arXiv:2303.09191v1 [math.GT] 16 Mar 2023

球面背景几何中的组合曲率流

Huabin Ge Bobo Hua Puchun Zhou

摘要

在 [12], 组合条件下，利用流方法证明了欧几里得或双曲背景几何中理想圆模式的存在性。球面情形仍是一个未解决的问题。本文在球面背景几何中引入一种组合测地曲率流，它类似于 Chow 和 Luo 在 [4]中提出的组合里奇流。我们刻画了该流收敛的充要条件：当且仅当指定的测地曲率满足某些几何和组合条件时，对于任意初始数据，该流都将以指数速度收敛到一种圆模式，且每个圆上的总测地曲率均为给定值。我们的结果可视为解决了球面情形下的问题。据我们所知，这是球面背景几何中首个具有良好性质的组合曲率流，并为寻找所需的理想圆模式提供了一种算法。

2020年数学主题分类： 52C26,51M10, 57M50

1 引言

Thurston [24] 利用圆模式构造双曲三维流形。某类曲面上的圆模式的存在性与唯一性被称为 Koebe-Andreev-Thurston 定理，文献中对此有许多不同的证明。Colin de Verdi`eres [5] 提出了变分原理，并证明圆模式的存在性对应于某个势函数的极小值点的存在性。相关结果参见 [2, 18] 。

受黎曼流形上的里奇流启发，Chow 和 Luo 在 [4] 中引入了组合里奇流

$$\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = -K_i s(r_i),$$

其中，对于欧几里得（球面或双曲）背景几何，$s(r) = r\,(\sin\, r \text{ or } \sinh r)$，而 K_i 是离散高斯曲率，由 2π 与圆 i. 中心处的锥角之差给出。他们证明，在某些组合条件下，亏格至少为一的曲面上的组合里奇流会收敛到光滑的欧几里得或双曲度量。此后，关于组合曲率流的研究大量涌现，例如参见 [19, 14, 17, 9, 15, 16, 8, 21, 10, 12, 13, 7]。

然而，关于球面背景几何中的圆模式，已有结果较少。主要困难如下：相关势函数在球面情形下并非凸函数（例如参见 [20]），而且由于莫比乌斯变换的不变性，圆模式的唯一性不成立。最近，Nie [22] 提出了一种新的势函数，它对于球面情形下具有圆锥奇点的圆模式是凸的。本文引入一种组合给定测地曲率流，并证明该流会收敛到所需的圆模式。

1.1 曲面上的球面圆模式

我们介绍圆模式的设定。设 (V, E) 是一个图，Σ 是一个闭曲面。设 $\eta: V \cup E \to \Sigma$ 是一个图嵌入。面是$\Sigma \setminus \eta(V \cup E)$, 的一个连通分支，而 F 是由 η 诱导的面集。我们不区分顶点（或边）与它们在 η. 下的像。若一个嵌入 η 满足以下条件，则称其为闭2胞腔嵌入；参见例如 [1]:

1. 每个面的闭包都同胚于一个闭圆盘。

2. 每个面都由一条简单闭曲线围成，该曲线由有限条边组成。

设 $G = (V, E, F)$ 是闭曲面 Σ 上的一个闭2胞腔嵌入，其顶点集为 V、边集为 E、面集为 F。若顶点 v（分别地，边 e）与边 e（分别地，面 f）关联，我们记作 $v < e$（$e < f$）。此外，若顶点 v_1 和 v_2 由一条边相连，我们记作 $v_1 \sim v_2$。对于顶点集 $X \subseteq V$，我们用 $E(X)$ 表示与 X 中某个顶点关联的边。对于任意面 f，我们在该面的内部添加一个辅助顶点 v_f，在图 1 中以小三角形标出。我们用 V_F 表示这些辅助顶点构成的集合。我们将 G 的关联图定义为 [6]；另见例如。

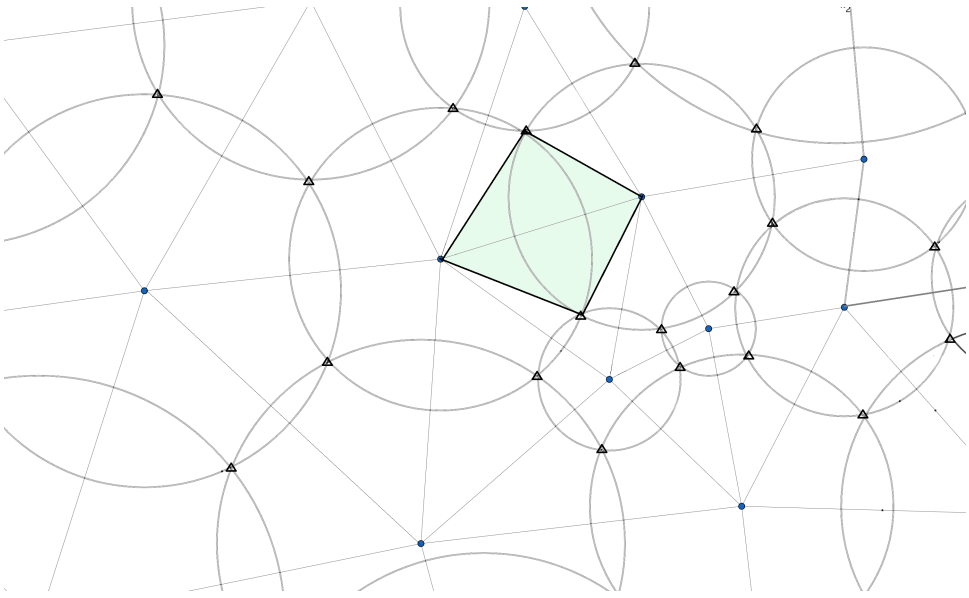


图 1：圆模式示意图

定义 1.1。关联图 $I(G)$ 是一个二部图，其二部划分为 $\{V, V_F\}$。对于 $v \in V$ 和 $v_f \in V_F$，在 I（G）中，v 和 v_f 相邻，当且仅当 v 位于面 f. 的边界上。

注意，关联图 $I(G)$ 诱导出一个具有四边形面的闭2胞腔嵌入。对于 G 中的每条边，它都对应于 $I(G)$ 中包含该边的唯一一个四边形。我们为每个 $v \in V$ 指定一个半径 $r_v \in (0, \frac{\pi}{2})$，并为每条边指定一个交角$\Theta(e) \in (0, \frac{\pi}{2}]$ $e \in E$. 。我们通过半径和交角为 Σ 定义一个分片球面度量。对于每条边 $e_0 = \{v_1, v_2\} \in E$，我们将与之关联的四边形中另外两个顶点记为 A 和 B，如图 2 所示。我们赋予四边形 v_1Av_2B 一个球面四边形的度量：它具有$|v_1A| = |v_1B| = r_{v_1}$、$|v_2A| = |v_2B| = r_{v_2}$ 和角度 $\angle v_1Av_2 = \angle v_1Bv_2 = \pi - \Theta(e_0)$，由两个球面圆盘的交集确定。这个球面四边形称为由 r_{v_1}、r_{v_2} 和 $\Theta(e_0)$ 确定的球面双边形。我们通过沿着 $I(G)$ 中的公共边粘合这些四边形（球面双边形），在 Σ 上得到一个度量结构，记为$S(\Sigma)$；粘合过程见 [3, 第 3], 章。该度量是一个可能具有圆锥奇点的分片球面度量。

我们用 C_v 表示 S（Σ）中圆心为 v 、半径为 r_v 的外接圆。这些外接圆构成 S（Σ）上的一个圆模式 $\mathcal{C}$，如图 1 所示。文献中称之为理想圆模式；参见 [2] 以及 [12] 中的定义 1.1。S（Σ）可能存在的圆锥奇点只出现在 V和 V_F. 。我们用 α_i 表示点 $v_i \in V$处的锥角，它等于点 v_i处各四边形的角度之和。此外，$v_f \in V_F$ 处的锥角等于 $\sum_{e<f}$（$\pi - \Theta$（e））。若所有锥角都等于 2π，则得到一张具有光滑球面度量的曲面。我们用 k_v 表示 C_v上的测地曲率，它等于 $\cot r_v$。 C_v的长度，记为 l_v，等于 $\alpha_v \sin r_v$. 。因此， C_v的总测地曲率，记为 L_v，由 $l_v k_v = \alpha_v \cos r_v$给出。

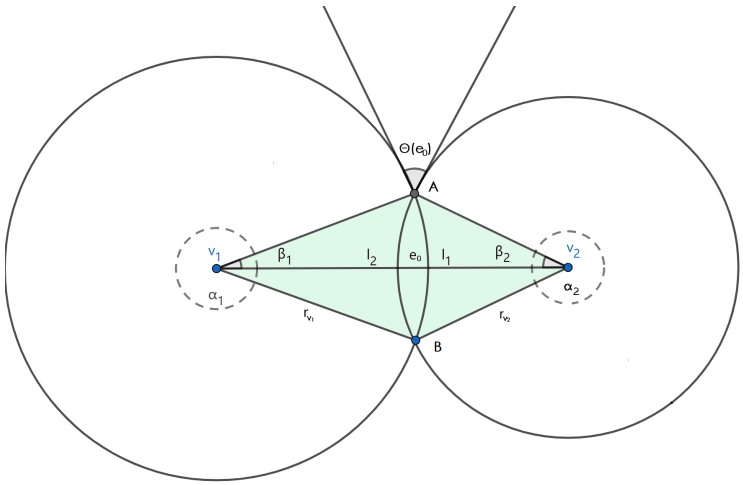


图 2：两个相交圆和四边形。

1.2 给定测地曲率流

本文旨在研究圆模式的给定测地曲率问题。给定交角 $\{\Theta（e）\}_{e\in E}$ 以及指定的总测地曲率ˆ$\{L_v\}_{v\in V}$，我们希望找到半径 $\{r_v\}_{v\in V}$，使得 $S（\Sigma）$中每个C_v 的总测地曲率满足

$$L_v = \hat{L}_v, \quad \forall v \in V.$$

为了解决这个问题，我们引入如下给定测地曲率流

$$\frac{\mathrm{d}r_v}{\mathrm{d}t} = \frac{(L_v - \hat{L}_v)}{2}\sin(2r_v), \quad \forall v \in V. \tag{1.1}$$

我们在定理 3.1 中证明了该流的长期存在性和唯一性。我们称该流收敛，如果对每个 $v \in V$，都存在 $r_v^* \in (0, \frac{\pi}{2})$，使得 $r_v(t) \to r_v^*$当 $t \to \infty$。对于给定测地曲率流，我们有如下主要结果。

定理 1.2. 设 $G = (V, E, F)$ 是闭曲面 Σ.ˆ 上的一个闭2胞腔嵌入。设 $\Theta(e) \in (0, \frac{\pi}{2})$ $e \in E,$ 为交角，且 $L_v > 0$ 对于 $v \in V.$ 以下命题等价：

ˆ i. 对于任意初始数据，给定测地曲率流 (1.1) 在 $\{L_v\}_{v\in V}$ 下收敛。

ˆ ii. 给定的总测地曲率 $\{L_v\}_{v\in V}$ 满足

$$\sum_{v\in X} \hat{L}_v < 2 \sum_{e\in E(X)} \Theta(e), \qquad \forall X \subseteq V. \tag{1.2}$$

此外，如果流 (1.1) 收敛，那么它将以指数速度收敛到唯一的ˆ圆模式；对于每个顶点 v，其 $L_v = L_v$。

证明思路如下：我们注意到，给定测地曲率流 (1.1) 是 Nie 势函数 (2.3) 的负梯度流。由 (1.2) 可知，该函数是适当严格凸函数。利用梯度流理论，我们证明所需结果。值得注意的是，指数收敛的结果有助于开发用于度量数值计算的算法。

本文组织如下：下一节回顾给定测地曲率流的变分原理。第 3 节将用于证明定理 1.2。

2 变分原理

球面背景几何中总测地曲率的变分原理在 [22] 中被引入。在本文余下部分，我们记 $V = \{v_i\}_{i=1}^N$。考虑与边 e_0 相关的一个球面双边形，见图 2。令 $l_i(i = 1, 2)$ 表示弧的长度

该弧属于 $C_{v_i}(i=1,\ 2)$，并包含在四边形（球面双边形）内。 L_i 是该弧上的总测地曲率。根据高斯-博内定理，可得

$$A = 2\Theta(e_0) - L_1 - L_2, \tag{2.1}$$

其中， A 是两个球面圆盘交集部分的面积。令 K_i 表示 $\ln k_{v_i}$。于是我们得到关键的变分公式。

引理 2.1. 对于球面双边形， $l_1 dk_{v_1} + l_2 dk_{v_2} = L_1 dK_1 + L_2 dK_2$ 是一个闭形式。此外，我们有

$$\frac{\partial L_1}{\partial K_2} < 0, \frac{\partial (L_1 + L_2)}{\partial K_1} > 0. \tag{2.2}$$

直观地说，如果圆 C_{v_1} 固定，而 C_{v_2} 的半径增大，那么交集部分的面积和长度 l_1 都会增大。详细证明见附录。我们记

$$\omega(e_0) := L_1 dK_1 + L_2 dK_2, \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

存在一个凸势函数

$$\mathcal{E}_{e_0}(K_1, K_2) = \int^{(K_1,K_2)} \omega(e_0).$$

ˆ 类似地，我们为每条边 e 定义一个势函数 $\mathcal{E}_e$。对于 $\{L_v\}_{v\in V}$，Nie [22] 引入了如下势函数

$$\mathcal{E}(K) = \sum_{e=\{u,w\}\in E} \mathcal{E}_e(K_u, K_w) - \sum_{v\in V} \hat{L}_v K_v. \tag{2.3}$$

现在我们考虑给定测地曲率流。通过变量代换$K_v = \ln \cot\ r_v$，流（1.1）可改写为

$$\frac{\mathrm{d}K_v}{\mathrm{d}t} = -(L_v - \hat{L}_v). \tag{2.4}$$

容易验证，流（2.4）是凸函数（2.3）的负梯度流。此外，若它存在临界点，则该临界点给出了具有给定总测地曲率的圆模式。

3 主定理的证明

本节证明主要结果，即定理 1.2。

对于 $V = \{v_i\}_{i=1}^N$，我们记

$$r = (r_{v_1}, \cdots, r_{v_N}) = (r_1, \cdots, r_N), \quad K = (K_{v_1}, \cdots, K_{v_N}) = (K_1, \cdots, K_N),$$

其中，对任意 $v_i.$， $K_{v_i} = \ln \cot\ r_{v_i}$。我们考虑变量 $r \in$ 的定义域 $(0, \frac{\pi}{2})^N$,它与 $-$ $K \in \mathbb{R}^N$. 一一对应

我们首先证明测地曲率流的长期存在性和唯一性 .

定理 3.1. 给定 $L_v > 0$ 对于任意 $v \in V$，对于任意初始数据 $r_0 \in (0, \frac{\pi}{2})^N$（$K_0 \in \mathbb{R}^N$ 分别），流 (1.1)（分别为 (2.4)）有唯一解 $r: [0,\infty) \to (0, \frac{\pi}{2})^N$（$K: [0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ 分别）。

证明。 由于通过变量代换，流 (1.1) 与 (2.4) 等价，因此只需考虑流 (2.4)。注意， $L_v(K)$ 是 $K.$ 的光滑函数。根据皮卡定理，对于任意初始数据，流均局部存在且唯一。由 (2.1) 可知，对于每个顶点 v，圆 C_v 的总测地曲率 L_v 小于 $\sum_{v<e} 2\Theta(e)$。因此，$|L_v(t) - L_v|$ 有界于 $\sum_{v<e} 2\Theta(e) + L_v$。故流 (2.4) 存在于 $t \in [0,\infty)$。

□

接下来，我们回顾 Nie 在 [22]中的结果。

定理 3.2 (Nie)。 设闭曲面 Σ 上有一个闭2胞腔嵌入 $G = (V, E, F)$，其交角为 $\{\Theta(e)\}_{e\in E}$，且给定总测地曲率 $\{L_v\}_{v\in V}$，则以下结论成立:

1. $K = (K_{v_1}、\ .....、\ K_{v_N})$ 是 $\mathcal{E}$（定义见 (2.3)）的临界点，当且仅当 Σ 上存在一个圆模式，其半径为 $\{r_v\}_{v\in V}$，满足 $K_v = \ln\cot r_v$，并实现所给定的总测地曲率。
2. $\mathcal{E}$ 适当，当且仅当 $\{L_v\}_{v\in V}$ 满足 (1.2)。

证明。 为使本文内容完整，我们收录 Nie 的证明。第一个结论可由计算 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial K}$ 得出。对于第二个结论，我们给出一个简要证明。—

我们将集合 $(0, \frac{\pi}{2})^N$ 记为 $\mathcal{R}$。给定所要求的总测地曲率 $\{L_v\}_{v\in V}$，我们将另一个严格凸势函数 $\mathcal{E} + \sum_{v\in V} L_v K_v$ 记为 $\mathcal{E}_0$。我们考虑映射 $W = (\nabla\mathcal{E}_0) \circ G$，其中 G 是一个从 $\mathcal{R}$ 映射到 $\mathbb{R}^N$ 的函数，满足

$$G(r_1, ..., r_N) = (\ln\cot r_1, ..., \ln\cot r_N).$$

由于 $\mathcal{E}_0$ 是严格凸的，映射 $\nabla\mathcal{E}_0$ 是单射。因此 W 也是单射。与[2], 中一样，我们将由 (1.2)在 $\mathbb{R}^N$ 中确定的定义域 Φ称为“相容角系统”。利用域不变定理，我们可以证明 W 是一个开映射，其像包含于 Φ中。还可以证明 $W(\mathcal{R})$在 Φ中是闭集，论证见[18]。因此，根据 Φ的连通性， W 的像等于 Φ 。所以，若 $\{L_v\}_{v\in V}$属于相容角系统，则存在一个 $K^* = (K^*_{v_1}、\ .....、\ K^*_{v_N})$，使得$\nabla\mathcal{E}_0(K^*) = (L_{v_1}、\ .....、\ L_{v_N})$。根据 $\mathcal{E}_0$的定义， K^* 是 $\mathcal{E}$的临界点，因此由严格凸性可知$\mathcal{E}$ 是适当的。至此，“若”部分的证明完成。“仅若”部分可借助(2.1)推出。

□

给定测地曲率流 (1.1) 可以转化为严格凸势函数 $\mathcal{E}$ 的负梯度流 (2.4)。因此，我们可以使用 [11] 中的一个引理。

引理 3.3. 设 H 是定义在凸集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$上的严格凸光滑函数，且在 $P \in \Omega$ 中有一个临界点。那么它满足以下性质:

1. P 是 H的唯一全局最小点。

2. 如果 Ω 无界，则 $\lim_{|x|\to\infty} H(x) = \infty$。

我们还回顾常微分方程理论中的一个引理:

引理 3.4 ([23])。设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$。考虑自治常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t)) \quad x(t) \in U. \tag{3.1}$$

假设 x^* 是 f 的临界点，即 $f(x^*) = 0$。如果雅可比矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ 的所有特征值实部均为负,一则 x^* 是一个渐近稳定点。更具体地说，存在 x^* 的一个邻域 $U \subset U$，使得对于任意初值 $x(0) \in U$，方程 (3.1) 的解对所有时刻 $t \in [0, +\infty)$ 均存在，并且以指数速度收敛到 x^*。

现在我们证明主要结果。

定理 *1.2* 的证明。对于"i⇒ii"，假设流 (1.1) 对某些初始数据收敛到 $r^* \in (0, \frac{\pi}{2})^N$。流 (2.4) 也收敛到 $K^* = \ln \cot r^*$。选取一列时刻 $t_n = n \to \infty$，由中值定理可得

$$\mathcal{E}(K(n+1)) - \mathcal{E}(K(n)) = -|\nabla \mathcal{E}(K(\eta_n))|^2 \quad \text{for some } \eta_n \in [n, n+1]. \tag{3.2}$$

由 $K(t)$的收敛性以及 $\mathcal{E}$的光滑性，我们得到 $\nabla \mathcal{E}(K^*) = 0$。因此， K^* 是 $\mathcal{E}$的临界点。由于势函数 $\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{R}^N$上严格凸，根据引理 3.3，它是适当的。于是定理 3.2 告诉我们，给定的总测地曲率 $\hat{} \{L_v\}_{v\in V}$ 满足 (1.2)。

我们证明"ii⇒i"。若给定的测地曲率满足 (1.2)，则由定理 3.2，势函数 $\mathcal{E}$ 是适当的。因此， $\mathcal{E}$ 存在临界点且有下界。由于 $\mathcal{E}$ 沿流 (2.4) 递减，流 $K(t)$包含于 $\mathbb{R}^N$的一个紧子集中。由 $\mathcal{E}(K(t))$的单调性， $\{\mathcal{E}(K(n))\}_{n=1}^{\infty}$ 当 $n \to \infty$ 时收敛到有限值 $\mathcal{E}_\infty$。

由 (3.2)，我们有

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla \mathcal{E}(K(\eta_n))|^2 = 0.$$

由于 $\{K(\eta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 包含在一个紧集内，因此存在 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子序列，记为 $\{\eta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $K_\infty \in \mathbb{R}^N$，使得

$$K(\eta_{n_k}) \to K_\infty, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

因此， $\nabla \mathcal{E}(K_\infty) = 0$。由于根据引理 2.1，$-\frac{\partial L}{\partial K}$ 是负定矩阵，在引理 3.4 的帮助下， $K(t)$以指数速度收敛到 K_∞。至此，我们完成了定理 1.2 的证明。

□

最后，我们给出一个例子，说明某个指定测地曲率问题的解可能产生一个光滑球面度量。

例 3.5. 设 Σ 为球面，$G=(V,\ E,\ F)$ 是 Σ 的三角剖分，且与四面体的边界同构。假设 ()，$\forall e\in E$ 且 $\hat{L}_v=\frac{2\pi}{3}$，$\forall v\in V.$，则指定测地曲率问题的解为 $r_v=\arccos\frac{1}{3}$，$\forall v\in V$。这产生了一个光滑度量结构 $S(\Sigma)$，它是球面的标准球面镶嵌。

致谢。Ge 得到国家自然科学基金委员会项目（编号：12122119）的资助。B. Hua 得到国家自然科学基金委员会项目（编号：11831004）以及上海市科技计划项目 [（项目编号：22JC 1400100]）的资助。

4 附录

本部分采用第 1 节和第 2 节中的设定。设 $k_i,\ K_i,\ \beta_i,\ \theta$ 表示 $k_{v_i},\ K_{v_i},\ \frac{\angle Av_iB}{2}$，$\Theta(e_0)$，如图 2 所示。我们给出引理 2.1 的详细证明。我们从球面三角形的余切四部公式开始。

命题 4.1（余切四部公式）。

$$\cot(\beta_1)=\frac{1}{\sin\theta}(\cot r_2\sin r_1+\cos r_1\cos\theta). \tag{4.1}$$

这是经典球面几何中的一个有用公式，这里省略其证明。现在我们来证明引理 2.1。

引理 *2.1* 的证明。由于 ∂D_i 处的测地曲率为 $k_i=\cot r_i$，我们可以将 (4.1) 重写为

$$\cot(\beta_1)=\frac{1}{\sin\theta}(k_2\sin r_1+\cos r_1\cos\theta). \tag{4.2}$$

对上述等式关于 k_2 求导，并利用关系式 $l_1=2\beta_1\sin r_1$，可得

$$-\frac{\partial\beta_1}{\partial k_2}\frac{1}{\sin^2\beta_1}=\frac{\sin r_1}{\sin\theta}.$$

因此我们有

$$\frac{\partial l_1}{\partial k_2}=\frac{-2\sin^2\beta_1\sin^2 r_1}{\sin\theta}.$$

利用球面三角学中的正弦定理，即$\frac{\text{正弦}\, r_1}{\text{正弦}\,\beta_2}=\frac{\text{正弦}\, r_2}{\text{正弦}\,\beta_1}$，我们得到 $\frac{\partial l_1}{\partial k_2}=\frac{\partial l_2}{\partial k_1}$和 $\frac{\partial L_1}{\partial K_2}=\frac{\partial L_2}{\partial K_1}$。因此得到

$$\frac{\partial L_1}{\partial K_2}=k_1k_2\frac{-2\sin^2\beta_1\sin^2 r_1}{\sin\theta}.$$

现在我们计算 $\frac{\partial l_1}{\partial k_1}$。再次对 k_1求导（4.2），得到

$$\frac{\partial l_1}{\partial k_1} = 2\sin r_1[\frac{\sin^2\beta_1}{\sin\theta}(k_2\cos r_1\sin^2 r_1 - \cos\theta\sin^3 r_1) - \frac{l_1}{2}\cos r_1].$$

注意到 $\frac{\partial L_1}{\partial k_1} = l_1 + k_1\frac{\partial l_1}{\partial k_1}$，我们有

$$\frac{\partial L_1}{\partial K_1} = k_1 l_1\sin^2 r_1 + \frac{2\sin^2\beta_1}{\sin\theta}k_1k_2\sin^2 r_1\cos^2 r_1 - 2k_1\cot\theta\sin^2\beta_1\sin^3 r_1\cos r_1.$$

再次利用 (4.1)，得到

$$\frac{\partial(L_1+L_2)}{\partial K_1} = \cos r_1\sin^2 r_1(2\beta_1 - \sin 2\beta_1), \tag{4.3}$$

当 $0 < r_1 < \frac{\pi}{2}$ 时，该式为正。因此，我们完成了引理 2.1 的证明。 □

参考文献

[1] David W Barnette. 环面和射影平面上的闭2胞腔嵌入的生成方法。《离散与计算几何》，2:233–247，1987。[2] Alexander I. Bobenko 和 Boris A. Springborn. 圆模式的变分原理与 Koebe 定理。《美国数学会汇刊》，356(2):659–689，2004。[3] Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov. 度量几何教程，第 33 卷。美国数学会，2022。[4] Bennett Chow 和 Feng Luo. 曲面上的组合里奇流。《微分几何杂志》，63(1):97–129，2003。[5] Yves Colin de Verdi`ere. 圆堆积的变分原理。《数学发明》，104(3):655–669，1991。[6] Harold SM Coxeter. 自对偶构形与正则图。《美国数学会通报》，56(5):413–455，1950。[7] Ke Feng、Huabin Ge 和 Bobo Hua. 组合里奇流与一类紧致三维流形的双曲化。《几何与拓扑》，26(3):1349–1384，2022。[8] Huabin Ge. 曲面上的组合卡拉比流。《美国数学会汇刊》，370(2):1377–1391，2018。[9] Huabin Ge 和 Bobo Hua. 关于双曲圆模式下的组合卡拉比流。《数学进展》，333:523–538，2018。

[10] Huabin Ge 和 Bobo Hua. 双曲背景几何中的三维组合 Yamabe 流。《美国数学会汇刊》，373(7):5111–5140，2020。[11] Huabin Ge、Bobo Hua 和 Ze Zhou. 有限拓扑型曲面上的圆模式。《美国数学杂志》，143(5):1397–1430，2021。[12] Huabin Ge、Bobo Hua 和 Ze Zhou. 理想圆模式的组合里奇流。《数学进展》，383:107698，2021。[13] Huabin Ge、Wenshuai Jiang 和 Liangming Shen. 关于球堆积的变形。《数学进展》，398:108192，2022。[14] David Glickenstein. 三维中的组合 Yamabe 流。《拓扑学》，44(4):791–808，2005。[15] Xianfeng Gu、Ren Guo、Feng Luo、Jian Sun 和 Tianqi Wu. 多面体曲面的离散一致化定理 II。《微分几何杂志》，109(3):431–466，2018。[16] Xianfeng David Gu、Feng Luo、Jian Sun 和 Tianqi Wu. 多面体曲面的离散一致化定理。《微分几何杂志》，109(2):223–256，2018。[17] Xianfeng David Gu 和 丘成桐. 计算共形几何，第 1 卷。国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2008。[18] Ren Guo. 关于曲面上圆模式的一则注记。《奉献几何》，1(125):175–190，2007。[19] Feng Luo. 曲面上的组合 Yamabe 流。《当代数学通讯》，6(5):765–780，2004。[20] Feng Luo. 多面体曲面的刚性，I。《微分几何杂志》，96(2):241–302，2014。[21] Feng Luo 和 Tianqi Wu. 双曲三维空间中凸曲面的 Koebe 猜想与 Weyl 问题。*arXiv* 预印本 *arXiv:1910.08001*，2019。[22]Xin Nie. 关于圆模式与球面锥度量。*arXiv* 预印本 *arXiv:2301.09585*，2023。[23] L. S. Pontryagin. 常微分方程。ADIWES 国际数学丛书。Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州；帕洛阿尔托，加利福尼亚州；伦敦，1962。由 Leonas Kacinskas 和 Walter B. Counts 从俄语译出。[24] William P. Thurston. 三维流形的几何与拓扑。普林斯顿讲义，1976。

HuabinGe, hbge@ruc.edu.cn中国人民大学数学学院，北京，*100872*，中国

Bobo Hua,bobohua@fudan.edu.cn复旦大学数学科学学院，*LMNS*，上海，*200433*，中国

Puchun Zhou,pczhou22@m.fudan.edu.cn复旦大学数学科学学院，上海，*200433*，中国