arXiv:2303.09157v1 [math.MG] 16 Mar 2023

度量测度空间中的 ALBERTI 秩一定理与拟共形映射

PANU LAHTI

Abstract. 我们研究 Ahlfors 正则度量空间中的 Alberti 秩一定理的一种形式，以及它与拟共形映射之间的联系。更具体地说，我们给出秩一定理的一个证明，其中部分步骤沿用常见方法，但最关键的一步是证明，对于 $f \in$ 有界变差$(X;Y)$，几乎处处的 $\|Df\|^s$ $x \in X$，映射 f “表现为非拟共形”。

1. Introduction

Alberti 秩一定理 [1] 指出，对于有界变差函数 f $\in$有界变差$(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^k)$，若 n，$k \in \mathbb{N}$，$\frac{dDf}{d|Df|}(x)$，则其秩在 $|D^s f|$几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$为一。其他证明和推广见 [4, 5, 21]。众所周知，证明秩一定理可归结为函数 $f \in$ 有界变差$(\mathbb{R}^2;\ \mathbb{R}^2)$的情形；注意，一个非零 2×2矩阵秩为一，等价于它不具有满秩。

拟共形映射定义为同胚 $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$，$n \geq 2$，满足 $|\nabla f(x)| \leq K|\det \nabla f(x)|$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，且其中常数为 $K < \infty$。特别地，∇f 几乎处处满秩。因此，直观而言，秩一定理指出，在 $|D^s f|$-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，f 的表现方式“非拟共形”。拟共形映射也可以定义在两个度量空间 (X, d) 与 (Y, d_Y) 之间。对于映射 $f\colon X \to Y$，对每个$x \in X$ 和 $r > 0$，定义

$$L_f(x,r) := \sup\{d_Y(f(y), f(x))\colon d(y,x) \leq r\}$$

and

$$l_f(x,r) := \inf\{d_Y(f(y), f(x))\colon d(y,x) \geq r\},$$

and

$$H_f(x,r) := \frac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)};$$

我们将其解释为 ∞ 当分母为零时。然后定义

$$h_f(x) := \liminf_{r \to 0} H_f(x,r).$$

Date: 2023年3月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 30L99, 30L10, 26B30。
Key words and phrases. Alberti 秩一定理、有界变差函数、拟共形映射、Ahlfors 正则度量测度空间。

同胚 $f\colon\ X \to Y$ 称为（度量）拟共形，如果存在一个数$1 \le H < \infty$ 使得 $h_f(x) \le H$ 对所有 $x \in X$均成立。在欧几里得空间和足够规则的度量测度空间中，这等价于前面提到的“解析”定义，参见例如 [11,定理 9。8]。

这一切引出了一个问题：能否明确表述拟共形映射与 Alberti 秩一定理之间的联系？后者是否存在一种适用于度量测度空间的表述？本文将证明秩一定理，证明过程部分遵循通常的步骤，但最关键的一步将在非常一般的度量测度空间中借助拟共形性这一概念加以证明。为此，对于映射 $f\colon X \to Y$，我们将 h_f 的一个变体定义为

$$h'_f(x) := \liminf_{r\to 0,\, d(y,x)<r} \frac{L_f(y,5r)}{l_f(y,r)}, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

给定有界变差函数 $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$，对于 $\frac{dDf}{d|Df|}$ 关于 $|Df|$ 的每个勒贝格点 x，在 x 的一个小邻域内，$\frac{dDf}{d|Df|}$ 都接近一个常数。直观而言，正因如此，只需考虑以下类型的 f。设 C_1, C_2 为满足 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 和 $-C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 的闭锥，并假设 f'_1, $f'_2 \in \in \mathrm{BV}(\Omega)$，且对于 $|Df'_1|$-几乎处处的 $x \in \in \Omega$，有 $\frac{dDf'_1}{d|Df'_1|}(x) \in C_1$，同时对于 $|Df'_2|$-几乎处处的 $x \in \in \Omega$，有 $\frac{dDf'_2}{d|Df'_2|}(x) \in C_2$。令 $f_1(y) := f'_1(y) + v_1 \cdot y$，$f_2(y) := f'_2(y) + v_2 \cdot y$，以及 $f = (f_1, f_2)$。将 f^* 记为 f 的所谓精确代表；相关定义将在第 2 节给出。

定理 1.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开且凸，并假设 $f \in \mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ 如上所述。那么 f^* 是单射，并且对于 $|Df|$-几乎处处的 $x \in \Omega$，若 $h'_{f^*}(x) = \infty$，则 $\frac{dDf}{d|Df|}(x)$ 的秩为一。

该定理表明，若 f 在某一点处是“非拟共形的”，那么 $\frac{dDf}{d|Df|}(x)$ 的秩为一。因此，问题归结为证明这种“非拟共形”行为。事实证明，在非常一般的度量测度空间中都可以证明这一点。

定理 1.3. 设 (X, d, μ) 和 (Y, d_Y, ν) 是 Ahlfors Q-正则空间，且满足 $1 < Q < \infty$，并且 X 是局部紧的。设 $\Omega \subset X$ 为开集，并假设 $f \in \mathrm{BV}(\Omega; Y)$ 有界且为单射。那么对于 $\|Df\|^s$-几乎处处的 $x \in \Omega$，有 $h'_f(x) = \infty$。

该定理表明，秩一定理的核心在度量测度空间中同样得以体现。我们尚不清楚这里是否需要单射性假设。

结合这两个定理与众所周知的约化，我们得到秩一定理。

推论 1.4. 设 $f \in$ 有界变差$(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$，且 $n, k \in \mathbb{N}$。那么 $\frac{dDf}{d|Df|}(x)$ 对$|D^s f|$-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都具有秩一。

拟共形映射具有 $W^{1,\,n}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$-正则性；定理 1.3 体现了拟共形映射理论中大量文献的思想，其核心观点是

h_f 足够小意味着 f 至少具有某种索博列夫正则性。参见 Gehring [8, 9], Balogh–Koskela–Rogovin [3], Fang [7], Kallunki–Koskela [13], Kallunki–Martio [14], Margulis–Mostow [19], 和 Williams [23]。正如我们将在论文末尾更详细地讨论的那样，从启发式角度看，秩一定理由此成为拟共形理论的一个特例。

2. Notation and definitions

本节介绍本文中使用的记号、定义和假设。

全文中，我们考虑两个可分度量测度空间 (X, d, μ) 和 (Y, d_Y, ν)，其中 μ 和 ν 是博雷尔正则外测度。我们还假设 X 是局部紧的，并假设 X 和 Y 都至少包含 2 个点，也就是说，$\operatorname{diam} X > 0$ 和 $\operatorname{diam} Y > 0$。在第 3 节中，我们将使用配备欧几里得距离和勒贝格测度 $\mathcal{L}^2$的 $X = Y = \mathbb{R}^2$。对于 $x \in X$ 和 $r > 0$，开球定义为 $B(x, r) := \{y \in X : d(y, x) < r\}$，闭球定义为 $\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(y, x) \le r\}$。我们通常使用开球。我们假设两个空间中的每个球都具有非零且有限的测度。对于球 $B = B(x, r)$，有时记作 $2B := B(x, 2r)$。请注意，在度量空间中，一个球（作为集合）可能没有唯一的中心和半径；但使用这一简写时，我们所讨论的球都已指定中心和半径。若某个性质在一个零 μ-测度集之外成立，则称该性质 μ-几乎处处成立。

给定 $1 < Q < \infty$，若存在常数$1 \le C_A < \infty$ 使得 (X, d, μ) 是阿尔福斯 Q-正则的，

$$C_A^{-1} r^Q \le \mu(B(x, r)) \le C_A r^Q$$

对所有 $x \in X$ 以及满足 $\operatorname{diam} X$ 的 $0 < r < 2$,

从紧区间到 X 的连续映射若具有有限长度，则称为可求长曲线。可求长曲线 γ 总是存在弧长参数化，因此得到曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to X$（证明见例如 [10, 定理 3.2]）。我们只考虑可求长且按弧长参数化的曲线。若 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to X$ 是一条曲线，且 $g\colon X \to [0, \infty]$ 是博雷尔函数，则我们定义

$$\int_\gamma g \, ds := \int_0^{\ell_\gamma} g(\gamma(s)) \, ds.$$

设 $\Omega \subset X$ 是开集。若映射 $f\colon \Omega \to Y$ 满足：对每个开集 $W \subset Y$，$f^{-1}(W)$ 都是一个μ-可测集，则称其为 μ-可测的。由库拉托夫斯基嵌入定理（见例如 [12, 第 100], 页），度量空间 Y 可以等距嵌入到巴拿赫空间 $(V, \|\cdot\|_V)$ 中。我们固定这样一个嵌入。若 f 是 μ-可测的，且 $\|f(\cdot)\|_V \in L^1(\Omega)$，则称 $f \in L^1(\Omega; Y)$。

为定义有界变差映射类，我们考虑 Martio[20] 的以下定义。给定曲线族 Γ，若一列非负博雷尔函数

$\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ 对 Γ 是 AM-可容许的，当且仅当

$$\liminf_{i\to\infty}\int_{\gamma}\rho_i\,ds\geq 1\quad\text{for all }\gamma\in\Gamma.$$

于是我们令

$$\operatorname{AM}(\Gamma):=\inf\left\{\liminf_{i\to\infty}\int_X\rho_i\,d\mu\right\},$$

其中下确界取遍所有 AM-可容许序列 $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$。

定义 2.1. 设 $\Omega\subset X$ 为开集。给定映射 $f\colon\Omega\to Y$，若存在一个非负函数序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$，它在 $L^1(\Omega)$ 中有界，且对于 AM-几乎处处的曲线 $\gamma\colon[0,\ell_\gamma]\to\Omega$，满足

$$d_Y(f(\gamma(t_1)),f(\gamma(t_2)))\leq\liminf_{i\to\infty}\int_{\gamma|_{[t_1,t_2]}}g_i\,ds$$

对于几乎处处的 $t_1,t_2\in[0,\ell_\gamma]$，其中 $t_1<t_2$。我们还定义全变差

$$\|Df\|(\Omega):=\inf\left\{\liminf_{i\to\infty}\int_\Omega g_i\,d\mu\right\},$$

其中下确界取遍上述序列 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$。若还有 $f\in L^1(\Omega;Y)$，则称 $f\in$ 属于 $\operatorname{BV}(\Omega;Y)$。

对于任意集合 $A\subset X$，我们定义

$$\|Df\|(A):=\inf\{\|Df\|(W)\colon A\subset W,\,W\subset X\text{ is open}\}.$$

若 $f\colon\Omega\to Y$ 且 $\|Df\|(\Omega)<\infty$，则 $\|Df\|$ 是 Ω 上的博雷尔正则外测度，参见 [20,定理 4.1]。在 [20], 中，研究的是实值函数，而非 Y 值映射，但证明几乎可以原样适用。另见 [22, 定理 3.4]，其中证明了巴拿赫空间值有界变差映射的测度性质，但全变差的定义略有不同。当 (X,d,μ) 是 Ahlfors Q正则空间时，$f\in\operatorname{BV}(\Omega;Y)$ 的变差测度可相对于 μ 分解为绝对连续部分和奇异部分，即 $\|Df\|=\|Df\|^a+\|Df\|^s$；例如参见 [12, 第 82] 页。

接下来，我们讨论欧几里得理论。我们主要遵循 Ambrosio– Fusco–Pallara 的专著 [2]。n维勒贝格测度记为 $\mathcal{L}^n$，其中 $n\geq 1$。s维豪斯多夫内容记为 $\mathcal{H}^s_R$, $0<R\leq\infty$，相应的豪斯多夫测度记为 $\mathcal{H}^s$。对于向量 $v\in\mathbb{R}^n$和矩阵 $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$，我们始终采用欧几里得范数 $|\cdot|$。$x,y\in\mathbb{R}^n$ 的内积记为 $x\cdot y$。

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，我们用 $C_c(\Omega;\mathbb{R}^l)$ 表示 Ω 中具有紧支集的连续 $\mathbb{R}^l$-值函数空间，$l\in\mathbb{N}$。我们用 $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^l)$ 表示有限向量值拉东测度的巴拿赫空间。这里的“有限”是指 $\nu\in\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^l)$ 的全变差 $|\nu|(\Omega)$ 有限。我们用 $\mathcal{M}^+(\Omega)$ 表示正拉东测度集。对于向量值拉东测度 $\nu\in\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^l)$ 和正拉东测度 $\mu\in\mathcal{M}^+(\Omega)$，我们可以写出 ν 关于 $\nu=\nu^a+\nu^s=\frac{d\nu}{d\mu}\mu+\nu^s$ 的拉东-尼科迪姆分解

μ，其中 $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\Omega\ \mu;\ \mathbb{R}^l)$。对于 $\nu_j, \nu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^l)$，在 Ω 中弱*收敛 $\nu_j \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ 意味着

$$\int_\Omega \phi \cdot \frac{d\nu_j}{d|\nu_j|}\, d|\nu_j| \to \int_\Omega \phi \cdot \frac{d\nu}{d|\nu|}\, d|\nu|$$

对于所有 $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}^l)$。

以下 BV 函数理论摘自 [2, 第 3] 节。设 $k \in \mathbb{N}$，并设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$为开集。函数 $f \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^k)$ 是有界变差函数，记作$f \in \mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R}^k)$，若其弱导数是一个 $\mathbb{R}^{k\times n}$取值的拉东测度，且其全变差有限。这意味着存在唯一的 $Df \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^{k\times n})$，使得对于所有$\varphi \in C_c^1(\Omega)$，分部积分公式

$$\int_\Omega f_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_l}\, d\mathcal{L}^n = -\int_\Omega \varphi\, d(Df_j)_l, \quad j = 1,\dots,k,\ l = 1,\dots,n,$$

成立。如果我们事先不知道函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^k)$ 是否为 BV 函数，那么我们考虑

$$\mathrm{Var}(f,\Omega) := \sup\left\{ \sum_{j=1}^k \int_\Omega f_j \,\mathrm{div}\,\varphi_j\, d\mathcal{L}^n,\ \varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^{k\times n}),\ |\varphi| \le 1 \right\}. \tag{2.2}$$

若 $\mathrm{Var}(f,\Omega) < \infty$，则根据里斯表示定理，拉东测度 Df存在，且 $\mathrm{Var}(f,\Omega) = |Df|(\Omega)$，并且在 $f \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^k)$ 的条件下，$f \in \mathrm{BV}(\Omega;\ \mathbb{R}^k)$。在 $k = 1$ 的情况下，我们记 $\mathrm{BV}(\Omega) = \mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R})$。

我们现在已经定义了两种版本的全变差。下面的命题表明，它们在欧几里得空间中是可比较的。

命题 2.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，并设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^k)$，其中 $k \in \mathbb{N}$。 n

$$C^{-1}\|Df\|(\Omega) \le \mathrm{Var}(f,\Omega) \le C\|Df\|(\Omega)$$

其中常数 $1 \le C < \infty$ 仅取决于 n, k。

证明。记 $f = (f_1,\dots,f_k)$，则对所有 $j = 1,\dots,k$，显然有

$$\mathrm{Var}(f_j,\Omega) \le \mathrm{Var}(f,\Omega) \le \mathrm{Var}(f_1,\Omega) + \dots + \mathrm{Var}(f_k,\Omega).$$

对于 $\|Df\|(\Omega)$，类似性质也很容易证明。因此，只需考虑 $k = 1$ 的情形。利用 Durand-Cartagena–Eriksson-Bique– Korte–Shanmugalingam 的定理 3.10 [6] ，并将 [6, 命题 3.3]，的证明局部化，我们便得到 $\|Df\|(\Omega)$ 与 Miranda 在定义 3.1] 中给出的全变差定义 [22, 的可比性。另一方面，正如 [22, 命题 1.1] 中所指出的，后者与 $\mathrm{Var}(f,\Omega)$ 一致。□

我们将集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的示性函数记为 $\chi_E\colon\ \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$。如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且 $\mathrm{Var}(\chi_E, \mathbb{R}^n) < \infty$，则称 E 为有限周长集。对于有限周长集 $E \subset \mathbb{R}^2$，我们有平面上的如下相对等周不等式： $x \in \mathbb{R}^2$,

并且 $r>0$，我们有

$$\min\{\mathcal{L}^2(B(x,r)\cap E),\mathcal{L}^2(B(x,r)\setminus E)\}\le r|D\chi_E|(B(x,r)). \tag{2.4}$$

余面积公式指出，对于开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 以及函数 $u\in \mathrm{BV}(\Omega)$，有

$$|Du|(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}|D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\,dt. \tag{2.5}$$

这里我们简记 $\{u>t\}:=\{x\in\Omega:\ u(x)>t\}$。

给定一个具有非零且有限勒贝格测度的 $\mathcal{L}^n$-可测集 $D\subset\mathbb{R}^n$，以及函数 $f\in L^1(D)$，记

$$f_D:=\fint_D f\,d\mathcal{L}^n:=\frac{1}{\mathcal{L}^n(D)}\int_D f\,d\mathcal{L}^n.$$

设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。我们常考虑一种特定的逐点代表，即精确代表

$$f^*(x):=\inf\left\{t\in\mathbb{R}:\ \lim_{r\to0}\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap\{f>t\})}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}=0\right\},\quad x\in\Omega. \tag{2.6}$$

对于 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^k)$，我们还定义 $f^*:=(f_1^*,\dots,f_k^*)$。若 $x\in\Omega$ 是 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^k)$ 的勒贝格点，则称

$$\lim_{r\to0}\fint_{B(x,r)}|f(y)-\widetilde{f}(x)|\,d\mathcal{L}^n(y)=0$$

对某个 $\widetilde{f}(x)\in\mathbb{R}^k$ 成立。我们用 $S_f\subset\Omega$ 表示这一条件不成立的点集，并称其为近似不连续集。给定一个单位向量 $\nu\in\mathbb{R}^n$、$x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$，定义半球

$$B_\nu^+(x,r):=\{y\in B(x,r):\,(y-x)\cdot\nu>0\},$$
$$B_\nu^-(x,r):=\{y\in B(x,r):\,(y-x)\cdot\nu<0\}.$$

我们称 $x\in\Omega$ 是 f 的近似跳跃点，如果存在一个单位向量 $\nu\in\mathbb{R}^n$ 和不同的向量 $f^+(x)$ $f^-(x)\in\mathbb{R}^k$，使得

$$\lim_{r\to0}\fint_{B_\nu^+(x,r)}|f(y)-f^+(x)|\,d\mathcal{L}^n(y)=0$$

and

$$\lim_{r\to0}\fint_{B_\nu^-(x,r)}|f(y)-f^-(x)|\,d\mathcal{L}^n(y)=0.$$

所有近似跳跃点组成的集合记为 J_f。对于 $f\in\mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R}^k)$，我们有$\mathcal{H}^{n-1}(S_f\setminus J_f)=0$，参见 [2, 定理 3。78]。

我们将 $f\in\mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R}^k)$ 的变差测度相对于 $\mathcal{L}^n$ 的拉东-尼科迪姆分解为绝对连续部分和奇异部分，记作 $Df=D^af+D^sf$。

此外，我们将 Df 的康托尔部分和跳跃部分定义为

$$D^c f := D^s f \llcorner (\Omega \setminus S_f), \qquad D^j f := D^s f \llcorner J_f;$$

here

$$D^s f \llcorner J_f(A) := D^s f(J_f \cap A), \quad \text{for } D^s f\text{-measurable } A \subset \Omega.$$

由于 $\mathcal{H}^{n-1}(S_f \setminus J_f) = 0$ 且 $|Df|$ 在 $\mathcal{H}^{n-1}$-零测集上消失，因此我们得到分解（见 [2, 第 3 节。9]）

$$Df = D^a f + D^c f + D^j f.$$

对于跳跃部分，存在一个单位向量 ν_f: $J_f \to \mathbb{R}^n$ 使得（注意，$(f^+ - f^-) \otimes \nu_f$是一个 $k \times n$-矩阵）

$$D^j f = (f^+ - f^-) \otimes \nu_f \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_f. \tag{2.7}$$

若有一个序列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R}^k)$，且 $f_i \to f$属于 $L^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$，并且 $|Df_i|(\Omega) \to |Df|(\Omega)$，则称 $f_i \to f$在 $\mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ 意义下严格收敛。

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的（Sobolev）1-容量定义为

$$\mathrm{Cap}_1(A) := \inf \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^n)},$$

其中，下确界取遍满足 $u \geq 1$ 在 A的某个邻域内成立的 Sobolev 函数 $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$。

给定 $v \in \mathbb{R}^2$、$|v| = 1$ 和 $0 < a \leq 1$，我们定义一个闭锥：

$$C(v, a) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x \cdot v \geq a|x|\}.$$

3. Proof of Theorem 1.2

在本节中，我们证明定理 1.2。

我们先给出一些预备结果。正如引言中所述，我们对秩一定理的证明部分遵循通常的步骤，尤其依赖于下面两个命题；这两个命题实质上将问题归结为单调函数f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$；参见 [4, 命题 1.3、命题 5.1]。

命题 3.1。秩一定理（推论 *1.4*）成立，当且仅当对于每个$f \in$有界变差$(B(0, 1); \mathbb{R}^2)$，$\frac{dDf}{d|Df|}(x)$对于 $|D^s f|$- 几乎处处 $x \in B(0, 1)$ 具有秩一。

命题 3.2。令 $v \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|v| = 1$ 和 $a > a' > 0$，设 $u \in$有界变差$(B(x, r)) \cap L^\infty(B(x, r))$ 对于球 $B(x, r) \subset \mathbb{R}^2$ 成立，并令

$$A := \left\{ y \in B(x, r) : \ \frac{dDu}{d|Du|}(y) \in C(v, a) \right\}.$$

那么存在 $w \in$有界变差$(B(x,r)) \cap L^\infty(B(x,r))$，使得 $|Du|\llcorner_A \ll |Dw|$属于 $B(x,r)$，并且

$$\frac{dDw}{d|Dw|}(y) \in C(v, a') \quad \textit{for } |Dw|\text{-a.e. } y \in B(x, r).$$

引理 3.3. 设 $A \subset \mathbb{R}^2$。则 $\mathcal{H}^1_\infty(A) \leq 10\mathrm{Cap}_1(A)$。

证明。我们可以假设 $\mathrm{Cap}_1(A) < \infty$。设 $\varepsilon > 0$。我们找到一个函数 $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$，使得 $u \geq 1$ 在 A 的一个邻域内，并且

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u| \, d\mathcal{L}^2 \leq \mathrm{Cap}_1(A) + \varepsilon.$$

这里 $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \subset$ 有界变差$(\mathbb{R}^2)$ 且 $|Du|(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u| \, d\mathcal{L}^2$，然后由余面积公式 (2.5) 可得集合 $E := \{u > t\}$ 对于某个 $0 < t < 1$，使得

$$|D\chi_E|(\mathbb{R}^2) \leq |Du|(\mathbb{R}^2) \leq \mathrm{Cap}_1(A) + \varepsilon,$$

且 A 包含于 E的内部。于是必有 $\mathcal{L}^2(E) < \infty$，并且对每个 $x \in A$，我们都能找到 $r_x > 0$，使得

$$\frac{\mathcal{L}^2(B(x, r_x) \cap E)}{\mathcal{L}^2(B(x, r_x))} = \frac{1}{2}.$$

由相对等周不等式 (2.4)，我们得到

$$\frac{\pi r_x^2}{2} = \min\{\mathcal{L}^2(B(x, r_x) \cap E), \mathcal{L}^2(B(x, r_x) \setminus E)\} \leq r_x |D\chi_E|(B(x, r_x)).$$

特别地，半径 r_x 由上方一致有界，即不超过 $(2/\pi)|D\chi_E|(\mathbb{R}^2)$。根据5覆盖定理（例如参见 [12, 第 60] 页），我们可以选取一个有限或可数的集合$\{B(x_j, r_j)\}_j$，其中的球两两不交，并且球 $B(x_j, 5r_j)$覆盖 A。于是

$$\mathcal{H}^1_\infty(A) \leq \sum_j 10 r_j \leq \frac{20}{\pi} \sum_j |D\chi_E|(B(x_j, r_j)) \leq 10 |D\chi_E|(\mathbb{R}^2) \leq 10(\mathrm{Cap}_1(A) + \varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$，即可得到结论。 □

对于 $x \in \mathbb{R}^2$，令 $p(x) := |x|$。

引理 3.4. 令 $A \subset \mathbb{R}^2$。则有 $\mathcal{L}^1(p(A)) \leq 10\mathrm{Cap}_1(A)$。

证明。注意到 p 是一个 1-利普希茨函数。因此我们估计

$$\mathcal{L}^1(p(A)) = \mathcal{H}^1_\infty(p(A)) \leq \mathcal{H}^1_\infty(A) \leq 10 \, \mathrm{Cap}_1(A)$$

由引理 3.3。 □

以下是 [17, 定理 3.10] 的一个特例。

定理 3.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，并假设 $u_i \to u$ 在 $\mathrm{BV}(\Omega)$ 中严格收敛。于是我们可以找到 u_i 的一个子列（不重新标记），使得对于每个紧集 $K \subset \Omega \setminus S_u$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个开集 $G \subset \Omega$，使得 $\mathrm{Cap}_1(G) < \varepsilon$，且 $u_i^* \to u^*$ 在$K \setminus G$上一致收敛。

命题 3.6. 假设 $u_i \to u$ 在 $\mathrm{BV}(B(0, R))$ 中严格收敛，且 $R > 0$，并且 $S_u = \emptyset$。那么可以找到一个子列（仍记作原序列），使得对几乎处处的 $0 < r < R$，$u_i^* \to u^*$在 $\partial B(0, r)$ 上一致收敛。

证明。取由定理 3.5 给出的一个子列（仍记作原序列）。我们找到开集$G_j \subset B(0,R)$，使得 $\mathrm{Cap}_1(G_j) < 1/j$，且 $u_i^* \to u^*$在 $\overline{B}(0,R-1/j)$ 上一致收敛 $\setminus G_j$。由引理 3.4 可得 $\mathcal{L}^1(p(G_j)) < 10/j$，因此对于所有$r \in (0,R-1/j) \setminus p(G_j)$， $u_i^* \to u^*$在 $\partial B(0,r)$ 上一致收敛，且 $\mathcal{L}^1((0,R-1/j) \setminus p(G_j)) > R-11/j$。于是，对几乎处处的 $0<r<R$, $u_i^* \to u^*$在 $\partial B(0,r)$ 上一致收敛。□

引理 3.7. 设 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|v_1| = |v_2| = 1$，并设 $a_1, a_2 > 0$ 使得 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 且 $-C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 对于 $C_1 := C(v_1, a_1)$ 和 $C_2 := C(v_2, a_2)$ 成立。那么存在一个仅依赖于这两个锥的 $\delta > 0$，使得对于每个 $V \in \mathbb{R}^2$，我们都有 $|V \cdot z| \geq \delta |V||z|$ 对所有 $z \in C_1$ 成立，或者对所有 $z \in C_2$ 成立。

证明。假设该结论不成立，那么存在 $V \in \mathbb{R}^2$ 和 $z_{1,j} \in C_1 \setminus \{0\}$ 以及 $z_{2,j} \in C_2 \setminus \{0\}$，使得$|V \cdot z_{1,j}|/(|V||z_{1,j}|) \to 0$，且$|V \cdot z_{2,j}|/(|V||z_{2,j}|) \to 0$，如 $j \to \infty$。不妨设$|V| = |z_{1,j}| = |z_{2,j}| = 1$。取子列（不改变记号）后，可得 $z_{1,j} \to z_1 \in C_1$ 和 $z_{2,j} \to z_2 \in C_2$，其中 $|z_1| = |z_2| = 1$ 且 $|V \cdot z_1| = 0 = |V \cdot z_2|$。因此，要么 $z_1 = z_2$，要么 $z_1 = -z_2$，这与假设 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 和 $-C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 矛盾。□

G给定 $\mathbb{R}^2$ 上的正拉东测度 κ，对于固定的 $x \in \mathbb{R}^2$，我们为 $r > 0$ 定义

$$[\kappa]_r(A) := \frac{\kappa(x + rA)}{\kappa(B(x,r))}, \quad A \subset B(0,1). \tag{3.8}$$

以下是 Larsen 引理 5.1] 的一个特例 [18, 。

引理 3.9. 设 κ 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的正拉东测度。那么，对于 κ Ω 上几乎处处的 $x \in$ ，存在一个序列 $r_j \searrow 0$ 和一个拉东测度 κ'，使得

$$[\kappa]_{r_j} \xrightarrow{*} \kappa' \text{ in } B(0,1) \quad \text{with } \kappa'(B(0,1)) = 1.$$

在（1.1）中，我们定义了 h'_f；更明确地说，定义如下：

$$h'_f(x) := \inf \left\{ \liminf_{j \to \infty} \frac{L_f(y_j, 5r_j)}{l_f(y_j, r_j)} : r_j \to 0,\ y_j \to x,\ |y_j - x| < r_j \right\}.$$

除了矩阵 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 的欧几里得范数 $|A|$ 外，我们还考虑最大范数

$$\|A\|_{\max} := \max_{v \in \mathbb{R}^n, |v|=1} |Av|.$$

以下是定理 1.2 的另一种表述。

定理 3.10. 设 Ω $\subset \mathbb{R}^2$ 为开且凸集。设 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|v_1| = |v_2| = 1$，并设 $a_1, a_2 > 0$ 满足 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 和 $-C_1 \cap C_2 = \{0\}$，其中 $C_1 := C(v_1, a_1)$ 且$C_2 := C(v_2, a_2)$。假设 f'_1, $f'_2 \in$ 属于 BV(Ω)，且 $\frac{dDf'_1}{d|Df'_1|}(x) \in C_1$ 对 $|Df'_1|$-几乎处处的 $x \in$ Ω 成立，并且$\frac{dDf'_2}{d|Df'_2|}(x) \in C_2$ 对 $|Df'_2|$- 几乎处处的 $x \in$ Ω 成立。令 $f_1(y) := f'_1(y) + v_1 \cdot y$, $f_2(y) := f'_2(y) + v_2 \cdot y$，并令 $f =$(f_1, f_2)。那么 f^*是单射；对于 $|Df|$-几乎处处的 $x \in$Ω，若 $h'_{f^*}(x) = \infty$，则 $\frac{dDf}{d|Df|}(x)$ 的秩为一。

证明。用 ϕ_δ, $\delta>0$ 表示标准磨光子，并考察磨光

$$f_\delta := \phi_\delta * f = (\phi_\delta * f_1, \phi_\delta * f_2) =: (f_{1,\delta}, f_{2,\delta}).$$

记 $\Omega_\delta := \{y \in \Omega: \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) > \delta\}$。对于每个 $\delta>0$，我们有 $f_{1,\delta}, f_{2,\delta} \in C^\infty(\Omega_\delta)$ 并且

$$\nabla f_{1,\delta} = \phi_\delta * Df_1 = \phi_\delta * Df_1' + v_1.$$

对于 $f_{2,\delta}$，类似结论也成立。设 x，$y \in \Omega_\delta$ 满足 $x \neq y$。那么 $|(y-x)\cdot z| > 0$ 要么对所有$z \in C_1 \setminus \{0\}$成立，要么对所有 $z \in C_2 \setminus \{0\}$成立，根据引理 3.7。事实上，我们可以假设 $(y-x)\cdot z > 0$对所有 $z \in C_1 \setminus \{0\}$成立。现在

$$\begin{aligned} f_{1,\delta}(y) - f_{1,\delta}(x) &= \int_0^1 \nabla f_{1,\delta}(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt \\ &= \int_0^1 \phi_\delta * Df_1'(x + t(y-x)) \cdot (y-x) + v_1 \cdot (y-x)\, dt \\ &\geq v_1 \cdot (y-x) > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

我们找到一个序列 $\delta_j \to 0$使得 $f_{\delta_j} \to f^*$在 Ω 中几乎处处成立。对于几乎处处的 x，$y \in \Omega$，若 $v_1 \cdot (y-x) > 0$，则由 (3.11) 可得

$$f_1^*(y) - f_1^*(x) \geq v_1 \cdot (y-x) > 0. \tag{3.12}$$

根据精确代表的定义（2.6），这对所有满足 $x, y \in \Omega$ 的 $v_1 \cdot (y-x) > 0$均成立。类似地，考虑其他情形 $v_1 \cdot (y-x) < 0$, $v_2 \cdot (y-x) > 0$，以及 $v_2 \cdot (y-x) < 0$，我们得出 f^* 是单射。

设 $x \in \Omega$ 满足 $\frac{dDf}{d|Df|}(x)$ 的秩为二。除去一个 $|Df|$-零测集后，我们可以假设，对于满秩的 2×2 矩阵 $L' := \frac{dDf}{d|Df|}(x)$，勒贝格点性质成立

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \left| \frac{dDf}{d|Df|} - L' \right| d|Df| = 0. \tag{3.13}$$

我们还可以假设引理 3.9 的结论在 x 处成立，其中取 $\kappa = |Df|$。为完成证明，我们需要证明 $h'_{f^*}(x) < \infty$。

考虑放大

$$f_r(z) := \frac{f(x+rz) - f_{B(x,r)}}{|Df|(B(x,r))/r}, \quad z \in B(0,1),$$

对所有 $r>0$ 满足 $B(x, r) \subset \Omega$。注意，$(f_r)^* = (f^*)_r$，因此我们可以直接写作f_r^*。对于这样的 r，与 (3.8) 中一样，我们也定义

$$[Df]_r(A) := \frac{Df(x+rA)}{|Df|(B(x,r))}, \quad A \subset B(0,1).$$

于是 $Df_r = [Df]_r$和 $|Df_r| = [|Df|]_r$。因此 $|Df_r|(B(0,1)) = 1$。由庞加莱不等式可知，量 $\|f_r\|_{L^1(B(0,1))}$ 也一致有界。因此，根据有界变差紧性（例如参见 [2, 定理 3.23], ），取一个子列 $r_j \to 0$，有 $f_{r_j} \to$

$h \in$ 在 $L^1(B(0,1))$ 中属于有界变差空间，且 $Df_{r_j} \overset{*}{\rightharpoonup} Dh$，由引理 3.9，进一步取一个子列（不再重新标记），有 $|Df_{r_j}| \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$，其中 $\mu(B(0,1)) = 1$。由 (3.13) 可得 $[Df]_{r_j} - L'[|Df|]_{r_j} \overset{*}{\rightharpoonup} 0$，因此 $Df_{r_j} = [Df]_{r_j} \overset{*}{\rightharpoonup} L'\mu$。于是 $Dh = L'\mu$，其中 $|Dh| = |L'|\mu = \mu$，接着容易看出，对于某个 $c > 0$，有 $Dh = cL'\, d\mathcal{L}^2$，例如参见 [4,引理 1.4]。因此 h 是一个满秩线性映射，并且

$$|Dh|(B(0,1)) = |L'|\mu(B(0,1)) = 1,$$

因此，事实上 $f_{r_j} \to h$ 在 $B(0,1)$ 上于 $\mathbb{R}^2$ 意义下严格收敛。记 $f_{r_j} = (f_{1,r_j}, f_{2,r_j})$，例如利用 [2, 命题 3.15]，还可得 $f_{1,r_j} \to h_1$ 和 $f_{2,r_j} \to h_2$ 在 $B(0,1)$ 上于有界变差意义下严格收敛。此外，$h(z) = Lz$，其中 $L := cL'$。还需注意，$L = (V_1, V_2)$，其中 $V_1 \in C_1 \setminus \{0\}$ 和 $V_2 \in C_2 \setminus \{0\}$。

进一步取一个子列（仍记作原序列），可设 $f^*_{r_j} \to h$ 在 $B(0,1)$ 上几乎处处成立。取 $w \in B(0, 1/20)$，使得 $f^*_{r_j}(w) \to h(w)$。我们找到 $1/2 < R < 19/20$，使得 $|Dh|(\partial B(w,R)) = 0$，于是还有 $f_{1,r_j} \to h_1$ 和 $f_{2,r_j} \to h_2$ 在 $B(w,R)$ 上严格收敛（参见 [2,例 1.63]）。进一步取一个子列（仍记作原序列），由命题 3.6 可得 $s \in (1/20, 1/10)$，使得 $f^*_{r_j} \to h$ 在 $\partial B(w,s)$ 和 $\partial B(w, 5s)$ 中一致收敛。令 $\delta > 0$ 为引理 3.7 中的数。取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得

$$\frac{5\|L\|_{\max} s + 2\varepsilon}{\delta \min\{|V_1|, |V_2|\} s - 2\varepsilon} \le \frac{6\|L\|_{\max}}{\delta \min\{|V_1|, |V_2|\}} \tag{3.14}$$

由一致收敛可知，对于较大的 j，我们有

$$\sup_{z \in \partial B(w,s)} |f^*_{r_j}(z) - Lz| < \varepsilon, \quad \sup_{z \in \partial B(w,5s)} |f^*_{r_j}(z) - Lz| < \varepsilon, \quad \text{and} \quad |f^*_{r_j}(w) - Lw| < \varepsilon. \tag{3.15}$$

记作 $y_j := x + r_j w$。设 $y \in B(y_j, 5r_j s)$。设 y_1'，y_1'' 是 $\partial B(y_j, 5r_j s)$ 上分别位于 v_1-和 $-v_1$-方向的两个点。于是由（3.12），可得

$$f_1^*(y_1'') \le f_1^*(y) \le f_1^*(y_1').$$

对于 $f_2^*(y)$ 和点 y_2', y_2''，类似的事实也成立。现在

$$\begin{aligned}
|f^*(y) - f^*(y_j)| &\le |f_1^*(y) - f_1^*(y_j)| + |f_2^*(y) - f_2^*(y_j)| \\
&\le |f_1^*(y_1') - f_1^*(y_j)| + |f_1^*(y_1'') - f_1^*(y_j)| + |f_2^*(y_2') - f_2^*(y_j)| + |f_2^*(y_2'') - f_2^*(y_j)| \\
&\le |f^*(y_1') - f^*(y_j)| + |f^*(y_1'') - f^*(y_j)| + |f^*(y_2') - f^*(y_j)| + |f^*(y_2'') - f^*(y_j)|.
\end{aligned}$$

因此，当 j 足够大时，

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\overline{B}(y_j,5r_js)}|f^*(y)-f^*(y_j)| &\le 4\sup_{y\in\partial B(y_j,5r_js)}|f^*(y)-f^*(y_j)|\\ &= 4\frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\sup_{z\in\partial B(w,5s)}|f^*_{r_j}(z)-f^*_{r_j}(w)|\\ &\le 4\frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(\sup_{z\in\partial B(w,5s)}|Lz-Lw|+2\varepsilon\right)\quad \text{by (3.15)}\\ &\le 4\frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(5\|L\|_{\max}s+2\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

接着令 $y\in\Omega\setminus B(y_j,r_js)$。由引理 3.7，我们可以假设对所有 $v\in C_1$，$|(y-y_j)\cdot v|\ge\delta|y-y_j||v|$。我们还可以假设对所有 $v\in C_1$，$(y-y_j)\cdot v>0$。现在 $(y-y_j)\cdot v_1>0$，且 $|(y-y_j)\cdot V_1|\ge\delta|y-y_j||V_1|$。令 $y'\in\partial B(y_j,r_js)$ 位于与 y_j 和 y 相交的直线上。于是也有

$$\begin{aligned}|((y'-x)/r_j-w)\cdot V_1| &= |((y'-x)/r_j-(y_j-x)/r_j)\cdot V_1|\\ &\ge \delta|(y'-y_j)/r_j||V_1|\\ &= \delta s|V_1|.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Thus

$$\begin{aligned}|f^*(y)-f^*(y_j)| &\ge |f^*_1(y)-f^*_1(y_j)|\\ &\ge |f^*_1(y')-f^*_1(y_j)|\quad \text{by (3.12)}\\ &= \frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}|f^*_{1,r_j}((y'-x)/r_j)-f^*_{1,r_j}(w)|\\ &\ge \frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(|V_1\cdot(y'-x)/r_j-V_1\cdot w|-2\varepsilon\right)\quad \text{by (3.15)}\\ &\ge \frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(\delta|V_1|s-2\varepsilon\right)\quad \text{by (3.17)}\\ &\ge \frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(\delta\min\{|V_1|,|V_2|\}s-2\varepsilon\right).\end{aligned}$$

因此

$$\inf_{y\in\Omega\setminus B(y_j,r_js)}|f^*(y)-f^*(y_j)|\ge\frac{|Df|(B(x,r_j))}{r_j}\left(\delta\min\{|V_1|,|V_2|\}s-2\varepsilon\right). \tag{3.18}$$

利用（3.16）和（3.18），可得

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to\infty}\frac{L_{f^*}(y_j,5r_js)}{l_{f^*}(y_j,r_js)} &\le \liminf_{j\to\infty}\frac{\sup_{y\in\overline{B}(y_j,5r_js)}|f^*(y)-f^*(y_j)|}{\inf_{y\in\Omega\setminus B(y_j,r_js)}|f^*(y)-f^*(y_j)|}\\ &\le 4\frac{5\|L\|_{\max}s+2\varepsilon}{\delta\min\{|V_1|,|V_2|\}s-2\varepsilon}\\ &\le 4\frac{6\|L\|_{\max}}{\delta\min\{|V_1|,|V_2|\}} \quad \text{by (3.14)}\\ &<\infty,\end{aligned}$$

因此 $h'_{f^*}(x)<\infty$。 □

4. Proof of Theorem 1.3

本节证明定理 1.3，随后证明推论 1.4。

我们从下面的引理开始，它是[16, 引理 3.23]的一个变体。$f\colon U\to\mathbb{R}$ 在集合 $U\subset\mathbb{R}$ 上的振荡定义为

$$\operatorname*{osc}_U f := \sup\{|f(x)-f(y)|,\ x,y\in U\}.$$

引理 4.1. 设 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$，其中 $[a,b]\subset\mathbb{R}$是某个紧区间。假设存在一个由集合 $W_i=\bigcup_j U_{i,j}$, $i\in\mathbb{N}$组成的至多可数并的序列，其中每个$U_{i,j}\subset\mathbb{R}$都是开且有界的，并且对所有 $t\in[a,b]$，当 $i\to\infty$ 时，$\chi_{W_i}(t)\to 1$。令 $A\subset[a,b]$ 满足$\mathcal{L}^1([a,b]\setminus A)=0$。那么对每个 $t_1,t_2\in A$ 满足 $t_1<t_2$，有

$$|f(t_1)-f(t_2)|\le\liminf_{i\to\infty}\sum_j\operatorname*{osc}_{U_{i,j}\cap A}f.$$

证明。设 $t_1,t_2\in A$ 满足 $t_1<t_2$。首先假设 f 有界。那么，不失一般性，我们还可以假设 $f(t_1)<f(t_2)$。定义

$$h(x):=\sup_{t\in[t_1,x]\cap A}f(t),\quad t_1\le x\le t_2,$$

并令 $h(x):=h(t_1)$，其中 $x\le t_1$，以及 $h(x):=h(t_2)$，其中 $x\ge t_2$。现在 h 是递增函数，因此 $h\in$ 在 $_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 上有界变差。考虑一个有界的非空开集 $U\subset\mathbb{R}$。我们可以将 U 表示为至多可数个互不相交的开区间 $U=\bigcup_l U_l$ 的并，其中$U_l=(a_l,b_l)$。由于 h 是递增函数，在每个区间内，我们可以考虑单侧极限$h(a_l+)$ 和 $h(b_l-)$。此外，在每个区间 U_l内，定义截断

$$f_l:=\min\{h(b_l-),\max\{h(a_l+),f\}\}.$$

由于这些区间 $(h(a_l+)\ h(b_l-))$ 两两不相交，我们有

$$\sum_l\operatorname{osc}_{U_l\cap A}f_l\le\operatorname{osc}_{U\cap A}f.$$

由于 h 是递增的，对于每个区间 U_l，显然有

$$|Dh|(U_l) = h(b_l-) - h(a_l+).$$

另一方面，我们还有（事实上等号成立）

$$\operatorname{osc}_{U_l\cap A} f_l \geq h(b_l-) - h(a_l+),$$

因为 $\inf_{U_l\cap A} f \leq h(a_l+)$，并且或者 $h(b_l-) = h(a_l+)$，或者 $h(b_l-) = \sup\{f(y): y \in U_l\cap A\}$。于是，由于 $|Dh|$ 是一个拉东测度，我们有

$$|Dh|(U) = \sum_l |Dh|(U_l) \leq \sum_l \operatorname{osc}_{U_l\cap A} f_l \leq \operatorname{osc}_{U\cap A} f. \tag{4.2}$$

设 $H_i := \bigcap_{k=i}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} U_{k,\ j}$。那么根据假设，$\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [a,b]$。注意到 $f(t_1) = h(t_1)$，再利用拉东测度 $|Dh|$ 的基本性质，我们估计得

$$\begin{aligned}
|f(t_2) - f(t_1)| &\leq h(t_2) - h(t_1) \\
&= |Dh|([t_1,t_2]) \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} |Dh|(H_i \cap [t_1,t_2]) \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \sum_j |Dh|(U_{i,j} \cap [t_1,t_2]) \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname*{osc}_{U_{i,j}\cap A} f \quad \text{by (4.2)}.
\end{aligned}$$

在一般情形下，我们考虑截断 $f_M := \min\{M, \max\{-M, f\}\}$。对于充分大的 M，我们有

$$|f(a) - f(b)| = |f_M(a) - f_M(b)| \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname*{osc}_{U_{i,j}\cap A} f_M \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname*{osc}_{U_{i,j}\cap A} f.$$

□

引理 4.3。设 $f\colon [a,b] \to Y$，其中某个紧区间为 $[a,b] \subset \mathbb{R}$。假设存在由集合 $W_i = \bigcup_j U_{i,\ j}$, $i \in \mathbb{N}$ 构成的至多可数并序列，其中每个 $U_{i,\ j} \subset \mathbb{R}$都是有界开集，并且对所有 $t \in [a,b]$, $\chi_{W_i}(t) \to 1$ 当 $i \to \infty$ 时成立。设 $A \subset [a,b]$ 满足 $\mathcal{L}^1([a,b] \setminus A) = 0$。那么对每个 t_1, $t_2 \in A$ 满足 $t_1 < t_2$，我们有

$$d_Y(f(t_1), f(t_2)) \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname{diam} f(U_{i,j} \cap A).$$

证明。回忆一下，我们认为 Y 等距嵌入于巴拿赫空间 $(V, \|\cdot\|_V)$ 中。记 V的对偶空间为 V^*。我们找到 $v^* \in V^*$，使得 $\|v^*\|_{V^*} = 1$ 且 $v^*(f(t_1)) -$

$f(t_2))\ = \|f(t_1)\ - f(t_2)\|_V$。现在我们可以考虑实值函数 $v^* \circ f$，于是得到

$$\begin{aligned} d_Y(f(t_1), f(t_2)) &= \|f(t_1) - f(t_2)\|_V \\ &= v^*(f(t_1) - f(t_2)) \\ &= v^*(f(t_1)) - v^*(f(t_2)) \\ &\le \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname*{osc}_{U_{i,j}\cap A} v^* \circ f \quad \text{by Lemma 4.1} \\ &\le \liminf_{i\to\infty} \sum_j \operatorname{diam} f(U_{i,j} \cap A). \end{aligned}$$

□

注意，如果 $f\colon \Omega \to Y$是单射，且 $B(y_1, r_1) \subset \Omega$ 与 $B(y_2, r_2) \subset \Omega$ 不相交，那么根据 $l_f(\cdot,\cdot)$ 的定义以及 f的单射性，可得

$$B(f(y_1), l_f(y_1, r_1)) \cap B(f(y_2), l_f(y_2, r_2)) = \emptyset. \tag{4.4}$$

定理 1.3 的证明。由于 f有界，存在 $y_0 \in Y$和 $0 < R < 2$，使得 diam Y满足 $f(\Omega) \subset B(y_0, R)$。存在一个 μ-零测集 $H \subset \Omega$，使得 $\|Df\|^s(\Omega \setminus H) = 0$。注意 $\{h'_f < \infty\} = \bigcup_{M=1}^{\infty}\{h'_f < M\}$。固定 $M \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。此外，取一个开集U，使得 $H \subset U \subset \Omega$ 且 $\mu(U) < \varepsilon^{Q/(Q-1)}$。对于每个 $x \in H \cap \{h'_f < M\}$，都有

$$\liminf_{r\to 0,\, d(y,x)<r} \frac{L_f(y, 5r)}{l_f(y, r)} < M.$$

因此，我们找到 $0 < r_x < \varepsilon$和 $y_x \in B(x, r_x)$，使得 $\Omega \setminus B(y_x, r_x) \neq \emptyset$（我们可以假设 Ω 至少包含 2 个点），$B(y_x, r_x) \subset U$，$B(y_x, 6r_x) \subset \Omega$，并且

$$\frac{L_f(y_x, 5r_x)}{l_f(y_x, r_x)} < M.$$

根据5覆盖定理，我们找到有限个或可数个两两不交的球 $B_j = B(y_j, r_j)$，使得这些球 $B(y_j, 5r_j)$ 覆盖 $H \cap \{h'_f < M\}$，其中

$$\frac{L_f(y_j, 5r_j)}{l_f(y_j, r_j)} < M. \tag{4.5}$$

Let

$$g := \sum_j \frac{L_f(y_j, 5r_j)}{r_j} \chi_{6B_j}. \tag{4.6}$$

那么，对于曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to \Omega$ 且满足 $\ell_\gamma > \varepsilon$，有

$$\sum_{j,\, 5B_j\cap\gamma\neq\emptyset} \operatorname{diam} f(5B_j) \le 2 \sum_{j,\, 5B_j\cap\gamma\neq\emptyset} L_f(y_j, 5r_j) \le 2 \int_\gamma g\, ds. \tag{4.7}$$

由 $1/Q+(Q-1)/Q=1$，根据杨不等式，对于任意 $b_1,b_2\geq 0$，有

$$\begin{aligned} b_1b_2=\varepsilon^{1/Q}b_1\varepsilon^{-1/Q}b_2 &\leq \frac{1}{Q}\varepsilon b_1^Q+\frac{Q-1}{Q}\varepsilon^{-1/(Q-1)}b_2^{Q/(Q-1)} \\ &\leq \varepsilon b_1^Q+\varepsilon^{-1/(Q-1)}b_2^{Q/(Q-1)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

记 $l_j:=l_f(y_j,r_j)$。在 X 和 Y中，阿尔福斯正则性均以指数 Q成立，常数为C_A。利用阿尔福斯正则性，我们估计

$$\begin{aligned} &\sum_j \frac{L_f(y_j,5r_j)}{r_j}\mu(6B_j) \\ &\quad\leq 6^Q C_A\sum_j L_f(y_j,5r_j)r_j^{Q-1} \\ &\quad\leq 6^Q C_A M\sum_j l_j r_j^{Q-1} \quad \text{by (4.5)} \\ &\quad\leq 6^{Q^2}C_A^Q M^Q\varepsilon\sum_j l_j^Q+\varepsilon^{-1/(Q-1)}\sum_j r_j^Q \quad \text{by (4.8)} \\ &\quad= 6^{Q^2}C_A^{Q+1}M^Q\varepsilon\sum_j \nu(B(f(y_j),l_j))+C_A\varepsilon^{-1/(Q-1)}\sum_j\mu(B_j). \end{aligned}$$

注意，由于 $f(\Omega)\subset B(y_0,R)$ 且 $\Omega\setminus B(y_j,r_j)\neq\emptyset$，我们有 $l_j<2R$。利用单射性和（4.4），我们进一步估计

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{L_f(y_j,5r_j)}{r_j}\mu(6B_j) &\leq 6^{Q^2}C_A^{Q+1}M^Q\varepsilon\nu(B(y_0,3R))+C_A\varepsilon^{-1/(Q-1)}\mu(U) \\ &\leq 6^{Q^2}C_A^{Q+1}M^Q\varepsilon\nu(B(y_0,3R))+C_A\varepsilon. \end{aligned}$$

我们可以对 $\varepsilon=1/i$，$i=1,2,\ldots$作此处理。例如，不再记作 y_j，而记作 $y_{i,j}$，以表示其还依赖于 i。根据定义（4.6），我们得到函数序列 $\{g_i\}_{i=1}^\infty$。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned} \int_\Omega g_i\,d\mu &\leq \sum_j \frac{L_f(y_{i,j},5r_{i,j})}{r_{i,j}}\mu(6B_{i,j}) \\ &\leq 6^{Q^2}C_A^{Q+1}M^Q(1/i)\nu(B(y_0,3R))+C_A/i \\ &\to 0 \quad \text{as } i\to\infty. \end{aligned} \tag{4.9}$$

请记住，我们将 $M\in\mathbb{N}$ 固定。记

$$H_M:=\Omega\cap\bigcap_{i=1}^\infty\bigcup_j 5B_{i,j}.$$

注意，H_M是一个包含 $H\cap\{h_f'<M\}$的博雷尔集。固定 $\delta>0$。利用 $\|Df\|$的测度性质，我们得到如下结论（例如参见[12, 命题 3.337]）：存在一个开集 $W\supset H_M$，使得 $\|Df\|(W\setminus H_M)<\delta$；并且存在一个闭集 $F\subset H_M$，使得

$\|Df\|(H_M \setminus F) < \delta$。根据 BV 映射的定义（定义 2.1），存在一个非负函数序列 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对于 $W \setminus F$ 中的每条 γ，除去一个 Γ 满足 $\mathrm{AM}(\Gamma) = 0$的族之外，都有

$$d_Y(f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2))) \le \liminf_{i\to\infty} \int_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} h_i \, ds \tag{4.10}$$

对于几乎所有的 $t_1, t_2 \in [0, \ell_\gamma]$，满足 $t_1 < t_2$，并且

$$\int_{W\setminus F} h_i \, d\mu < \|Df\|(W \setminus F) + \delta < 3\delta \quad \text{for every } i \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

在 F 中令 $h_i = 0$，从而将每个 h_i 延拓到 W。接着考虑一条曲线 $\gamma\colon [0, \ell_\gamma] \to W$；除去一个 AM-零测族后，我们可以假设 γ 的任何子曲线都不属于 Γ，这直接由 AM 模数的定义可得。注意，$(0, \ell_\gamma) \setminus \gamma^{-1}(F)$ 是一个开集，因此它是两两不相交的开区间 $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ 的并。由 (4.10)，存在 $A \subset [0, \ell_\gamma]$，使得 $\mathcal{L}^1([a,b] \setminus A) = 0$，并且对每个 t_1，若 $t_1 < t_2$，则有 $t_2 \in V_m \cap A$

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} f \circ \gamma(V_m \cap A) &= \sup_{t_1,t_2 \in V_m \cap A,\, t_1<t_2} d_Y(f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2))) \\
&\le \sup_{t_1,t_2 \in V_m \cap A,\, t_1<t_2} \liminf_{i\to\infty} \int_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} h_i \, ds \\
&\le \liminf_{i\to\infty} \int_{V_m} h_i(\gamma(s)) \, ds.
\end{aligned}$$

令 $\delta_\gamma > 0$。若

$$\operatorname{diam} f \circ \gamma(V_m \cap A) \le \int_{V_m} h_i(\gamma(s)) \, ds + 2^{-m}\delta_\gamma, \tag{4.12}$$

那么令 $V_{i,\,m} = V_m$，否则令 $V_{i,\,m} = \emptyset$。注意，对每个 m，都有 $V_{i,\,m} = V_m$对所有充分大的 i。还要注意，对每个 $i \in \mathbb{N}$，开集 $\gamma^{-1}(5B_{i,\,j})$ 覆盖 $\gamma^{-1}(F)$。现在由引理 4.3，对每个 t_1，$t_2 \in A$若 $t_1 < t_2$，则有

$$\begin{aligned}
&d_Y(f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2))) \\
&\quad\le \liminf_{i\to\infty} \left(\sum_{j,\, 5B_{i,j}\cap\gamma\neq\emptyset} \operatorname{diam} f \circ \gamma(\gamma^{-1}(5B_{i,j})) + \sum_m \operatorname{diam} f \circ \gamma(V_{i,m} \cap A) \right) \\
&\quad\le \liminf_{i\to\infty} \left(\sum_{j,\, 5B_{i,j}\cap\gamma\neq\emptyset} \operatorname{diam} f(5B_{i,j}) + \sum_m \operatorname{diam} f \circ \gamma(V_{i,m} \cap A) \right) \\
&\quad\le \liminf_{i\to\infty} \left(2\int_\gamma g_i \, ds + \int_\gamma h_i \, ds + \delta_\gamma \right) \quad \text{by (4.7), (4.12).}
\end{aligned}$$

由于 $\delta_\gamma > 0$ 是任意的，我们得到

$$d_Y(f(\gamma(t_1)), f(\gamma(t_2))) \le \liminf_{i\to\infty} \int_\gamma (2g_i + h_i) \, ds$$

对于每个满足 $t_1 < t_2$ 的 t_1、$t_2 \in A$。现在根据定义，

$$\|Df\|(W) \le \liminf_{i\to\infty} \int_W (2g_i + h_i)\, d\mu \le 3\delta \quad \text{by (4.9), (4.11).}$$

因此 $\|Df\|(H_M) \le \|Df\|(W) \le 3\delta$。由于 $\delta > 0$ 是任意的，我们得到 $\|Df\|(H_M) = 0$，从而 $\|Df\|(H \cap \{h'_f < M\}) = 0$，进而 $\|Df\|(H \cap \{h'_f < \infty\}) = 0$。因此

$$\|Df\|^s(\{h'_f < \infty\}) = \|Df\|^s(\Omega \setminus H) + \|Df\|^s(H \cap \{h'_f < \infty\}) = 0,$$

从而证明了该结果。 □

注 4.13。 注意，在定理 1.3中，事实上我们只需假设 $f \in D^{\mathrm{BV}}(\Omega; Y)$，而不必假设 $f \in \mathrm{BV}(\Omega; Y)$；也就是说，我们并未用到假设 $f \in L^1(\Omega; Y)$。

推论 1.4 的证明。由命题 3.1，只需考虑 $f \in \mathrm{BV}(B(0,1); \mathbb{R}^2)$。通过截断，我们还可以假设 $f \in L^\infty(B(0,1); \mathbb{R}^2)$。存在一个 $\mathcal{L}^2$-零测集 $H \subset B(0,1)$，使得 $|D^s f|(B(0,1) \setminus H) = 0$。令 D 为 H中 $\frac{dDf}{d|Df|}$ 的秩为 2 的子集。令 $\varepsilon > 0$。对于 $|Df|$-几乎处处的 $x \in D$，我们找到锥 $C_1 = C(v_1, a_1)$ 和$C_2 = C(v_2, a_2)$，满足 $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ 和 $-C_1 \cap C_2 = \{0\}$，并且存在任意小的半径$r_x > 0$，使得 $|Df|(\partial B(x, r_x)) = 0$，且

$$|Df|\left(B(x, r_x) \cap D \cap \left\{\frac{dDf_1}{d|Df|} \in C_1 \setminus \{0\}\right\}\right) > (1 - \varepsilon/2)|Df|(B(x, r_x))$$

对于 f_2，也可类似地处理。注意，如果 $\frac{dDf_1}{d|Df|} \in C_1 \setminus \{0\}$，那么 $\frac{dDf_1}{d|Df_1|} \in C_1 \setminus \{0\}$ 也成立。根据维塔利覆盖定理（例如参见 [2, 定理 2.19], ），我们可以选取两两不交的球$B(x_j, r_j)$，覆盖 D 中几乎所有的 $|Df|$。现在对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们在记号中加入指标 j，使得存在互不相交的锥 $C_{1,\,j} = C(v_{1,\,j}, a_{1,\,j})$ 和 $C_{2,\,j} = C(v_{2,\,j}, a_{2,\,j})$。令

$$A_j := B(x_j, r_j) \cap D \cap \left\{\frac{dDf_1}{d|Df|} \in C_{1,j} \setminus \{0\}\right\} \cap \left\{\frac{dDf_2}{d|Df|} \in C_{2,j} \setminus \{0\}\right\}.$$

于是 $|Df|(A_j) \ge (1 - \varepsilon)|Df|(B(x_j, r_j))$。

设 $a'_{1,j} < a_{1,j}$ 和 $a'_{2,j} < a_{2,j}$，使得对于 $C'_{1,j} := C(v_{1,j}, a'_{1,j})$ 和 $C'_{2,j} = C(v_{2,j}, a'_{2,j})$，仍有 $C'_{1,j} \cap C'_{2,j} = \{0\}$ 和 $-C'_{1,j} \cap C'_{2,j} = \{0\}$。因此，由命题 3.2，我们可得$f'_{1,j}, f'_{2,j} \in \mathrm{BV}(B(x_j, r_j)) \cap L^\infty(B(x_j, r_j))$，使得

$$|Df|\llcorner_{A_j} \ll |Df_1|\llcorner_{A_j} \ll |Df'_{1,j}|\llcorner_{A_j} \ll |D^s f'_{1,j}|$$

类似地，$|Df|\llcorner_{A_j} \ll |D^s f'_{2,j}|$ 在 $B(x_j, r_j)$ 中，并且

$$\frac{dDf'_{1,j}}{d|Df'_{1,j}|}(x) \in C'_{1,j} \text{ for } |Df'_{1,j}|\text{-a.e. } x \in B(x_j, r_j),$$

对 $f'_{2,\,j}$ 也可类似处理。设 $f_{1,j}(y) := f'_{1,j}(y) + v_{1,j} \cdot y$，$f_{2,j}(y) := f'_{2,j}(y) + v_{2,j} \cdot y$，且$f_j = (f_{1,j}, f_{2,j})$。由定理 1.2，$f_j^*$是单射。注意，仍有$|Df|\llcorner_{A_j} \ll |D^s f_{1,j}|$

且 $|Df|\llcorner_{A_j} \ll |D^s f_{2,\,j}|$。设

$$d\kappa := \min\left\{\frac{d|D^s f_{1,j}|}{d|D^s f_j|}, \frac{d|D^s f_{2,j}|}{d|D^s f_j|}\right\} d|D^s f_j|.$$

注意，$|Df|\llcorner_{A_j} \ll \kappa$。现在，对于 κ-几乎处处的 $x \in B(x_j, r_j)$，我们有 $\frac{d|D^s f_{1\,j}|}{d|D^s f_j|}(x) > 0$和$\frac{d|D^s f_{2\,j}|}{d|D^s f_j|}(x) > 0$，因此 $\frac{dDf_j}{d|Df_j|}(x)$ 对于 κ-几乎处处的 $x \in B(x_j, r_j)$ 都具有秩二。对于每个 j，由定理 1.2 和定理 1.3 可知，对于 $|D^s f_j|$-几乎处处的 $x \in B(x_j, r_j)$，$\frac{dDf_j}{d|Df_j|}(x)$ 具有秩一；因此，对于 κ-几乎处处的 $x \in B(x_j, r_j)$，这一结论也成立。这里我们还用到了命题 2.3。因此 $\kappa(B(x_j, r_j)) = 0$，从而 $|D^s f|(B(x_j, r_j) \cap A_j) = 0$。总之，

$$|Df|(D) = |D^s f|(D) \le \sum_j |D^s f|(B(x_j, r_j) \setminus A_j) \le \varepsilon \sum_j |Df|(B(x_j, r_j)) \le \varepsilon |Df|(\mathbb{R}^n).$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到 $|Df|(D) = 0$。 □

注 4.14. 在定理1.2 中，我们展示了 $\frac{dDf}{d|Df|}$ 具有秩一与 h'_{f^*} 为无穷之间的联系。类似的联系已在[16, 定理 6.3], 中得到证明，其中证明了对于 $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$，在 $|Df|$-几乎处处的点，$\frac{dDf}{d|Df|}$ 具有满秩，当且仅当 h_{f^*} 的一种略有不同的变体是有限的。值得注意的是，该结果的证明依赖于 Alberti 秩一定理。无论如何，至少从启发式角度看，$\frac{dDf}{d|Df|}$ 具有满秩与 f 在一点处为“拟共形”之间存在联系。

若 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个同胚，且对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $h_f(x) \le H < \infty$，则 f 是拟共形映射；这也可以作为拟共形映射的定义。拟共形映射特别具有 $W^{1,\,n}{}_{\mathrm{loc}}$-正则性。人们一直广泛关注这样的问题：如果以某种较宽松的意义假设这一逐点条件，能否推出该映射 f 至少具有某种较弱的正则性。对于 $1 \le p \le n$，记$p^* = np/(n-p)$ 为 $1 \le p < n$，并记 $p^* = \infty$ 为 $p = n$。若 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个同胚，$h_f \in L^{p^*}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，且 $h_f < \infty$ 除一个 σ-有限 $\mathcal{H}^{n-1}$-测度集外处处成立，则 $f \in W^{1,\,p}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$。详见 Koskela–Rogovin [15,推论 1.3] 及 Kallunki–Martio [14, 定理 2.2]。

因此，在一个极端情形下，h_f 一致有界意味着拟共形性，因而意味着 $W^{1,\,n}{}_{\text{局部}}$-正则性；在另一个极端情形下，h_f 或者其某种变体只需在某个集合上有限，就足以保证 $\|Df\|$ 的奇异部分不集中于该集合，正如定理1.3所述。或者，f 在 $\|Df\|^s$-几乎处处的点上都是“非拟共形的”。因此，直观而言，秩一定理是这一更广泛的拟共形理论的一个极端端点。

References

[1] G. Alberti, *Rank one property for derivatives of functions with bounded variation*, 《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》123 (1993)，第 2 期，239–274。 1[2] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuityproblems*. 牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。 4，5，6，7，10，11，18

[3] Z. Balogh、P. Koskela 和 S. Rogovin,
Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves, 《几何与泛函分析》17 (2007)，第 3 期，645–664。3[4] C. De Lellis, *A note on Alberti's rank-one theorem*, 《输运方程与多维双曲守恒律》，61–74，意大利数学联盟讲义，5，施普林格，柏林，2008。1，7，11[5] G. De Philippis 和 F. Rindler, *On the structure of A-free measures and applications*, 《数学年刊》(2) 184 (2016)，第 3 期，1017–1039。1[6] E. Durand-Cartagena、S. Eriksson-Bique、R. Korte 和 N. Shanmugalingam, *Equivalence of twoBV classes of functions in metric spaces, and existence of a Semmes family of curves under a1-Poincaré inequality*, 《高等变分学》14 (2021)，第 2 期，231–245。5[7] A. Fang,
The ACL property of homeomorphisms under weak conditions, 《数学学报》(新系列) 14 (1998)，第 4 期，473–480。3[8] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, 《美国数学会汇刊》103 (1962)，353–393。3[9] F.W. Gehring,
The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, 《数学学报》130 (1973)，265–277。3[10] P. Haj lasz, *Sobolev spaces on metric-measure spaces*, 《流形、图与度量空间上的热核与分析》（巴黎，2002），173–218，《当代数学》338，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。3[11] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. Tyson,
Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings, 《数学分析杂志》85 (2001)，87–139。2[12] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. Tyson,
Sobolev spaces on metric measurespaces. An approach based on upper gradients，新数学专著，27。剑桥大学出版社，剑桥，2015。xii+434 页。3，4，8，16[13] S. Kallunki 和 P. Koskela,
Exceptional sets for the definition of quasiconformality, 《美国数学杂志》122 (2000)，第 4 期，735–743。3[14] S. Kallunki 和 O. Martio, *ACL homeomorphisms and linear dilatation*, 《美国数学会会刊》130 (2002)，第 4 期，1073–1078。3，19[15] P. Koskela 和 S. Rogovin,
Linear dilatation and absolute continuity, 《芬兰科学院数学年刊》30 (2005)，第 2 期，385–392。19[16] P. Lahti, *Generalized Lipschitz numbers fine differentiability and quasiconformal mappings*，预印本，2022。https://arxiv.org/abs/2202.05566 13，19[17] P. Lahti, *Strict and pointwise convergence of BV functions in metric spaces*, 《数学分析及其应用杂志》455 (2017)，第 2 期，1005–1021。8[18] C. Larsen, *Quasiconvexification in W^1 ^{1} and optimal jump microstructure in BV relaxation*, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》29 (1998)，第 4 期，823–848。9[19] G. A. Margulis 和 G. D. Mostow,
The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space, 《几何与泛函分析》5 (1995)，第 2 期，402–433。3[20] O. Martio,
The space of functions of bounded variation on curves in metric measure spaces, 《共形几何与动力系统》20 (2016)，81–96。3，4[21] A. Massaccesi 和 D. Vittone,
An elementary proof of the rank-one theorem for BV functions, 《欧洲数学会杂志》(JEMS) 21 (2019)，第 10 期，3255–3258。1[22] M. Miranda, Jr.,
Functions of bounded variation on "good" metric spaces, 《纯粹与应用数学杂志》(第 9 辑) 82 (2003)，第 8 期，975–1004。4，5[23] M. Williams, *Dilatation pointwise Lipschitz constants and condition N on curves*, 《密歇根数学杂志》63 (2014)，第 4 期，687–700。3

Panu Lahti, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences,Beijing 100190, PR China, panulahti@amss.ac.cn