal{H}_b^\nu}, \quad \mathcal{H}_b^\nu \subset (\mathcal{H}^{<\lambda})^\perp \subset \mathcal{H}^{<\mu} \tag{440}$$

它们定义了生成元 $e \in \mathrm{Cl}_{-1}$ 的作用。包含映射$g_{\lambda\mu}$ 和奇端同态 $e^{\lambda\mu}$ 在三重交上满足相容性。根据可分无限维希尔伯特空间正交群 [Kui65], 的可缩性，数据 (433)、(439) 和 (440) 在可缩选择意义下唯一确定了一个连续函子 (427)。因此，根据推论 D.8，我们得到一个映射，指向 KO 谱中的第 n 个空间 (438)。与 $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}_{>0}$ 相关的开覆盖细化确定了相关切赫范畴之间的一个连续函子；该函子经实现后是一个同伦等价。这给出了一对函子 (427)，而算子的限制 (440) 为这两个函子提供了一个自然同构。根据 Seg68，命题 2. 1], ，所得映射 $\mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})$， $\mathrm{Ind}_{\Lambda'}(\mathbb{A})$： $M \to \mathrm{KO}^{-n}$ 同伦。□

与（438）相关的类的庞特里亚金特征由局部数据 $\mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda})$ 确定，其在交叠区域上的相容性来自陈–西蒙斯形式；更准确地说，我们得到一个 Čech–de Rham 复形中的余循环，记作

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})) = [U_\lambda, \mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda}), \mathrm{CS}(\nabla^{<\lambda}, \nabla^{<\lambda'})] \in C^*(\{U_\lambda\}, \Omega^\bullet). \tag{441}$$

引理 D.18. 微分形式 (435) 见证了 (441) 与（全局定义的）余循环 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 之间的 Čech–de Rham 复形中的一个余边界。

*Pro*证明略。这可由 (436) 以及陈–西蒙斯形式的定义性质得出 ;
we 详情请参阅 [BE23a, §8.3]。□

References

[ABS64] M. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology 3 (1964)，第 suppl. 1 期，3–38。[AG83] L. Alvarez-Gaum´e, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem*, Communications in Mathematical Physics 90 (1983)，161–173。[AHR10] M. Ando、M. Hopkins 和 C. Rezk, *Multiplicative orientations of KO-theory and the spectrum of topological modular forms* 2010 ，草稿（）。[AHS01] M. Ando、M. Hopkins 和 N. Strickland, *Elliptic spectra the theorem of the cube and the* , , , 数学创刊 *Witten genus* **146** 2001 （）。[AS02] Orlando Alvarez 和 I.M. Singer, *Beyond the elliptic genus*, Nuclear Physics B 633 (2002)，第 3 期，309–344。[Ati71] M. Atiyah, *Riemann surfaces and spin structures*, 《法国高等师范学校科学年刊》，第 4 辑第 4 卷（1971）。[Ati85] , *Circular symmetry and stationary phase approximation*, 《纪念 L. Schwartz 会议论文集》, Ast´erisque 131 (1985)。[AW10] O. Alvarez 和 P. Windey, *Analytic index for a family of Dirac–Ramond operators*, 美国国家科学院院刊 107 (2010)，第 11 期，4845–4850。[Bat79] M. Batchelor, *The structure of supermanifolds*, 美国数学会会刊 253 (1979)。[BBES22] T. Barthel、D. Berwick-Evans 和 N. Stapleton, *Power operations in the Stolz–Teichner program* 2022 ，即将在《几何与拓扑》发表（）。[BE] D. Berwick-Evans, *Supersymmetric localization modularity and the Witten genus*，即将在《微分几何杂志》发表。[BE21] *Supersymmetric field theories and the elliptic index theorem with complex coefficients*, 《几何与拓扑》25 (2021)。[BE22] *Chern characters and supersymmetric field theories*，即将在《几何与拓扑》发表（2022）。[BE23a] *The families Clifford index and differential KO-theory*，预印本（2023）。[BE23b] *The families index for* 1|1*-dimensional euclidean field theories*，预印本（2023）。[BF86] J. Bismut 和 D. Freed, *The analysis of elliptic families II: Dirac operators eta invariants and the holonomy theorem of Witten* **107** 1986 , Commun. Math. Phys.（）。[BGV92] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, 施普林格, 1992。[Bis86] J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs* **83** 1986 , 数学创刊（）。[BN14] U. Bunke 和 N Naumann, *Secondary invariants for string bordism and topological modular forms* **138** 2014 , 《数学科学通报》（）。[Bun09] U. Bunke, *Index theory eta forms and deligne cohomology*, 《美国数学会回忆录》，美国数学会，2009。[Che07] P. Cheung, *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 博士论文，2007。[Che13] *Chiral differential operators: formal loop group actions and associated modules*, 预印本（2013）。[Cos11a] K. Costello, *A geometric construction of the Witten genus I*，国际数学家大会论文集（2011）。[Cos11b] *Renormalization and effective field theories*，美国数学会，2011。[Cos11c] Kevin Costello, *A geometric construction of the Witten genus II* http://arxiv.org/abs/1112.0816 , ArXiv 预印本, 2011 （）。[DEF+99] P. Deligne、P. Etingof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、J. Morgan、D. Morrison 和 E. Witten, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians Volume 1*，美国数学会，1999。[DH11] Christopher L. Douglas 和 Andr´e G. Henriques, *Topological modular forms and conformal nets* ，《量子场论与微扰弦理论的数学基础》，《纯粹数学研讨会论文集》，第 83 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011，第 341–354 页。[DI04] D. Dugger 和 D. Isaksen, *Topological hypercovers and* $\mathbb{A}^1$*-realizations*, Math. Z. 246 (2004)，第 4 期。[DK70] P. Donovan 和 M. Karoubi, *Graded brauer groups and K-theory with local coefficients*, 法国高等科学研究所数学出版物（1970），第 38 期。[DM99] P. Deligne 和 J. Morgan, *Notes on supermanifolds*, 《量子场与弦：数学家课程》，第 1 卷（P. Deligne、P. Etingof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、J. Morgan、D. Morrison 和 E. Witten 编），美国数学会，1999。

[FH22] D. Freed 和 M. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, 几何与拓扑 25 (2022)。[FHT11] D. Freed、J. Hopkins 和 C. Teleman, *Loop groups and twisted K-theory I*, J. Topol. 4 (2011), 第 4 期, 737–798。[FL10] D. Freed 和 J. Lott, *An index theorem in differential K-theory*, 《几何与拓扑》14 (2010)。[Fre87] D. Freed, *On determinant line bundles*, 《弦理论的数学方面》（1987）。[Fre99] *Five Lectures on Supersymmetry*, 美国数学会, 1999。[Fre12] *Lectures on twisted K-theory and orientifolds*, 维也纳 ESI 讲座（2012）。[Fre14] *Short-range entanglement and invertible field theories*, 预印本（2014）。[FT14] D. Freed 和 C. Teleman, *Relative quantum field theory*, Comm. Math. Phys. 326 (2014)。[GJF18] D. Gaiotto 和 T. Johnson-Freyd, *Holomorphic SCFTs with small index*, 预印本（2018）。[GJF19] *Mock modularity and a secondary elliptic genus*, 预印本（2019）。[GJFW21] D. Gaiotto、T. Johnson-Freyd 和 E. Witten, *A note on some minimally supersymmetric models in two dimensions*, 《可积性、量子化与几何 II。量子理论与代数几何：纪念 Boris Dubrovin》, 美国数学会 103 (2021)。[GMS04] V. Gorbounov、F. Malikov 和 V. Schechtman, *Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids* **155** 2004 [GP20] D. Grady 和 D. Pavlov, *Extended field theories are local and have classifying spaces*, 预印本（2020）。[GPPV21] S. Gukov、D. Pei、P. Putrov 和 C. Vafa, *4-manifolds and topological modular forms*, 《高能物理学杂志》2021 (2021), 第 84 期。[Ham82] R. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, 《美国数学会通报》（新系列）7 (1982), 第 1 期, 65–222。[Hen15] A. Henriques, *Examples of Stolz–Teichner cocycles* `http://andreghenriques.com/PDF/OW-report-STcocycles.pdf` 2015 [HK04] P. Hu 和 I. Kriz, *Conformal field theory and elliptic cohomology* **189** 2004 2, , Adv. Math. (), 325–412, 第 – 期。[HKST11] H. Hohnhold、M. Kreck、S. Stolz 和 P. Teichner, *Differential forms and 0-dimensional super symmetric field theories* **2** 2011 , Quantum Topol ()。[HL16] M. Hill 和 T. Lawson, *Topological modular forms with level structure*, 数学创刊 203 (2016)。[Hop94] M. Hopkins, *Topological modular forms the Witten genus and the theorem of the cube*, 国际数学家大会论文集 1 (1994)。[Hop02] *Algebraic topology and modular forms*, 国际数学家大会论文集 1 (2002)。[HST10] H. Hohnhold、S. Stolz 和 P. Teichner, *From minimal geodesics to super symmetric field theories* **50** 2010 , CRM 会议论文集与讲义 ()。[JF20] T. Johnson-Freyd, *Topological Mathieu moonshine*, 预印本（2020）。[JP90] J. Jones 和 S. Petrack, *The fixed point theorem in equivariant cohomology*, 美国数学会会刊 322 (1990)。[Kah11] A. Kahle, *Superconnections and index theory*, 《几何与物理杂志》61 (2011), 1601–1624。[Kar68] M. Karoubi, *Algébres de Clifford et K-théorie*, 《法国高等师范学校科学年刊》1 (1968)。[Kit14] N. Kitchloo, *Quantization of the modular functor and equivariant elliptic cohomology*, Arxiv 预印本（2014）。[Kui65] N. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965)。[Lau99] G. Laures, *The topological q-expansion principle*, Topology 38 (1999)。[Lin22] Y.-H. Lin, *Topological modularity of monstrous moonshine*, 预印本（2022）。[Liu96] K. Liu, *Modular forms and topology*, 《怪兽群及相关主题美国数学会会议论文集》, Contemporary Math.（1996）。[LP22] Y-H Lin 和 D. Pei, *Holomorphic CFTs and topological modular forms*, 预印本（2022）。[LR20] M. Ludewig 和 S. Roos, *The chiral anomaly of the free fermion in functorial field theory*, 《亨利·庞加莱年刊》21 (2020)。[Lur09] J. Lurie, *A survey of elliptic cohomology*, 《代数拓扑》（N. Baas、E. Friedlander、J. Bj¨orn 和 P. Ostær 编）, Abel 研讨会，第 4 卷，Springer Berlin Heidelberg，2009（英文）。[Mac87] K. Mackenzie, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, 剑桥大学出版社，1987。[MF06] N. Martins-Ferreira, *Pseudo-categories*, J. Homotopy Relat. Struct. 1 (2006)。[Mil89] H. Miller, *The elliptic character and the Witten genus*, 《代数拓扑》（伊利诺伊州埃文斯顿，1988）, Contemp. Math., 第 96 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989，第 281–289 页。

[MS67] H.P. McKean 和 I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, 《微分几何杂志》1（1967）。[Qui85] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, 《泛函分析及其应用》19（1985）。[Sch71] H.H. Schaefer, *Topological vector spaces*, 施普林格，1971 年。[Seg68] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publications Math´ematiques de l'IH´ES 34（1968）。[Seg88], *Elliptic cohomology*, 《S´eminaire N. Bourbaki》695（1988）。[Seg04], *The definition of conformal field theory*, 《拓扑、几何与量子场论》，伦敦数学学会讲义丛书，第 308 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 421–577 页。[ST04] S. Stolz 和 P. Teichner, *What is an elliptic object?*, 《拓扑、几何与量子场论》，伦敦数学学会讲义丛书 308，剑桥大学出版社（2004），第 247–343 页。[ST11], *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 《量子场论与微扰弦理论的数学基础》（B. Jurˇco、H. Sati、U. Schreiber 编），纯数学研讨会论文集，2011 年。[ST12], *Traces in monoidal categories*, 《美国数学会汇刊》364（2012），第 8 期。[Sto19] A. Stoffel, *Supersymmetric field theories from twisted vector bundles*, 《Communications in Mathematical Physics》367（2019）。[Tac21] Y. Tachikawa, *Topological modular forms and the absence of a heterotic global anomaly*, 预印本（2021）。[Ten17] J. Tener, *Construction of the unitary free fermion Segal CFT*, 《Communications in Mathematical Physics》355（2017）。[Thu97] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. vol. 1.*, 普林斯顿大学出版社，1997 年。[TY21] Y. Tachikawa 和 M. Yamashita, *Topological modular forms and the absence of all heterotic global anomalies* 2021 ，预印本（）。[Wal13] K. Waldorf, *String connections and Chern–Simons theory*, 《美国数学会汇刊》365（2013），第 8 期。[Was98] A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory. III. Fusion of positive energy representations of LSU N using bounded operators* **133** 1998 Invent. Math.》（）。[Wit82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, 《微分几何杂志》17（1982），661–692。[Wit86], *Physics and geometry*, 《国际数学家大会论文集》（1986）。[Wit87], *Elliptic genera and quantum field theory*, 《Communications in Mathematical Physics》109（1987），525–536。[Wit88a], *The index of the Dirac operator in loop space*, 《代数拓扑中的椭圆曲线与模形式》（P. Landweber 编），Springer Berlin Heidelberg，1988 年。[Wit88b], *Topological sigma models*, 《Communications in Mathematical Physics》118（1988）。[Wit99], *Index of Dirac operators*, 《量子场与弦：数学家课程》，第 1 卷（1999）。[Zag86] D. Zagier, *Note on the Landweber-Stong elliptic genus*, 《代数拓扑中的椭圆曲线与模形式》（1986）。[Zag08], *Elliptic modular forms and their applications*, 《模形式入门》（K. Ranes-tad 编），施普林格，2008 年。