arXiv:2303.09159v1 [math.RT] 16 Mar 2023

块代数上的带点 p-群

Laurence Barker

比尔肯特大学数学系，土耳
其安卡拉 06800

2023年3月16日

摘要

带点 p-群是满足条件 P 为 p-群的带点群 P_γ。我们对群代数或群代数的块代数上的带点 p-群进行参数化。该参数化涉及 p-子群以及 p-子群中心化子的不可约特征标。

2020年数学主题分类：20C20。

Ke关键词：Puig 范畴；相对重数；带点 p-群；广义块。

1 引言

对于群代数的一个块，Puig [Pui86] 引入了融合系统的一种精化，Th´evenaz [The95，第 47] 节称之为该块的 Puig 范畴。设 $\mathbb{F}$为素特征 p的代数闭域， G 为有限群， b 为群代数 $\mathbb{F}G$的一个块。设 D_λ 为块代数 $\mathbb{F}Gb$上的一个极大局部带点群。回顾一下，与 D_λ 相关联的 $\mathbb{F}Gb$ 的 Puig 范畴 $\mathcal{L}$ 定义如下。$\mathcal{L}$ 的对象是 D_λ的局部带点子群。对于 D_λ的局部带点子群 P_γ 和 Q_δ，$\mathcal{L}$-态射 $P_\gamma \leftarrow Q_\delta$ 是共轭单态 $P \ni {}^g y \quad y \in Q$，其中 $g \in G$满足 $P_\gamma \geq {}^g(Q_\delta)$。复合运算是通常的群单态复合。由于 D_λ 由 $\mathbb{F}Gb$ 在 G-共轭意义下唯一确定，因此范畴 $\mathcal{L}$ 由 $\mathbb{F}Gb$ 在范畴同构意义下唯一确定。

为了明确指定 P_γ 上的 $\mathbb{F}Gb$，或更一般地， $\mathbb{F}G$上的局部带点群，我们使用 Brauer 特征标。我们将 $\mathbb{F}G$-特征标理解为 $\mathbb{F}G$的 Brauer 特征标，它通过将 $\mathbb{F}$ 的挠单位群嵌入某个特征为 0 的代数闭域的挠单位群的固定嵌入来定义。Puig 的一个著名结果（记为下文的定理 2.1）表明，对于 G的任意 p-子群 P， P在 $\mathbb{F}G$ 上的局部点与不可约 $\mathbb{F}C_G(P)$-特征标之间存在双射对应。然而，Puig 范畴难以明确确定，因为很难用相应的不可约特征标来描述 $\mathbb{F}G$上局部带点群之间的包含关系。

我们假设读者熟悉 G-代数理论。关于这一主题的论述，参见 Linckelmann [Lin18], Th´evenaz [The95]。对于 $\mathbb{F}G$ 上的任意两个带点群 W_ω 和 U_μ，若满足$W \leq U$，记 $m(W_\omega, U_\mu)$ 为 W_ω在 U_μ中的相对重数。回忆一下，当且仅当 $m(W_\omega,U_\mu) \neq 0$时， $W_\omega \leq U_\mu$成立。容易看出，给定 $W \leq V \leq U$后，我们有如下矩阵关系：

$$m(W_\omega, U_\mu) = \sum_\nu m(W_\omega, V_\nu)\, m(V_\nu, U_\mu)$$

其中 ν 遍历 $\mathbb{F}G$上的 V 的点。一般来说，这种矩阵关系不能局限于局部带点群。事实上，假设 W_ω 和 U_μ 是 $\mathbb{F}G$上的局部带点群，那么 W、 V、 U 必定是 p-群；要计算该和，仍需考虑 $\mathbb{F}G$上 V 的所有点 ν，而不仅仅是 $\mathbb{F}G$上 V 的局部点。当 U 是一个 p-群时，我们称 $\mathbb{F}G$ 上的带点群 U_μ 为带点 p- 群。为了利用上述矩阵关系（例如在 [BG22, 5.2] 的证明中所做的那样），可能有必要考虑 $\mathbb{F}G$或 $\mathbb{F}Gb$上的所有带点 p-群。

本文的主要目的是参数化 $\mathbb{F}G$上的带点 p-群，尤其是 $\mathbb{F}Gb$上的带点 p-群。也就是说，我们将使带点 p-群与一个可明确确定的集合中的元素建立双射对应。

在第 2 节中，我们将回顾 Puig 的一个结果，该结果在 $\mathbb{F}G$ 上的局部点群与我们称为 $\mathbb{F}G$ 的片的某些二元组之间建立了双射对应。我们将在第 2 节中定义片的概念。现在只需说明，如果掌握了 G 的 p 子群偏序集的明确描述，以及 G 的 p 子群中心化子的模特征标表，那么就能明确知道 $\mathbb{F}G$ 的片是什么。为了给 $\mathbb{F}G$ 上的带点 p 子群建立参数化，我们将引入 $\mathbb{F}G$ 的广义片概念。同样，若已知 p 子群偏序集的明确描述及模特征标表，就能明确知道 $\mathbb{F}G$ 的广义片是什么。 $\mathbb{F}G$ 上的每个带点 p 群都与 $\mathbb{F}G$ 的唯一一个广义片相关联。因此，待回答的问题是：哪些广义片与局部点群相关联? 我们将引入实质广义片的概念。实质性的定义条件涉及为半直积 $C_G(Q)\rtimes(N_P(Q)/Q)$ 构造的一个单模，其中 $Q \leq P$ 是 G 的 p 子群。命题 2.3 允许将该条件改写为克利福德理论构造的形式。

我们在第 2 节陈述的主要结果定理 2.8，描述了 p 上的带点群与 $\mathbb{F}G$ 的实质广义片之间的双射对应。推论 2.9 说明了这一双射对应与块的相容性。

定理 2.8 的证明将在第 3 节给出，届时我们将引入广义片的绝对重数这一概念。绝对重数非零的广义片称为实质广义片。命题 3.12 指出，局部带点群与实质广义片之间的双射对应保持绝对重数。

为了说明这一理论，我们将在第 4 节给出两个例子。对于对称群 S_4 和 S_5的主 2-块，我们将计算实质广义片段之间的相对重数。由此尤其可以得到块的片段之间的相对重数，换言之，即局部带点群之间的相对重数。方法是先确定哪些广义片段是实质的（实质上就是对块代数上的带点 p-群进行分类），然后确定实质广义片段的绝对重数（实质上就是确定带点 p-群的绝对重数）。

2 定性结果

本节将定义 $\mathbb{F}G$的片、 $\mathbb{F}G$ 的广义片以及 $\mathbb{F}G$的实质广义片等概念。在定理 2.8 中，我们将描述 $\mathbb{F}G$上的带点 p-群与 $\mathbb{F}G$的实质广义片之间的双射对应。本节的三个结果——命题 2.3、2.7 和定理 2.8——以定性的方式表述；其证明依赖于一些关于重数的公式，将留待下一节给出。

我们用 Irr($\mathbb{F}G$) 表示不可约 $\mathbb{F}G$-特征标集。给定 $\xi \in$Irr($\mathbb{F}G$)，我们记$V(\xi)$ 为一个带有模特征标 ξ 的简单 $\mathbb{F}G$-模。我们记 $E(\xi)$ 为一个不可分解射影 $\mathbb{F}G$-模，其商与 $V(\xi)$ 同构。当然， $V(\xi)$ 和 $E(\xi)$ 在同构意义下是良定义的。

对于 G 的一个 p-子群 P，我们将 P-相对 Brauer 映射记为 br_P: $\mathbb{F}C_G(P) \leftarrow (\mathbb{F}G)^P$。我们将 $\mathbb{F}G$ 的一个片定义为一对 (P,θ)，通常记作 P_θ，其中 P 是G 的一个 p-子群，且 $\theta \in$ Irr($\mathbb{F}C_G(P)$)。我们允许 G 通过定义 ${}^g(P_\theta) = ({}^gP)_{{}^g\theta}$（其中 $g \in G$），来置换 $\mathbb{F}G$ 的各个片。在下面的定理 2.8 中，我们将推广以下基本定理，该定理见 Th´evenaz [The95, 37.6]。

Th定理 2.1.（Puig.）存在一个 G-等变双射对应：
•定义在 $\mathbb{F}G$ 上的局部点群 P_γ，
• $\mathbb{F}G$ 的片 P'_θ，
满足 $P_\gamma \leftrightarrow P'_\theta$当且仅当 $P = P'$且 $E(\theta) \cong \mathbb{F}C_G(P)\,\mathrm{br}_P(i)$，其中 $i \in \gamma$。该条件与 i 的选取无关。

为了推广该定理，我们需要推广片的概念。考虑满足 $P \geq Q$ 的有序对（P， Q_ϕ），其中 P 是 G 的 p-子群，且 Q_ϕ 是 $\mathbb{F}G$ 的一个片。若 $P = P'$ 且片 Q_ϕ 与 $Q'_{\phi'}$ 共轭于 P，则称两个这样的有序对（P， Q_ϕ）和（P'， $Q'_{\phi'}$）等价。我们用 $P{\uparrow}Q_\phi$ 表示（P， Q_ϕ）的等价类。我们称 $P{\uparrow}Q_\phi$ 为 $\mathbb{F}G$ 的广义片。我们允许 G 通过定义 ${}^g(P{\uparrow}Q_\phi) = ({}^gP){\uparrow}{}^g(Q_\phi)$来置换 $\mathbb{F}G$ 的广义片，其中 $g \in G$。我们将任意片 P_θ 与广义片 $P{\uparrow}P_\theta$ 等同。

为了定义广义片上的实质性条件，我们需要以下抽象引理。

引理 2.2. 设 $K \trianglelefteq G$，使得 G/K 是一个 p-群。给定 $\xi \in$ Irr($\mathbb{F}G$) 和 $\eta \in$ Irr($\mathbb{F}K$)，则 $E(\xi) \cong {}_G\mathrm{Ind}_K(E(\eta))$，当且仅当 ${}_K\mathrm{Res}_G(V(\xi))$ 是若干两两不同构的 G-共轭 $V(\eta)$ 的直和。此外，这些等价条件刻画了 $\xi \leftrightarrow [\eta]_G$ 之间的一个双射，对应于不可约 $\mathbb{F}G$-特征标 ξ 与不可约 $\mathbb{F}K$-特征标 η 的 G-共轭类 $[\eta]_G$。

证明. Linckelmann [Lin18, 5.12.10] 的一个特例断言，任意本原幂等元在 $\mathbb{F}K$ 中仍是本原的。因此存在一个函数 Irr($\mathbb{F}K$) $\ni \eta \mapsto \xi \in$ Irr($\mathbb{F}G$)，使得若令 i 为 $\mathbb{F}K$ 的一个本原幂等元，满足 $E(\eta) \cong \mathbb{F}Ki$，则 $E(\xi) \cong \mathbb{F}Gi \cong {}_G\mathrm{Ind}_K(E(\eta))$。根据麦基分解，限制 ${}_K\mathrm{Res}_G($ $E(\xi))$ 是 G-共轭的 $E(\eta)$ 之和。因此，条件 $E(\xi) \cong {}_G\mathrm{Ind}_K(E(\eta))$ 刻画了一个双射 $[\eta]_G \leftrightarrow \xi$。

假设 $[\eta]_G \leftrightarrow \xi$。由于 $V(\eta)$ 和 $V(\xi)$ 分别是 $\mathbb{F}K$ 和 $\mathbb{F}G$ 中不被 i 消去的唯一简单模，Clifford 定理蕴含 ${}_K\mathrm{Res}_G(V(\xi))$ 是 G-共轭的 $V(\eta)$ 的直和。由于 i 在 $\mathbb{F}G$ 中是本原的，我们有 $\dim_{\mathbb{F}}(iV(\xi)) = 1$，因此 $V(\xi)$ 的每个 G-共轭在 ${}_K\mathrm{Res}_G(V(\eta))$ 中的重数均为 1。 □

我们将在以下特殊情形中应用该引理。设 S 是一个有限 p-群，它作为自同构作用于一个有限群 K。通过典范同构 $K \cong K\rtimes 1$，我们将 K 嵌入半直积 $K\rtimes S$ 中。给定 $\eta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}K)$，我们用 $\eta_{\rtimes S}$ 表示满足以下条件的不可约 $\mathbb{F}(K\rtimes S)$-特征标：$\eta_{\rtimes S}$ 对应于 η 的 S-轨道。

设 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}G$ 的一个广义片。现在，$P\!\uparrow\! Q_\phi$ 只能在 P-共轭意义下确定 Q_ϕ，但我们选定一个 Q_ϕ，并记作 $\overline{P} = N_P(Q)/Q$。通过 $N_P(Q)$ 在 $C_G(Q)$ 上的共轭作用，我们令 $\overline{P}$ 作为自同构作用于 $C_G(Q)$，并构造半直积$C_G(Q)\rtimes\overline{P}$。借助典范同构 $\overline{P} \cong 1\rtimes\overline{P}$，我们将 $\overline{P}$ 嵌入 $C_G(Q)\rtimes\overline{P}$。当简单的 $\mathbb{F}(C_G(Q)\rtimes\overline{P})$-模 $V(\phi_{\rtimes\overline{P}})$ 限制为一个含有非零自由直和项的 $\mathbb{F}\overline{P}$-模时，我们称$P\!\uparrow\! Q_\phi$为实质的。显然，这一条件与 Q_ϕ 的选取无关。注意，$\mathbb{F}G$ 的任意片都是 $\mathbb{F}G$ 的实质广义片。

以下实质性的判据将在下文命题 3.2 中以更强的定量形式证明。

命题 2.3。设 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}G$ 的一个广义块。记 $\overline{N}_P(Q) = N_P(Q)/Q$。记 $N_P(Q_\phi)$ 为 Q_ϕ 在 P 中的稳定子，并记 $\overline{N}_P(Q_\phi) = N_P(Q_\phi)/Q$。设 $\overline{N}_P(Q_\phi) \le S \le \overline{N}_P(Q)$。那么，当且仅当简单 $\mathbb{F}(C_G(Q)\rtimes S)$- 模 $V(\phi_{\rtimes\overline{S}})$ 限制为一个具有非零自由直和项的 $\mathbb{F}S$- 模时，$P\!\uparrow\! Q_\phi$ 才是实质的。

该命题给出了一种判定给定广义块 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是否实质的方法。设 $T = \overline{N}_P(Q_\phi)$。显然，$\mathbb{F}C_G(Q)$ 成为一个 T-代数。通过 $V(\phi)$ 的表示，我们将 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V(\phi))$ 视为一个 T-代数。由于上同调群 $H^1(S,\mathbb{F}^\times)$ 和 $H^2(S,\mathbb{F}^\times)$ 是平凡的，$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V(\phi))$ 的 T-代数结构以唯一的方式扩充为内 T-代数结构。因此，$V(\phi)$ 成为一个 $\mathbb{F}T$-模。当且仅当将 $V(\phi)$ 视为一个 $\mathbb{F}T$-模时，正则 $\mathbb{F}T$- 模是 $V(\phi)$ 的一个直和项，广义块 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 才是实质的。

我们注意到该命题的一个直接推论。

推论 2.4. 设 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}G$ 的一个广义块，且 $Q \le P' \le P$。
(1) 若 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是实质的，则 $P'\!\uparrow\! Q_\phi$ 是实质的。(2) 若 $N_P(Q_\phi) \le P'$ 且 $P'\!\uparrow\! Q_\phi$ 是实质的，则 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 是实质的。

对于 $\mathbb{F}G$ 的任意片 $P\!\uparrow\! Q_\phi$，我们现在构造一个 $\mathbb{F}(G\times P)$-模 $\mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q_\phi)$，称为 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 的对角模。继续选取 Q_ϕ，令

$$N = N_{G\times P}(\Delta(Q)) = (C_G(Q)\times 1)\Delta(N_P(Q))\,, \qquad \overline{N} = \overline{N}_{G\times P}(\Delta(Q)) \cong C_G(Q)\rtimes\overline{P}\,.$$

通过典范同构 $C_G(Q) \cong (C_G(Q)\times 1)\Delta(Q)/\Delta(Q)$，我们将 $C_G(Q)$ 嵌入 $\overline{N}$，并构造诱导的 $\mathbb{F}\overline{N}$-模

$$\overline{\mathrm{Dia}}^0_G(P\!\uparrow\! Q_\phi) = {}_{\overline{N}}\mathrm{Ind}_{C_G(Q)}(E(\phi)) \cong {}_{\overline{N}}\mathrm{Iso}_{C_G(Q)\rtimes\overline{P}}(E(\phi_{\rtimes\overline{P}}))$$

它是不可分解且射影的。我们定义膨胀的 $\mathbb{F}N$-模

$$\mathrm{Dia}^0_G(P\!\uparrow\! Q_\phi) = {}_N\mathrm{Inf}_{\overline{N}}(\overline{\mathrm{Dia}}^0_G(P\!\uparrow\! Q_\phi))$$

它是一个以 $\Delta(Q)$ 为顶点的不可分解模。我们将 $\mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q_\phi)$ 定义为与 $\mathrm{Dia}^0_G(P\!\uparrow\! Q_\phi)$ 格林对应、以 $\Delta(Q)$ 为顶点的不可分解$\mathbb{F}(G\times P)$-模。容易验证，给定 Q_ϕ 的一个 P-共轭 $Q'_{\phi'}$，则 $\mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q_\phi) \cong \mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q'_{\phi'})$。因此，$\mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q_\phi)$ 由 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 唯一确定至同构，且与 Q_ϕ 的选择无关。下面的结果表明，事实上，$\mathrm{Dia}_G(P\!\uparrow\! Q_\phi)$ 由 $P\!\uparrow\! Q_\phi$ 唯一确定。

引理 2.5. 设 P 是 G 的一个 p-子群，且 Q_ϕ 和 $Q'_{\phi'}$ 是 $\mathbb{F}G$ 的片，使得 $P \geq Q$ 且 $P \geq Q'$。那么，$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong \mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q'_{\phi'})$ 当且仅当 $P{\uparrow}Q_\phi = P{\uparrow}Q'_{\phi'}$。

证明。一个方向的结论此前已得到证明。反过来，假设 $\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong \mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q'_{\phi'})$。考察顶点可知，$\Delta(Q)$ 和 $\Delta(Q')$ 是 $G\times P$-共轭的，因此 Q 和 Q' 是 P-共轭的，我们不妨假设 $Q = Q'$。考察 Green 对应可知，$E(\phi_{\times\overline{P}}) \cong E(\phi'_{\times\overline{P}})$。由引理 2.2，$\phi$ 和 ϕ' 属于 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}C_G(Q))$ 的同一个 $\overline{P}$-轨道，因此 Q_ϕ 和 $Q_{\phi'}$ 是 P-共轭的。 □

我们将利用以下关于对角模 $\mathrm{Dia}(P{\uparrow}Q_\phi$ 的刻画).

引理 2.6。给定 $P{\uparrow}Q_\phi$ 上的一个广义块 $\mathbb{F}G$，则

$$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong {}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{G\times Q}(\mathrm{Dia}_G(Q_\phi)) .$$

证明。根据定义，$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi)$ 是同构意义下唯一的不可分解 $\mathbb{F}(G\times P)$-模，其顶点为 $\Delta(Q)$，并且它是 $\mathbb{F}(G\times P)$-模的一个直和项

$$L = {}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{N_{G\times P}(\Delta(Q))}\mathrm{Inf}_{\overline{N}_{G\times P}(\Delta(Q))}\mathrm{Ind}_{C_G(Q)}(E(\phi)) .$$

作为一个特例，$\mathrm{Dia}_G(Q_\phi)$ 是具有顶点 $\Delta(Q)$、且作为 $\mathbb{F}(G\times Q)$-模直和项出现的唯一（在同构意义下）不可分解模

$$M = {}_{G\times Q}\mathrm{Ind}_{N_{G\times Q}(\Delta(Q))}\mathrm{Inf}_{C_G(Q)}(E(Q))$$

其中膨胀是经由典范满同态 $N_{G\times Q}(\Delta(Q)) \to \overline{N}_{G\times Q}(\Delta(Q)) \cong C_G(Q)$ 进行的。利用 Bouc [Bou10, 2.3.24]，中关于双集的 Mackey 公式，我们得到双集等式

$${}_{N_{G\times P}(\Delta(Q))}\mathrm{Inf}_{\overline{N}_{G\times P}(\Delta(Q))}\mathrm{Ind}_{C_G(Q)} \cong {}_{N_{G\times P}(\Delta(Q))}\mathrm{Ind}_{N_{G\times Q}(\Delta(Q))}\mathrm{Inf}_{C_G(Q)} .$$

因此，$L \cong {}_{G\times P}\mathrm{Ind}^{G\times Q}(M)$。于是，记 $D = {}_{G\times P}\mathrm{Ind}^{G\times Q}(\mathrm{Dia}_G(Q_\phi))$，则 D 是 L 的直和项。根据 Green 不可分解判据，D 是顶点为 $\Delta(Q)$ 的不可分解模。由 $\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi)$ 的唯一性可知，$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong D$。 □

将一个 $\mathbb{F}(G\times P)$-模写成 ${}_GM_P$ 的形式，表示 $G\times 1$ 和 $1\times P$ 的作用分别是左平移和右平移。给定 $\mathbb{F}G$-模 L 和 M，当 L 同构于 M 的一个直和项时，我们记作 $L \,|\, M$。下一条结果的一个更强的定量版本将在下文以命题 3.5 的形式给出

命题 2.7. 广义片 $P{\uparrow}Q_\phi$ on $\mathbb{F}G$ 是实质的，当且仅当

$$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \,|\, {}_G\mathbb{F}G_P .$$

我们的主要结果是对 $\mathbb{F}G$ 上的带点 p-群进行如下分类。我们将在下一节证明这一结果。

定理 2.8. 以下两者之间存在 G-等变双射对应：

- p 上的带点群 P_α on $\mathbb{F}G$,
- 实质广义块 $P'{\uparrow}Q_\phi$,

使得 $P_\alpha \leftrightarrow P'{\uparrow}Q_\phi$ 当且仅当 $P = P'$ 且，令 Q_δ 为与片 Q_ϕ 对应的局部带点群（位于 $\mathbb{F}G$ 上），再令 $i \in \alpha$，则以下两个等价条件成立：

(a) Q_δ 是 P_α 的极大局部带点子群，(b) 我们有

$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong {}_G(\mathbb{F}Gi)_P$。

定理 2.1 和定理 2.8 中的双射对应与块的相容方式如下。设 b 是 $\mathbb{F}G$ 的一个块。若 $\mathrm{br}_P(b)$ 在 $\mathbb{F}C_G(P)$-模 $E(\theta)$ 上作用为恒等映射，则称 P_θ （$\mathbb{F}G$ 的一个片）为 $\mathbb{F}Gb$ 的片。显然，令 P_γ 为与 P_θ 对应的、在 $\mathbb{F}G$ 上的局部带点群，则 P_θ 是 $\mathbb{F}Gb$ 的片，当且仅当 P_γ 是 $\mathbb{F}Gb$ 上的局部带点群。若 Q_ϕ 是 $\mathbb{F}Gb$ 的片，则称 $P{\uparrow}Q_\phi$ （$\mathbb{F}G$ 的一个广义块）为 $\mathbb{F}Gb$ 的广义块。定理 2.8 有如下直接推论。

推论 2.9. 设 b 是 $\mathbb{F}G$ 的一个块。设 P_α 是 $\mathbb{F}G$ 上的一个带点 p-群。设 $P{\uparrow}Q_\phi$ 是与 P_α 对应的 $\mathbb{F}G$ 的实质广义片。那么以下三个条件等价:

(a) P_α 是 $\mathbb{F}Gb$ 上的一个带点 p-群，(b) $P{\uparrow}Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}Gb$ 的一个片，
(c) 我们有 $\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi)\,|_G(\mathbb{F}Gb)_P$。

3 更强的定量结果

我们将定义广义片的绝对重数。这将使我们能够证明命题 2.3、2.7 和定理 2.8 的更强定量版本。

对于任意带点群 U_μ，我们用 $m(U_\mu)$ 表示 U_μ 的绝对重数，也就是说，μ 中两两正交元素集合的最大大小。给定 $\mathbb{F}G$ 的一个片 P_θ，我们将 P_θ 的绝对重数定义为

$$m(P_\theta) = \theta(1) = \dim_{\mathbb{F}}(V(\theta))\,.$$

下面的注记说明，定理 2.1 中的双射对应保持绝对重数。

注记 3.1. 设 P_γ 上的局部带点群 $\mathbb{F}G$ 对应于 $\mathbb{F}G$ 上的片 P_θ，则 $m(P_\gamma) = m(P_\theta)$。

证明. 令 $i \in \gamma$，则 $m(P_\gamma)$ 和 $m(P_\theta)$ 都等于射影不可分解 $\mathbb{F}C_G(P)$-模 $\mathbb{F}C_G(P)\mathrm{br}_P(i)$ 作为正则 $\mathbb{F}C_G(P)$-模的直和项时的重数。

□

为证明上一节中的结果，我们需要将绝对重数的概念扩展到广义片段。设 $\mathbb{F}G$-模 L 和 M，其中 L 不可分解，我们用 $m(L, M)$ 表示 L 作为 M 的直和项时的重数。

设 $\mathbb{F}G$ 上有一个广义片 $P{\uparrow}Q_\phi$。和之前一样，我们对 Q_ϕ 作出选择。同样，我们记为 $\overline{P} = N_P(Q)$，并考虑简单的 $\mathbb{F}(C_G(Q){\times}\overline{P})$-模 $V(\phi_{{\times}\overline{P}})$。我们将 $P{\uparrow}Q_\phi$ 的绝对重数定义为自然数

$$m(P{\uparrow}Q_\phi) = m(\mathbb{F}\overline{P}, {}_{\overline{P}}\mathrm{Res}_{C_G(Q){\times}\overline{P}}(V(\phi_{{\times}\overline{P}})))$$

其中，$\mathbb{F}\overline{P}$ 表示正则 $\mathbb{F}\overline{P}$-模。显然，$m(P{\uparrow}Q_\phi)$定义良好，且与 Q_ϕ的选择无关。注意，对于 $\mathbb{F}G$的一个片 P_θ，绝对重数 $m(P_\theta) = m(P{\uparrow}P_\theta)$是明确无歧义的。当且仅当 $m(P_\theta) \neq 0$时，广义块 $P{\uparrow}Q_\phi$是实质的。

下一个结果是命题 2.3 的一个更强的定量版本。

命题 3.2. 设 $P\uparrow Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}G$ 上的一个广义块。设 $\overline{N}_P(Q_\phi) \leq S \leq \overline{N}_P(Q)$。那么

$$m(P\uparrow Q_\phi) = m(\mathbb{F}S, {}_S\mathrm{Res}_{C_G(Q)\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S}))) .$$

证明。设 $C = C_G(Q)$ 和 $T = \overline{N}_P(Q_\phi)$。定义 $m_S = m(\mathbb{F}S, {}_S\mathrm{Res}_{C_G(Q)\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S})))$。考察 $S = \overline{N}_P(Q)$ 的情形可知，只需证明 $m_T = m_S$。我们有 ${}_C\mathrm{Res}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T})) \cong V(\phi)$，并且

$${}_C\mathrm{Res}_{C\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S})) \cong \bigoplus_{{}^sT\subseteq S} {}^sV(\phi) .$$

因此 $\dim_{\mathbb{F}}(V(\phi_{\rtimes S})) = |S : T| \dim_{\mathbb{F}}(V(\phi_{\rtimes T}))$。

由于 $C\rtimes T$ 是 $C\rtimes S$ 的次正规子群，Clifford 定理蕴含 ${}_{C\rtimes T}\mathrm{Res}_{C\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S}))$ 是半单的。然而， $V(\phi)$ 出现在半单的 $\mathbb{F}C$-模 ${}_C\mathrm{Res}_{C\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S}))$ 中，并且 $V(\phi_{\rtimes T})$ 是唯一（同构意义下）的简单 $\mathbb{F}(C\rtimes T)$-模，使得 $V(\phi)$ 出现在半单的$\mathbb{F}(C\rtimes T)$-模 ${}_C\mathrm{Res}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T}))$ 中。因此， $V(\phi_{\rtimes T})$ 出现在半单的 $\mathbb{F}(C\rtimes T)$-模 ${}_{C\rtimes T}\mathrm{Res}_{C\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S}))$ 中。根据弗罗贝尼乌斯互反律， $V(\phi_{\rtimes S})$ 同构于 ${}_{C\rtimes S}\mathrm{Ind}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T}))$ 的一个子模。由维数考察可得

$$V(\phi_{\rtimes S}) \cong {}_{C\rtimes S}\mathrm{Ind}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T})) .$$

根据麦基分解,

$${}_S\mathrm{Res}_{C\rtimes S}(V(\phi_{\rtimes S})) \cong {}_S\mathrm{Ind}_T\mathrm{Res}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T})) .$$

所需的等式 $m_T = m_S$ 成立，因为对于 ${}_T\mathrm{Res}_{C\rtimes T}(V(\phi_{\rtimes T}))$ 的任意不可分解直和项 M， M是自由的，当且仅当 ${}_S\mathrm{Ind}_T(M)$ 是自由的。 □

我们将需要 Brou´e [Bro85, 3.2] 的以下结果。给定一个 p-子群 S （属于G）和一个 $\mathbb{F}G$-模 M，我们将 $\mathbb{F}\overline{N}_G(S)$-模 $M(S)$ 定义为 M^S 除以迹映射 $\mathrm{tr}_T^S\colon M^T \to M^S$ 的像之和所得的商，其中这些映射遍历所有真子群$T < S$。

命题 3.3。（Brou´e。）设 S 是 G 的一个 p-子群， E 是一个不可分解的投射 $\mathbb{F}\overline{N}_G(S)$-模， F 是一个顶点为 S 的不可分解 $\mathbb{F}G$-模，并且它在格林对应下对应于膨胀后的 $\mathbb{F}N_G(S)$-模 ${}_{N_G(S)}\mathrm{Inf}_{\overline{N}_G(S)}(E)$。设 M 是一个 p-置换$\mathbb{F}G$-模。则 $m(F, M) = m(E, M(S))$。

另一个 必要的要素是 Robinson 的下述结果 [Rob89，命题 1].

Proposition 3.4.（Robinson。）给定 $\xi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}G)$ 和 G 的一个 p-子群 S， n

$$m(E(\xi), \mathbb{F}G/S) = m(\mathbb{F}S, {}_S\mathrm{Res}_G(V(\xi))) .$$

下一个结果蕴含命题 2.7；更确切地说，它根据相应的对角模刻画了广义块的重数。

命题 3.5. 给定 $P\uparrow Q_\phi$ 上的广义块 $\mathbb{F}G$，则

$$m(P\uparrow Q_\phi) = m(\mathrm{Dia}_G(P\uparrow Q), {}_G\mathbb{F}G_P) .$$

证明. 令 $m = m(\mathrm{Dia}_G(P\uparrow Q)\ {}_G\mathbb{F}G_P)$。根据命题 3.3,

$$m(\mathrm{Dia}_G(P\uparrow Q_\phi), M) = m(\overline{\mathrm{Dia}}^0_G(P\uparrow Q_\phi), M(\Delta(Q)))$$

对于任意 p-置换 $\mathbb{F}(G\times P)$-模 M。令 $M = {}_G\mathbb{F}G_P$。令 N和 $\overline{N}$如第 2 节所述。定义 $L = {}_N\mathrm{Res}_{G\times P}(M)$。则 $M(\Delta(Q)) = L(\Delta(Q))$ 并且

$$m = m(\overline{\mathrm{Dia}}^0_G(P\uparrow Q_\phi), L(\Delta(Q))) .$$

令 $\Gamma \subseteq G$ 满足 $1 \in \Gamma$ 和 $\{(g,1)\colon\ g \in \Gamma\}$ 是 $N\backslash(G\times P)/\Delta(P)$ 的双陪集代表元集。对每个 $g \in \Gamma$，我们定义一个置换 $\mathbb{F}N$-模 $L_g = \mathbb{F}N/H_g$，其中 $H_g = N \cap {}^g\Delta(P)$。由于 $M \cong \mathbb{F}(G \times P)/\Delta(P)$，由麦基分解可得

$$L(\Delta(Q)) \cong \bigoplus_{g\in\Gamma} L_g(\Delta(Q)) .$$

固定 $g \in \Gamma$ 使得 $L_g(\Delta(Q)) \neq 0$。则 $\Delta(Q) \leq H_g \leq {}^g\Delta(P)$，因此 $g \in C_G(Q)$ 且 $(g,1) \in N$。条件 $1 \in \Gamma$ 蕴含 $g = 1$。因此，$L(\Delta(Q)) \cong L_1(\Delta(Q))$。由于 $H_1 = \Delta(N_P(Q))$，我们有 $L(\Delta(Q)) \cong \mathbb{F}\overline{N}/\overline{P}$。我们已经证明

$$m = m({}_{\overline{N}}\mathrm{Ind}_{C_G(Q)}(E(\phi)), \mathbb{F}\overline{N}/\overline{P}) .$$

鉴于同构 $\overline{N} \cong C_G(Q)\rtimes\overline{P}$，引理 2.2 得出

$$m = m(E(\phi_{\rtimes\overline{P}}), \mathbb{F}(C_G(Q)\rtimes\overline{P})/\overline{P}) .$$

引理 3.4 现在推出 $m = m(P\uparrow Q_\phi)$ 。 □

我们将需要两个抽象引理。我们用 $\leq$ 表示环上幂等元的通常偏序。

引理 3.6 。对于 $\mathbb{F}G$ 上的任意局部带点群 P_γ，存在 $i \in \gamma$ 使得 $i \leq \mathrm{br}_P($ $i)$.

证明。设 $i_0 \in \gamma$。于是 $\mathrm{br}_P(i_0\mathrm{br}_P(i_0)) = \mathrm{br}_P(i_0) \notin J(\mathbb{F}C_G(P))$. 因此 $i_0\mathrm{br}_P(i_0) \notin J((\mathbb{F}G)^P)$。由此可知，对某个 $i \in \gamma$，有 $i \leq \mathrm{br}_P(i_0)$。我们有 $\mathrm{br}_P(i) \leq \mathrm{br}_P(\mathrm{br}_P(i_0)) = \mathrm{br}_P(i_0)$。但是 $\mathrm{br}_P(i_0)$ 是 $\mathbb{F}C_G(P)$ 的本原幂等元。因此，$\mathrm{br}_P(i) = \mathrm{br}_P(i_0)$。 □

我们指出，该引理的证明得出了一个更强的结果，即对于所有$i_0 \in \gamma$，都存在满足 $i \leq \mathrm{br}_P(i) = \mathrm{br}_P(i_0)$ 的 $i \in \gamma$。

引理 3.7. 设 P_α 是 $\mathbb{F}G$ 上的一个带点 p-群。给定 $i \in \alpha$，则 $\mathbb{F}(G\times P)$-模 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 是不可分解的。给定 $Q \leq P$，则 Q 是 P_α 的缺陷群，当且仅当 $\Delta(Q)$ 是 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 的一个顶点。

证明. 用 $\circ$ 表示一个对代数，存在一个内部 P-代数同构

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}(G\times 1)}(\mathbb{F}Gi) \cong (i\mathbb{F}Gi)^\circ$$

使得，给定 $r \in \mathrm{End}^{\mathbb{F}(G\times 1)}(\mathbb{F}Gi)$ 和 $a \in i\mathbb{F}Gi$，则 $r \leftrightarrow a^\circ$ provided $r(x) = xa$对所有 $x \in \mathbb{F}Gi$ 都成立。因此 $\mathrm{End}^{\mathbb{F}(G\times P)}(\mathbb{F}Gi) \cong ((i\mathbb{F}Gi)^P)^\circ$，这是一个局部代数。因此，${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 是不可分解的。由于 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 是 $\mathbb{F}(G\times P)$-模 ${}_G\mathbb{F}G_P \cong \mathbb{F}(G\times P)/\Delta(P)$ 的一个直和项，${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 的某个顶点包含于 $\Delta(P)$ 中。

设 Q 是 P_α 的一个缺陷群。令 $a \in (i\mathbb{F}Gi)^Q$，使得 $i = \mathrm{tr}_Q^P(a)$。令 $r \in \mathrm{End}^{\mathbb{F}(G\times Q)}(\mathbb{F}Gi)$，使得 $r \leftrightarrow a^\circ$。则 $\mathrm{tr}_{G\times Q}^{G\times P}(r) = \mathrm{tr}_\Delta^{\Delta(P)}(Q)(r) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}Gi}$。因此，$G\times Q$ 包含 $\mathbb{F}Gi$ 的一个顶点 S。但是，对于某个 $(g,u) \in G\times P$，有 $S \leq {}^{(g,u)}\Delta(P)$。因此，$\mathbb{F}Gi$ 的顶点 ${}^{(ug^{-1},1)}S$ 包含于子群 $(G\times Q) \cap \Delta(P) = \Delta(Q)$ 中。

对于反向包含关系，设 $\Delta(Q)$ 是 $\mathbb{F}Gi$ 的一个顶点。取 $r \in \mathrm{End}^{\mathbb{F}(G\times Q)}(\mathbb{F}Gi)$，使得 $\mathrm{tr}_{G\times Q}^{G\times P}(r) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}Gi}$。取 $a \in (i\mathbb{F}Gi)^Q$，使得 $r \leftrightarrow a^\circ$。于是 $i = \mathrm{tr}_Q^P(a)$。由此可得，Q 包含 P_α 的一个缺陷群。 □

命题 3.8. 设 P_γ 是 $\mathbb{F}G$ 上的一个局部带点群。设 P_θ 是 $\mathbb{F}G$ 中对应于 P_γ 的片。设 $i \in \gamma$。那么 $\mathrm{Dia}_G(P_\theta) \cong {}_G(\mathbb{F}Gi)_P$。

证明. 容易验证，$\mathbb{F}(G\times P)$-模 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 的同构类由 P_γ 决定，与 i 无关。因此，根据引理 3.6，我们不妨设 $i \leq \mathrm{br}_P(i)$。令 $\mathrm{br}_P(i) = i + \sum_k k$ 为 $(\mathbb{F}G)^P$ 中的一个本原幂等元分解。根据引理 3.7，

$$ {}_G(\mathbb{F}G\mathrm{br}_P(i))_P = {}_G(\mathbb{F}Gi)_P \oplus \bigoplus_k {}_G(\mathbb{F}Gk)_P$$

作为不可分解 $\mathbb{F}(G\times P)$-模的直和。每个 k 的缺陷群 Q_k 都严格包含于 P中。由同一引理，${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 的顶点为 $\Delta(P)$，而每个 ${}_G(\mathbb{F}Gk)_P$ 的顶点为$\Delta(Q_k)$。经由典范满同态 $N_{G\times P}(\Delta(P)) \to C_G(P)$膨胀后，我们得到

$$\mathbb{F}C_G(P)\mathrm{br}_P(i) \cong {}_{N_{G\times P}(\Delta(P)}\mathrm{Inf}_{C_G(P)}(E(\theta)) \cong \mathrm{Dia}_G^0(P_\theta)\ .$$

作为 $\mathbb{F}N_{G\times P}(\Delta(P))$-模的直和，

$$\mathbb{F}G\mathrm{br}_P(i) = \mathbb{F}C_G(P)\mathrm{br}_P(i) \oplus \mathbb{F}(G - C_G(P))\mathrm{br}_P(i)\ .$$

P 对 $G - C_G(P)$的共轭作用没有不动点，因此 $\mathbb{F}(G - C_G(P))\mathrm{br}_P(i)$的每个不可分解直和项的顶点都严格包含于 $\Delta(P)$。所需的同构现由格林对应定理得出。 □

下一个结果是 Puig 的一个定理，可见 Linckelmann [Lin18, 5.12.20] 或 Th´evenaz [The95, 18.3]。

定理 3.9。（Puig。）设 Q_δ 是 $\mathbb{F}$上的 G-代数 A 上的一个局部带点群。设 P_α 是 A 上的一个带点群，且满足 $Q \leq P$。设 $i \in \alpha$。那么，Q_δ 是 P_α 的极大局部带点子群，当且仅当存在 $j \in \delta$，使得 $i = \mathrm{tr}_Q^P(j)$，并且 $\{{}^x j : xQ \subseteq P\}$ 是一组两两正交幂等元。

我们还将使用 [BG22, 3.1] 中的以下结果。

定理 3.10。设 Q_δ 是 $\mathbb{F}$上的 G-代数 A上的一个局部带点群。设 P 是 G 的一个 p-子群，且满足 $Q \leq P$。那么至多存在一个 A 上的 P 的点 α，使得 Q_δ 是 P_α的极大局部带点子群。

引理 3.11. 设 P 是 G 的一个 p-子群，设 α 和 α' 是 P 在 $\mathbb{F}G$ 上的点，且设 $i \in \alpha$ 和 $i' \in \alpha'$。那么 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P \cong {}_G(\mathbb{F}Gi')_P$ 当且仅当 $\alpha = \alpha'$。

证明. 若 $\alpha = \alpha'$，则该同构显然。反之，假设该同构成立。引理 3.7 蕴含 P_α 和 $P_{\alpha'}$ 有一个公共缺陷群 Q。设 δ 和 δ' 是 Q 在 $\mathbb{F}G$ 上的局部点，使得 Q_δ 和 $Q_{\delta'}$ 分别是 P_α 和 $P_{\alpha'}$ 的极大局部带点子群。根据定理 3.9，存在 $j \in \delta$ 和 $j' \in \delta'$，使得 $i = \mathrm{tr}_Q(j)$ 可写为 $|P$ 之和：$Q|$ 两两正交幂等元；对于 i' 和 j'，同理。我们有

$$ {}_G(\mathbb{F}Gi)_P \cong {}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{G\times Q}(\mathbb{F}Gj)\ . $$

将其限制到 $G\times Q$，然后应用麦基分解，

$$ (\mathbb{F}Gi)(\Delta(Q)) \cong ({}_{G\times Q}\mathrm{Res}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{G\times Q}(\mathbb{F}Gj))(\Delta(Q)) \cong \bigoplus_{xQ\subseteq N_P(Q)} \mathbb{F}C_G(Q)\,\mathrm{br}_Q({}^xj) $$

对于 i' 和 j'，同理。因此，对于某个 $x \in N_P(Q)$，$\mathbb{F}C_G(Q)\,\mathrm{br}_Q(j') \cong \mathbb{F}C_G(Q)\,\mathrm{br}_Q({}^xj)$。于是，$\delta' = {}^x\delta$。所以我们可以假设 $\delta' = \delta$。由定理 3.10，$\alpha = \alpha'$。 □

现在证明定理 2.8。对于 G 的每个 p-子群 P，引理 2.5 和 3.11 表明，$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi)$ 和 ${}_G(\mathbb{F}Gi)_P$ 的同构类分别确定 $P{\uparrow}Q_\phi$ 和 P_α。因此，命题 3.5 和 3.8 表明，条件 (b) 刻画了一个双射对应$P_\alpha \leftrightarrow P{\uparrow}Q_\phi$。

只需证明条件 (a) 和 (b) 等价。设 Q_δ 是与 Q_ϕ 对应的局部带点群。设 $j \in \delta$。由命题 3.8，$\mathrm{Dia}_G(Q_\phi) \cong {}_G(\mathbb{F}Gj)_Q$。因此，由引理 2.6，

$$ \mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\phi) \cong {}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{G\times Q}(\mathbb{F}Gj)\ . $$

若 (a) 成立，那么根据定理 3.9，我们可以选择 j，使得 $i = \mathrm{tr}_Q^P(j)$ 可表示为 $|P : Q|$ 个两两正交幂等元之和。由此可得 (b)。

反过来，假设 (b) 成立。根据引理 3.7，P_γ 的缺陷群为 Q。取 Q 上 $\mathbb{F}G$ 的一个点 δ'，使得 P_γ 的极大局部带点子群为 $Q_{\delta'}$。根据我们已经证明的结果，$\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_{\delta'}) \cong \mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}Q_\delta)$。由引理 2.5，$P{\uparrow}Q_{\delta'} = P{\uparrow}Q_\delta$。因此，$Q_{\delta'}$ 和 Q_δ 是 P-共轭的，故 (a) 成立。定理 2.8 的证明至此完成。

请注意，该定理中的双射对应在以下意义下保持绝对重数。

命题 3.12. 设 P_α 是 $\mathbb{F}G$ 上的一个带点 p-群。设 $P{\uparrow}Q_\phi$ 是 $\mathbb{F}G$ 上与 P_α 对应的实质广义片。那么 $m(P_\alpha) = m(P{\uparrow}Q_\phi)$。

证明。由命题 3.5 可立即得出 □

4 S_4 和 S_5的主 2-块

我们将通过一种涉及计算绝对重数的方法，确定S_4 和 S_5的主 2-块的实质广义片段之间的相对重数。该方法基于定理 2.8、推论 2.9 和命题 3.12 的一个直接推论。

推论 4.1. 给定 G 的一个 p 子群 P，则我们有一个 $\mathbb{F}(G\times P)$-同构

$$ {}_G\mathbb{F}G_P \cong \bigoplus_{Q_\phi} m(P{\uparrow}Q_\phi)\,{}_G(\mathbb{F}Gi_{Q_\phi})_P $$

其中， Q_ϕ 遍历满足广义片$P\uparrow Q_\phi$ 为实质的 $\mathbb{F}G$ 的片在 P 共轭下的共轭类，而 i_{Q_ϕ} 是 $\mathbb{F}G$ 上 P 的点 α 中的一个元素，并且 P_α 是 $\mathbb{F}G$ 上对应于 $P\uparrow Q_\phi$ 的局部带点群。此外，给定 $\mathbb{F}G$ 的一个块 b ，则

$$_G(\mathbb{F}Gb)_P \cong \bigoplus_{Q_\phi} m(P\uparrow Q_\phi)\,{}_G(\mathbb{F}Gi_{Q_\phi})_P$$

其中 Q_ϕ 现在 遍历满足 $P\uparrow Q_\phi$ 为实质片的 $\mathbb{F}Gb$ 的片的 P-共轭类 .

考虑 $\mathbb{F}G$的一个块 b 。我们对 $\mathbb{F}Gb$ 的片集 $\mathcal{P}(\mathbb{F}Gb)$以及 $\mathbb{F}Gb$的实质广义片集 $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$所具有的一些组合结构作些评论。我们将多重偏序集理解为这样一种偏序集：每个包含关系 $x' \leq x$ 都与一个自然数 $m(x', x)$相关联，该数称为 x中 x' 的重数。我们将$\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$视为一个偏序集：给定 $P'\uparrow Q'_{\phi'}, P\uparrow Q_\phi \in \mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$，若满足$P' \leq P$且相对重数 $m(P'\uparrow Q'_{\phi'}, P\uparrow Q_\phi)$非零，则有 $P'\uparrow Q'_{\phi'} \leq P\uparrow Q_\phi$。我们将 $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$视为一个多重偏序集，其重数即为相对重数。显然， $\mathcal{P}(\mathbb{F}Gb)$是 $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$的子多重偏序集。

根据第1节中关于相对重数的矩阵关系，相对重数的整个族 $m(P'\uparrow Q'_{\phi'}, P\uparrow Q_\phi)$ 由满足 $P' \leq P$和 $|P\colon\ P'| = p$ 的那些相对重数确定。作为偏序集， $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$ 的哈斯图中，从 $P'\uparrow Q'_{\phi'}$ 向上到 $P\uparrow Q_\phi$ 有一条线，当且仅当关于 P' 和 P 的条件成立。因此， $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}Gb)$ 的结构由带标记的哈斯图确定，其中从一个元素 $P'\uparrow Q'_{\phi'}$ 向上到一个元素 $P\uparrow Q_\phi$ 的每条线都标注为 $m(P'\uparrow Q'_{\phi'}, P\uparrow Q_\phi)$。

设 $p = 2$。令 $H = S_4$。 $\mathbb{F}H$ 的主块是 $\mathbb{F}H$ 的唯一块。设 D 为 H 的 Sylow 2-子群。我们有 $D \cong D_8$，即阶为8的二面体群。令

$$\mathbb{S} = \{1, C_2, C_2', Z, C_4, V_4, V_4', D\}$$

是 D 的子群在 D 共轭作用下的代表元集合，按照同构类命名，并满足 $Z =_G C_2 < V_4$。令 $\mathbb{P}_H$ 为 $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}H)$ 的子多重偏序集，其中包含 $\mathbb{F}H$ 上形如 $P\uparrow Q_\phi$ 且满足 P、 $Q \in \mathbb{S}$ 的实质广义片。 $\mathbb{P}_H$ 的元素构成 $\mathbb{F}H$ 中形如 $P\uparrow Q_\phi$ 且满足 $P \leq D$ 的实质广义片在 D 共轭作用下的代表元集合。因此，标注了相对重数的 $\mathbb{P}_H$ 哈斯图将完整描述多重偏序集 $\mathcal{P}^|(\mathbb{F}H)$。

确定 $\mathbb{P}_H$ 中的片将很直接。为了找出 $\mathbb{P}_H$ 的其他元素，我们将使用判定广义片实质性的克利福德理论判据。该判据已在命题 2.3 的陈述之后紧接着给出。

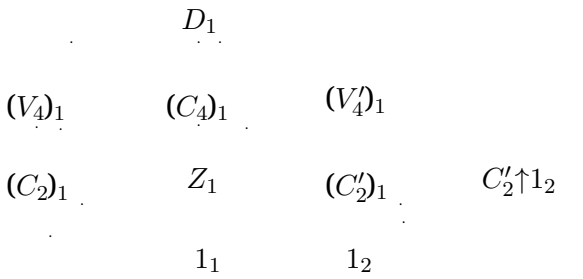
为了简洁地表示 $\mathbb{F}H$ 的片，我们先约定一些记号。对于任意子群 $L \leq H$，记 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}L)$ 为 $= \{\theta_1^L, \theta_2^L, ...\}$，并按如下方式编号： θ_1^L 是平凡的 $\mathbb{F}L$-特征标。对于任意 p-子群 $P \leq H$，记 $P_i = P_{\theta_i^C}$，其中 $C = C_H(P)$。我们有 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}H) = \{\theta_1^H, \theta_2^H\}$。对于所有 $P \in \mathbb{S} - \{1\}$，中心化子 $C_H(P)$ 是一个 p-群，因此 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}C_G(P)) = \{\theta^{C_H(P)}{}_1 \quad\}$。因此， $\mathbb{P}_H$ 中的片为

$$1_1, 1_2, (C_2)_1, (C_2')_1, Z_1, (C_4)_1, (V_4)_1, (V_4')_1, D_1.$$

我们断言， $\mathbb{P}_H$ 的另一个唯一元素是 $C_2'\uparrow 1_2$。为证明这一断言，我们首先注意到，对所有 $Q \in \mathbb{S}$，都有 $\theta^{C_H(Q)}{}_1\ (\mathbf{1}) = 1$，因此不存在满足以下条件的元素 $P\uparrow Q_1 \in \mathbb{P}_H$

$P > Q$。 $V(\theta_2^H)$的核是 V_4。因此，给定 $P \in \mathbb{S}$，当且仅当 $P \in \{\{1, C_2'\}$时， ${}_P\mathrm{Res}_H(V(\theta_2^H))$含有非零自由直和项。断言得证。

回顾一下，片的绝对重数是相应不可约特征标的次数。对于 $\mathbb{P}_H$ 中唯一一个不是片的元素，我们有 ${}^{C_2'}\mathrm{Res}_H(V(\theta_2^H)) \cong \mathbb{F}C_2'$，其绝对重数为 $m(C_2'\uparrow 1_2) = 1$。应用推论 4.1， ${}_H\mathbb{F}G_1 \cong \mathrm{Dia}_H(1_1) \oplus 2\,\mathrm{Dia}_H(1_2)$。此外，对于 $R \in \mathbb{S} - \{1, C_2'\}$， ${}_H\mathbb{F}H_{C_2'} \cong \mathrm{Dia}_H((C_2')_1) \oplus \mathrm{Dia}_H(C_2'\uparrow 1_2)$，且 ${}_H\mathbb{F}H_R \cong \mathrm{Dia}_H(R_1)$。由引理 2.6 和麦基分解， ${}_{H\times 1}\mathrm{Res}^{H\times C_2'}(\mathrm{Dia}_H(C_2'\uparrow 1_2)) \cong 2\,\mathrm{Dia}_H(1_2)$。因此， ${}_{H\times 1}\mathrm{Res}^{H\times C_2'}(\mathrm{Dia}_H((C_2')_1) \cong \mathrm{Dia}_H(1_1)$。于是，多重偏序集 $\mathbb{P}_H$ 的哈斯图如下，其中单线和双线分别表示相对重数 1 和 2。



仍然令 $p = 2$，现在令 $G = S_5$。令 b 为 $\mathbb{F}G$的主块。我们将 H嵌入 G ，并令 D 和 $\mathbb{S}$ 与之前相同。令 $\mathbb{P}_b$ 为 $\mathbb{F}Gb$的实质广义片所构成的多重偏序集，这些实质广义片具有如下形式： $P\uparrow Q_\phi$，其中 P、 $Q \in \mathbb{S}$。 $\mathbb{P}_b$的元素构成了具有如下形式的 $\mathbb{F}Gb$的实质广义片的 D-共轭类的代表元： $P\uparrow Q_\phi$ ，其中 $P \le D$。因此，与之前一样，要确定偏序集 $\mathcal{P}(\mathbb{F}Gb)$，只需展示 $\mathbb{P}_b$的哈斯图，并标注相对重数。

将 H 替换为 G后，我们仍沿用上述简洁表示片和广义片的约定。我们可以选择$\mathbb{F}G$的编号 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G) = \{\theta_1^G, \theta_2^G, \theta_3^G\}$ ，使得 θ_3^G不属于 b。不可约的 $\mathbb{F}G$-特征标 θ_2^G和 θ_3^G的次数均为 4。与片 1_3 对应的局部带点群不在 $\mathbb{F}Gb$上，因此 1_3 不是 $\mathbb{F}Gb$的片。记作$C = C_G(C_2')$，则 $C \cong C_2 \times S_3$。我们有 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}Cb_C) = \{\theta_1^C, \theta_2^C\}$。与之前一样，与$(C_2')_2$ 对应的局部带点群不在 $\mathbb{F}C$的主块代数上，因此$(C_2')_2$ 不是 $\mathbb{F}Gb$的片。给定 $R \in \mathbb{S} - \{1, C_2'\}$，则 $C_G(R)$是一个 p-群。因此， $\mathbb{P}_b$ 中的片为 1_2 和P_1 ，其中 $P \in \mathbb{S}$。

我们断言， $\mathbb{P}_b$的其他元素是 $P\uparrow 1_2$，其中 $P \in \{C_2, C_2', Z, C_4, V_4'\}$。为证明这一断言，对于每个 $P \in \mathbb{S}$，我们将考察简单 $\mathbb{F}G$-模$V = V(\theta_2^G)$对 P 的限制。令 Ω 为 G的 Sylow 5-子群构成的 G-集。注意，作为一个通过限制得到的 D-集，

$$\Omega \cong D/C_4 \sqcup D/C_2 .$$

枚举 $\Omega = \{L_1, ..., L_6\}$。令 $A = \{\sum_i \lambda_i L_i \in \mathbb{F}\Omega : \sum_i \lambda_i = 0\}$ 且 $B = \mathbb{F}\sum_i L_i$。 $\mathbb{F}G$-模 $\mathbb{F}\Omega/A$ 和 B 是平凡的，并且容易证明 $\mathbb{F}\Omega$的 Brauer特征为$2\theta_1^G + \theta_2^G$。因此， $A/B \cong V$。我们有

$$m(P\uparrow 1_2) = \dim_{\mathbb{F}}(P^+.V) = \dim_{\mathbb{F}}((P^+.A + B)/B)$$

其中 P^+表示 P中各元素之和。

如果 $P = C_2'$，那么我们可以选择枚举 L_1, ...，使得 P-轨道为 $\{L_1, L_2\}$,$\{L_3, L_4\}$, $\{L_5, L_6\}$，于是

$$P^+.A = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{L_1 + L_2 + L_5 + L_6, L_3 + L_4 + L_5 + L_6\}$$

而 $B \cap P^+.A = \{0\}$，因此 $m(P{\uparrow}1_2) = 2$。如果 $P \in \{C_2, W\}$，那么我们可以选择该枚举，使得 P-轨道为 $\{L_1, L_2\}, \{L_3, L_4\}, \{L_5\}, \{L_6\}$，于是

$$P^+.A = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{L_1 + L_2, L_3 + L_4\}$$

再次有 $B \cap P^+.A = \{0\}$，因此 $m(P{\uparrow}1_2) = 2$。若 $P \in \{C_4, V_4'\}$，则我们可以选择枚举方式，使得 $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ 是一个 P-轨道，于是

$$P^+.A = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{L_1 + L_2 + L_3 + L_4\}$$

又一次有 $B \cap P^+.A = \{0\}$，因此 $m(P{\uparrow}1_2) = 1$。最后，当 $P \in \{V_4, D\}$ 时，整个 $\mathbb{F}\Omega$ 都被 P^+ 消去，因此 $m(P{\uparrow}1_2) = 0$。断言得证。此外，由于 $\mathbb{P}_b$ 中各片的绝对重数已然明确，我们现已确定 $\mathbb{P}_b$所有元素的绝对重数。

由推论 4.1，

$${}_G(\mathbb{F}Gb)_P = \begin{cases} \mathrm{Dia}_G(1_1) \oplus 4\,\mathrm{Dia}_G(1_2) & \text{if } P = 1, \\ \mathrm{Dia}_G(P_1) \oplus 2\,\mathrm{Dia}(P{\uparrow}1_2) & \text{if } |P| = 2, \\ \mathrm{Dia}_G(P_1) \oplus \mathrm{Dia}(P{\uparrow}1_2) & \text{if } P \in \{C_4, V_4'\}, \\ \mathrm{Dia}_G(P_1) & \text{if } P \in \{V_4, D\}. \end{cases}$$

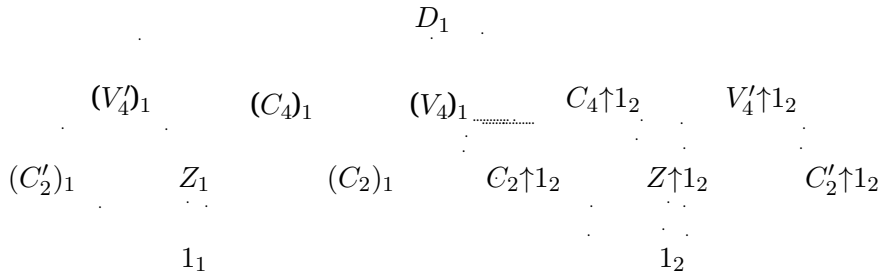
对于 $\mathbb{P}_b$ 中任意形如 $P{\uparrow}1_2$ 的元素，麦基分解给出

$${}_{G\times 1}\mathrm{Res}_{G\times P}(\mathrm{Dia}_G(P{\uparrow}1_2)) \cong |P|\,\mathrm{Dia}_G(1_2)\ .$$

由此可知，对于 $\mathbb{P}_b$ 中任意形如 P_1 的元素，我们有

$${}_{G\times 1}\mathrm{Res}_{G\times P}(\mathrm{Dia}_G(P_1)) = \begin{cases} \mathrm{Dia}_G(1_1) \oplus 4\,\mathrm{Dia}_G(1_2) & \text{if } P \in \{V_4, D\}, \\ \mathrm{Dia}_G(1_1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，多重偏序集 $\mathbb{P}_b$ 的哈斯图如下，其中单线和双线再次分别表示相对重数 1 和 2。



比较我们绘制的两幅哈斯图，或许值得注意的是，若仅关注各片，我们会发现，$\mathbb{F}H$ 的一个源代数上的局部点群偏序集，与$\mathbb{F}Gb$的一个源代数上的局部点群偏序集并不同构。

参考文献

[BG22] L. Barker、M. Gelvin，《关于几乎源代数的融合系统不变性的猜想》，J. GroupTheory 25, 973-995 (2022)。

[Bou10] S. Bouc, 《有限群的双集函子》, Springer 数学讲义 1990,（Springer，海德堡，2010）。[Bro85] M. Brou´e，论 Scott 模及 p-置换模：一种通过 Brauer 同态的研究方法，Proc. 美国数学会 93, 401-408 (1985)。[Lin18] M. Linckelmann, 《有限群代数的块理论》，第 1 卷（剑桥大学出版社，剑桥，2018）。[Pui86] L. Puig，块源代数中的局部融合，J. Algebra 104, 358-369 (1986)。[Rob89] G. R. Robinson，论诱导模的投射直和项，J. Algebra 122, 106-111 (1989)。[The95] J. Th´evenaz, 《G-代数与模表示论》（克拉伦登出版社，牛津，1995）。