arXiv:2303.09207v1 [math.AT] 16 Mar 2023

1|1维欧几里得场论的族解析指标

DANIEL BERWICK-EVANS

Abstract. 我们为一类 1|1维欧几里得场论构造了一个取值于 KO 的族指标。这实现了 Stolz–Teichner 计划中的一个猜想余循环映射。我们进一步证明，自旋流形丛会导出一族部分定义的 1|1维欧几里得场论，从而得到族解析指标的余循环精化。我们选择这些方法，旨在将其推广到 2|1维场论；在这一情形下，预期类似结构能够给出一个取值于拓扑模形式的解析指标。

1. Introduction and statement of results

Stolz 和 Teichner 概述了在光滑流形 M 上构造 1|1维和 2|1维欧几里得场论范畴的方法，这些范畴按次数 $n \in \mathbb{Z}$ [编索引（ST04、HST10、ST11]）。他们猜想，这些范畴确定了实K理论和拓扑模形式的几何余循环模型 [（ST11，§1.5–1.6],）。

$$\left\{ \begin{array}{c} d|1\text{-dimensional} \\ \text{Euclidean field theories} \\ \text{of degree } n \text{ over } M \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{cocycle}} \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{KO}^n(M) & d=1 \\ \mathrm{TMF}^n(M) & d=2. \end{array} \right. \tag{1}$$

此外，人们预期这些余循环模型能够继承由场论量子化所给出的解析推前。最终目标是利用这些推前，证明 Atiyah–Singer 指标定理的 TMF 推广。

人们始终认为，恰当理解 1|1-欧几里得场论与 K理论中的指标定理之间的关系，将为 2|1维情形提供重要见解 [Seg88, §6], [ST04, §3]。基于这一考虑，本文旨在表述并证明命题 (1) 的一个版本，其中 $d = 1$ 与族解析指标相联系。我们采用一种关于 M 上的次数为 n 的场论的变体，记作 $1|1\text{-eft}^n(M)$；它不仅纳入反射正性和实结构数据，还要求存在光滑截断场论；见下文 §1.2。

定理 1.1。 $1|1\text{-eft}^n(M)$ 的一个对象确定了实向量丛 $V \to M$ （不一定是有限秩）上的一个自伴、Clifford 线性超联络 $\mathbb{A}$ 。自伴超联络的族指标构造确定了一个余循环映射

$$1|1\text{-eft}^n(M) \xrightarrow{\text{Index}} \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) \tag{2}$$

取值于 M 的微分 KO 理论。如果重整化群流将一个对象$E \in 1|1\text{-eft}^n(M)$ 送至零理论，那么它在 $\mathrm{KO}^n(M)$ 中的底层类为零。

范畴 $1|1\text{-eft}^n(M)$ 也容纳了自旋流形丛的 KO 值族解析指标的一种精化。

定理 1.2。 一族黎曼自旋流形的 Bismut 超联络$X \to M$ 确定了一个对象 $\alpha(X) \in 1|1\text{-eft}^{-n}(M)$，其在 (2) 下的像是 $X \to M$ 的族微分解析指标。

Date: 2023年3月17日。

鉴于现有的超对称欧几里得场论定义不太可能是最终定论（见注 B.1 和 B.11），余循环映射 (2) 的设计力求尽可能稳健。事实上，范畴 $1|1$-eft$^n(M)$ 和定理 1.1 源自对特定的 $1|1$-欧几里得配边族进行场论求值，而与指标理论相关的结构则继承自这些配边的几何性质。由此可见，任何合理的、定义在 M 上的 $1|1$-欧几里得场论范畴，都包含一个带有余循环映射 (2) 的子范畴；见注 1.13。也许更重要的是，范畴 $1|1$-eft$^n(M)$ 可推广到猜想 (1) 的 $d = 2$ 版本，而定理 1.1 和 1.2 背后的技巧为这一 $d = 2$ 后续工作 [BE23c]奠定了基础。

1.1. 主要思想。 在物理学文献中，$1|1$维场论通常称为 $\mathcal{N} = 1$ 超对称量子力学。基本数据是一个 $\mathbb{Z}/2$分次内积空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{ev}} \oplus \mathcal{H}^{\mathrm{odd}}$ 和一个奇算子 Q: $\mathcal{H}^{\mathrm{ev/odd}} \to \mathcal{H}^{\mathrm{odd/ev}}$ [Wit82, §1]。这确定了超半群的一个表示

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), \qquad (t, \theta) \mapsto e^{-tQ^2+\theta Q}, \tag{3}$$

它扩展了 Wick 旋转量子力学中的通常时间演化半群。根据所需理论的类型，还需要对 (3) 增加额外的结构和性质。例如，紧致 理论要求 (3) 取值于迹类算子，而反射正 理论要求 Q为自伴。促成(1)的主要例子令 $Q = \not{D}$ 为紧致自旋流形的狄拉克算子 X [ST04, Example 3.2.9]。该理论既是紧致的，也是反射正的。

超半群 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 具有一种几何解释：它是超区间 [的模空间（ST04，第 3] 节）；超半群中的乘法对应于超区间的粘合。超区间构成了 $1|1$-欧几里得配边范畴 [的一个子范畴（HST10，第 6], 节）。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{super}\\ \text{intervals}\end{array}\right\} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \left\{\begin{array}{c}1|1\text{-Euclidean}\\ \text{bordisms}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}1|1\text{-Euclidean}\\ \text{field theories}\end{array}\right\} \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Rep}(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}) \tag{4}$$

而 $1|1$-欧几里得场论定义为该配边范畴的表示。特别地，从 $1|1$-欧几里得配边范畴出发的函子沿着 ι 限制后，得到 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 的一个表示。由此限制得到的表示 (3) 具有一些额外性质，例如，紧致性会自动成立（ST12，第 [节）。ST04（第 [节）对 $1|1$-欧几里得场论的初始定义，只是在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 的表示上加上这些预期的附加性质。ST11] 提出的较新定义则给出了 $1|1$-欧几里得配边范畴的精确定义，并将 $1|1$-欧几里得场论定义为该配边范畴的表示。新定义的一个优点是，它可以自然推广到定义在光滑流形上的场论：为 $1|1$-欧几里得配边配备一个到（背景）流形的映射即可（见下文定义 1.6）。

带有映射到 M 的超区间确定了 M 中的超路径范畴。这引出了（4）的族推广

$$\left\{\begin{array}{c}\text{super paths}\\ \text{in } M\end{array}\right\} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \left\{\begin{array}{c}1|1\text{-Euclidean}\\ \text{bordisms over } M\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}1|1\text{-Euclidean field}\\ \text{theories over } M\end{array}\right\} \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Rep}\left(\begin{array}{c}\text{super paths}\\ \text{in } M\end{array}\right), \tag{5}$$

其中，从 M 上的 $1|1$-欧几里得配边范畴出发的函子经限制确定了 M 中超路径范畴的一个表示。超联络 [Dum08] 所诱导的沿超路径的超平行移动给出了超路径范畴表示的例子；一条民间定理将这些表示扩展为 M [ST11, §1.3] 上的 $1|1$-欧几里得场论。

定理 1.1 背后的基本机制，是这一超平行移动构造的逆过程： $1|1$ 上的欧几里得场论 M，通过将其限制到 M 中的近乎常值超路径，确定一个超联络，记作 sPath$_0(M)$。这些超路径的映射到 M 时会经由投影 $\mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{0|1}$ 分解。

命题 1.3（命题 6.20）。存在一个函子

$$\mathrm{Rep}(\mathsf{sPath}_0(M)) \to \mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}(M)$$

从 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的（不一定是有限秩的）表示到 M 上带有超联络的（不一定是有限秩的）超向量丛所成的群胚。

这给出了余循环映射 (1) 的一个自然候选

$$\left\{\begin{array}{c}1|1\text{-Euclidean field}\\ \text{theories over } M\end{array}\right\} \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Rep}(\mathsf{sPath}_0(M)) \xrightarrow{\text{Prop 1.3}} \mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}(M) \overset{\text{Index}}{\dashrightarrow} \mathrm{KO}^0(M) \tag{6}$$

其中最后一个箭头是应用于超联络的族指标构造，例如参见 [BGV92，第 9]章。

对于任意超联络，指标构造可能并不成立——还需要满足某些额外性质。当 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的表示来自某个 $1|1$-欧几里得场论的限制时，其中一些性质会自动满足。例如，对于 $t>0$，算子 $e^{-t\mathbb{A}^2}$ 是自伴的且属于迹类。然而，仅凭这些条件并不能保证指标丛的存在。超联络所需满足的精确条件可能难以表述，并且高度依赖于所采用的分析框架；例如，可比较 Lott 和 Gorokhovsky 在希尔伯特丛 [GL15] 上定义的超联络。

从场论的角度来看，构造 (6) 所需的额外性质相当直观：需要存在光滑能量截断。粗略地说，这意味着 $1|1$-欧几里得场论在 M 上确定了一个相容的 $\mathbb{R}_{>0}$-族场论，它们会舍弃能量高于 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$ 的态。能量为 $<\lambda$ 的态用于构造族指标。光滑能量截断的存在（从而族指标的存在）是场论的一种性质，而非额外数据。此外，这一性质对任意超维数的欧几里得场论都有意义，尤其是维数 $2|1$。光滑截断的存在类似于微分算子的椭圆性性质，见定义 1.11 和注 1.14。范畴 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 大致定义为一个 $1|1$-欧几里得场论在近乎常值超路径上的取值（见 §1.2），此外还要求其满足光滑截断性质；下文将给出一种指标理论刻画。

命题 1.4（命题 7.3）。存在一个范畴等价

$$\mathrm{sPar}\colon \mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{ind}}(M) \xrightarrow{\sim} 1|1\text{-}\mathsf{eft}^0(M) \tag{7}$$

它将允许具有光滑指标丛的实自伴超联络范畴映至范畴 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^0(M)$。

简言之，$\mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{ind}}(M)\subset\mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}(M)$ 是定义（微分）指标映射的超联络子范畴。函子 sPar 完全显式，例如，

$$e^{-t\mathbb{A}^2+\theta\mathbb{A}}\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\to \mathrm{End}(\Omega^\bullet(M;V_{\mathbb{C}})) \tag{8}$$

它确定了 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 在 (7) 下的底层表示。公式 (8) 也与沿有限秩向量丛上的超联络 $\mathbb{A}$ 的超平行移动一致；例如，参见 [Dum12、定理 1], [Sto19、命题 6.7]，或 [BEH16, §2]。这促使我们将函子 (7) 记作 sPar，因为它为更一般的超联络提供了超平行移动的部分构造；见下文注 1.5。命题 1.4 使我们得以将定理 1.1 中的余循环映射构造为复合 (6)。

注记1.5。Dumitrescu 的超平行移动 [Dum08]将（7）扩展为一个函子

$$\mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{fin}}(M)\to 1|1\text{-}\mathsf{EFT}^0(M),$$

来自有限秩超向量丛上的超联络；参见推论 7.4。超平行移动的无限秩推广将为 $1|1$-欧几里得场论与超联络之间提供一套完整的对应词典。然而，在我们当前的分析框架中（遵循 [ST11]）），无限秩丛上的超平行移动

可能无法定义，因为拓扑向量空间中的微分方程缺乏存在性与唯一性定理，例如参见 [Ham82，例 5.6。1] 其中给出了 Fr´echet 空间中的反例。从物理学的角度来看，人们预期场论由无穷小数据决定。我们注意到，先前的一些 $1|1$-欧几里得场论定义借助了希尔伯特空间中的存在性与唯一性定理 [HST10，§6]。另一个方向上，温和 Fr´echet 空间和温和映射存在相应的存在性与唯一性定理。采用更具威尔逊方法的思路，可以将 $1|1$-欧几里得场论定义为有限秩对象的 Ind-完备化，并通过能量过滤施加相容性；这也能确保存在性与唯一性。在权衡这些选项时，主要顾虑是猜想 (1) 中 $d = 2$ 情形所需的正确分析背景尚不明确。因此，我们让这些分析选择保持灵活，以避免对这一 $d = 2$ 推广的可能定义施加过多限制。

1.2. **技术概述**。 定理 1.1 和 1.2 中的范畴 $1|1$-eft$^n(M)$，是将一个次数为 n 的欧几里得场论的信息提炼为表述指标映射 (2) 所需的核心部分后得到的。我们采用 Stolz 和 Teichner 在 [ST11], 中建立的场论框架，并先简要回顾其主要定义；更详细的概述见 §B。

定义 1.6 ([ST11, §4-5]). 对于 $n \in \mathbb{Z}$，次数 n 扭曲 是一个 $\otimes$-可逆函子

$$\mathscr{T}^n \colon 1|1\text{-EBord}(\mathrm{pt}) \to \mathsf{Alg} \tag{9}$$

其中 Alg 是由（拓扑）代数、双模及双模映射构成的 Morita 范畴。沿典范函子 $1|1$-EBord(M) $\to 1|1$-EBord(pt) 拉回后，我们得到一个定义在 M 上的 $1|1$-欧几里得配边范畴的扭曲，也仍记为 $\mathscr{T}^n$。一个定义在 M 上的次数为 n的场论 是一个自然变换

$$1|1\text{-EBord}(M) \underset{\mathscr{T}^n}{\overset{\mathbb{1}}{\Downarrow E}} \mathsf{Alg}. \tag{10}$$

注 1.7。 上述定义中的一些细节尚未见诸文献；进一步讨论请参见 §5，讨论最终归结为假设 5.9。

定义 1.8 （定义 B.30、B.32 和 5.16，假设假设 5.9 成立）。 定义范畴 $1|1$-EFT$^n(M)$，其对象为实的、反射正的 n 阶场论 (10)。 $1|1$-EFT$^n(M)$ 中的态射是内部自然变换之间与实结构和反射正结构相容的同构。

注 1.9。 在 $d = 1$ 版本的猜想 (1) 中，反射正性或许并非必要：无定向的实场论（带有不同的正性条件）可恢复 KO 理论 [HST10], ，参见注 5.18。然而，无定向结构和实结构无法推广到 $2|1$ 维欧几里得配边范畴，而米勒特征 TMF $\to$ KO((q)) 意味着，若要使猜想 (1) 成立，就必须存在一个从 $2|1$-欧几里得场论到实 K 理论的映射。反射正性是为 $2|1$ 维态的希尔伯特空间赋予实结构的一种方式；参见 [GPPV21, 3.2.2] 和 [BE23c]。

在 §3-§4 中，我们构造了一个范畴 sPath$_0(M)$，其对象为 M 中的近乎常值超欧几里得路径，并配备一个内部函子 ι

$$\mathsf{sPath}_0(M) \xrightarrow{\iota} 1|1\text{-EBord}(M) \underset{\mathscr{T}^n}{\overset{\mathbb{1}}{\Downarrow}} \mathsf{Alg}. \tag{11}$$

应用于零度理论时，沿 ι 的限制使 (5) 得以精确定义。结合命题 1.3，我们得到复合 (6)，它从一个 $1|1$- 欧几里得场论中提取出一个超联络。

Pr命题 1.10。 沿 th 对一个度数为 n 的欧几里得场论 (10) 作限制 e functor (11) 确定：

(1) 向量丛 V_+，$V_- \to M$ 其纤维上带有 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{+n}$- 和 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$-作用，以及 Clifford 线性超联络 $\mathbb{A}_+$ 和 $\mathbb{A}_-$（分别见命题 6.20）；(2) 截面值微分形式之间的配对（命题 6.26）

$$\langle -,-\rangle \colon \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \Big(\Omega^\bullet(M;V_-)\otimes\Omega^\bullet(M;V_+)\Big) \to \Omega^\bullet(M) \tag{12}$$

其中超联络满足 $\langle \mathbb{A}_- x, y\rangle = (-1)^{|x|}\langle x, \mathbb{A}_+ y\rangle$；

(3) 满足以下条件的微分形式 $Z, Z_\ell \in \Omega^\bullet(M;\, C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$

$$dZ = 0,\quad \partial_\ell Z = dZ_\ell, \qquad \deg(Z) = n \mod 2,\quad \deg(Z_\ell) = n-1 \mod 2$$

其中 ℓ 是 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的标准坐标（命题 6.44）。

次数为 n 的场论上的重整化群流会诱导超联络的 Getzler 重标度（命题 6.22）：由 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ 给出的重整化流限制为

$$\mathbb{A}_\pm \mapsto \mu(\mathbb{A}_\pm)_0 + (\mathbb{A}_\pm)_1 + \mu^{-1}(\mathbb{A}_\pm)_2 + \mu^{-2}(\mathbb{A}_\pm)_3 + \dots \tag{13}$$

反射结构和实结构沿着 (11) 限制如下。

(1) 反射结构决定了相对于 (151) 中定义的 $*$-超代数结构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \xrightarrow{\overline{}} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}$ 的克利福德模丛同构 $V_\pm \simeq V_\mp$。利用这些数据，配对 (12) 决定了 V_+ 和 $\overline{V}_-$上的分次厄米配对，使得超联络 $\mathbb{A}_+$ 和 $\mathbb{A}_-$ 是分次自伴的。正性条件要求厄米配对为正定（命题 6.32）。

(2) 实结构决定了模丛同构 $V_\pm \simeq V_\pm$，其相对于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$上的标准实结构。超联络与 $V_\pm$上的此实结构相容。对于具有实结构的反射正场论，厄米内积也是实的（命题 6.37）。

如命题 1.4 之前所述，命题 1.10 的要点是，具有实结构和反射正结构的次数为 n 的欧几里得场论 (10) 决定了一个超联络，对它或许可以应用 KO^n 值族指标构造。这个指标丛的存在可能是一个相当微妙的分析问题。所需的主要条件是：对于小于某个固定 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 的特征值，其特征空间的某个直和在 M 的（一个开子流形）上构成光滑向量丛；参见定义 C.16。从物理上说，这个特征空间子丛是能量小于 λ 的态所构成的子空间。换言之，用物理语言来说，指标丛的存在等同于要求存在一个光滑截断理论，即威尔逊有效场论意义下的截断理论；例如，参见 [Cos11a, §1.3]，其中以数学方式阐述了这些关键思想。下面的定义精确刻画了提取 KO 值族指标所需的 1|1-欧几里得场论的各项要素。

定义 1.11。 群胚 $1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 的对象是 $\mathrm{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示（定义 6.18），这些表示是反射正的（定义 6.30）、迹类的（定义 6.41）、实的（定义 6.35），并且存在截断函数（定义 7.1）。态射是 $\mathrm{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示之间的同构，且这些同构与反射结构、实结构和迹相容。

推论 1.12。 定理 1.1 为 Stolz 和 Teichner 的次数为 n 的理论的一个子范畴构造了一个余循环映射，

$$\{E \in 1|1\text{-}\mathrm{EFT}^n(M) \mid E \text{ admits energy cutoffs}\} \xrightarrow{\text{cocycle}} \widehat{\mathrm{KO}}^n(M).$$

证明。 $2|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 的定义经过精心安排，使得一个对象 $E \in 1|1\text{-}\mathrm{EFT}^n(M)$ 通过限制到特定的超欧几里得配边族，来确定 $1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 中一个对象的数据；接下来只需检验这些数据是否满足所要求的性质。$1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 中对象的正性由

$1|1$-$\mathrm{EFT}^n(M)$ 的反射正性推出。满足截断性质的场论构成场
微分族，并且我们有一个张成

$$1|1\text{-}\mathrm{EFT}^n(M) \hookleftarrow \{E \in 1|1\text{-}\mathrm{EFT}^n(M) \mid E \text{ 具有能量截断}\} \xrightarrow{\text{限制}} 1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)。 \tag{14}$$

$\mathrm{Pos}^{\frown}$ 将右侧的映射与 (2) 复合，即可得到所述的映射到 $\mathrm{KO}^n(M)$。 □

定理 1.2 可通过反向应用命题 1.10 得出：Bismut 超联络由公式 (8) 确定了一个从 $\mathrm{sPath}_0(M)$ 出发的表示，而该表示自然附带确定 $1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 中一个对象所需的额外数据和性质。在这个例子中，截断函数的存在性依赖于 Bismut 的族指标定理 [Bis86]。尽管仅仅是场论数据的一部分（见注 1.15），$\alpha(X) \in 1|1\text{-}\mathrm{eft}^{-n}(M)$ 包含了族微分指标所需的全部相关数据。

最后，我们对本文建立的框架作几点评论。

注 1.13。 对于任何一种次数为 n, $1|1$ 的欧几里得场论定义，都可以表述跨度 (14)，只要它是基于一个包含小配边族（见定义 4.23）的配边范畴定义，且次数扭曲满足假设 5.9。因此，这类场论通过与 (2) 复合，便有一个子范畴，其余循环映射取值于 $\mathrm{KO}^n(M)$。对于有限秩例子，截断条件自动满足；见推论 7.4，该推论由 [BGV92, §9.1] 得出。因此，(14) 中的截断条件只对无限秩例子有意义。

注 1.14。 截断适用于广泛的一类场论。事实上，在 Witten 对 $\mathcal{N} = (0, 1)$ 超对称σ模型的研究中，[Wit88, §1]，他建议使用截断来分析 $d = 2$ 版猜想 (1) 中的场论。对于 $1|1$ 维场论，具有光滑能量截断这一性质，类似于微分算子是椭圆算子的性质；尤其是，截断要求次数零部分的特征函数能够确定 $\mathbb{A}^2$ 上的光滑截面。

注 1.15。 假设范畴 $1|1\text{-}\mathrm{EBord}(M)$ 有生成元与关系描述（遵循 [HST10, 6.7] 和 [ST11, 3.2]），那么 $1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M)$ 的对象数据就是定义在由小配边所构成的 M的子范畴上的次数为 n 的场论数据

$$1|1\text{-}\mathrm{ebord}(M) \hookrightarrow 1|1\text{-}\mathrm{EBord}(M)$$

由定义 4.23 中的 S-族配边生成。

注 1.16。 根据 Hopkins–Hovey [HH92], 的结果，定理 1.1 和 1.2 给出了一个满射

$$1|1\text{-}\mathrm{eft}^n(M) \twoheadrightarrow \mathrm{KO}^n(M), \tag{15}$$

验证了 (1) 的 $d = 1$ 情形的一个版本。猜想 (1) 的一个更强形式断言，映射 (15) 在同痕类上诱导同构，因此相应的上同调理论是场论的完备不变量 [ST11, §1.5]。容易看出，(15) 可经由同痕类分解，但基于下文将说明的原因，我们不认为在此处采用的框架中会有同构。鉴于余循环映射的分解 (6)，猜想 (1) 的更强形式尤其要求存在一个超联络范畴，其同痕类为 KO 理论。然而，在现有定义中，底层向量丛的同构类是同痕不变量。特别是，向量丛的秩是同痕不变量，却不是底层 KO 类的不变量。我们认为有两种可能的办法可以避开这个问题。第一种选择是在（无限秩）希尔伯特丛上定义场论，并利用这类丛总是可平凡化的这一事实 [Kui65]；这与 [ST04] 和 [HST10], 此前的定义相呼应，也很可能与 Lott 和 Gorokhovsky 的微分 K 理论模型 [GL15]有所关联。第二种选择遵循 [ST11, Remark 3.16], 中的建议，要求建立一个框架，以便在拓扑向量空间层（不一定是局部自由的）上定义超联络，例如参见 [Ulr21]，其中给出了这一方向上的有限秩结果。目前尚不清楚这两种方法是否有任何一种能够推广到维数 $2|1$下所需的结论。

概要。 物理学方面的动机将在 §2 中阐述。§3 中，我们定义光滑流形上的超路径范畴。§4 中，我们证明超路径给出了 Stolz 和 Teichner 在 [ST11] 中提出的 1|1-欧几里得配边范畴中的配边实例。§5 中，我们概述次数 n 扭曲的构造，以及由此得到的次数 n 扭曲场论的取值。主要技术结果在 §6 中证明；我们将场论的这些取值限制到近乎常值超路径上，以证明命题 1.10。§7 中，截断理论与族指标构造之间的关系促使我们定义群胚 1|1-eft^n(M)。定理 1.1 和 1.2 随后由指标理论中的标准构造得出。§A 中，我们回顾一些超代数和超几何背景；§B 概述本文所用的 [ST11] 中的主要定义和构造；§C 回顾微分 KO 理论中的族指标，其内容来自 [BE23b]。

不熟悉 Stolz–Teichner 计划详细内容的读者，可以略读第 §4 和 §5 节；这些章节解释了我们的结果如何与 [ST11], 相契合，但在逻辑上独立于主要定理。

本文是系列论文 [BE23a, BE23b, BE23c] 的一部分，该系列解决了猜想 (1) 的一个 1-范畴版本。零范畴版本是 [BE23a] 的主要结果。在 1-范畴增强版本中，(1) 的目标需要一种新的（微分）KO 理论模型；这与场论没有直接关系，将在 [BE23b], 中处理，并在下文 §C 中回顾。本文通过指标映射，将 1|1 维欧几里得场论与这些微分 KO 余循环联系起来。在 [BE23c] 中，我们将这一指标推广到 2|1 维场论。

致谢。谨此感谢 Kevin Costello、Theo Johnson-Freyd、Matthias Ludewig、Stephan Stolz、Peter Teichner 和 Arnav Tripathy，就本文内容进行了富有启发性的讨论。本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2205835。

Contents

1. 引言与结果陈述 1 2. 超对称量子力学的动机 8 3. 流形中的超欧几里得路径 13 4. 作为配边的超欧几里得路径 22 5. 次数为 n 30 的 1|1-欧几里得场论 6. 从超路径的表示中提取几何数据 40 7. 能量截断与族指标 50 附录 A. 超厄米结构、 $*$-超代数与超流形 53 附录 B. Stolz 和 Teichner 的欧几里得场论综述 57 附录 C. KO 理论中的族指标 66 参考文献 71

2. Motivation from supersymmetric quantum mechanics

本节概述超对称量子力学中的论证，这些论证在 $M = \mathrm{pt}$ 的情况下导出定理 1.1 和 1.2。这里的讨论有意保持非正式，精确定义将留待后续章节给出。

2.1. 关于 X 的量子力学。为了建立直观认识，我们先介绍普通量子力学，不涉及超对称性。

设 X 是一个闭定向黎曼流形。在 X 上的量子力学以 $\mathcal{H} = C^\infty(X;\mathbb{C})$为态空间，并赋予由关于 X上的黎曼体积形式积分所诱导的厄米内积。 X上的拉普拉斯算子 $H = \Delta$ 是该理论的哈密顿量，生成时间演化。在维克旋转理论中，这给出了半群 $\mathbb{R}_{\geq 0}$的一个表示，

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), \qquad t \mapsto e^{-tH}, \tag{16}$$

其中 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 被视为时间参数。这个表示还有重要的附加性质： e^{-tH} 是自伴的，并且对于 $t > 0$ ，迹是有限的

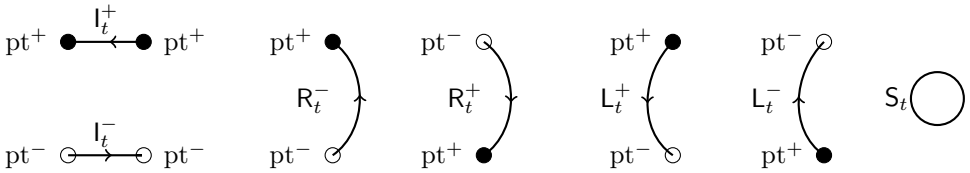
$$Z := \mathsf{Tr}(e^{-tH}) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}) \tag{17}$$

因为假设 X 是紧致的。由式（17）给出的关于 t的函数称为配分函数。一般的量子力学系统由满足自伴性和迹类性质的半群表示（16）给出。

注记 2.1。通常，人们会取 Fr´echet 空间 $\mathcal{H} = C^\infty(X;\mathbb{C})$ 的希尔伯特完备化，从而得到态的希尔伯特空间和一个无界哈密顿量 $H = \Delta$。在 [ST11] 中定义场论时，算子 Δ 的定义域（作为 Fr´echet 空间）才是更基础的对象。相比之下， [ST04] 和 [HST10] 中场论定义的基本研究对象是希尔伯特完备化。目前尚不清楚哪种观点更容易推广到（1）中的猜想。本文将大体遵循 [ST11], ，但在本节余下部分将忽略这些泛函分析上的区别。

在 [ST04、HST10、ST11], 的形式体系中，一个量子力学系统确定一个一维欧几里得场论，它被定义为一维定向黎曼配边范畴 1-EBord 的一个表示。1-EBord 的对象是有限个不交并的 $\bullet = \mathrm{pt}^+$ 和 $\circ = \mathrm{pt}^-$，即具有两种定向选择的点。态射是不交并形式的一维黎曼配边：

(18)



1-流形 S_t 是周长为 t的圆，视为从空集到自身的配边。配边 $\mathsf{I}_t^\pm$、$\mathsf{R}_t^\pm$ 和 $\mathsf{L}_t^\pm$ 所依托的 1-流形都是长度为 t 的区间；它们的区别在于源与靶数据。(18) 中的记号遵循 [HST10, ST 11], , 其中 $\mathsf{L}_t^\pm$和 $\mathsf{R}_t^\pm$分别是长度为 t 的“左肘形”和“右肘形”，而 $+$ 或 $-$ 标记指的是定向，在 (18) 中以箭头示意。我们也遵循 [HST10, ST11] 中的惯例，从右向左读取这些配边示意图。例如，R_t^+是从空集到 $\mathrm{pt}^- \coprod \mathrm{pt}^+$的配边，而 L_t^+是从 $\mathrm{pt}^+ \coprod \mathrm{pt}^-$ 到空集的配边。配边通过沿匹配的源与靶数据粘合而复合。0-维和 1-维流形的不交并赋予范畴 1-EBord 一个对称幺半结构。

可以计算配边复合所对应的关系。例如，黎曼一维流形之间存在如下等距变换：

$$\mathsf{I}_s^\pm \circ \mathsf{I}_t^\pm \simeq \mathsf{I}_{s+t}^\pm, \qquad \mathsf{L}_0^\pm \circ \sigma^\pm \simeq \mathsf{L}_0^\mp, \qquad \mathsf{L}_r^\pm \circ (\mathsf{I}_t^\pm \coprod \mathsf{I}_s^\mp) \simeq \mathsf{L}_{r+s+t}^\pm, \tag{19}$$

其中，中间的单位元 $\sigma^{\pm}\colon \mathrm{pt}^{\mp} \coprod \mathrm{pt}^{\pm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt}^{\pm} \coprod \mathrm{pt}^{\mp}$ 是幺半结构的对称性。第一个等式是 (16) 中半群 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的几何对应：区间的长度相加。定义范畴 $\mathsf{Fun}^{\otimes}$(1-EBord，Vect)，其对象为对称幺半函子

$$E\colon \text{1-EBord} \to \mathsf{Vect} \tag{20}$$

而态射是函子之间的自然同构。上文中，Vect 表示定义在 $\mathbb{C}$ 上、带有超（即 $\mathbb{Z}/2$-分次）结构的核 Fr´echet 空间范畴，并赋有 $\mathbb{Z}/2$-分次射影张量积。从物理上说，$\mathbb{Z}/2$-分次 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{ev}} \oplus \mathcal{H}^{\mathrm{odd}}$ 记录偶子空间 $\mathcal{H}^{\mathrm{ev}}$ 对应的玻色态，以及奇子空间 $\mathcal{H}^{\mathrm{odd}}$ 对应的费米态。加入超对称性后，这种分次将变得更加重要。

要使函子 (20) 的数据与量子力学系统 (16) 的标准数据相匹配，必须要求函子 (20) 具有一种额外结构，称为**反射正性**，例如参见 [FH21, §3] 或 [KS21, 第 18] 页。这始于由一维流形的定向反转生成的 1-EBord 上的 $\mathbb{Z}/2$-作用；用 (18) 表示，即为

$$\mathrm{pt}^{\pm} \mapsto \mathrm{pt}^{\mp}, \qquad \mathsf{I}_t^{\pm} \mapsto \mathsf{I}_t^{\mp}, \qquad \mathsf{R}_t^{\pm} \mapsto \mathsf{R}_t^{\mp}, \qquad \mathsf{L}_t^{\pm} \mapsto \mathsf{L}_t^{\mp}. \tag{21}$$

从物理上说，这个作用反转了时间箭头。向量空间上还有一个由复共轭生成的 $\mathbb{Z}/2$-作用。函子 (20) 的反射结构 是关于源和目标上的作用的$\mathbb{Z}/2$-等变数据（例如，参见 [FH21, §B] 或下文的定义 B.13），其中包括一个同构的数据

$$\mathcal{H} := E(\mathrm{pt}^{+}) \xrightarrow{\sim} \overline{E(\mathrm{pt}^{-})}.$$

A r带有反射结构的表示 (20) 若厄米配对 g

$$\langle -, - \rangle\colon \overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H} \simeq E(\mathrm{pt}^{-}) \otimes E(\mathrm{pt}^{+}) \xrightarrow{E(\mathsf{L}_0^{-})} \mathbb{C}$$

是正定的，则称其为**反射正** 。一维欧几里得场论 是一个反射正表示 (20)。反射正性要求的一个性质是，$E(\mathsf{I}_t^{+})$ 必须是作用于 $\mathcal{H}$ 上的半群 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的自伴表示。

根据以上讨论，一维欧几里得场论由其沿 (21) 的限制所决定，具体数据为向量空间 $\mathcal{H} = E(\mathrm{pt}^{+})$ 上的自伴半群表示 $(t \mapsto E(\mathsf{I}_t^{+}))$，该向量空间配有厄米内积 $\langle -, - \rangle = E(L_0^{-})$。此外，限制到 $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ 时，这个半群表示是迹类的，而配分函数

$$Z = \mathsf{Tr}(E(\mathsf{I}_t^{+})) = E(\mathsf{S}_t), \qquad t \in \mathbb{R}_{>0}$$

可以视为定义在周长为 $t > 0$ 的度量圆模空间上的函数。在闭定向黎曼流形 X 上的量子力学提供了一个取值于

$$E(\mathrm{pt}^{+}) = C^{\infty}(X; \mathbb{C}), \quad E(\mathsf{I}_t^{+}) = e^{-t\Delta}, \quad E(\mathsf{L}_0^{-})(s_1, s_2) = \int_X \overline{s_1} s_2 \, d\mathrm{vol}.$$

注 2.2。 我们简要评论一下上文忽略的一项重要技术细节。一维欧几里得场论中的各种量应当依赖于几何参数并随之光滑变化，例如半群 $t \mapsto E(\mathsf{I}_t^{+})$ 和配分函数 $Z = E(\mathsf{S}_t)$ 都应当随 t 光滑变化。在 Stolz 和 Teichner 的形式体系 [HST10, ST11] 中，这一点是通过将场论定义为纤维化函子来处理的：它们将光滑变化的量赋给光滑变化的配边族；详见下文 §B。

2.2. **超对称量子力学**。设 X 为一个闭的偶维黎曼自旋流形，$\not{S} \to X$ 为带有狄拉克算子 $\not{D}$ 的 $\mathbb{Z}/2$分次旋量丛。 X 上的超对称量子力学研究态空间 $\mathcal{H} = \Gamma(X; \not{S})$，将其视为一个 $\mathbb{Z}/2$分次向量空间，其厄米内积由旋量的配对与积分确定。狄拉克拉普拉斯算子 $H = \not{D}^2$ 是该理论的哈密顿量，由此得到一个

哈密顿量的奇平方根 $Q = \not{D}$

$$\frac{1}{2}[Q,Q] = \frac{1}{2}(QQ + QQ) = Q^2 = \not{D}^2 = H, \tag{22}$$

其中 $[-,-]$ 是分次对易子。算子 Q 定义了超对称性，例如参见 [Wit82，第1]节。超对称性的一个直接推论是，配分函数

$$Z = \mathsf{sTr}(e^{-tH}) = \mathsf{sTr}(e^{-tQ^2}) = \dim(\ker(Q))_+ - \dim(\ker(Q))_- = \mathrm{Ind}(Q) \tag{23}$$

与 t 无关，并且等于 Q的核的超维数，也就是狄拉克算子 $Q = \not{D}$的指标。这可由 McKean–Singer公式 [MS67]推出；另见 [BGV92，定理 3.50]。在这一论证中，至关重要的是，配分函数 (23) 使用超迹，其定义为

$$\mathsf{sTr}(e^{-tH}) := \mathsf{Tr}((-1)^{\mathsf{F}} \circ e^{-tH})$$

其中 Tr 是普通迹，而 $(-1)^{\mathsf{F}}$ 在 $\mathcal{H}$ 的偶子空间上作用为 $+1$，在奇子空间上作用为 -1。

超对称性 Q 使得可以将通常的时间演化 (16) 扩展为超半群的一个表示，

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}) \qquad (t,\theta) \mapsto e^{-tH+\theta Q}, \tag{24}$$

其中 (t,θ) 是带边界超流形 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 上的坐标；该超流形是通过沿包含映射 $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ 限制 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的结构层定义的（见例 A.12）。$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 上的半群乘法是下文所定义的超李群中乘法的限制。

定义 2.3. 定义超李群 $\mathbb{R}^{1|1}$，其乘法为

$$(t,\theta)\cdot(s,\eta) = (t+s+\theta\eta, \theta+\eta) \qquad (t,\theta),(s,\eta) \in \mathbb{R}^{1|1}(S), \tag{25}$$

其中，上述公式是根据 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的点函子来理解的。

注 2.4. 一个密切相关（也许更广为人知）的超对称量子力学例子，将其态空间取为 $\mathcal{H} = \Omega^\bullet(X)$，即定向黎曼流形上的微分形式 [Wit82, §2]。此时哈密顿量定义为霍奇拉普拉斯算子 $H = dd^* + d^*d$，它有一对对易奇平方根，

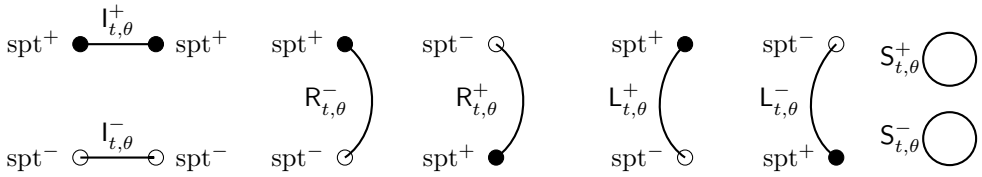
$$Q_1 = d + d^*, \quad Q_2 = i(d - d^*), \quad [Q_1, Q_2] = 0, \quad Q_1^2 = Q_2^2 = H. \tag{26}$$

这是 $\mathcal{N} = 2$ 超对称性的数据，而不是上面的 $\mathcal{N} = 1$ 例子。鉴于我们预期与指标理论建立联系，$\mathcal{N} = 1$ 超对称性更为基础。当然，遗忘 (26) 中的一个 Q_i，便可提取出一个 $\mathcal{N} = 1$ 理论。

一般的超对称量子力学系统由满足自伴性和迹类条件的超半群表示 (24) 给出。在 [ST04、HST10、ST11]，的形式体系中，此类数据确定了一个一维欧几里得场论，我们将在下文回顾这一点。

可以将 X 上的超对称量子力学重新表述为 $1|1$ 欧几里得配边范畴 $1|1$-EBord 的一个表示；该范畴是 1-EBord 的推广。$1|1$-EBord 的对象是有限个 $\bullet = \mathrm{spt}^+$ 和 $\circ = \mathrm{spt}^-$ 的不交并，即 超点及其两种定向选择。其态射可以直观地表示为

(27)



与 (18) 大致相同，不过将表示黎曼长度的参数 t 替换为一对 $(t,\ \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}$，用来表示“超”长度。这种超长度具有

通常的偶参数 t，同时还有一个奇参数 θ；这些参数确定（超）配边族，具体将在 §3.3 中说明。对于 $\mathsf{I}^+_{t\,\theta}$、$\mathsf{R}^+_{t\,\theta}$、$\mathsf{L}^+_{t\,\theta}$ 和 S^+_t，使用 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 中的超长度参数 (t,θ) 会更方便；而 I^-_t、R^-_t、L^-_t 和 S^-_t 则使用 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}$ 中的 (t,θ)。配边 $\mathsf{I}^\pm_{t\,\theta}$、$\mathsf{R}^\pm_t$ 和 $\mathsf{L}^\pm_t$ 所基于的超流形仍然完全相同，都是超区间。我们也可以类似地找到与配边复合相关的关系，例如，

$$\mathsf{I}^\pm_{s,\eta}\circ\mathsf{I}^\pm_{t,\theta}\simeq\mathsf{I}^\pm_{s+t+\eta\theta,\eta+\theta},\quad \mathsf{L}^\pm_0\circ\sigma^\pm\simeq\mathsf{L}^\mp_0,\quad \mathsf{L}^\pm_0\circ(\mathsf{I}^\pm_{t,\theta}\coprod\mathsf{I}^\mp_{s,\eta})\simeq\mathsf{L}^\pm_{(s,\eta)^{-1}(t,\theta)} \tag{28}$$

其中，中间的单位元等式 $\sigma^\pm\colon \mathrm{spt}^\mp\coprod\mathrm{spt}^\pm\xrightarrow{\sim}\mathrm{spt}^\pm\coprod\mathrm{spt}^\mp$ 再次体现了幺半结构的对称性。第一个等式是式 (24) 中超半群 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 乘法的几何对应。请注意，超区间的粘合编码了一个非交换超群；这是预料之中的，因为 (22) 不是阿贝尔超李代数。

有了这些，我们可以考虑范畴 $\mathrm{Fun}^{\otimes}(1|1\text{-EBord},\ \mathsf{Vect})$，其对象是对称幺半函子

$$E\colon 1|1\text{-EBord}\to\mathsf{Vect}. \tag{29}$$

为了使函子 (29) 的数据与物理学家所说的超对称量子力学理论恰当对应，我们还必须施加一种反射正性的条件；其定义与无超对称性的情形类似。我们将 $1|1$ 维欧几里得场论 定义为反射正函子 (29)。由此可知，一个 $1|1$ 维欧几里得场论确定了超半群 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 在带有厄米内积 $\langle -,-\rangle$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 分次拓扑向量空间 $\mathcal{H}$ 上的一个自伴表示。该数据在 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\subset\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 上满足迹性质，其中迹是函子 (29) 在超圆上的取值（结果表明，它是 $(t,\ \theta)$ 的常数函数）。超对称量子力学确定了一个取值为.....的反射正函子 (29)

$$E(\mathrm{spt}^+)=\Gamma(X;\not{S}),\quad E(\mathsf{I}^+_{t,\theta})=e^{-t\not{D}+\theta\not{D}},\quad E(\mathsf{L}^-_0)(s_1,s_2)=\textstyle\int_X(s_1,s_2)d\mathrm{vol}. \tag{30}$$

注记 2.5. 沿着半群同态 $\mathbb{R}_{\geq 0}\subset\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 限制（24）会遗忘超对称性，从而提取出普通的量子力学理论。类似地，任意$1|1$维欧几里得场论都会确定一个一维欧几里得场论；参见 [ST11，方程 4.14]。

注记 2.6. 从超李代数表示（22）或超半群表示（24）的角度，便可全面理解超对称量子力学。我们之所以主要致力于用 $1|1$欧几里得配边范畴来描述它，是因为显然可以将其推广到 $2|1$欧几里得情形，从而为猜想（1）中的 $2|1$欧几里得场论提供一个候选定义。

2.3. 重整化群流、低能截断与 K理论。给定$\mu\in\mathbb{R}_{>0}$，存在一个函子 1-EBord $\to$ 1-EBord，它将欧几里得配边上的度量放大 μ倍。就基本配边（18）而言，其效果为

$$\mathrm{pt}^\pm\mapsto\mathrm{pt}^\pm,\qquad \mathsf{I}^\pm_t\mapsto\mathsf{I}^\pm_{\mu t},\qquad \mathsf{R}^\pm_t\mapsto\mathsf{R}^\pm_{\mu t},\qquad \mathsf{L}^\pm_t\mapsto\mathsf{L}^\pm_{\mu t},\quad \mathsf{S}_t\mapsto\mathsf{S}_{\mu t}.$$

将函子 (20) 与此作用复合，便定义了作用于一维欧几里得场论的重整化群流。当且仅当对所有 t，$E(\mathsf{I}^+_t)=\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ 时，场论在重整化群 (RG) 流下不变。$E(\mathsf{I}^+_t)$ 上的迹类条件意味着，重整化群不变的场论具有有限维的态空间 $\mathcal{H}$，因而确定了一个一维拓扑场论。

[1]同构 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\simeq(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0})^{\mathrm{op}}$ 也使我们能够将配边 $\mathsf{I}^-_{t\ ,\ \theta}$，$\mathsf{R}^-_{t\ ,\ \theta}$，$\mathsf{L}^-_{t\ ,\ \theta}$ 和 $\mathsf{S}^-_{t\ ,\ \theta}$视为属于 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 的 $(t,\ \theta)$，但涉及这些配边的复合会使用对代数超半群结构。对于普通欧几里得配边而言，这并不构成问题，因为 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ 是同构半群。

类似地，存在函子 $1|1$-EBord $\to$ $1|1$-EBord，它们将超长度按 $(t,\theta) \mapsto (\mu^2 t, \mu\theta)$ 进行伸缩。在基本配边 (27) 上，这给出

$$\mathrm{pt}^{\pm} \mapsto \mathrm{pt}^{\pm}, \qquad \mathsf{I}^{\pm}_{t,\theta} \mapsto \mathsf{I}^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \qquad \mathsf{R}^{\pm}_{t,\theta} \mapsto \mathsf{R}^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \qquad \mathsf{L}^{\pm}_{t,\theta} \mapsto \mathsf{L}^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \quad \mathsf{S}^{\pm}_{t,\theta} \mapsto \mathsf{S}^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}.$$

对超长度 θ 奇部分的非平凡作用，是使膨胀作用与复合相容（从而成为函子）所必需的。将上述函子与 (29) 预复合，便定义了作用于 $1|1$维超欧几里得场论的重整化群流。在超对称性的存在下，配分函数在重整化群流下保持不变：它是几何参数 $(t,\ \theta)$ 的常数函数。

给定一个具有 (16) 或 (24) 形式的量子力学系统，令 $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}$ 表示自伴哈密顿量 H 的λ特征空间（因此 $\lambda \in \mathbb{R}$）。那么 $\mathcal{H}_\lambda$ 就是能量为 λ 的态空间。定义能量为 $< \lambda$ 的态的向量空间，

$$\mathcal{H}^{<\lambda} := \bigoplus_{\nu<\lambda} \mathcal{H}_\nu \tag{31}$$

其厄米内积由 $\mathcal{H}$ 上的内积限制到子空间 $\mathcal{H}^{<\lambda} \subset \mathcal{H}$ 而得。e^{-tH} 上的迹类条件意味着 H 的特征空间是有限维的，H 的谱是离散的，并且对于 $\lambda \ll 0$，$\mathcal{H}_\lambda = \{0\}$。因此，$\mathcal{H}^{<\lambda}$ 是有限维的。将 截断理论 λ定义为由有限维向量空间 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 构成、并配备恒等时间演化算子的量子力学系统。因此，λ截断理论在重整化群流下保持不变，即为一维拓扑场论。

注 2.7。定义截断理论时，也可以同样为 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 配备限制哈密顿量 $H|_{\mathcal{H}^{<\lambda}}$。对我们的目的而言，让截断理论具有重整化群不变性更为方便。

由于 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{Z}/2$ 分次的，且 H 是偶映射，因此对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\mathcal{H}_\lambda$ 都是 $\mathbb{Z}/2$ 分次的。给定 λ 的一个固定选择以及一维或 $1|1$ 维欧几里得场论 E，考虑如下赋值

$$E \mapsto [\mathcal{H}^{<\lambda}] = [(\mathcal{H}^{<\lambda})^{\mathrm{ev}}] - [(\mathcal{H}^{<\lambda})^{\mathrm{odd}}] \in \mathrm{K}^0(\mathrm{pt}). \tag{32}$$

在没有超对称性的情况下，映射 (32) 通常依赖于 λ。然而，当 H 具有奇平方根 Q 时，该赋值与 λ 无关：Q 给出同构

$$Q\colon \mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{ev/odd}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{odd/ev}}, \qquad \lambda \neq 0$$

因此

$$[\mathcal{H}^{<\lambda}] = [\mathcal{H}_0] \in \mathrm{K}^0(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}$$

对所有 λ 均成立。超对称量子力学中的这个取整数值的不变量称为*Witten*指数，最初由 [Wit82] 研究。Witten指数是 $1|1$ 维欧几里得场论的变形不变量。

例 2.8。对于以偶维自旋流形上的狄拉克算子 $Q = \not{D}$ 为内容的理论，Witten指数与狄拉克算子的解析指标 $\mathrm{Ind}(\not{D}) = [\mathcal{H}_0] \in \mathrm{K}^0(\mathrm{pt})$ 一致。在注 2.4 讨论的例子中，Witten指数就是 X 的欧拉示性数。

相比之下，不具有超对称性的 1 维欧几里得场论构成一个可缩空间 [HST10，定理 6。35] 因此没有有趣的变形不变量。

注记 2.9。注意，McKean–Singer公式 (23) 将 Witten指数与配分函数等同起来，二者都是 $\mathbb{Z}$ 的元素。在族的情形下，这种对应关系有所改变：配分函数是一个微分形式，与 Witten指数的陈特征相一致。

2.4. **对称性与实结构**。给定形式为 (16) 或 (24) 的量子力学系统，作用于 $\mathcal{H}$ 的超代数 A 若与 H 或 Q 的作用可交换，则称其为对称性代数。具有 A-对称性的理论的反射正性同样赋予 $\mathcal{H}$ 厄米内积，此外还要求在 A 上具有 $*$-结构，并且 A 在 $\mathcal{H}$ 上的作用是 $*$-作用。

按照对称性来组织场论通常很方便：对于给定的超代数 A，可以考虑具有 A 对称性的一族理论。Stolz 和 Teichner 的 n 次场论是具有由第 n 个（复）克利福德代数所规定的对称性的超对称量子力学系统 (24)

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n := \begin{cases} \langle f_1, \dots f_n \mid [f_j, f_k] = -2\delta_{jk} \rangle & n \geq 0 \\ \langle e_1, \dots e_n \mid [e_j, e_k] = 2\delta_{jk} \rangle & n < 0. \end{cases} \tag{33}$$

其中 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 或 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。这些克利福德代数带有标准的 $*$结构；参见 §A.2。

还可以要求量子力学系统具有 实结构，即在保持分次的同时与哈密顿量对易的 $\mathbb{C}$-反线性对合 $\mathcal{H}$ 。考虑具有 A 对称性的一族理论时，应要求在 A上具有相容的实结构。对于克利福德代数，这等价于声明 (33) 中的生成元为实，从而实结构由复共轭确定。利用 Atiyah–Bott–Shapiro 对 KO^n(pt) 的克利福德模 [ABS64]，描述，此类实的 n 次理论通过构造 (32) 确定 KO^n(pt) 中的类。

实的、次数为 n 的理论自然源于自旋几何。设 X 是一个 n 维自旋流形，其主自旋丛为 P，即 $P \to X$ 是一个 Spin(n) 主丛，它双覆盖 TX 的定向标架丛。定义旋量丛如下：

$$\mathbb{S} := P \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{C}\mathrm{l}_n = P \times_{\mathrm{Spin}(n)} (\mathbb{C}\mathrm{l}_n^+ \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}_n^-) \tag{34}$$

其 $\mathbb{Z}/2$ 分次继承自实克利福德代数 $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Cl}_n$ 上的 $\mathbb{Z}/2$ 分次。这个版本的旋量丛带有右 Cl_n 作用，我们将其视为左 Cl_{-n} 作用（见例 A.8）。奇的、自伴的 Cl_{-n}-线性狄拉克算子 $\not{D}$ 作用于整体截面 $\Gamma(X;\mathbb{S})$ 上。与之前相同的构造给出一个具有附加结构的量子力学系统：态空间 $\mathcal{H} = \Gamma(X;\not{S})$ 是一个实的、自伴的 Cl_{-n} 模，且算子 $Q = \not{D}$ 与克利福德作用可交换。能量截断（31）给出一个有限维克利福德模。通过 Atiyah–Bott–Shapiro 构造，映射（32）就是狄拉克算子的 克利福德指标，其取值于 KO^{-n}(pt)。这个基本的几何例子启发了 Stolz 和 Teichner 对 $1|1$ 维中次数为 n 的场论的定义，见 [ST04，例 2.3.3]。

备注 2.10。 对于内积空间 W，克利福德代数 Cl(W) 可以理解为在奇向量空间 ΠW 中运动的自由（费米）粒子的量子化，例如参见 [Fre99，第 19] 页。高维中的自由费米子揭示了通向 degree n 场论一般框架的路径。特别是，这提示了猜想（1）中第二个猜想的 $2|1$ 维推广。

3. Super Euclidean paths in a manifold

3.1.**预备：流形中的（非超）欧几里得路径范畴**。令 $\mathbb{A}^1$ 为仿射实直线，并将其视为定向黎曼流形。 $\mathbb{A}^1$ 的等距群是李群 $\mathbb{R}$，它通过平移作用于 $\mathbb{A}^1$ 。我们将描述以 $\mathbb{A}^1$ 为模型的欧几里得路径，以期推广到 $1|1$-欧几里得路径。

黎曼流形 $\mathbb{A}^1$、等距群 $\mathbb{R}$以及一个选定的连通余维 1 子流形 $\mathbb{A}^0 \subset \mathbb{A}^1$ ，按照 Stolz 和 Teichner [ST11, §2.5] 的意义，确定了一维欧几里得几何（$\mathbb{R}$， $\mathbb{A}^1$， $\mathbb{A}^0$）；综述请见 §B.1。下文中，对于 $s \in \mathbb{R}$ ，令T_s： $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ 表示平移 s。

定义 3.1. 设 M 是一个光滑流形。 M 中的正向定向的欧几里得路径 是一个三元组 (ϕ， t_{in}， t_{out})，其中 ϕ: $\mathbb{A}^1 \to M$ 是一个光滑映射， t_{in}， $t_{\mathrm{out}} \in \mathbb{A}^1$ 是点，且满足 $t_{\mathrm{out}} - t_{\mathrm{in}} \in$

$\mathbb{R}_{\geq 0}$. 类似地， M中的负向定向的欧几里得路径 是一个三元组 $(\phi,\ t_{\mathrm{in}},\ t_{\mathrm{out}})$，且满足 $t_{\mathrm{out}} - t_{\mathrm{in}} \in \mathbb{R}_{\leq 0}$。 欧几里得路径 是正向或负向定向的欧几里得路径。点 $\phi(t_{\mathrm{in}}) \in M$ 是欧几里得路径的入射 边界，而 $\phi(t_{\mathrm{out}}) \in M$ 是欧几里得路径的出射 边界。两个欧几里得路径之间的等距变换 $(\phi,\ t_{\mathrm{in}},\ t_{\mathrm{out}}) \xrightarrow{\sim} (\phi',\ t'_{\mathrm{in}},\ t'_{\mathrm{out}})$ 是满足 $\phi' = \phi \circ T_s^{-1}$、 $T_s(t_{\mathrm{in}}) = t'_{\mathrm{in}}$ 且 $T_s(t_{\mathrm{out}}) = t'_{\mathrm{out}}$ 的 $s \in \mathbb{R}$ 数据。

欧几里得路径与等距变换构成一个群胚，它等价于一个离散群胚（即只含恒等态射的群胚），其对象为

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M), \tag{35}$$

其中，我们将 $\mathsf{Map}(\mathbb{R},\ M)$ 视为流形位点上的一个预层，

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \colon \mathsf{Mfld}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}, \qquad S \mapsto C^\infty(S \times \mathbb{R}, M).$$

Ind事实上，对于给定的欧几里得路径（$\phi,\ t_{\mathrm{in}},\ t_{\mathrm{out}}$），基点 $t_{\mathrm{in}} \in \mathbb{A}^1$ 给出了一个识别 n $\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{R}^1$，因此 $\phi\colon\ \mathbb{R} \to M$，而 t_{out} 由 $\mathbb{R}_{\geq 0} \coprod \mathbb{R}_{\leq 0}$ 中的一个点确定。

一维欧几里得几何还具有一些额外结构，这些结构会在欧几里得路径上诱导出额外结构。首先，基点 $\mathbb{A}^0 \subset \mathbb{A}^1$ 提供了一个同构 $\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{R}^1$ （它可能不同于使用 t_{in} 得到的识别）。这给出了 $\mathbb{A}^1$ 的一个优选反定向映射，

$$\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathsf{or}} \mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{A}^1, \qquad \mathsf{or}(t) = -t,\ t \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

接下来，对于任意 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$，存在一个微分同胚

$$\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathsf{rg}_\mu} \mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{A}^1, \qquad \mathsf{rg}_\mu(t) = \mu \cdot t \tag{37}$$

它会对 $\mathbb{A}^1$ 上的度量进行膨胀。记号 rg_μ 指的是它与重整化群的联系。我们强调，(36) 和 (37) 在一维欧几里得几何 $(\mathbb{R},\ \mathbb{A}^1,\ \mathbb{A}^0)$ 中并非等距变换。

结构 (36) 和 (37) 为欧几里得路径提供了以下附加结构。欧几里得路径 $(\phi,\ t_{\mathrm{in}},\ t_{\mathrm{out}})$ 的定向反转 应用定向反转等距变换 (36)，从而得到一个赋值

$$(\phi, t_{\mathrm{in}}, t_{\mathrm{out}}) \mapsto (\phi \circ \mathsf{or}^{-1}, \mathsf{or}(t_{\mathrm{in}}), \mathsf{or}(t_{\mathrm{out}})).$$

For $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ 欧几里得路径 $(\phi,\ t_{\mathrm{in}},\ t_{\mathrm{out}})$ 的 μ-膨胀 应用微分同胚 (37) to 一个欧几里得路径，使得

$$(\phi, t_{\mathrm{in}}, t_{\mathrm{out}}) \mapsto (\phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}, \mathsf{rg}_\mu(t_{\mathrm{in}}), \mathsf{rg}_\mu(t_{\mathrm{out}})).$$

根据欧几里得路径的描述 (35)，定向反转和 μ-膨胀是

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \\ (t, \phi) & \mapsto & (-t, \phi \circ \mathsf{or}^{-1}) \\ (t, \phi) & \mapsto & (\mu \cdot t, \phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}). \end{array} \tag{38}$$

特别地，定向反转会互换正定向和负定向的欧几里得路径。入射边界和出射边界 $\phi(t_{\mathrm{in}})$ $\phi(t_{\mathrm{out}}) \in M$ 在定向反转和 μ-膨胀下保持不变。

接下来，我们考察欧几里得路径在多大程度上可以视为范畴中的态射。存在映射

$$\mathrm{in}, \mathrm{out} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \rightrightarrows M \coprod M$$

将一条欧几里得路径映射到其入射边界或出射边界。我们希望上述内容能够确定一个范畴中的源映射与目标映射，其中复合由路径拼接给出。然而，这会遇到一个问题：拼接后的路径仅为分段光滑。有多种方法可以解决这一问题。一种方法是考虑 M 中带领圈的路径，这正是 Stolz 和 Teichner [ST11] 采用的方案；参见 §B.3。另一种方法是像 [DG20, LS21, BEP22] 那样，编码切割律而非粘合律。由此得到的配边范畴并不等价，而在将 §2.1 中讨论的量子力学系统推广时，尚不清楚哪一种才是“正确的”。

不过，在 (35) 中有一个子空间，其中拼接所带来的困难不复存在： M 中的常值欧几里得路径。

定义3.2。 定义 M中常值路径的（李）范畴，记作 $\mathsf{Path}_0(M)$，其对象和态射均为光滑流形

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{Path}_0(M)) = M \coprod M, \qquad \mathrm{Mor}(\mathsf{Path}_0(M)) = \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times M.$$

$\mathsf{Path}_0(M)$中的源映射与目标映射由投影给出。单位映射由 $0 \in \mathbb{R}$处的包含映射确定，而复合则由 $\mathbb{R}$中的加法确定。

在常值映射的包含映射下

$$\mathrm{Mor}(\mathsf{Path}_0(M)) = \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times M \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M)$$

路径拼接对应于范畴 $\mathsf{Path}_0(M)$中的复合。此外，赋值 (38) 还扩展为函子

$$\mathsf{Or}\colon \mathsf{Path}_0(M) \to \mathsf{Path}_0(M), \quad \mathsf{RG}_\mu\colon \mathsf{Path}_0(M) \to \mathsf{Path}_0(M). \tag{39}$$

接下来我们说明欧几里得路径与欧几里得环路之间的关系。(35)上有一个 $\mathbb{Z}$作用，由 $(t,\ \phi) \mapsto (t,\ n_t \cdot \phi)$ 给出，其中 $n_t \cdot \phi\colon \mathbb{R} \to M$ 是映射

$$(n_t \cdot \phi)(s) = \phi(s + nt), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

对于长度严格为正的路径， $\mathbb{Z}$-不动子空间（作为预层）是 M的欧几里得环路空间

$$\mathcal{L}(M) := (\mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M))^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}, M)$$

其点（$t,\ \phi$）是 M中周长为 $t > 0$的环路。此外， $\mathcal{L}(M)$具有由环路旋转给出的S^1作用。任意正长度的常值路径都确定一个环路，从而得到一个图表

$$\mathrm{Mor}(\mathsf{Path}_0(M)) \hookleftarrow \mathbb{R}_{>0} \times M \coprod \mathbb{R}_{<0} \times M \hookrightarrow \mathcal{L}(M), \tag{40}$$

并且 S^1在 $\mathcal{L}(M)$上的作用限制为在 $\mathbf{Mor}(\mathsf{Path}_0(M))$ 上的平凡作用。

总之，尽管常值欧几里得路径缺乏完整路径空间的几何丰富性，但它们带来两项技术上的简化：（1）常值路径构成一个有限维光滑流形；（2）常值路径的拼接总会得到一条（光滑的）常值路径。当 $M = \mathrm{pt}$ 时，范畴 $\mathsf{Path}_0(M)$ 恢复为区间半群（16），因此范畴 $\mathsf{Path}_0(M)$（及其表示）提供了此前研究的量子力学系统的一种可能的族推广。有鉴于此，我们将对上述内容进行推广；本节余下部分的目标是将定义3.2推广到 M中由（近乎）常值超欧几里得路径构成的范畴。

3.2. **1|1维欧几里得几何**。 回顾式（25）中的超李群 $\mathbb{R}^{1|1}$，并用 $\mathbb{A}^{1|1}$ 表示超李群 $\mathbb{R}^{1|1}$底层的（仿射）超流形。此记号强调， $\mathbb{R}^{1|1}$ 有一个特定的基点（单位元 $0 \in \mathbb{R}^{1|1}$），而 $\mathbb{A}^{1|1}$ 则没有。同样，用 $\mathbb{A}^{0|1}$ 表示超李群 $\mathbb{R}^{0|1}$底层的超流形。令 $\mathbb{A}^{0|1} \subset \mathbb{A}^{1|1}$ 为由标准[2] 包含映射 $\mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{1|1}$建模的嵌入。有关刚性超几何的回顾，请参见 §B.1。

定义 3.3 ([HST10，例 6.16]和 [ST11，§4.2])。 构造半直积$\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$，其中 $\mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ 通过 $(t, \theta) \mapsto (t, \pm\theta)$ 作用于 $\mathbb{R}^{1|1}$。 1|1维欧几里得几何由以下三元组指定

$$(G, \mathbb{M}, \mathbb{M}^c) = (\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2, \mathbb{A}^{1|1}, \mathbb{A}^{0|1})$$

对于 $\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 在 $\mathbb{A}^{1|1}$ 上的显然作用以及上文所述的包含映射 $\mathbb{A}^{0|1} \subset \mathbb{A}^{1|1}$。

[2]需要注意的是， $\mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{1|1}$ 并不是关于 $\mathbb{R}^{1|1}$上群结构（25）的同态。

按照定义 B.2 的记号， $1|1$-欧几里得流形的栈 $(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2,\ \mathbb{A}^{1|1})$-超流形范畴，其对象为下沉 $Y \to S$，其纤维是带有超欧几里得结构的 $1|1$ 维流形。 $1|1$-欧几里得对的栈，其对象为 $1|1$ 流形的纤维丛 $Y \to S$，这些流形带有超欧几里得结构，并配有一族嵌入于 S 上的 $0|1$ 维超流形 $Y^c \subset Y$。

例 3.4. 我们的一个主要例子是由（$t,\ \theta$）$\in \mathbb{R}^{1|1}(S)$决定的 S-族 $1|1$-欧几里得对，定义如下：

$$Y^c = S \times \mathbb{R}^{0|1} \xhookrightarrow{i_{t,\theta}} S \times \mathbb{R}^{1|1} = Y \tag{41}$$

其中

$$i_{t,\theta} \colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \subset S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{T_{t,\theta}} S \times \mathbb{R}^{1|1} \tag{42}$$

usi取标准嵌入和超平移映射$T_{t,\ \theta}$ 的复合定义为 n

$$S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\mathrm{id}_S \times (t,\theta) \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}} S \times \mathbb{R}^{1|1} \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\mathrm{id}_S \times \mathrm{act}} S \times \mathbb{R}^{1|1}, \tag{43}$$

其中第二个箭头是 $\mathbb{R}^{1|1}$ 在其自身上的作用。对于任意的（$t,\ \theta$）和（$s,\ \eta$），相应的 $1|1$-欧几里得对通过等距变换同构：

$$S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{T_{(s,\eta)\cdot(t,\theta)^{-1}}} S \times \mathbb{R}^{1|1}.$$

特别地，所有的对 (41) 都与标准对象 $S \times \mathbb{R}^{0|1} \subset S \times \mathbb{R}^{1|1}$ 同构 .

$1|1$ 维超欧几里得流形的栈具有一些额外结构，它们推广了普通欧几里得 1-流形的定向反转（36）和膨胀（37）。

定义 3.5。 定向反转 是由同态确定的 $1|1$-欧几里得几何的自同构

$$\mathsf{or} \colon \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{1|1}, \qquad (t,\theta) \mapsto (-t, -i\theta), \qquad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}(S). \tag{44}$$

我们注意到，限制在 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{1|1}$ 上时，（44）是 $\mathbb{R}$ 上的标准反转定向映射（36）。

注 3.6。 映射（44）在 [HST10 的例 6.16] 中称为针生成元 。

定义 3.7。 对于 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$，重整化群作用 是由同态确定的 $1|1$-欧几里得几何的自同构

$$\mathsf{rg}_\mu \colon \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{1|1}, \qquad (t,\theta) \mapsto (\mu^2 t, \mu\theta), \qquad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}(S). \tag{45}$$

定义 3.8 （[ST11，例 2.39 和 §4.1]）。 自旋翻转 是由 $-1 \in \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2 < \mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 的作用确定的$1|1$-欧几里得几何的自同构

$$\mathsf{fl} \colon \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{1|1}, \qquad (t,\theta) \mapsto (t, -\theta), \qquad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}(S). \tag{46}$$

由于 $\mathbb{Z}/2 < \mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 位于中心，自旋翻转与等距群的作用可交换。

$1|1$-欧几里得几何也具有定义 B.5 意义下的实结构 .

引理 3.9 ([HST10，例 6.20])。 超李群 $\mathbb{R}^{1|1}$ 具有实结构

$$\mathsf{r} \colon \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{R}}^{1|1}, \qquad \bar{\mathsf{r}} \circ \mathsf{r} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}. \tag{47}$$

证明。 参照例 A.19，首先选取一个同一化 $\mathbb{R}^{1|1} \simeq \Pi(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$，其中 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$上的平凡实直线丛，而 $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$ 是它的复化。这赋予底层超流形 $\mathbb{R}^{1|1}$ 一个实结构。为了将其提升为超李群上的实结构，令 $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|1})^{\mathrm{odd}} \simeq \Gamma(\mathbb{R},\ \Lambda^1(\mathbb{R}_{\mathbb{C}}))$表示与 $\mathbb{R}$的一个（实）平凡化相对应的函数。采用此选择后，群乘法 (25) 是实的。□

定义 3.10。 利用引理 3.9 中超李群 $\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2$ 上的实结构，并注意到 $\mathbb{Z}/2$保持 $\mathbb{R}^{1|1}$上的这一实结构，从而在 $1|1$维超欧几里得模型几何上定义一个实结构。

例 3.11。 由引理 B.4 可知，映射 (44)、(45) 和 (46) 确定了 $1|1$-欧几里得流形的栈上的自函子,

$$\mathsf{Or},\mathsf{RG}_\mu,\mathsf{Fl}\colon (\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2,\mathbb{A}^{1|1})\text{-}\mathsf{SMfld}\to(\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2,\mathbb{A}^{1|1})\text{-}\mathsf{SMfld},$$

它们将一个 S-族的 $1|1$-欧几里得流形映到另一个 S-族。将其应用于超欧几里得对 (41)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{Or}(S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{t,\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1}) &= (S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{-t,-i\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1})\\ \mathsf{RG}_\mu(S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{t,\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1}) &= (S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{\mu^2 t,\mu\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1})\\ \mathsf{Fl}(S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{t,\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1}) &= (S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{t,-\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1})\end{aligned}$$

同样，映射 (47) 确定了一个栈映射

$$\mathsf{R}\colon(\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2,\mathbb{A}^{1|1})\text{-}\mathsf{SMfld}\to(\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2,\mathbb{A}^{1|1})\text{-}\mathsf{SMfld},\quad (Y^c,Y)\mapsto(\overline{Y}^c,\overline{Y})$$

该映射覆盖超流形的复共轭，并将一个 S-族的 $1|1$-欧几里得流形映到一个 S-族。函子之间存在自然同构

$$\mathsf{Or}^2\simeq\mathsf{Fl},\quad \mathsf{RG}_\mu\circ\mathsf{RG}_{\mu'}\simeq\mathsf{RG}_{\mu\mu'},\quad \mathsf{R}\circ\mathsf{Or}\simeq\overline{\mathsf{Fl}}\circ\overline{\mathsf{Or}}\circ\mathsf{R},\quad \overline{\mathsf{R}}\circ\mathsf{R}\simeq\mathrm{id} \tag{48}$$

它们由映射的等式导出

$$\mathsf{or}^2=\mathsf{fl},\quad \mathsf{rg}_\mu\circ\mathsf{rg}_{\mu'}=\mathsf{rg}_{\mu\mu'},\quad \overline{\mathsf{or}}\circ\mathsf{r}=\overline{\mathsf{fl}}\circ\mathsf{r}\circ\mathsf{or},\quad \overline{\mathsf{r}}\circ\mathsf{r}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{1|1}}.$$

3.3. **光滑流形中的超欧几里得路径**。给定三元组 $(\phi,\ (t,\ \theta),\ (s,\ \eta))$，其中 $\phi\colon S\times\mathbb{R}^{1|1}\to M$ 是一个映射，且 $(t,\ \theta),\ (s,\ \eta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S)$，考虑

$$\begin{array}{ccccc} S\times\mathbb{R}^{0|1} & \xhookrightarrow{i_{t,\theta}} & S\times\mathbb{R}^{1|1} & \xhookleftarrow{i_{s,\eta}} & S\times\mathbb{R}^{0|1}\\ & & \downarrow\phi & & \\ & & M & & \end{array} \tag{49}$$

式 (42) 中定义的映射。

定义 3.12。设 M 是一个光滑流形， S 是一个超流形。 M中的 S-族正向定向的超欧几里得路径是一个三元组 $(\phi,\ (t_{\mathrm{out}},\ \theta_{\mathrm{out}}),\ (t_{\mathrm{in}},\ \theta_{\mathrm{in}}))$，它确定图表 (49)，并具有如下性质

$$(t_{\mathrm{out}},\theta_{\mathrm{out}})\cdot(t_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{in}})^{-1}\in\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}(S)\subset\mathbb{R}^{1|1}(S).$$

类似地， M 中的 S-族负向定向的超欧几里得路径是一个满足以下条件的三元组:

$$(t_{\mathrm{out}},\theta_{\mathrm{out}})\cdot(t_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{in}})^{-1}\in\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}(S)\subset\mathbb{R}^{1|1}(S).$$

M中的 S-族超欧几里得路径是一个三元组 $(\phi,\ (t_{\mathrm{out}},\ \theta_{\mathrm{out}}),\ (t_{\mathrm{in}},\ \theta_{\mathrm{in}}))$，在 S 的每个分支上，它都是一个由正向或负向定向超路径组成的族。$(\phi,\ (t,\ \theta),\ (s,\ \eta))$ 的入射边界和出射边界分别是以下复合

$$\phi_{\mathrm{out}}\colon S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{(t_{\mathrm{out}},\theta_{\mathrm{out}})}}S\times\mathbb{R}^{1|1}\xrightarrow{\phi}M,\quad \phi_{\mathrm{in}}\colon S\times\mathbb{R}^{0|1}\xhookrightarrow{i_{(t_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{in}})}}S\times\mathbb{R}^{1|1}\xrightarrow{\phi}M.$$

一对超路径的 S-族之间的等距变换 $(\phi,\ (t_{\mathrm{out}},\ \theta_{\mathrm{out}}),\ (t_{\mathrm{in}},\ \theta_{\mathrm{in}}))\xrightarrow{\sim}(\phi',\ (t'_{\mathrm{out}},\ \theta'_{\mathrm{out}}),\ (t'_{\mathrm{in}},\ \theta'_{\mathrm{in}}))$是由 $(s,\ \eta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S)$ 构成的数据，使得

$$\phi'=\phi\circ T_{s,\eta},\quad T_{s,\eta}\circ\phi_{\mathrm{in}}=\phi'_{\mathrm{in}},\quad T_{s,\eta}\circ\phi_{\mathrm{out}}=\phi'_{\mathrm{out}}$$

其中 $T_{s,\ \eta}$ 是由 $(s,\ \eta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S)$ 定义的超平移，见（43）。

M 中的超欧几里得路径及其等距变换构成一个栈：对于每个 S，我们都有一个群胚，其对象为 S 上的 S-族超欧几里得路径；对于超流形之间的映射 $f\colon S' \to S$，沿 f 拉回三元组 $(\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}}))$，即可得到群胚之间的函子。类似于（35），我们有如下结论。

引理 3.13。 S 上的超欧几里得路径群胚等价于由层在超流形 上的取值所给出的离散群胚

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \coprod \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \tag{50}$$

，因此 M 中超欧几里得路径的栈等价于层 (50)。

证明。 给定一个 S-族的正定（分别为负定）定向超欧几里得路径 $(\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}}))$，存在唯一的同构将其映至满足 $(t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}}) = (0,0) \in \mathbb{R}^{1|1}(S)$ 的超路径。固定这一识别后，剩余的数据是

$$\phi\colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M, \qquad (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}) = (t, \theta) \in (\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \coprod \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0})(S). \tag{51}$$

结论得证。 □

3.4. 近乎常值超路径范畴。 M 中超路径 S-族的拼接会遇到与普通路径情形基本相同的问题：要得到一条（光滑）超路径，粘合邻域内必须一致。和之前一样，只要仅考虑到 M 的适当常值映射，问题便迎刃而解。

定义 3.14。 S族的、取值于 M 的近乎常值超欧几里得路径，是指满足以下条件的超欧几里得路径 $(\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}}))$：$\phi$ 由一个映射 ϕ_0确定，

$$\phi\colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{q} S \times \mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{R} \simeq S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{\phi_0} M, \tag{52}$$

其中，第一个箭头是 $\mathbb{R}^{1|1}$上 $\mathbb{R}$作用所得的 $S \times \mathbb{R}^{1|1}$ 的商。

引理 3.15。 取值于 M的近乎常值超欧几里得路径的 S族所成的群胚，与由层在超流形上的值给出的离散群胚等价

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M), \tag{53}$$

在超流形 S 上。

证明。 这与引理 3.13 的证明采用相同的论证，但要求 (51) 中的映射 ϕ 具有 (52) 的形式，因此由 $\phi_0\colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M$ 确定。□

引理 3.16。 设 $\gamma = (\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}}))$ 和 $\gamma' = (\phi', (t'_{\mathrm{out}}, \theta'_{\mathrm{out}}), (t'_{\mathrm{in}}, \theta'_{\mathrm{in}}))$ 是取值于M的 S族正向（分别为负向）定向的近乎常值超路径，且 $\phi_{\mathrm{out}} = \phi'_{\mathrm{in}}\colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M$。则存在良定义的拼接 $\gamma * \gamma'$，使其成为取值于 M 的正向（分别为负向）定向的近乎常值超路径，并且在唯一同构意义下唯一。

证明。 只需在普适情形 (53) 中进行讨论，其中正向定向超路径的拼接由下式给出

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \times_{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)} (\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \\ &\simeq \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \xrightarrow{m \times \mathrm{id}} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \end{aligned} \tag{54}$$

其中 m 是 $\mathbb{R}^{1|1}$ 上乘法的限制。负向定向情形下的拼接映射完全类似。□

超李范畴在定义 B.9 中进行了回顾。

定义 3.17. M 中近乎常值超路径的超李范畴，记作 $\mathsf{sPath}_0(M)$，其对象和态射为，

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M)) = \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M),$$

$$\mathrm{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) = \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M),$$

其中，源、目标和单位数据分别由超路径的入边界与出边界以及恒等超路径给出（使用引理 3.15），而复合则是引理 3.16 中超路径的拼接。

上述超李范畴可以理解为以下超李群胚的一个子范畴。

引理 3.18. 存在一个本质满且忠实（但非满）的函子

$$\mathsf{sPath}_0(M) \hookrightarrow \Big(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)\Big) /\!\!/ \mathbb{R}^{1|1}, \tag{55}$$

到 $\mathbb{R}^{1|1}$ 作用对应的商超李群胚，该作用经由同态 $\mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{0|1}$ （见 (57)）分解；其中函子 (55) 由标准嵌入$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$， $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}^{1|1}$确定。

证明。 根据定义，$\mathsf{sPath}_0(M)$ 上的一个 S-点的源映射为

$$(\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}})) \mapsto \phi_{\mathrm{in}}, \qquad \phi_{\mathrm{in}} \colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{i_0} S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\phi} M,$$

其中 ϕ 如（52）所示。由于 $q \circ i_0 = \mathrm{id}_{S \times \mathbb{R}^{0|1}}$，我们得到 $\phi_{\mathrm{in}} = \phi_0$，沿用（52）中的记号。因此，源映射是投影 $\mathsf{s} = p \colon \mathsf{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) \to \mathsf{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M))$。$\mathsf{sPath}_0(M)$ 上的一个 S-点的目标映射为

$$(\phi, (t_{\mathrm{out}}, \theta_{\mathrm{out}}), (t_{\mathrm{in}}, \theta_{\mathrm{in}})) \mapsto \phi_{\mathrm{out}}, \qquad \phi_{\mathrm{out}} \colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{T_{t,\theta} \circ i_0} S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\phi} M. \tag{56}$$

同样利用 $q \circ i_0 = \mathrm{id}_{S \times \mathbb{R}^{0|1}}$，目标映射是（左）作用的限制

$$\mathrm{act} \colon \mathbb{R}^{1|1} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \tag{57}$$

它来自与 $\mathbb{R}^{0|1}$ 上的 $\mathbb{R}^{1|1}$-作用的前复合，

$$\mathbb{R}^{1|1} \times \mathbb{R}^{0|1} \to \mathbb{R}^{0|1}, \qquad (t, \theta) \cdot \eta = (\theta + \eta), \quad (t, \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}(S),\ \eta \in \mathbb{R}^{0|1}(S).$$

引理得证。 □

我们回顾超流形的同构 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \simeq \Pi TM$，它导出了函数与微分形式之间的同构

$$C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \simeq C^\infty(\Pi T M_{\mathbb{C}}) \simeq \Omega^\bullet(M). \tag{58}$$

结合引理 3.18，我们便能给出超李范畴 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 中结构映射的显式公式，并以 M 上的微分形式来表述。

注 3.19。 利用 (58)，商群胚 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) /\!\!/ \mathbb{R}^{0|1}$ 上的函数为 M 的德拉姆复形提供了一种超几何解释，例如参见 [HKST11，第 3] 节。引理 3.18 表明，超路径范畴与该群胚密切相关。

同构 (58) 意味着

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0})), \\ C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) &\simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0})). \end{aligned} \tag{59}$$

引理 3.20。 利用 (58) 和 (59)，源映射与目标映射 $\mathsf{s}, \mathsf{t} : \mathsf{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) \rightrightarrows \mathsf{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M))$ 由以下超代数映射确定

$$\Omega^\bullet(M) \oplus \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0})) \oplus \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}))$$

$$\mathsf{s}^*(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta), \qquad \mathsf{t}^*(\alpha, \beta) = (\alpha - \theta d\alpha, \beta - \theta d\beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(M),$$

其中我们使用了典范包含

$$\Omega^\bullet(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0})), \qquad \Omega^\bullet(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}))$$

沿着 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 或 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}$ 上的常值函数

证明。 标准结果（例如， [HKST11，引理 3.8]）根据微分形式上的一个映射计算 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)$ 上的 $\mathbb{R}^{0|1}$-作用：

$$\begin{aligned} \Omega^\bullet(M) \simeq C^\infty(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \quad &\to \quad C^\infty(\mathbb{R}^{0|1} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{0|1})) \\ \alpha \quad &\mapsto \quad \alpha - \theta d\alpha, \quad \alpha \in \Omega^\bullet(M) \quad C^\infty(\mathbb{R}^{0|1}) \simeq C^\infty(\mathbb{R})[\theta] \end{aligned} \tag{60}$$

其中 d 是 $\Omega^\bullet(M)$ 上的德拉姆微分。因此，根据引理 3.18，$\mathsf{sPath}_0(M)$ 中的源映射与目标映射由式 (60) 的限制确定。□

注记 3.21。 公式 (60) 与 [HKST11 的引理 3.8] 相比相差一个符号；他们的公式针对的是 $\mathbb{R}^{0|1}$ 在 $\Pi T M_{\mathbb{C}}$上的右作用，而 (60) 针对的是左作用。

3.5. **超路径范畴的自同构**。

引理 3.22. 映射 (44)、(45)、(46) 和 (47) 通过在态射的-点上给出的映射确定了光滑函子

$$\mathsf{Or}\colon \mathsf{sPath}_0(M) \to \mathsf{sPath}_0(M), \qquad (t,\theta,\phi) \mapsto (-t, -i\theta, \phi \circ \mathsf{or}^{-1}) \tag{61}$$

$$\mathsf{RG}\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{sPath}_0(M) \to \mathsf{sPath}_0(M), \qquad (\mu,t,\theta,\phi) \mapsto (\mu^2 t, \mu\theta, \phi \circ \mathsf{rg}_\mu^{-1}) \tag{62}$$

$$\mathsf{Fl}\colon \mathsf{sPath}_0(M) \to \mathsf{sPath}_0(M), \qquad (t,\theta,\phi) \mapsto (t, -\theta, \phi \circ \mathsf{fl}^{-1}) \tag{63}$$

$$\mathsf{R}\colon \mathsf{sPath}_0(M) \to \overline{\mathsf{sPath}_0(M)}, \qquad (t,\theta,\phi) \mapsto (\overline{t}, \overline{\theta}, \overline{\phi} \circ \mathsf{r}) \tag{64}$$

此外，光滑函子之间还满足以下等式

$$\mathsf{Or} \circ \mathsf{Or} = \mathsf{Fl}, \qquad \mathsf{R} \circ \mathsf{Or} = \overline{\mathsf{Fl}} \circ \overline{\mathsf{Or}} \circ \mathsf{R} \tag{65}$$

并且 RG 赋予 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 一个严格的 $\mathbb{R}_{>0}$-作用，其意义是超李范畴的图表严格交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{sPath}_0(M) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}} \times \mathsf{RG}} & \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{sPath}_0(M) \\ {\scriptstyle m \times \mathrm{id}_{\mathsf{sPath}_0(M)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{RG}} \\ \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{sPath}_0(M) & \xrightarrow[\mathsf{RG}]{} & \mathsf{sPath}_0(M) \end{array} \tag{66}$$

其中 $\mathbb{R}_{>0}$ 被视为离散超李范畴，而 $m\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是乘法。

证明。 公式 (61)–(63) 由例 3.11 得出。等式 (65) 和交换性 (66) 由 (48) 得出。实结构 (64) 继承自例 3.11 中$1|1$-欧几里得超流形上的实结构，再结合 M 上的典范实结构，从而得到 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 的 $\bar{S}$-点

$$\overline{S} \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{S}} \times \mathsf{r}} \overline{S \times \mathbb{R}^{1|1}} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{M} \simeq M$$

该点由超流形上的共轭函子作用于 $\phi\colon S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M$ 后的像确定。□

我们使用如下记号

$$\mathsf{RG}_\mu\colon \mathsf{sPath}_0(M) \to \mathsf{sPath}_0(M)$$

表示函子 RG 沿 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ 的限制。

推论 3.23. 函子 (61)-(63) 由超代数映射所诱导的态射上的映射确定

$$\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}))\oplus\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}))\to\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}))\oplus\Omega^\bullet(M;C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}))$$

$$\mathsf{Or}^*(\alpha(t,\theta),\beta(t,\theta)) = (i^{|\beta|}\beta(-t,-i\theta),i^{|\alpha|}\alpha(-t,-i\theta)),\quad i=\sqrt{-1} \tag{67}$$

$$\mathsf{RG}^*_\mu(\alpha(t,\theta),\beta(t,\theta)) = (\mu^{|\alpha|}\alpha(\mu^2t,\mu\theta),\mu^{|\beta|}\beta(\mu^2t,\mu\theta)) \tag{68}$$

$$\mathsf{Fl}^*(\alpha(t,\theta),\beta(t,\theta)) = ((-1)^{|\alpha|}\alpha(t,-\theta),(-1)^{|\beta|}\beta(t,-\theta)) \tag{69}$$

对于 $\alpha,\ \beta\in\mathbf{\Omega^\bullet}(M;\ C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}))$，其中 $|\alpha|,\ |\beta|\in\mathbb{Z}$ 表示 α 和 β 的 $\mathbb{Z}$分级。

证明。这由式 (61)–(63) 以及计算 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)$ 上 $\mathbb{R}^{0|1}\rtimes\mathbb{C}^\times$ 作用的标准结果（例如 [HKST11, 引理 3.8]）得出。上述结论是将结果特化到 $\mathbb{C}^\times$ 的子群 $\mathbb{Z}/4$、$\mathbb{R}_{>0}$ 和 $\mathbb{Z}/2$ 后得到的。□

3.6. **超路径作为超环路**。

定义 3.24。给定一个 S-点 $(\ell,\ \lambda)\in\mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S)$，定义 $1|1$ 维超欧几里得圆 族为商

$$S^{1|1}_{\ell,\lambda}:=(S\times\mathbb{R}^{1|1})/\mathbb{Z} \tag{70}$$

对于由以下方式给出的 $S\times\mathbb{R}^{1|1}$ 上的左 $\mathbb{Z}$ 作用

$$n\cdot(t,\theta)=(t+n\ell+n\lambda\theta,n\lambda+\theta),\quad n\in\mathbb{Z}(S),(t,\theta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S). \tag{71}$$

令 $S^{1|1}=\mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z}$ 表示由标准嵌入 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{1|1}$ 所得的商。对于任意 $(\ell,\ \lambda)$，存在一个同构

$$S^{1|1}_{\ell,\lambda}\xrightarrow{\sim}S\times S^{1|1} \tag{72}$$

由以下等变映射确定

$$\begin{aligned} S\times\mathbb{R}^{1|1} &\to S\times\mathbb{R}^{1|1}\\ (\ell,\lambda,t,\theta) &\mapsto (\ell,\lambda,t(\ell+\lambda\theta),\theta+t\lambda),\qquad (\ell,\lambda)\in\mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S),\ (t,\theta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S). \end{aligned} \tag{73}$$

注记 3.25。由 $(\ell,\ \lambda)\in\mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S)$ 生成的 S-族子群 $S\times\mathbb{Z}\hookrightarrow S\times\mathbb{R}^{1|1}$ 是正规子群，当且仅当 $\lambda=0$。因此，标准超圆 $S^{1|1}=\mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z}$ 继承了 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的群结构，但一般的 S-族超欧几里得圆 $S^{1|1}_{\ell\ \lambda}$，则不具有群结构。

定义 3.26。将超欧几里得环路空间 定义为广义超流形（见例 A.16）

$$\mathcal{L}^{1|1}(M):=\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathsf{Map}(S^{1|1},M).$$

我们将 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 的一个 S-点视为由复合 $S^{1|1}_{\ell\ ,\ \lambda}\to M$ 给出的映射

$$S^{1|1}_{\ell,\lambda}\simeq S\times S^{1|1}\to M \tag{74}$$

利用同构（72）。$\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2$ 在 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$上有一个左作用，该作用由图表确定

$$\begin{array}{ccc} S^{1|1}_{\ell,\lambda} & \xrightarrow{\simeq} & S\times S^{1|1} \\ f\downarrow & & \\ S^{1|1}_{\ell',\lambda'} & \xrightarrow{\simeq} & S\times S^{1|1} \end{array}\qquad \begin{array}{c} \phi \\ \searrow \\ M \\ \nearrow \\ \phi' \end{array} \tag{75}$$

其中，水平箭头是同构 (72)，超欧几里得等距变换 f 则继承自 $S\times\mathbb{R}^{1|1}$上的 $\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2$ 作用。箭头 ϕ' 由这些同构和输入映射 ϕ唯一确定。因此，给定 $(\ell,\ \lambda,\ \phi)\in\mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S)\times\mathsf{Map}(S^{1|1},\ M)(S)$ 以及 $\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2$ 的一个 S- 点，作用于 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 会输出如 (75) 所示的 $(\ell',\ \lambda',\ \phi')$。

由$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} < \mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z}$对 Map($S^{1|1}$, M) 的前复合作用可得到 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$上的显然的 S^1-作用。由于商由 $S^{1|1}/S^1 \simeq \mathbb{R}^{0|1}$ 给出，S^1-不动点为

$$\mathcal{L}_0^{1|1}(M) := \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \subset \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(S^{1|1}, M) = \mathcal{L}^{1|1}(M). \tag{76}$$

我们将 $\mathcal{L}_0^{1|1}(M)$ 的一个 S-点与映射 $S^{1|1}_{\ell\ ,\lambda} \to M$ 相对应，该映射可分解为

$$S^{1|1}_{\ell,\lambda} \simeq S \times S^{1|1} = S \times \mathbb{R}^{1|1}/\mathbb{Z} \xrightarrow{p} S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M \tag{77}$$

whe其中映射 p 由投影 $\mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}^{0|1}$诱导。（7）中的 $\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$-作用

5) 保
持这一分解条件，并在 [BE23a, §2.3]中明确计算。

$\mathsf{sPath}_0(M)$ 中源映射与目标映射的等化子为

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) \rightrightarrows \mathrm{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M)).$$

从几何上看，这个等化子参数化了具有相同源和目标的常值超路径。进一步限制到一个子空间后，我们得到近乎常值的超环路。

引理 3.27。 存在一列包含映射

$$\mathrm{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) \hookleftarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathbb{R}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \hookrightarrow \mathcal{L}_0^{1|1}(M)$$

它将具有相同源和目标且超长度非零的常值超路径视为常值超环路。

4. Super Euclidean paths as bordisms

本节的主要目标是构造一个内部函子

$$\iota \colon \mathsf{sPath}_0(M) \to 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \tag{78}$$

从 M 中常值超路径的超李范畴到 Stolz 和 Teichner 在 M 上的 $1|1$-欧几里得配边范畴。我们还将证明，(78) 与引理 3.22 中的附加结构相容：自旋翻转、定向反转、重整化群作用以及实结构。所有论证均在 [ST11] 的框架内表述（综述见 §B）。不过，(78) 是一个纯粹的几何构造；我们预期它在任何合理定义的 $1|1$-欧几里得配边范畴中都成立。

4.1. $1|1$ 欧几里得配边范畴。

定义 4.1. 令 $1|1$-EBord(M) 表示与例 3.3 中的超欧几里得几何相关联的几何配边范畴。我们称 $1|1$-EBord(M) 为 $1|1$ 上的欧几里得配边范畴 M。

关于 Stolz 和 Teichner 对与刚性几何相关联的几何配边范畴的定义，请参见 §B.3。简要来说， $1|1$-EBord(M) 是一个内化于由自旋翻转确定的带对合的对称幺半叠范畴中的范畴（见定义 3.8 和例 B.26）。因此， $1|1$-EBord(M) 的部分数据是带对合的对称幺半叠之间的映射

$$\mathsf{s},\ \mathsf{t}\colon \mathsf{M} \quad \text{或}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \rightrightarrows \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)),\ \mathsf{u} : \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \quad))$$

$$\mathsf{c} \colon \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]} \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$$

给出了源、目标、单位和复合映射，其中我们使用记号[3]

$$\mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]} = \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \times_{\mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))} \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)).$$

表示相对于源映射与目标映射的纤维积，即 Mor(1|1-EBord(M))$^{[2]}$ 是对可复合配边对进行分类的栈。 $1|1$-EBord(M)的完整定义还包含满足某些相干性条件的结合子和单位子数据；参见 §B.2。

§3.2 中讨论的 $1|1$-欧几里得几何结构赋予内范畴$1|1$-EBord(M) 某些自函子。

[3]根据引理 B.16，严格纤维积与弱纤维积一致。

引理 4.2。 内范畴 $1|1$-EBord(M) 存在内自函子：

(1) 定向反转，Or：$1|1$-EBord$(M) \to 1|1$-EBord(M)；(2) 重整化群作用，RG$^{\mu}$：$1|1$-EBord$(M) \to 1|1$-EBord(M)；以及 (3) 实结构，R：$1|1$-EBord$(M) \to 1|1$-EBord(M)，

其中 Or 和 RG$^{\mu}$ 是带对合的对称幺半叠内部的范畴映射，而函子 R 是一个覆盖超流形上复共轭的内部函子。

证明。 由定义 3.5 和例 B.28，我们得到一个定向反转函子

$$\mathsf{Or}\colon 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M). \tag{79}$$

利用定义 3.7 和例 B.33，我们得到一个内部函子

$$\mathsf{RG}_{\mu}\colon 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M). \tag{80}$$

最后，定义 3.10 确定了一个内部函子（见例 B.29）

$$\mathsf{R}\colon 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \tag{81}$$

其取值由下式给出

$$(S \leftarrow Y \to M) \overset{\mathsf{R}_0}{\mapsto} (\overline{S} \leftarrow \overline{Y} \to \overline{M} \simeq M) \qquad (S \leftarrow \Sigma \to M) \overset{\mathsf{R}_1}{\mapsto} (\overline{S} \leftarrow \overline{\Sigma} \to \overline{M} \simeq M)$$

其中，$\overline{Y} \to \overline{S}$ 和 $\overline{\Sigma} \to \overline{S}$ 具有超欧几里得流形的 S族的典范结构。我们强调，族参数在函子 R 作用下会变为共轭超流形。□

光滑流形 $M \to N$ 的一个映射确定了一个内部函子

$$1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(N)$$

参见引理 B.17。特别地， M 上的 $1|1$-欧几里得配边范畴始终是一个以 $1|1$-EBord(pt) 为底的内范畴；后者是点上的 $1|1$-欧几里得配边范畴。

4.2. **关于 $1|1$-EBord(M) 中的配边族**。定义 B.15 回顾了带对合的对称幺半叠 Ob($1|1$-EBord(M)) 和 Mor($1|1$-EBord(M)) 的构造。在本小节中，我们对底层叠沿用相同的记号，即忘却幺半结构和自旋翻转。全文中，族 $S \times \mathbb{R}^{1|1} \to S$ 始终具有 $1|1$-欧几里得族的典范结构。当 $M = \mathrm{pt}$ 时，以下定义特化为图 (27)，我们使用类似的记号来传达这一直观。

定义 4.3 （比较 [HST10，注 6.40]）。 定义叠映射

$$\mathrm{spt}^{+}_{M}, \mathrm{spt}^{-}_{M}\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \tag{82}$$

如下。给定源的一个 S-点 ϕ：$S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M$，定义群胚 Ob($1|1$-EBord$(M)$)$(S)$ 中的对象 $(\mathrm{spt}^{+}, \phi), (\mathrm{spt}^{-}, \phi)$，其定义为

$$\begin{gathered} Y^{c} = S \times \mathbb{R}^{0|1} \subset S \times \mathbb{R}^{1|1} = Y \overset{\phi}{\to} M, \\ Y \setminus Y^{c} \simeq S \times \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \coprod S \times \mathbb{R}^{1|1}_{<0} = \begin{cases} Y^{+} \coprod Y^{-} & (\mathrm{spt}^{+}, \phi) \\ Y^{-} \coprod Y^{+} & (\mathrm{spt}^{-}, \phi) \end{cases} \end{gathered} \tag{83}$$

其中 $Y^{c} \hookrightarrow Y$（核心的包含映射）由标准嵌入 0：$\mathbb{R}^{0|1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1|1}$ 确定。正如第二行所示，$\mathrm{spt}^{\pm}_{M}$ 上的 $+$ 或 $-$ 标记反映了领圈的分割的选择。通过拉回族，上述构造在 S 中自然，因此得到所声称的映射 (82)。

注 4.4。 Map$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 的一对 S-点在 $\mathrm{spt}^{\pm}_{M}$ 下确定同构对象，前提是映射 $S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M$ 在核心 $S \times \mathbb{R}^{0|1} \hookrightarrow S \times \mathbb{R}^{1|1}$ 的某个半开邻域上一致；参见定义 B.15。因此，叠映射 (82) 经由 Map$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 的商分解，该商参数化了 M 中超路径的半开芽。

下面给出了从 M 中的超欧几里得路径到配边的映射。

定义 4.5 （比较 [HST10，定义 6.41]）。 定义叠映射

$$\begin{aligned} \mathsf{I}_M^+ &: \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ \mathsf{I}_M^- &: \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{aligned} \tag{84}$$

如下。给定 $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M$和 $(t,\ \theta)\colon S \to \mathbb{R}^{1|1}$，考虑

$$S \times \mathbb{R}^{0|1} \coprod S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{i_0 \coprod i_{t,\theta}} S \times \mathbb{R}^{1|1} = \Sigma \xrightarrow{\Phi} M, \tag{85}$$

采用（42）中的记号。要将（85）提升为群胚 $\mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))(S)$ 中的一个对象，我们需要选定源与靶数据。取

$$(Y^c_{\mathrm{in}}, Y^c_{\mathrm{out}}) = \begin{cases} \Big((\mathrm{spt}^+, \Phi), (\mathrm{spt}^+, \Phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\Big) & \Longrightarrow (I^+_{t,\theta}, \Phi), \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}(S) \\ \Big((\mathrm{spt}^-, \Phi), (\mathrm{spt}^-, \phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\Big) & \Longrightarrow (I^-_{t,\theta}, \Phi) \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}(S) \end{cases} \tag{86}$$

也就是说，（85）中余积的排列顺序是先列出源，后列出目标 $1|1$-欧几里得对。要求源和目标存在领圈，便得到相应的选项以及对（86）中 $(t,\ \theta)$ 的限制。任意两种领圈选择都会给出同构的函子（84）；见注记 4.8。

注 4.6。 与注4.4类似，$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 或 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 的 S-点在 $\mathsf{I}^{\pm}_M$ 下确定 $\mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中同构的对象，只要相应映射 $S\times\mathbb{R}^{1|1}\to M$ 在配边核心的某个邻域上一致；因此，该族是从相应的商拉回的。

改变源与靶数据会得到式 (84) 的不同变体。

定义 4.7 (比较 [HST10，定义 6.41])。 定义叠映射

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_M^+ &: \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ \mathsf{L}_M^- &: \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)), \\ \mathsf{R}_M^+ &: \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ \mathsf{R}_M^- &: \mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{aligned} \tag{87}$$

如下。仍然，对于 $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M$以及 $(t,\theta)\colon S \to \mathbb{R}^{1|1}$，考虑式 (85)，但选择源与靶数据

$$(Y^c_{\mathrm{in}}, Y^c_{\mathrm{out}}) = \begin{cases} \Big(\big((\mathrm{spt}^+, \Phi), (\mathrm{spt}^-, \Phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\big), \emptyset\Big) & \Longrightarrow (L^+_{t,\theta}, \Phi) \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}(S) \\ \Big(\big((\mathrm{spt}^-, \Phi), (\mathrm{spt}^+, \Phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\big), \emptyset\Big) & \Longrightarrow (L^-_{t,\theta}, \Phi) \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}(S) \\ \Big(\emptyset, \big((\mathrm{spt}^-, \Phi), (\mathrm{spt}^+, \Phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\big)\Big) & \Longrightarrow (R^+_{t,\theta}, \Phi) \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S) \\ \Big(\emptyset, \big((\mathrm{spt}^+, \Phi), (\mathrm{spt}^-, \Phi \circ T_{t,\theta}^{-1})\big)\Big) & \Longrightarrow (R^-_{t,\theta}, \Phi) \quad (t,\theta) \in \mathbb{R}^{1|1}_{<0}(S) \end{cases} \tag{88}$$

其中，对 (t,θ) 的限制是源和靶存在领圈的必要条件。任意一对选择都会给出同构的函子 (87)；参见注记 4.8。

注记 4.8。 式 (86) 和 (88) 中关于 $(t,\theta)\ \in \mathbb{R}^{1|1}(S)$ 的要求，源于要求存在满足定义 B.15 所要求性质的领圈 $W^{\pm}{}_{\text{内/外}}$；通过取领圈选择的交集，任意一对 $W^{\pm}{}_{\text{内/外}}$ 的选择都会在 $\mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中得到同构对象。我们强调，式 (86) 中的族 $(R^{\pm}_{t\ ,\theta}, \Phi)$ 在 $(t,\theta)\ \to 0$ 时，在 $1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)$ 中没有极限；比较 [HST10，定理 6.23]。

引理 4.9. 在 $\mathrm{spt}^{\pm}_M$、$\mathsf{I}^{\pm}_M$、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 或 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 上，$1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)$ 的对象集或 $1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)$ 的态射集上自旋翻转的限制由这些映射决定

$$\begin{aligned} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) &\to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \quad \phi \mapsto \phi \circ \mathsf{fl}^{-1} \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) &\to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \quad (t,\theta,\phi) \mapsto (t, -\theta, \phi \circ \mathsf{fl}^{-1}) \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) &\to \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \quad (t,\theta,\phi) \mapsto (t, -\theta, \phi \circ \mathsf{fl}^{-1}) \end{aligned}$$

证明. 这可由自旋翻转的定义 3.8 得出。 □

4.3. **配边的复合**。 配边族 $\mathsf{I}^{\pm}_M$、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 的源与靶在其定义中给出。这些源与靶数据也可以等价地用层叠的 2-交换图表来表述。例如，我们有

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\quad \mathsf{I}^{+}_M \quad} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ {\scriptstyle (\mathrm{proj}_+,\mathrm{act}_+)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{s}\times\mathsf{t}} \\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow[\mathrm{spt}^+_M\times \mathrm{spt}^+_M]{} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\times \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \tag{89}$$

其中 proj 和 act 分别是投影和作用映射

$$\begin{aligned} \mathrm{proj},\ \mathrm{act}\colon \mathbb{R}^{1|1}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) &\to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \\ \mathrm{proj}(t,\theta,\Phi) &= \Phi \\ \mathrm{act}(t,\theta,\Phi) &= \Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}. \end{aligned} \tag{90}$$

对于 $(t,\theta)\in\mathbb{R}^{1|1}(S)$ 和 $\Phi\colon S\times\mathbb{R}^{1|1}\to M$，而 $\mathrm{proj}_+,\mathrm{act}_+$（相应地，$\mathrm{proj}_-,\mathrm{act}_-$）是 proj,act 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\subset\mathbb{R}^{1|1}$（相应地，$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\subset\mathbb{R}^{1|1}$）上的限制。1|1-EBord($M$) 中的其他结构映射也导出类似的 2-交换图表。

命题 4.10. 设 u 为 1|1-EBord(M) 中的单位函子。存在如下层叠的 2-交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\quad \mathrm{spt}^+_M \quad} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ {\scriptstyle i_0\times \mathrm{id}_{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{u}} \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\quad \mathsf{I}^{+}_M \quad} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \tag{91}$$

其中左侧垂直箭头是沿着 $0\in\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 的包含映射。设 c 为复合函子。存在如下层叠的 2-交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\quad \mathsf{I}^{+}_M\circ p_2\times \mathsf{I}^{+}_M\circ p_1 \quad} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]} \\ {\scriptstyle \mathsf{m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}} \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow[\mathsf{I}^{+}_M]{} & \mathrm{Mor}(2|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \tag{92}$$

其中顶端水平箭头由族 I^{+}_M 及映射

$$\begin{aligned} &p_i\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M), \\ &p_1\big((s,\eta),(t,\theta),\Phi\big)=(t,\theta,\Phi),\qquad p_2\big((s,\eta),(t,\theta),\Phi\big)=(s,\eta,\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}) \end{aligned} \tag{93}$$

确定，而 m 继承自 $\mathbb{R}^{1|1}$ 中的乘法，

$$\mathsf{m}\big((s,\eta),(t,\theta),\Phi\big)=(s+t+\eta\theta,\eta+\theta,\Phi). \tag{94}$$

对于由 I^{-}_M 分类的配边族，也有与 (91) 和 (92) 类似的图表。

证明. 图表 (91) 的交换性几乎是显而易见的；唯一微妙之处来自构造族 I^{+}_M 时对领圈的选择。事实上，这种选择并未导出严格交换的图表，而是通过收缩 (83) 中的领圈所产生的 Mor(1|1-EBord(M)) 对象之间的同构，给出了 2-交换数据。

回到图表 (92)，配边的 S-族 $(I^{+}_{t\,\theta.}\ ,\ \Phi)$ 的定义表明，(93) 中的这一对确实属于纤维积。2-交换性的构造

data 源于展开函子 c 的定义，即配边的复合 .
Co考虑图表

$$S \times \mathbb{R}^{0|1} \coprod S \times \mathbb{R}^{0|1} \coprod S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{i_0 \coprod i_{t,\theta} \coprod i_{(s,\eta)\cdot(t,\theta)}} S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\Phi} M. \tag{95}$$

忘掉 $S\times\mathbb{R}^{0|1}$ 的三个包含映射中的任意一个，便可通过输入数据 (85) 得到 I_M^+ 的源的三个可能的 S-点：忘掉 $i_{(s,\eta)\cdot(t,\theta)}$，得到配边的 S-族 $(I^+_{t\,\theta,}\ ,\ \Phi)$；忘掉 $i_{t,\ \theta}$，得到配边的 S-族 $(I^+{}_{(s,\ \eta)\cdot(t,\ \theta)}\Phi)$；忘掉 i_0，则得到一个与 $(I^+_{s,\ \eta,}\ \ \Phi\circ T^{-1}_{t\,\theta\ ,})$ 同构的族（其中同构由 $T_{t,\ \theta}$ 指定）。由 (95) 得到的这三个配边族，分别与纤维积的两个投影以及函子 c 的取值相吻合。图表 (92) 的交换性中唯一微妙之处，在于这些配边族定义中的领圈选择，即构造函子 I_M^+ 时的选择。不过，由于任意一对选择都会导出同构的配边（通过取领圈的交集），我们便在 (92) 中得到规范的 2-交换数据。

涉及 spt_M^- 和 I_M^- 的论证是相同的。 □

备注 4.11。 就 S-配边族而言，(92) 中顶部的水平映射为

$$\big((s,\eta),(t,\theta),\Phi\big) \mapsto \big((I^+_{s,\eta},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}),(I^+_{t,\theta},\Phi)\big).$$

记号 4.12。 令 $\mathrm{I}_0^\pm$ 表示复合 $\mathrm{u}\circ\mathrm{spt}_M^\pm$，

$$\mathsf{I}_0^\pm \colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)).$$

对于上文源中的一个 S-点 Φ，令 $(I_0^\pm,\Phi)$ 表示相应的（单位）1|1-欧几里得配边的 S-族。

下面的结果推广了由 (28) 中最后一个关系导出的超半群之间的伴随。

命题 4.13。 存在一个由栈组成的 2-交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\mathsf{L}^+_M\circ p_2\ \times\ (\mathsf{I}^+_M\circ p_1\coprod \mathsf{I}^-_M\circ p_3)} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \mathsf{c} \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow[\mathsf{L}^+_M]{} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \tag{96}$$

其中，顶部垂直箭头由族 L_M^+、I_M^+ 和 I_M^- 及映射确定

$$\begin{aligned} &p_i\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\to\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M),\quad i=1,2 \\ &p_1((t,\theta),(s,\eta),(r,\rho),\Phi)=(t,\theta,\Phi),\quad p_2((t,\theta),(s,\eta),(r,\rho),\Phi)=(s,\eta,\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}) \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} &p_3\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\to\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \\ &p_3((t,\theta),(s,\eta),(r,\rho),\Phi)=(r,\rho,\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}\circ T^{-1}_{s,\eta}) \end{aligned} \tag{98}$$

左侧垂直箭头由 $\mathbb{R}^{1|1}$ 中的乘法确定，

$$((t,\theta),(s,\eta),(r,\rho),\Phi)\mapsto((r,\rho)^{-1}\cdot(s,\eta)\cdot(t,\theta),\Phi).$$

对于 L_M^-，也有类似的 2-交换图表。

证明。 根据源与靶数据的定义，(96) 中的顶端映射确实给出纤维积中的一个对象。2-交换数据来自展开函子 c 的定义。与之前类似，考虑图表

$$S\times\mathbb{R}^{0|1}\coprod S\times\mathbb{R}^{0|1}\coprod S\times\mathbb{R}^{0|1}\coprod S\times\mathbb{R}^{0|1}\xrightarrow{i_0\coprod i_{t,\theta}\coprod i_{(s,\eta)\cdot(t,\theta)}\coprod i_{(r,\rho)^{-1}\cdot(s,\eta)\cdot(t,\theta)}} S\times\mathbb{R}^{1|1}\xrightarrow{\Phi} M.$$

在这种情况下，从余积中忘掉任意一对因子，都会得到某个S-族配边的输入数据。例如，忘掉中间两个因子，对应于 S-族配边 $(L^{+}{}_{(r,\ \rho)^{-1}\cdot(s,\ \eta)\cdot(t,\ \theta)}\Phi)$，这正是所述的复合。(97) 中的配边也可以类似地通过忘掉相应的一对包含映射，并应用由 $S\times\mathbb{R}^{1|1}$ 的平移所确定的适当等距变换来提取。□

注记 4.14。 就 S维配边族而言，(96) 中上方的水平映射为

$$((t,\theta),(s,\eta),(r,\rho),\Phi)\mapsto\Big((L^{+}_{s,\eta},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}),\big((I^{+}_{t,\theta},\Phi)\coprod(I^{-}_{r,\rho},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}\circ T^{-1}_{s,\eta})\big)\Big).$$

下面将说明，配边族 $\mathsf{I}^{\pm}_{M}$ 可分解为涉及 $\mathsf{L}^{\pm}_{M}$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_{M}$的复合。证明采用了与上文类似的技巧。

命题 4.15。 存在一个由层叠构成的 2-交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{+}_{M}\circ p_1\coprod\mathsf{I}^{+}_{0}\circ q_2)\times(\mathsf{I}^{+}_{0}\circ q_1\coprod\mathsf{R}^{+}_{M}\circ p_2)} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}}\\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow[\mathsf{I}^{+}_{M}]{} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}\tag{99}$$

其中，顶端的垂直箭头由族 L^{+}_{M}、R^{+}_{M}、$\mathsf{I}^{\pm}_{0}$以及以下映射确定

$$\begin{aligned}&p_i\colon\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\to\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\\ &p_1((t,\theta),(s,\eta),\Phi)=(t,\theta,\Phi),\quad p_2((t,\theta),(s,\eta),\Phi)=(s,\eta,\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}),\\ &q_i\colon:\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\to\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\\ &\quad q_1((t,\theta),(s,\eta),\Phi)=\Phi,\quad q_2((t,\theta),(s,\eta),\Phi)=\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}\circ T^{-1}_{s,\eta}\end{aligned}\tag{100}$$

且 m 为 (94)。还有一个类似的 2-交换图，将 I^{-}_{M} 分解为一个复合 n.

注记 4.16。 就 S-配边族而言，(99) 中上方的水平箭头是

$$((t,\theta),(s,\eta),\Phi)\mapsto\Big((L^{+}_{t,\theta},\Phi)\coprod(I^{+}_{0},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta}\circ T^{-1}_{s,\eta})\Big),\Big((I^{+}_{0},\Phi)\coprod(R^{+}_{s,\eta},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta})\Big).$$

命题 4.17。 令 $\mathsf{L}^{\pm}_{M}\circ\sigma$ 表示函子 $\mathsf{L}^{\pm}_{M}$ 与 $\mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中交换目标的连通分支顺序的同构后复合所得的函子，即

$$\mathsf{t}(\mathsf{L}^{\pm}_{t,\theta}\circ\sigma,\Phi)=(\mathrm{spt}^{\mp},\Phi\circ T^{-1}_{t,\theta})\coprod(\mathrm{spt}^{\pm},\Phi).$$

存在一个 2-交换三角形

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M) & \xrightarrow{\mathsf{L}^{+}_{M}\circ\sigma} & \\ \downarrow & & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow[\mathsf{L}^{-}_{M}]{} & \end{array}\tag{101}$$

对于左侧垂直箭头

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\quad&\to\quad\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M),\\ (t,\theta,\phi)\quad&\mapsto\quad(-t,-\theta,\phi\circ T^{-1}_{t,\theta}).\end{aligned}\tag{102}$$

证明。 从确定 $(L^{+}{}_{t\ \theta,},\Phi)$ 的数据开始，

$$S\times\mathbb{R}^{0|1}\coprod S\times\mathbb{R}^{0|1}\xrightarrow{i_0\coprod i_{t,\theta}}S\times\mathbb{R}^{1|1}\xrightarrow{\Phi}M.$$

交换余积的因子并由 $T^{-1}_{t}{}_{,\theta}=T_{(-t,-\theta)}$ 作用于 $S\times\mathbb{R}^{1|1}$，即可提供确定 $(L^{-}_{-t,-\theta},\Phi\circ T^{-1}_{t\ \theta}{}_{,})$ 的数据。□

我们回顾定义 3.26 中的超欧几里得环路空间 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$。根据 [BE23a，引理 2.12], ，存在一个函子

$$\mathcal{L}^{1|1}(M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)),$$

将 M 中的超欧几里得环映射为 M 上的一个配边，其源和目标都是由 $1|1$-欧几里得流形构成的空族。

命题 4.18。 存在如下层叠的 2-交换图

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M))^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\mathsf{L}^-_M \circ p_1 \times \mathsf{R}^+_M \circ p_2} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))^{[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \mathsf{c} \\ \mathcal{L}^{1|1}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \tag{103}$$

其中，$\mathbb{Z}$-不变子空间有 S 个点（t，θ）$\in \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}(S)$，（$s$，$\eta$）$\in \mathbb{R}^{1|1}_{>0}(S)$，且 Φ: $S\times\mathbb{R}^{1|1} \to M$ 满足

$$\Phi \circ T^{-1}_{t,\theta} = \Phi \circ T^{-1}_{s,\eta} \iff \Phi = \Phi \circ (T_{(s,\eta)\cdot(t,\theta)^{-1}})^n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{104}$$

上方的垂直箭头由族 L^-_M 和 R^+_M 以及映射

$$p_1((t,\theta),(s,\eta),\Phi) = (t,\theta,\Phi), \qquad p_2((t,\theta),(s,\eta),\Phi) = (s,\eta,\Phi) \tag{105}$$

左侧垂直箭头由以下内容确定

$$((t,\theta),(s,\eta),\Phi) \mapsto ((s,\eta)\cdot(t,\theta)^{-1},\Phi) \in \big(\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)\big)(S) \supset \mathcal{L}^{1|1}(M)(S)$$

它由条件 (104) 确定为 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 中的一个 S-点。还有一个涉及 L^-_M 和 R^+_M、类似于 (103) 的图表。

证明。 (104) 中的相容性 $\Phi \circ T^{-1}_{t,\theta} = \Phi \circ T^{-1}_{s,\eta}$ 保证 $(R^-_{s,\eta}, \Phi)$ 的目标与 $(L^+_{t,\theta}, \Phi)$ 的源一致。因此，这些配边确实可以复合，而它们的复合必然是一个从空集到自身的配边。展开函子 c 的定义并考察周期性条件 (104)，便可发现，这个复合确实是 M 中所述的超欧几里得环，其周长为 $(\ell,\lambda) = (s,\eta)\cdot(t,\theta)^{-1}$.□

注 4.19. 就配边的 S-族而言，(103) 中顶部的水平箭头为

$$((t,\theta),(s,\eta),\Phi) \mapsto \Big((L^-_{t,\theta},\Phi),(R^+_{s,\eta},\Phi)\Big).$$

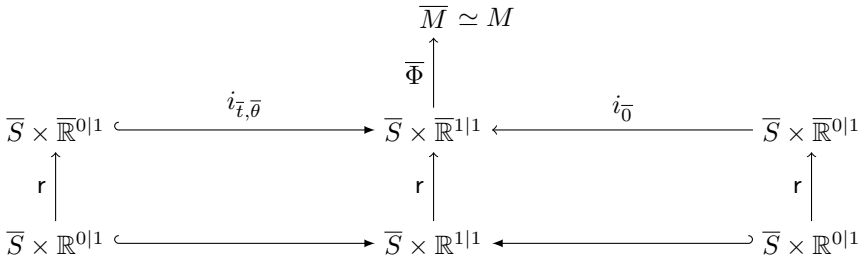
4.4. 额外结构的限制。 考虑将引理 4.2 中的额外结构限制到上述配边族。

命题 4.20。 $1|1$-EBord(M) 上的实结构将 S-配边族映射为由下式指定的 S-配边族

$$\begin{aligned} \mathsf{R}(\mathrm{spt}^{\pm},\phi) &\simeq (\mathrm{spt}^{\pm}, \overline{\phi}\circ\mathsf{r}) \\ \mathsf{R}(I^{\pm}_{t,\theta},\Phi) &\simeq (I^{\pm}_{\overline{t},\overline{\theta}}, \overline{\Phi}\circ\mathsf{r}) \\ \mathsf{R}(L^{\pm}_{t,\theta},\Phi) &\simeq (L^{\pm}_{\overline{t},\overline{\theta}}, \overline{\Phi}\circ\mathsf{r}) \\ \mathsf{R}(R^{\pm}_{t,\theta},\Phi) &\simeq (R^{\pm}_{\overline{t},\overline{\theta}}, \overline{\Phi}\circ\mathsf{r}) \end{aligned}$$

其中（符号滥用）$\mathsf{r}: S\times\mathbb{R}^{1|1} \to \overline{S}\times\mathbb{R}^{1|1}$ 和 $\mathsf{r}: \overline{S}\times\mathbb{R}^{0|1} \to S\times\mathbb{R}^{0|1}$ 是由 $\mathbb{R}^{1|1}$上的实结构 (47) 确定的映射，(t,θ): $S \to \mathbb{R}^{1|1}$ 是共轭函子作用于映射 $(\overline{t},\overline{\theta})$: $\overline{S} \to \mathbb{R}^{1|1}$所得的值，而 Φ: $S\times\mathbb{R}^{1|1} \to M$, ϕ: $S\times\mathbb{R}^{0|1} \to M$是与 Φ 和 ϕ 共轭的映射，它们使用普通流形 M 上的典范实结构 $M \simeq M$ 。

证明。 1|1-EBord(M)上的实结构在上述任一族上的取值由图表确定:



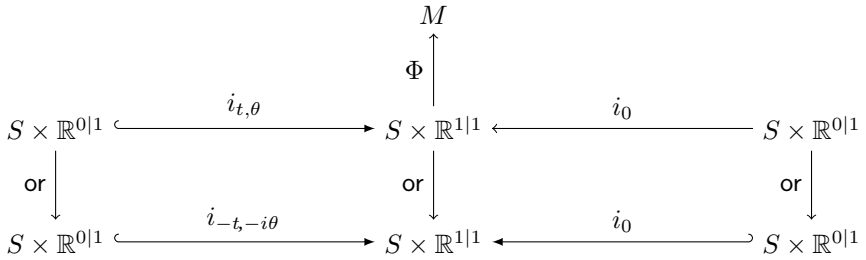
其中，中间一行是共轭函子在 M 上的配边的取值，而与下方一行的同构使用了 1|1-欧几里得几何上的实结构。结合实结构保留子空间 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$， $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}^{1|1}$ 这一事实，可以如命题所示选取同构。这些同构在源和目标的领圈数据的选择下唯一。□

Pr命题 4.21. 1|1-EBord(M) 的定向反转自同构取值于

$$\begin{aligned}
\mathsf{Or}(\mathrm{spt}^{\pm}, \phi) &\simeq (\mathrm{spt}^{\mp}, \phi \circ \mathsf{or}^{-1}) \\
\mathsf{Or}(I^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (I^{\mp}_{-t,-i\theta}, \Phi \circ \mathsf{or}^{-1}) \\
\mathsf{Or}(L^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (L^{\mp}_{-t,-i\theta}, \Phi \circ \mathsf{or}^{-1}) \\
\mathsf{Or}(R^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (R^{\mp}_{-t,-i\theta}, \Phi \circ \mathsf{or}^{-1})
\end{aligned}$$

其中（符号滥用）or : $S \times \mathbb{R}^{1|1} \to S \times \mathbb{R}^{1|1}$ 由映射（44）确定。

证明。 1|1-EBord(M) 的定向反转自同构在上述任意一个族上的取值由图表确定。



其中，下方一行中的包含映射是使图表交换的唯一映射。结合定向反转会交换子空间 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$，$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}^{1|1}$ 这一事实，可以选取如陈述中所示的同构。这些同构在源和目标的领圈数据选择范围内唯一。□

命题 4.22。 对于 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$， 1|1-EBord(M) 的重整化群自同构取值于

$$\begin{aligned}
\mathsf{RG}_{\mu}(\mathrm{spt}^{\pm}, \phi) &\simeq (\mathrm{spt}^{\pm}, \phi \circ \mathsf{rg}_{\mu}^{-1}) \\
\mathsf{RG}_{\mu}(I^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (I^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \Phi \circ \mathsf{rg}_{\mu}^{-1}) \\
\mathsf{RG}_{\mu}(L^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (L^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \Phi \circ \mathsf{rg}_{\mu}^{-1}) \\
\mathsf{RG}_{\mu}(R^{\pm}_{t,\theta}, \Phi) &\simeq (R^{\pm}_{\mu^2 t,\mu\theta}, \Phi \circ \mathsf{rg}_{\mu}^{-1})
\end{aligned}$$

wh此处（符号滥用）rg_{μ}: $S \times \mathbb{R}^{1|1} \to S \times \mathbb{R}^{1|1}$ 由映射 (45) 确定。

证明。 论证与命题 4.21 的证明类似，此处利用的是 rg_{μ} 保持子空间 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}, \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}^{1|1}$。□

4.5. **小 bordism 与近乎常值超路径。**

定义 4.23。 考虑与以下叠映射相关联的配边族

$$
\begin{aligned}
\mathrm{spt}^{\pm}_M &: \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{i}^{+}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{i}^{-}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{l}^{+}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{l}^{-}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{r}^{+}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\
\mathsf{r}^{-}_M &: \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))
\end{aligned}
\tag{106}
$$

将（82）、（84）和（87）限制到（有限维）子空间

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \qquad \phi_0 \mapsto (S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{p} S \times \mathbb{R}^{0|1} \xrightarrow{\phi_0} M).$$

我们将 M 中的族（106）称为小 ***bordism*** 。

特别地，族（106）确定了叠映射

$$\mathrm{Ob}\left(\mathsf{sPath}_0(M)\right) \to \mathrm{Ob}\left(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\right), \ \mathrm{Mor}\left(\mathsf{sPath}_0(M)\right) \to \mathrm{Mor}\left(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)\right)。 \tag{107}$$

命题 4.24。层叠映射 (107) 是内部函子 (78) 的数据的一部分。该内部函子从 M 中近乎常值超路径的超李范畴（视为内于层叠的范畴）映至 M 上的 $1|1$-欧几里得配边范畴。在此函子下，引理 4.2 中 Or,RG^{μ} 和 R 结构的限制，与引理 3.22 中 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 上的结构相容。

证明。定义 B.7 回顾了内部函子的相关数据。除了层叠映射 (107) 外，我们还需要复合和单位元的相容性数据。命题 4.10 给出了这些数据。由于该命题中的 2-同构数据是典范的（源自配边领圈的相交），这些 2-同构所要求的相干性自动成立。至此，内部函子 (78) 的构造完成。

这个函子与附加结构的相容性由命题 4.20、4.21 和 4.22 推出：这些命题中的同构限制到（106）中的相应族上，便提供了 2-交换数据，

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{sPath}_0(M) & \longrightarrow & 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \\
{\scriptstyle \mathsf{RG}_\mu, \mathsf{Or}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{RG}_\mu, \mathsf{Or}} \\
\mathsf{sPath}_0(M) & \longrightarrow & 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathsf{sPath}_0(M) & \longrightarrow & 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \\
{\scriptstyle \mathsf{R}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}} \\
\overline{\mathsf{sPath}_0(M)} & \longrightarrow & 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)
\end{array}
\tag{108}
$$

从而证明所声称的相容性。 □

注 4.25。 小配边的复合与不交并生成了 M 中由小配边构成的子范畴 $1|1$-$\mathsf{ebord}(M) \subset 1|1$-$\mathsf{EBord}(M)$。从理念上说，定理 1.1 和 1.2 中的范畴 $1|1$-$\mathsf{eft}^n(M)$ 考察定义在这些子范畴上的 degree n 场论。然而，在 [ST11], 的框架下，很难为一个（子）范畴中的生成元给出精确定义，因此我们转而根据更小的子范畴 $\mathsf{sPath}_0(M) \subset 1|1$-$\mathsf{ebord}(M)$ 来表述结果。

5. $1|1$-Euclidean field theories of degree n

本节回顾 Stolz 和 Teichner 的次数 n 扭曲，以及来自 [ST11]的、在 M 上的次数 n 扭曲场论。简言之，它们是针对一个称为次数扭曲的 $\otimes$-可逆函子 $\mathscr{T}$ 的内部自然变换 (10)。$\mathscr{T}$ 的完整构造尚未发表，但 $\mathscr{T}$ 的预期性质已在 [ST04、HST10、ST11] 中有所描述，这些文献探讨了配边范畴 $1|1$-$\mathsf{EBord}(M)$和 Morita 双范畴 Alg 定义的三种变体。鉴于这些略有差异的既有形式体系，以及其他正在发展的形式体系，

我们在下文的目标是对次数 n 扭曲作出概念性描述，使其能够适用于任何场论框架。我们的描述依赖于二维扩展拓扑场论的配边假设。假设该假设成立，我们便可以计算上一节构造的配边族中次数 n 扭曲及扭曲场论的取值。关键结论是，次数 n 场论是由 Morita 可逆（因而完全可对偶化）代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$所确定的二维拓扑场论的（非拓扑）边界条件，其中该代数是第 n个克利福德代数。 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_m$ 与 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{n+m}$ 之间的莫里田等价，进而通过张量积为次数 n 场论赋予所需的（分次）乘法。

注记 5.1。 ST11 第 5 节列出了无超对称性的 d 维欧几里得场论中，次数为 n 的扭曲的取值。将这一构造推广到（超对称） $1|1$ 维欧几里得配边的一种可能方式，是为配边范畴给出生成元与关系表示。此类表示见 [HST10 第 6 节、7], [ST11 第 3 节，2], 而 [ST11 命题 4 的证明16]。然而，完整的陈述和证明尚未发表。根据这些预期的生成元与关系，次数为 n 的 $1|1$ 维欧几里得场论，等价于一种量子力学理论，其中第 n 个克利福德代数 Cl_n 按照 §2.4 的意义以对称性的方式作用；参见 [ST04 第 3 节2]和 [HST10 主定理]。下文概述的次数为 n 的扭曲的构造与这些先前的预期相符。

5.1. **扭曲场论的取值**。扭曲几何场论定义为从几何配边范畴到内部莫里田范畴的内部函子 $\mathscr{T}$ 的内部自然变换（193）；相关回顾见 §B.4。我们将展开上一节所述配边族上的扭曲 $1|1$-欧几里得场论的取值；这一讨论拓展了 ST11 第 $52]$ 页的内容。

命题 5.2。给定一个内部函子 $\mathscr{T}\colon 1|1\text{-EBord}(M) \to \mathrm{Alg}$，一个 $\mathscr{T}$-扭曲场论 E 确定以下数据

(1) 左模丛

$\mathscr{T}(\mathrm{spt}^+_M)E(\mathrm{spt}^+_M) \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$　$\mathscr{T}(\mathrm{spt}^-_M)E(\mathrm{spt}^-_M) \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 其中 $\mathscr{T}(\mathrm{spt}^\pm_M)$ 是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的超代数丛；(2) $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)E(\mathrm{I}^+_M)$ 上的双模丛映射：$\mathscr{T}(\mathrm{I}^+_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_+ \mathscr{T}(\mathrm{I}^+_M)} \mathrm{proj}^*_+ E(\mathrm{spt}^+_M) \to \mathrm{act}^*_+ E(\mathrm{spt}^+_M)$,$E(\mathrm{L}^+_M)$：$\mathscr{T}(\mathrm{L}^+_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_+ \mathscr{T}(\mathrm{spt}^+_M) \otimes \mathrm{act}^*_+ \mathscr{T}(\mathrm{spt}^-_M)} \mathrm{proj}^*_+ E(\mathrm{spt}^+_M) \otimes \mathrm{act}^*_+ E(\mathrm{spt}^-_M) \to \mathbb{C}$，以及 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的双模丛映射

$$E(\mathrm{R}^+_M)\colon \mathscr{T}(\mathrm{R}^+_M) \to \mathrm{proj}^*_+ E(\mathrm{spt}^-_M) \otimes \mathrm{act}^*_+ E(\mathrm{spt}^+_M),$$

$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的双模丛映射，

$$E(\mathrm{I}^-_M)\colon \mathscr{T}(\mathrm{I}^-_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_- \mathscr{T}(\mathrm{I}^-_M)} \mathrm{proj}^*_- E(\mathrm{spt}^-_M) \to \mathrm{t}^* E(\mathrm{spt}^-_M), E(\mathrm{L}^-_M)\colon \mathscr{T}(\mathrm{L}^-_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_- \mathscr{T}(\mathrm{spt}^-_M) \otimes \text{作用}^*_- \mathscr{T}(\mathrm{spt}^+_M)} \mathrm{proj}^*_- E(\mathrm{spt}^-_M) \otimes \text{作用}^*_- E(\mathrm{spt}^+_M) \to \mathbb{C},$$

以及 $\mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的双模丛映射，

$$E(\mathrm{R}^-_M)\colon \mathscr{T}(\mathrm{R}^-_M) \to \mathrm{proj}^*_- E(\mathrm{spt}^+_M) \otimes \mathrm{act}^*_- E(\mathrm{spt}^-_M),$$

对于紧接在 (90) 后定义的投影映射 $\mathrm{proj}_\pm$ 和作用映射 $\mathrm{act}_\pm$；

(3) 栈 $\mathcal{L}^{1|1}(M$ 上的等变向量丛 $\mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(M))$ 的对偶的一个截面

$$E(\mathcal{L}^{1|1}(M))\colon \mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(M)) \to \underline{\mathbb{C}}$$

即在超欧几里得等距变换对 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 的作用下保持不变。

证明。 根据内部函子的定义 B.7，扭曲确定了叠映射

$$\mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{Alg}), \qquad \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg})$$

它可以在 §4.2 中定义的源层叠的对象上取值。因此，扭曲确定了以下丛：

- $\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{\pm}_M) \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 超代数；
- $\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ $\mathsf{proj}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M)$-$\mathsf{act}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M)$-双模；
- $\mathscr{T}(\mathsf{I}^{-}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ $\mathsf{proj}^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-$\mathsf{act}^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-双模；
- $\mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 右 $\mathsf{proj}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M) \otimes \mathsf{act}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-模；
- $\mathscr{T}(\mathsf{L}^{-}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 右投射$^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M) \otimes \mathsf{act}^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M)$-模；
- $\mathscr{T}(\mathsf{R}^{+}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 左投射$^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M) \otimes \mathsf{act}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M)$-模；
- $\mathscr{T}(\mathsf{R}^{-}_M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 左投射$^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M) \otimes \mathsf{act}^*_-\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-模；
- 以及 $\mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(M)) \to \mathcal{L}^{1|1}(M)$，一个向量丛。

内部函子 (182) 中的附加数据 μ 提供了与配边复合相关的双模丛映射；我们将列出从命题 4.10、4.13、4.15、4.17 和 4.18 继承的数据。我们得到一个 $\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M)$-双模映射，

$$p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M) \otimes_{p_2^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{+}_M)} p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M) \to \mathsf{m}^*\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M),$$
$$\text{over} \quad \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$$

其中 p_1, p_2 是（93）中的映射。对于 $\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$ 上的 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 双模，也有类似的同构。我们还得到一个右 $\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M) \otimes \mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-模丛的映射

$$p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}_M) \otimes_{p_2^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{+}_M) \otimes p_3^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{-}_M)} (p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M) \otimes p_3^*\mathscr{T}(\mathsf{I}^{-}_M)) \to \mathsf{m}^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}_M),$$
$$\text{over} \quad \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$$

其中 p_1, p_2, p_3 是（97）中的映射。存在一个涉及 $\mathscr{T}(\mathsf{L}^{-}_M)$ 的类似同构。存在一个向量丛映射

$$p_1^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}_M) \otimes_{p_1^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{+}_M) \otimes p_2^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{-}_M)} p_2^*\mathscr{T}(\mathsf{R}^{-}_M) \to \mathsf{c}^*\mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(M)), \quad \text{over} \quad \mathcal{L}^{1|1}(M) \tag{109}$$

对于 p_1, p_2，（105）中的映射。存在一个右 $\mathsf{proj}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{+}_M) \otimes \mathsf{act}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{spt}^{-}_M)$-模丛的同构

$$\mathrm{inv}^*\mathscr{T}(\mathsf{L}^{-}_M) \simeq \mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}_M) \quad \text{over} \quad \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \tag{110}$$

其中 inv 是映射（102）。上述与复合相关的同构还需满足进一步的相干条件，具体由内部函子的定义所规定。

扭曲场论定义为一个内部自然变换（见定义 B.8），因此其数据包括一个带对合的对称幺半叠映射 η: $\mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg})$，以及相容性数据（183）。因此，堆栈映射 η 确定了在 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的态射

$$E(\mathrm{spt}^{\pm}_M) \in \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg}), \quad \text{with} \quad \mathsf{t}(E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)) = \mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M),\ \mathsf{s}(E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)) = \underline{\mathbb{C}}.$$

根据 Alg 的定义，这就给出了 (1) 中的左模丛： $\mathbb{C}$ 的右作用并非额外数据。扭曲场论的数据 ρ，根据 ST11 第 52] 页中 [的论证，给出了 (2) 和 (3) 中的数据。例如，将 ρ 作用于族 $\mathsf{I}^{\pm}_M$ 上，得到一个双模之间的映射

$$E(\mathsf{I}^{+}_M)\colon \mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_+\mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}_M)} \mathrm{proj}^* E(\mathrm{spt}^{+}_M) \to \mathrm{act}^*_+ E(\mathrm{spt}^{+}_M)$$

这就是上面列出的第一个双模映射。 □

命题 5.3。 命题 5.2 中的数据满足关于配边复合的相容性。特别地，双模映射之间有如下等式

$$p_1^*E(\mathsf{I}_M^+)\circ p_2^*E(\mathsf{I}_M^+)=\mathsf{m}^*E(\mathsf{I}_M^+),\quad \text{over}\quad \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \tag{111}$$

其中 p_1，p_2 是映射 (93)。此外，双模映射满足等式

$$p_2^*E(\mathsf{L}_M^+)\circ(p_1^*E(\mathsf{I}_M^+)\otimes p_3^*E(\mathsf{I}_M^-))=\mathsf{m}^*E(\mathsf{L}_M^+),\ \text{over}\ \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \tag{112}$$

其中 p_1，p_2，p_3 是 (97) 中的映射。我们有 $\mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(M))$ 的对偶截面满足等式

$$p_1^*E(\mathsf{L}_M^+)\circ p_2^*E(\mathsf{R}_M^-)=\mathsf{m}^*E(\mathcal{L}^{1|1}(M)),\quad \text{over}\quad \mathcal{L}^{1|1}(M) \tag{113}$$

对于 p_1，p_2，它们是 (105) 中到各因子的投影。命题 4.17 推出映射满足等式

$$\mathrm{inv}^*E(\mathsf{L}_M^-)=E(\mathsf{L}_M^+)\quad \text{over}\quad \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) \tag{114}$$

其中 inv 是映射 (102)。对配边族交换 $+$ 和 $-$ 的标记后，也有类似的结论。

证明。 根据内部自然变换的定义 B.8，结论成立；其中命题 5.2 中的数据必须满足内范畴 $1|1$-EBord(M) 中复合的相容性条件，以及栈 Mor($1|1$-EBord(M)) 中同构的不变性条件。我们强调，上文要求的关系现在是某些向量丛映射相等的条件，而非额外的数据。

更具体地说，式 (111) 源于与族 I_M^+ 的复合相容性，其计算见命题 4.10。等式 (112) 源于族 L_M^+ 与 $\mathsf{I}_M^+\coprod\mathsf{I}_M^-$ 的复合相容性，其计算见命题 4.13。等式 (113) 源于与 L_M^+ 和 R_M^- 的复合相容性，其计算见命题 4.18。最后，式 (114) 源于命题 4.17 中计算得到的配边族同构。□

5.2. **反射与实结构**。接下来我们描述扭曲和扭曲场论的反射与实结构。我们需要引入一些记号：将超流形上的共轭函子扩展为广义超流形上的共轭函子，它将预层 $\mathcal{F}$ 映为预层

$$\overline{\mathcal{F}}(S):=\mathcal{F}(\overline{S}).$$

我们将使用层的映射来表述反射正性和实结构数据

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\quad&\to\quad\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)},\\ (\phi\colon S\times\mathbb{R}^{1|1}\to M)\quad&\mapsto\quad(\overline{S}\times\mathbb{R}^{1|1}\xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{S}}\times\mathsf{r}}\overline{S}\times\overline{\mathbb{R}}^{1|1}\xrightarrow{\overline{\phi}}\overline{M}\simeq M),\end{aligned} \tag{115}$$

它也确定映射

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\quad\to\quad\overline{\mathbb{R}}^{1|1}_{\geq 0}\times\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)}, \tag{116}$$

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)\quad\to\quad\overline{\mathbb{R}}^{1|1}_{\leq 0}\times\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)}. \tag{117}$$

符号滥用地，映射 (115)、(116) 和 (117) 均记为 r。命题 4.20 为层叠中的图表给出了 2-交换数据

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\mathrm{spt}_M^{\pm}} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{r}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}_0}\\ \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)} & \xrightarrow[\overline{\mathrm{spt}}_M^{\pm}]{} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M) & \xrightarrow{\mathsf{I}_M^+} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{r}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}_1}\\ \overline{\mathbb{R}}^{1|1}_{\geq 0}\times\overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)} & \xrightarrow[\overline{\mathsf{I}}_M^+]{} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))\end{array}$$

并为 I^{-}_M、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 给出类似的图表。接下来定义映射

$$\begin{aligned} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) &\to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \\ (\phi\colon S \times \mathbb{R}^{1|1} \to M) &\mapsto (S \times \mathbb{R}^{1|1} \xrightarrow{\mathrm{id}_S \times \mathsf{or}^{-1}} S \times \overline{\mathbb{R}}^{1|1} \to M), \end{aligned} \tag{118}$$

它还确定了映射

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \tag{119}$$

$$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) \tag{120}$$

映射 (118)、(119) 和 (120) 均记作 或。命题 4.21 给出了 2-交换数据

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) & \xrightarrow{\mathrm{spt}^{\pm}_M} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{or}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{Or}_0} \\ \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) & \xrightarrow[\mathrm{spt}^{\mp}_M]{} & \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) & \xrightarrow{\mathsf{I}^{+}_M} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{or}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{Or}_1} \\ \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M) & \xrightarrow[\mathsf{I}^{-}_M]{} & \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)) \end{array}$$

并且对 I^{-}_M、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 也有类似的图表。

我们回顾定义 B.29：扭曲和扭曲场论的反射结构，是根据定义 B.13 中的意义，为 $1|1$-EBord(M) 上由 $\mathsf{R} \circ \mathsf{Or}$ 确定的 $\mathbb{Z}/2$-作用所定义的 $\mathbb{Z}/2$-等变性数据。

引理 5.4。 扭曲 $\mathscr{T}\colon 1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M) \to \mathsf{Alg}$ 的反射结构确定了一个可逆的 $\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)$-$\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)$-双模 $\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \to \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)}$ 以及双模同构（其中右侧的双模是恒等双模）

$$\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \otimes \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathscr{R}}^{\mp}_{\mathscr{T}} \simeq \mathscr{T}(\mathsf{S}^{\pm}_M) \tag{121}$$

以及双模同构

$$\mathscr{T}(\mathsf{I}^{\pm}_M) \otimes_{\mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)} \mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \otimes_{\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathrm{proj}^*_{\mp}}\,\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}} \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{I}^{\mp}_M)},$$

$$\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M) \otimes_{\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M) \otimes \mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)} (\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \otimes \mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\mp}_{\mathscr{T}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{L}^{-}_M)},$$

在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 或 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上，以及

$$\mathscr{T}(\mathsf{R}^{+}_M) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\mp}_{\mathscr{T}} \otimes \mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}}) \otimes_{\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*(\overline{\mathrm{proj}^*_{\mp}}\,\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)} \otimes \overline{\mathrm{act}^*_{\mp}}\,\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M))}} \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathscr{T}(\mathsf{R}^{-}_M)}, \tag{122}$$

在 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 或 $\mathbb{R}^{1|1}_{<0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上满足对合性质，其中上文采用了命题 5.2 的证明中列出的扭曲取值记号。

证明。 等变性数据要求一个内部自然同构，根据定义 B.8，它是一个层叠态射

$$\phi\colon \mathrm{Ob}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(\mathrm{pt})) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg})^{\times}$$

取值于可逆双模，并配备满足性质的相容性数据 ρ。将 ϕ 作用于族 $\mathrm{spt}^{\pm}_M$，我们得到所述的可逆双模丛。将 ρ 作用于 §4.2 中的族 $\mathsf{I}^{\pm}_M$、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$，反射结构指定了涉及扭曲取值的双模同构数据，这些取值已列于命题 5.2 的证明中。另一个 $\mathbb{Z}/2$-等变性数据是内自然同构之间的同构 β，参见 (185)；它确定了双模同构 (121)。□

引理 5.5。 为扭曲 $\mathscr{T}\colon 1|1\text{-EBord}(M)\to \mathrm{Alg}$ 固定一个反射结构。那么， $\mathscr{T}$-扭曲场论的反射结构是左 $\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)$-模丛之间的同构，该丛定义在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)$ 上

$$E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)\xrightarrow{\sim}\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}}\otimes_{\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}}\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}). \tag{123}$$

这些同构必须满足族 $\mathsf{L}^{\pm}(M)$、$\mathsf{R}^{\pm}(M)$ 和 $\mathsf{I}^{\pm}(M)$ 的相容条件，即满足交换方块，

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{T}(\mathsf{I}^{\pm}_M)\otimes_{\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}\mathrm{proj}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\pm}_M) & \xrightarrow{\quad E(\mathsf{I}^{\pm}_M)\quad} & \mathrm{act}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)\\
\simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\simeq\\
\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\Big(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{I}^{\mp}_M)}\otimes_{\overline{\mathrm{proj}^*_{\mp}}\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}}\overline{\mathrm{proj}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}\Big) & \xrightarrow[\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{I}^{\mp}_M)}]{} & \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathrm{act}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}
\end{array} \tag{124}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\pm}_M)\otimes_{\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)\otimes\mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}\mathrm{proj}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)\otimes\mathrm{act}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\mp}_M) & \xrightarrow{\quad E(\mathsf{L}^{+}_M)\quad} & \underline{\mathbb{C}}\\
\simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\simeq\\
\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{L}^{\mp}_M)}\otimes_{\overline{\mathrm{proj}^*_{\mp}}\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}\otimes\overline{\mathrm{act}^*_{\mp}}\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}}\overline{\mathrm{proj}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}\otimes\overline{\mathrm{act}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)} & \xrightarrow[\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{L}^{\mp}_M)}]{} & \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\underline{\mathbb{C}}}
\end{array} \tag{125}$$

在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)$ 上，以及在 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{<0}\times\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)$ 上的交换方块

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\quad E(\mathsf{R}^{\pm}_M)\quad} & \mathscr{T}(\mathsf{R}^{\pm}_M)\otimes_{\mathrm{proj}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)\otimes\mathrm{act}^*_{\pm}\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}\mathrm{proj}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)\otimes\mathrm{act}^*_{\pm}E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)\\
\simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\simeq\\
\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\underline{\mathbb{C}}} & \xrightarrow[\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{R}^{\mp}_M)}]{} & \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*(\overline{\mathscr{T}(\mathsf{R}^{\mp}_M)}\otimes_{\overline{\mathrm{proj}^*_{\mp}}\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}\otimes\overline{\mathrm{act}^*_{\mp}}\overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}}\overline{\mathrm{proj}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}\otimes\overline{\mathrm{act}}^*_{\mp}\overline{E(\mathrm{spt}^{\mp}_M)}
\end{array}$$

其中，竖直箭头使用引理 5.4 和 (123) 中的数据，不过我们省略了与双模 $\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}}$ 的张量积；这些双模在 $\underline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm})}$-模与 $\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\mp})$-模之间起中介作用，以避免记号变得（更加）繁杂。

证明。 扭曲场论的反射正性数据定义为内部自然变换之间的一个同构，见定义 B.14。根据定义 B.8，这是作为内部自然变换数据一部分的叠映射 $\mathrm{Ob}(1|1\text{-EBord}(M))\to\mathrm{Mor}(\mathrm{Alg})$ 之间的一个同构。在族 $\mathrm{spt}^{\pm}_M$ 上对叠映射之间的这个同构求值，即得到数据 (123)。

要使数据 (123) 确定内部自然变换之间的同构，必须对 $\mathrm{Mor}(1|1\text{-EBord}(M))$ 的每个对象满足相容性要求。在族 $\mathsf{I}^{\pm}_M$、$\mathsf{L}^{\pm}_M$ 和 $\mathsf{R}^{\pm}_M$ 上取值，即可得到所述的交换方块。□

按照定义 B.32 的含义，我们可以为扭曲和扭曲场论考虑实结构；这里使用引理 4.2 中 $1|1\text{-EBord}(M)$ 上的实结构，该结构继承自由 (47) 确定的 $1|1$-Euclidean 几何上的实结构。

引理 5.6。 扭曲 $\mathscr{T}\colon 1|1\text{-EBord}(M)\to\mathrm{Alg}$ 的一个实结构确定一个可逆的 $\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)$-$\mathsf{r}^*\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)$-双模 $\mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}}\to\overline{\mathrm{Map}(\mathbb{R}^{1|1},M)}$，其带有类似于 (121) 的对合数据，以及类似于引理 5.4 中那些双模同构的同构。

证明。 证明与引理 5.4 的证明类似。 □

Lemma 5.7. 为扭曲 $\mathscr{T}$: $1|1$-EBord(M) $\to$ Alg 固定一个实结构。于是一个实结构 e for 一个 $\mathscr{T}$-扭曲场论是丛的左 $\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)$-模的同构

$$E(\mathrm{spt}^{\pm}_M) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}^{\pm}_{\mathscr{T}} \otimes_{\mathsf{r}^* \overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^{\pm}_M)}} \mathsf{r}^* \overline{E(\mathrm{spt}^{\pm}_M))} \tag{126}$$

在 Map($\mathbb{R}^{1|1}$, M) 上。这些同构须满足与引理 5.5 中类似的相容性。

证明。 证明与引理 5.5 的证明类似。 □

5.3. **可逆扭曲**。 猜想 (1) 所关注的扭曲是针对 $n \in \mathbb{Z}$ 的次数为 n 的扭曲。这些扭曲由一个可逆扭曲确定

$$d|1\text{-EBord}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\mathscr{T}} \mathsf{Alg}^{\times}, \qquad d = 1, 2 \tag{127}$$

进而通过取张量幂，并与由映射 p: $M \to \mathrm{pt}$ 确定的典范函子 $d|1$-EBord(M) $\to d|1$-EBord(pt) 作前复合，得到次数为 n 的扭曲 $\mathscr{T}^{\otimes n}$: $d|1$-EBord(M) $\to \mathsf{Alg}^{\times}$。扭曲 $\mathscr{T}^{\otimes n}$ 为与 $n \in \mathbb{Z}$ 对应的次数为 n 的扭曲场论构成的集合赋予 $\mathbb{Z}$- 分次。此分次与场论的张量积相容：次数为 n 的场论与次数为 m 的场论的张量积，是一个次数为 $n+m$ 的场论。在猜想中的映射 (1) 下，张量积预期与上同调中的乘积相容。

当 $d = 1$ 时，(127) 确定了（通常的）Morita 双范畴中的一个可逆对象，

$$A := \mathscr{T}(\mathrm{spt}^{+}) \tag{128}$$

它是通过将定义 4.3 中的配边族 spt^+ over pt $=$ Map($\mathbb{R}^{1|1}$, pt) 代入求值得到的；这里利用了 pt 上的代数丛就是一个代数这一事实。根据配边假设， A 确定了一个二维拓扑场论。这样的拓扑场论还通过以下复合确定了一个可逆扭曲

$$1|1\text{-EBord}(\mathrm{pt}) \to 1\text{-Bord}(\mathrm{pt}) \hookrightarrow 2\text{-Bord}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\mathsf{TFT}(A)} \mathsf{Alg} \tag{129}$$

其中，第一个箭头是从 $1|1$-欧几里得配边到一维自旋配边的遗忘函子，第二个箭头则将一维配边纳入（全扩张的、自旋）二维配边范畴。标记为 TFT(A) 的箭头将由可逆（因而可对偶化的）代数 A 确定的全扩张自旋拓扑场论映射过去。

假设 5.8。 当 $d = 1$ 时，可逆扭曲 $\mathscr{T}$ 等价于由 $\mathscr{T}$ 在 spt^+ 上的取值 (128) 构造出的可逆扭曲 (129)。

假设这一假设成立，我们便可以计算扭曲在 $M =$pt 上各种配边族中的取值（参见命题 5.2）

$$\begin{aligned} &A = \mathscr{T}(\mathrm{spt}^{+}), \quad A^{\mathsf{op}} = \mathscr{T}(\mathrm{spt}^{-}), \quad {}_{A}A_{A} = \mathscr{T}(\mathsf{I}^{+}), \quad {}_{A^{\mathsf{op}}}A^{\mathsf{op}}{}_{A^{\mathsf{op}}} = \mathscr{T}(\mathsf{I}^{-}), \\ &A/[A,A] = \mathscr{T}(\mathcal{L}^{1|1}(\mathrm{pt}))), \quad {}_{\mathbb{C}}A_{A\otimes A^{\mathsf{op}}} = \mathscr{T}(\mathsf{L}^{+}), \quad {}_{\mathbb{C}}A_{A^{\mathsf{op}}\otimes A} = \mathscr{T}(\mathsf{L}^{-}), \\ &\qquad\qquad {}_{A^{\mathsf{op}}\otimes A}A_{\mathbb{C}} = \mathscr{T}(\mathsf{R}^{+}), \quad {}_{A\otimes A^{\mathsf{op}}}A_{\mathbb{C}} = \mathscr{T}(\mathsf{R}^{-}), \end{aligned} \tag{130}$$

其中，上述对象被解释为相应配边的参数族上的双模丛。例如， $\mathscr{T}(\mathsf{I}^+)$ 是 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 上的平凡丛，其纤维 A 是以自身为底环的双模。扭曲还要求给出上述配边各种复合之间的同构；在上述情形中，这些数据是典范的。例如，超路径的拼接对应于同构

$$A \otimes_A A \simeq A, \qquad A^{\mathsf{op}} \otimes_{A^{\mathsf{op}}} A^{\mathsf{op}} \simeq A^{\mathsf{op}},$$

而命题 4.18 中配边之间的关系对应于典范同构

$$A \otimes_{A\otimes A^{\mathsf{op}}} A \simeq A/[A,A].$$

关于扭曲的反射和实结构数据，请参见定义 B.30 和 B.32。再次根据配边假设，由 (128) 确定的扭曲的反射和实结构数据

相当于在 A 上添加额外结构。根据引理 5.4，次数扭曲的反射结构可以由一个反线性反对合指定

$$A = \mathscr{T}(\mathrm{spt}^+) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^-)} = \overline{A}^{\mathsf{op}},$$

这使我们能够将 A 本身视为一个 A-A^{op} 双模。这是一个 $*$-超代数结构的数据，它等价于 A 上一个普通的 $*$-结构数据；参见 §A.2。同样，引理 5.6 表明，扭曲的实结构由一个反线性对合确定

$$A = \mathscr{T}(\mathrm{spt}^+) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{T}(\mathrm{spt}^+)} = \overline{A}.$$

即 A 上的实结构。

5.4. **次数扭曲与次数 n 场论。** 对于 $\mathbb{C}$上的 $\mathbb{Z}/2$分次代数，任意 $\otimes$可逆代数都与 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{Cl}_1$ Morita 等价。因此，假设假设 5.8 成立，次数扭曲必然等价于由 $\mathbb{Cl}_1$ 确定的扭曲。

假设 5.9。 次数扭曲 $\mathscr{T} = \mathscr{T}^{\otimes 1}$ 在 (128) 下由克利福德代数 $\mathbb{Cl}_1$ 确定。次数扭曲的反射结构由 $\mathbb{Cl}_1$ 上的标准 $*$结构 (172) 固定。扭曲的实结构由 $\mathbb{Cl}_1$ 上的标准实结构固定。

假设满足假设 5.9，次数 n 扭曲由第 n 个 Clifford 代数 $\mathbb{Cl}_n$ 确定，因为 $\mathbb{Cl}_{-1}$ 是 $\otimes$对 $\mathbb{Cl}_1$ 的逆，并且 $\mathbb{Cl}_{+1}^{\otimes n} \simeq \mathbb{Cl}_{+n}$ 对于 $n \geq 0$ 成立。次数扭曲上的实结构和反射结构唯一确定了次数 n 扭曲上的实结构和反射结构。

注记 5.10。 与 Clifford 代数相关的二维自旋拓扑场论已由 Gunningham [Gun16] 进行了详细研究。

命题 5.2 和 5.3 从次数 n 场论中提取出以下数据。

推论 5.11。 假设满足假设 5.9，一个次数 n 扭曲场论 E 确定

- 左 $\mathbb{Cl}_{+n}$-模丛
$$\mathcal{V}_\pm := E(\mathrm{spt}^\pm_M) \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M);$$
- 丛的 $\mathbb{Cl}_{+n}$-模映射，定义在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times$**Map**$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times$**Map**$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上，且与复合 (111) 相容；
$$E(\mathsf{I}^\pm_M)\colon \mathrm{proj}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\pm_M) \to \mathrm{act}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\pm_M),$$
- 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的向量丛映射
$$E(\mathsf{L}^\pm_M)\colon \mathbb{Cl}_{\pm n}\otimes_{\mathbb{Cl}_{\pm n}\otimes\mathbb{Cl}_{\mp n}}\Big(\mathrm{proj}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\pm_M)\otimes \mathrm{act}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\mp_M)\Big) \to \underline{\mathbb{C}}, \tag{131}$$
满足伴随关系 (112) 和对称关系 (114)；
- 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0}\times$**Map**$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{<0}\times$**Map**$(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的左 $\mathbb{Cl}_{\mp n}\otimes\mathbb{Cl}_{\pm n}$-模映射
$$E(\mathsf{R}^\pm_M)\colon \mathbb{Cl}_{\mp n} \to \mathrm{proj}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\mp_M)\otimes \mathrm{act}^*_\pm E(\mathrm{spt}^\pm_M);$$
- 在栈 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 上，取值于纤维为 $\mathbb{Cl}_n/[\mathbb{Cl}_n, \mathbb{Cl}_n]$ 的平凡线丛的对偶的一个截面
$$E(\mathcal{L}^{1|1}(M))\colon \mathbb{Cl}_n/[\mathbb{Cl}_n, \mathbb{Cl}_n] \to \underline{\mathbb{C}}$$
该截面在超欧几里得等距变换对 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$ 的作用下保持不变，且与由 (113) 得到的值一致。

引理 5.5 从一个次数为 n 的理论上的反射结构中提取数据。

推论 5.12. 假设假设 5.9 成立，则次数为 n 的扭曲场论 E 上的反射结构可确定

• $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的同构

$$\mathcal{V}_\pm \xrightarrow{\sim} \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathcal{V}_\mp}, \tag{132}$$

相对于 $*\,\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的结构；

• 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的交换方形，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{proj}_\pm^*\mathcal{V}_\pm & \xrightarrow{E(\mathsf{l}_M^\pm)} & \mathrm{act}_\pm^*\mathcal{V}_\pm \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathrm{proj}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\mp} & \xrightarrow[\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{l}_M^\mp)}]{} & \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\mathrm{act}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\mp} \end{array} \tag{133}$$

• 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的向量丛交换方形，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}} \left(\mathrm{proj}_\pm^*\mathcal{V}_\pm \otimes \mathrm{act}_\pm^*\mathcal{V}_\mp\right) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}_M^\pm)} & \underline{\mathbb{C}} \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\left(\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n} \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n}\otimes\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n}} \left(\overline{\mathrm{proj}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\mp} \otimes \overline{\mathrm{act}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\pm}\right)\right) & \xrightarrow[\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{L}_M^\mp)}]{} & \mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\underline{\mathbb{C}}} \end{array} \tag{134}$$

引理 5.7 从一个次数为 n 的理论的实结构中提取数据。

推论 5.13。 假设 5.9 成立时，次数为 n 的扭曲场论 E 上的实结构决定

• $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 上 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的一个丛同构

$$\mathcal{V}_\pm \xrightarrow{\sim} \mathsf{r}^*\overline{\mathcal{V}_\mp}, \tag{135}$$

相对于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的实结构；

$\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 和$\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1},\ M)$ 上 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛的• 一个交换方形，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{proj}_\pm^*\mathcal{V}_\pm & \xrightarrow{E(\mathsf{l}_M^\pm)} & \mathrm{act}_\pm^*\mathcal{V}_\pm \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{r}^*\overline{\mathrm{proj}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\pm} & \xrightarrow[\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{l}_M^\pm)}]{} & \mathsf{r}^*\overline{\mathrm{act}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\pm} \end{array}$$

• 在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ 上的向量丛交换方形，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n}} \left(\mathrm{proj}_\pm^*\mathcal{V}_\pm \otimes \mathrm{act}_\pm^*\mathcal{V}_\mp\right) & \xrightarrow{E(\mathsf{L}_M^\pm)} & \underline{\mathbb{C}} \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathsf{r}^*\left(\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n} \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n}\otimes\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n}} \left(\overline{\mathrm{proj}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\pm} \otimes \overline{\mathrm{act}}_\mp^*\overline{\mathcal{V}_\mp}\right)\right) & \xrightarrow[\mathsf{r}^*\overline{E(\mathsf{L}_M^\pm)}]{} & \mathsf{r}^*\overline{\underline{\mathbb{C}}} \end{array}$$

over $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$ and $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M)$.

我们注意到，推论 5.11 中的数据和结构 ，5.12，以及 5.13 可以沿着包含映射加以限制

$$M \subset \Pi TM \simeq \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \tag{136}$$

从而得到由 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-丛构成的丛

$$V_\pm := \mathcal{V}_\pm|_M, \qquad \Omega^\bullet(M; V_\pm) \simeq \mathcal{V}_\pm|_{\Pi TM}.$$

其中，同构由引理 A.20 得出。特别地，将 (131) 和 (132) 限制后，便得到一个映射

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\pm n} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \left(\overline{V}_\pm \otimes V_\pm\right) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{\mp n} \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}} \left(V_\mp \otimes V_\pm\right) \to \underline{\mathbb{C}}$$

该映射确定了一个配对，使得克利福德作用互为伴随，

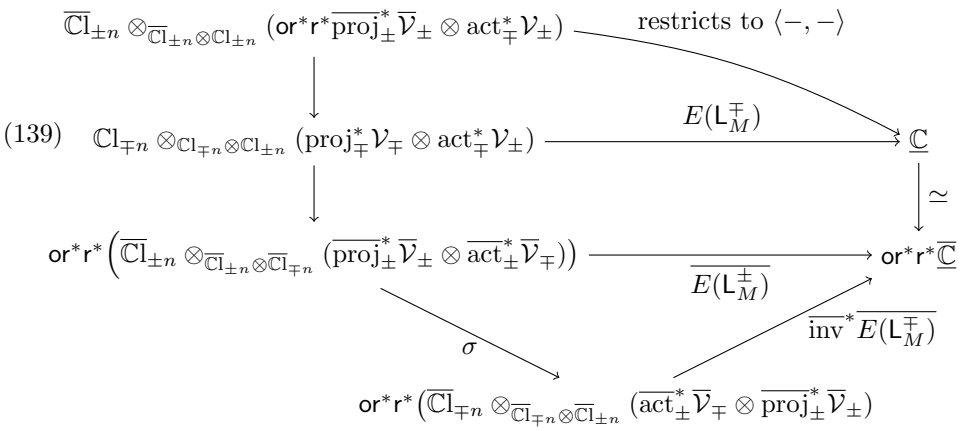
$$\langle -, - \rangle \colon \overline{V}_+ \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n} V_+ \to \underline{\mathbb{C}}, \qquad \langle \omega^* \cdot x, y \rangle = (-1)^{|\omega||x|} \langle x, \omega \cdot y \rangle,\ \omega \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n. \tag{137}$$

引理 5.14. 配对 (137) 在 $\mathbb{Z}/2$-分次意义下是厄米的

$$\langle x, y \rangle = (-1)^{|x||y|} \overline{\langle y, x \rangle}. \tag{138}$$

证明. 论证运用了与 [HST10 的推论 6.25], 第一部分相似的思路，不过此处的符号有所不同，因为我们讨论的是定向情形（而非 [HST10]中的非定向框架）。等式 (138) 可由图表的交换性得出

(139)



其中，$*$-结构在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上始终被隐式使用。如前所述，右上方的箭头根据定义限制为配对 $\langle -, - \rangle$。下方三角形的交换性由 (114) 得出。内部方块的交换性是反射正性数据上的条件 (134)。从左上方出发并沿下方三角形的箭头复合，得到 (138) 右侧，因此沿 (136) 对此图表作限制，即可得出所述公式。□

注 5.15。我们进一步说明上述论证与 [HST10，推论 6.25] 中符号差异的原因。首先，在 [HST10] 的非定向框架中，存在一个 $\mathbb{C}$-线性同构 $\mathcal{V}_\pm \simeq \mathsf{or}^*\mathcal{V}_\mp$。通过类似于 (137) 的定义，这会导出一个 $\mathbb{C}$-双线性配对。其次，$\mathsf{or}^2 = (-1)^\mathsf{F}$，而 $(\mathsf{r} \circ \mathsf{or}) \circ (\mathsf{r} \circ \mathsf{or}) = \mathsf{id}$。这个额外的因子 $(-1)^\mathsf{F}$ 导致 [HST10，推论 6.25]，中的配对在朴素意义下是对称的，而 (138) 则具有分次对称性。

关于在表述 $\mathbb{Z}/2$-分次厄米配对的正性时涉及的符号问题，参见 (167)。

定义 5.16。 带有反射正性数据的次数为 n 的 $1|1$-欧几里得场论称为反射正，如果配对 (137) 是超向量丛 V_+ 在 M 上的一个（分次）正定厄米配对。

注记 5.17。 对于反射正场论，(137) 蕴含 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 对 V_+ 的作用自动是相对于厄米内积的 $*$ 表示。

注记 5.18。 我们将定义 5.16 与 [HST10], 中正性的定义作一对比。在后者中， $1|1$-欧几里得配边范畴将反转定向映射视为等距变换。根据函子性，这个反转定向等距变换必须被映到一个 $\mathbb{C}$-线性映射。特别地， [HST10，定义 6.26 和 6.49] 中的正性条件并不等价于上文的反射正性；在后者中，定向反转对应于一个 $\mathbb{C}$-反线性映射。然而，在对场论施加实结构之后，按 [HST10] 意义下的正性蕴含上文意义下的实反射正结构。

6. Extracting geometric data from a representations of superpaths

本节考虑沿 §4 中构造的函子 ι 对 n 次场论作限制（11）。由此提取具有附加结构和性质的 Clifford 线性超联络。

6.1. 超李范畴的扭曲表示。

我们先给出超李范畴表示的一些一般定义。超李范畴、光滑函子和光滑自然变换所构成的严格 2-范畴见定义 B.9。本文中，向量丛均视为核 Fr´echet 空间上的局部自由层；我们不作有限秩假设。以下定义推广了李群胚表示的标准定义，例如参见 [Mac87，定义 1.7.1]。

定义 6.1。 超李范畴 C 的一个表示 由一个向量丛$\mathcal{V} \to \mathrm{Ob(C)}$以及一个向量丛映射 $\rho\colon \mathrm{s}^*\mathcal{V} \to \mathrm{t}^*\mathcal{V}$（定义在 Mor(C) 上）构成。该数据须满足条件：在 Ob(C) 上有 $\mathrm{u}^*\rho = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$，且在 $\mathrm{Mor(C)}^{\times_{\mathrm{Ob(C)}}}\mathrm{Mor(C)}$ 上有 $p_1^*\rho \circ p_2^*\rho = \mathrm{c}^*\rho$。两个表示之间的一个同构 $(\mathcal{V},\ \rho) \simeq (\mathcal{V}',\ \rho')$ 是一个定义在 Ob(C) $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ 上的向量丛同构，并且 ρ 和 ρ' 在 Mor(C) 上满足相容性条件。

例 6.2. 超流形 S 确定了一个超李范畴 C，其 Ob(C) $=$Mor(C) $= S$，即一个离散超李范畴。在这种情况下，C 的表示与 S上的一个向量丛所包含的数据相同。

例 6.3. 设 C 为一个只有单个对象且 $\mathrm{Mor(C)} = \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 的超李范畴，其中复合继承自 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 上的超半群结构。于是，C 作为超李范畴的表示等价于一个超半群表示 (24)。

定义 6.4. 超李范畴 C 的一个扭曲 $\mathscr{T}$由以下数据构成：

(1) $\mathscr{T}_0 \to$Ob(C) 是一个代数丛；(2) $\mathscr{T}_1 \to$Mor(C) 是一个由可逆 $\mathrm{t}^*\mathscr{T}_0$-$\mathrm{s}^*\mathscr{T}_0$-双模构成的丛；(3) 一个双模丛的同构 $\epsilon\colon \mathrm{u}^*\mathscr{T}_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}_0$，定义在 Ob(C) 上，其中 $\mathscr{T}_0$ 视为其自身上的双模；(4) 一个双模丛的映射 $\mu\colon p_1^*\mathscr{T}_1 \otimes_{p_2^*\mathrm{t}^*\mathscr{T}_0} p_2^*\mathscr{T}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{c}^*B\mathscr{T}_1$，定义在可复合态射对的纤维积上，即 $\mathrm{Mor(C)}^{\times_{\mathrm{Ob(C)}}}\mathrm{Mor(C)}$。

复数域-双模的映射还必须满足关于与单位元复合以及复合的结合律的相干条件（见引理 6.10）。扭曲之间的同构$\mathscr{T} \simeq \mathscr{T}'$ 是指 Ob(C) 上一个可逆的 $\mathscr{T}_0$-$\mathscr{T}_0'$ 双模 $\mathscr{B}$，以及 Mor(C) 上双模的一个同构 $\mathscr{T}_1 \otimes_{\mathrm{s}^*\mathscr{T}_0} \mathrm{s}^*\mathscr{B} \simeq \mathrm{t}^*\mathscr{B} \otimes_{\mathrm{t}^*\mathscr{T}_0'} \mathscr{T}_1'$，它满足 $\mathrm{Mor(C)}^{\times_{\mathrm{Ob(C)}}}$ Mor(C) 上的某个性质。

注 6.5。 当 C 是一个李群胚，且 $\mathscr{T}_0 \to$Ob(C) 的纤维是中心单代数时，上述定义就化为 Freed 对 C 上可逆代数丛的定义 [Fre12, Definition 1.59]。特别是，纤维丛为与开覆盖 [Fre12, Example 1.74]相关联的（ˇCech）群胚提供了扭曲的实例。商李群胚上的可逆代数丛确定了（等变）K理论的扭曲 [Fre12, Definition 1.78], 另见 Karoubi [Kar68] 和 Donovan–Karoubi [DK70]。以下所有扭曲的实例中，代数丛的纤维都是中心单代数。

注 6.6。 定义 6.4 的设置使得对于内部莫里田范畴 Alg，可以利用 [ST11, Definition 5.1] 得到引理 6.10。因此，定义 6.4 与超 Lie 范畴的等价并不兼容，参见注 B.11。对此有多种广为人知的解决方法。例如，可以定义一种新的扭曲版本：由超 Lie 范畴 $\mathsf{C}' \xrightarrow{\sim} \mathsf{C}$ 的一个等价以及一个按上述意义定义的 C' 扭曲构成；这本质上就是 [FHT11] 中拓扑群胚 K理论扭曲的定义。以下所有实例中的扭曲都符合定义 6.4 这一更朴素的框架。

定义 6.7。 给定超李范畴 C 上的一个扭曲，扭曲表示是

(1) $\eta\colon \mathcal{V} \to \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 一个左 $\mathscr{T}_0$-模丛；(2) $\rho\colon \mathscr{T}_1 \otimes_{\mathsf{s}^*\mathscr{T}_0} \mathsf{s}^*\mathcal{V} \to \mathsf{t}^*\mathcal{V}$ 一个定义在 Mor(C) 上的左 $\mathsf{t}^*\mathscr{T}_0$-模丛映射

并且要求模映射 (2) 与 C 中的复合相容。给定扭曲之间的一个同构，两个扭曲表示 $(\mathcal{V}, \rho) \simeq (\mathcal{V}', \rho')$ 之间的同构是一个定义在 Ob(C) 上的左模同构 $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{T}_0} \mathcal{V} \simeq \mathcal{V}'$，并满足定义在 Mor(C) 上的相容条件。

定义 6.8. 对于任意超李范畴 C 和超代数 A，定义扭曲 $\mathscr{T}_A$如下：它由 Ob(C) 上纤维为 A 的平凡代数丛，以及 Mor(C) 上纤维为 A 的平凡双模丛构成，其中后者视为自身上的双模。同构ϵ 为单位元，而 μ 由同构 $A \otimes_A A \simeq A$确定。我们注意到，Morita 等价代数会产生同构的扭曲。对于 $A = \mathbb{C}$，扭曲 $\mathscr{T}_{\mathbb{C}}$ 是平凡扭曲，我们也将其记作 $\mathbb{1}\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Alg}$。

这可由定义直接得出，参见 [ST11，引理 5.7]。

引理 6.9. 平凡扭曲的扭曲表示确定了一个 C 的表示，其含义见定义 6.1。

引理 6.10. 超李范畴 C 的一个扭曲等同于一个内部函子 $\mathscr{T}\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Alg}$，而一个 $\mathscr{T}$-扭曲表示等价于一个内部自然变换

$$\mathsf{C} \;\underset{\mathscr{T}}{\overset{\mathbb{1}}{\Rightarrow}}\; \mathrm{Alg}, \qquad E \Downarrow$$

其中 Alg 是内部莫里田范畴（见定义 B.20）。按照定义 6.4 的含义，扭曲之间的同构等价于 $\mathscr{T}, \mathscr{T}'\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Alg}$ 之间的内部自然同构。按照定义 6.7 的含义，扭曲表示之间的同构与内部自然变换 $E \simeq E'$ 之间的同构相同。

证明。 该结论可由展开定义直接得出。超李范畴可视为层叠中的内部范畴；见下文 §B.3。由于 Ob(C) 和 Mor(C) 是可表栈，内部函子 $\mathscr{T}$（见定义 B.7）的数据与按照定义 6.4 的含义的扭曲相同。内部自然变换 E（见定义 B.8）的数据等价于按照定义 6.7 的含义的扭曲表示（$\mathcal{V}, \rho$）。扭曲之间的同构以及扭曲表示之间的同构的相关陈述可类似得出。□

例 6.11. 令 C 为例 6.3 中的超李范畴。考虑相对于代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 的定义 6.8 中的扭曲。于是，C 的扭曲表示是一个克利福德线性超半群表示 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\mathcal{V})$，其中 $\mathcal{V}$ 是一个 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-模。

6.2. **实表示**。引理 6.10 使我们能够将 Stolz 和 Teichner 关于实表示的概念（例如，[HST10, §6.8]）引入超李范畴的情形。这将推广 Atiyah 的实向量丛，见下文例 6.16。首先，我们注意到，超流形上的共轭函子（见定义 A.18）在超李范畴的严格 2-范畴上诱导出一个严格对合。我们采用以下记号和术语来表示该对合的取值。

定义 6.12。对于超李范畴 C，其共轭超李范畴（记作 C）定义为将超流形上的共轭函子作用于 C 的对象、态射和结构映射而得到的范畴。类似地，对于超李范畴之间的光滑函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，令 $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ 表示共轭范畴之间的共轭光滑函子；对于光滑自然变换 $\eta\colon F \Rightarrow G$，令 $\eta\colon F \Rightarrow G$ 表示共轭光滑函子之间的共轭光滑自然变换。

下述内容是内于层叠的范畴上的实结构的一个特例，参见定义 B.12。

定义 6.13. 超李范畴 C 上的 实结构是一个光滑函子 $\mathscr{R}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 以及一个光滑自然同构 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow \mathscr{R} \circ \mathscr{R}$。具有实结构的超李范畴称为实超李范畴，记作 $(\mathsf{C}, \mathscr{R}, \eta)$。

下文示例中的自然同构 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow \mathscr{R} \circ \mathscr{R}$ 通常是平凡的，因此我们常在记号中省略它。超李范畴的实（扭曲）表示，随后定义为关于 $\mathbb{Z}/2$ 作用的 $\mathbb{Z}/2$-等变性数据；该作用由实结构给出，而在 Alg 上的 $\mathbb{Z}/2$ 作用则由向量丛的复共轭给出。以下是定义 B.13 和 B.14 的一个特例。

定义 6.14。设 C 是一个具有实结构 $\mathscr{R}$ 的超李范畴，扭曲 $\mathscr{T}$ 的 实结构 是一个内部自然同构 $\phi_{\mathscr{T}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{C} & \xrightarrow{\quad\mathscr{T}\quad} & \mathsf{Alg} \\ {\scriptstyle\mathscr{R}}\downarrow & \phi_{\mathscr{T}} & \downarrow{\scriptstyle(\overline{\ })} \\ \overline{\mathsf{C}} & \xrightarrow[\quad\overline{\mathscr{T}}\quad]{} & \mathsf{Alg}, \end{array}$$

以及内部自然变换 $\phi^2_{\mathscr{T}} \circ \eta_{\mathsf{C}} \simeq \eta_{\mathsf{Alg}} = \mathrm{id}$ 的一个同构 $\beta_{\mathscr{T}}$，见 (185)。数据 $(\mathscr{T}, \phi_{\mathscr{T}}, \beta_{\mathscr{T}})$ 是一个 ***Real*** 扭曲。$\mathscr{T}$-扭曲表示 E 的 实结构 是 $\mathscr{T}$ 的一个实结构，以及内部自然变换 $\phi_{\mathscr{T}} \circ E \simeq E \circ \phi_{\mathbb{1}}$ 之间的一个同构；该同构借助内部函子 1 的典范实结构与 $\beta_{\mathscr{T}}$ 相容。

引理 6.15。对于一个实超李范畴 $(\mathsf{C}, \mathscr{R})$ 和扭曲 $\mathscr{T}$，$\mathscr{T}$ 上的实结构确定如下数据

(i) Ob(C) 上的一个可逆 $\mathscr{T}_0$-$\mathscr{R}_0{}^*\mathscr{T}_0$ 双模丛 $N\overline{\to}$，以及一个同构

$$N \otimes_{\mathscr{T}_0} \overline{\mathscr{R}}_0{}^* \overline{N} \simeq \mathscr{T}_0 \tag{140}$$

双模丛之间的一个同构，定义在 Ob(C) 上；

（ii）Mor(C) 上 $\mathsf{t}^*\mathscr{T}_0$-$\mathsf{s}^*\mathscr{R}_0^*\mathscr{T}_0$ 双模丛的一个同构

$$\mathscr{T}_1 \otimes_{\mathsf{s}^*\mathscr{T}_0} \mathsf{s}^* N \xrightarrow{\sim} \mathsf{t}^* N \otimes_{\mathsf{t}^*\mathscr{R}_0^*\overline{\mathscr{T}_0}} \mathscr{R}_1^* \overline{\mathscr{T}_1}$$

满足 $\mathsf{Mor(C)}^{\times_{\mathsf{Ob(C)}}}$ Mor(C) 上的相容条件。

给定一个 Real 扭曲，一个 Real 扭曲表示确定了额外的数据

（iii）Ob(C) 上左 $\mathscr{T}_0$-模 $N \otimes_{\mathscr{R}_0^*\mathscr{T}_0} \mathscr{R}_0^* \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ 的一个同构

满足以下性质：由上述数据所定义的 Mor(C) 上 $\mathsf{t}^*\overline{\mathscr{R}_0}\mathscr{T}_0$-$\mathsf{s}^*\mathscr{T}_0$ 双模丛图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_1 \otimes_{\mathsf{s}^*\mathscr{T}_0} \mathsf{s}^*(N \otimes_{\mathscr{R}_0^*\overline{\mathscr{T}_0}} \mathscr{R}_0^* \overline{\mathcal{V}}) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id} \otimes (\mathrm{iii})\quad} & \mathscr{T}_1 \otimes_{\mathsf{s}^*\mathscr{T}_0} \mathsf{s}^* \mathcal{V} \\ {\scriptstyle (\mathrm{ii}) \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathsf{t}^* N \otimes_{\mathsf{t}^*\mathscr{R}_0^*\overline{\mathscr{T}_0}} \mathscr{R}_1^*(\overline{\mathscr{T}_1} \otimes_{\mathsf{s}^*\overline{\mathscr{T}_0}} \mathsf{s}^* \overline{\mathcal{V}}) & & \mathsf{t}^* \mathcal{V} \\ & {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \mathscr{R}_1^* \rho}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \mathsf{t}^*(\mathrm{iii})} & \\ & \mathsf{t}^*(N \otimes_{\mathscr{R}_0^*\overline{\mathscr{T}_0}} \mathscr{R}_0^* \overline{\mathcal{V}}) & \end{array} \tag{141}$$

映射如图所示。

证明。 根据定义 B.8，内部自然变换 $\phi_{\mathscr{T}}$的第一项数据是层叠之间的一个映射

$$N\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg}),$$

根据米田引理，这等价于超流形 Ob(C) 上的一个双模丛。该双模的源是代数丛 $\mathscr{R}_0^*\mathscr{T}_0$，目标是 $\mathscr{T}_0$。由于内部自然变换可逆，因此此双模丛也必须可逆。同构 (140) 即为数据 $\beta_{\mathscr{T}}$。这给出了引理第 (i) 部分中的数据。第 (ii) 部分给出了 (183) 中记为 ρ 的内部自然变换的数据。数据 (i) 和 (ii) 上的条件，同样可由 Mor(C) 和 Mor(C)$^{\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}}$ Mor(C) 上内部自然变换的定义得出。

内部自然变换之间同构的数据，是其对应的叠映射 Ob(C) → Mor(Alg) 之间的同构；参见定义 B.8。在这种情况下，这恰好就是数据 (iii)。图表 (141) 是相容性条件，确保叠映射之间的这个同构确定了内部自然变换之间的同构。□

例 6.16。 对于一个视为超李范畴的普通流形 X，对合$\alpha\colon X \to X$ 通过将 $\mathscr{R}$ 定义为复合，从而在 X 上确定一个实结构

$$X \xrightarrow{\alpha} X \simeq \overline{X}$$

这是由光滑函数的复共轭所诱导的 X 上的典范实结构。取带有其典范实结构的平凡扭曲，则 (X,α) 的实表示与 Atiyah 意义下的实向量丛相同 [Ati66]。

6.3. **次数 n 超路径表示**。 现在我们专门研究 M 中近乎常值超路径的超李范畴 $\mathsf{sPath}_0(M)$。

定义 6.17。 超李范畴 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数 n 扭曲 是对象上的平凡代数丛的余积，

$$\underline{\mathbb{Cl}}_n \coprod \underline{\mathbb{Cl}}_{-n} \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) = \mathrm{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M))$$

以及态射上的平凡双模丛的余积

$$\underline{\mathbb{Cl}}_n \coprod \underline{\mathbb{Cl}}_{-n} \to \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) = \mathrm{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)).$$

该扭曲的其余数据由单位元同构 $\epsilon = \mathsf{id}\colon \mathbb{Cl}_{\pm n} \to \mathbb{Cl}_{\pm n}$ 以及克利福德双模的典范同构 $\mu\colon \mathbb{Cl}_{\pm n} \otimes_{\mathbb{Cl}_{\pm n}} \mathbb{Cl}_{\pm n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Cl}_{\pm n}$给出（其中 ϵ 和 μ 采用定义 6.4 中的记号）。此处所需的性质显然成立。

定义 6.18。 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数 n 表示 是关于次数 n 扭曲的扭曲表示。

命题 6.19。 假设假设 5.9 成立，则沿 (11) 限制次数 n 场论可确定 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数 n 表示。

证明。 由推论 5.11 可立即得到限制在 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的对象和态射上的取值；再将其中的数据进一步限制到子空间

$$\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{1|1}, M), \tag{142}$$

其中包括沿着通过商因子分解的 S 映射族

$$S \times \mathbb{R}^{1|1} \to (S \times \mathbb{R}^{1|1})/\mathbb{R} \simeq S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M.$$

与源、目标和单位元的相容性显而易见；与复合的相容性则源于沿 (142) 限制 (111)。□

Pro位置 6.20。一个 sPath$_0(M)$ 的 n 次表示确定了 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-线性超
在超向量丛上的
连接 $\mathbb{A}_\pm$。

证明。根据定义 6.7，令 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_+ \coprod \mathcal{V}_-$ 表示该表示在对象上的取值，其中 $\mathcal{V}_\pm \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 是一个由 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模构成的丛，而 $\mathrm{Ob}(\mathrm{sPath}_0(M)) = \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \coprod \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$。利用引理 A.20，我们作如下识别：

$$\Gamma(\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M); \mathcal{V}_\pm) \simeq \Omega^\bullet(M; V_\pm), \qquad V_\pm = \mathcal{V}_\pm|_M \tag{143}$$

对于沿典范嵌入 $M \hookrightarrow \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$限制得到的向量丛 $V_\pm \to M$。

定义 6.7 中左 A-模的映射在此情形下对应于 $\rho_\pm$ 由$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛构成的映射

$$\rho_+ \colon \mathrm{proj}_+^* \mathcal{V}_+ \to \mathrm{act}_+^* \mathcal{V}_+ \text{ over } \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$$
$$\rho_- \colon \mathrm{proj}_-^* \mathcal{V}_- \to \mathrm{act}_-^* \mathcal{V}_- \text{ over } \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$$

对于通过限制（90）得到的投影和作用映射。利用（143）并应用引理 3.18，$\rho_\pm$ 是 $\Omega^\bullet(M)$-模之间的映射，其中源和目标上的作用是沿投影或（60）的限制拉回得到的。由此得到如下描述

$$\rho_\pm(t, \theta, \alpha v) = (\alpha - \theta d\alpha)\rho_\pm(t, \theta, v), \qquad \alpha \in \Omega^\bullet(M),\ v \in \Omega^\bullet(M; V_\pm) \tag{144}$$

对于 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}$ 上的标准坐标 t 和 θ。与复合相容性使 ρ_+ 和 ρ_- 成为超半群表示，因为 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}$ 中的乘法对应于 sPath$_0(M)$ 中的复合。

对（144）按奇变量 $-\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0})$ 作泰勒展开，定义

$$\rho_\pm(t, \theta, -) = A_\pm(t) - \theta B_\pm(t) \tag{145}$$

其中，$A_\pm(t) : \Omega^\bullet(M; V_\pm) \to \Omega^\bullet(M; V_\pm)$ 是偶映射，$B_\pm(t) : \Omega^\bullet(M; V_\pm) \to \Omega^\bullet(M; V_\pm)$ 是奇映射，且二者都与克利福德作用交换。定义

$$\mathbb{A}_\pm := B_\pm(0) \colon \Omega^\bullet(M; V_\pm) \to \Omega^\bullet(M; V_\pm). \tag{146}$$

由于 $B_\pm(t)$ 是奇的，因此 $\mathbb{A}_\pm$ 也是奇的。此外，由于 $B_\pm(t)$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-线性的，因此 $\mathbb{A}_\pm$ 也是如此。最后，结合 (144) 和 (145) 得到下面这组方程

$$A_\pm(t)(\alpha v) = \alpha A_\pm(t)(v), \qquad B_\pm(t)(\alpha v) = d\alpha A_\pm(t)(v) + (-1)^{|\alpha|}\alpha B_\pm(t)(v).$$

利用 $A_\pm(0) = \mathrm{id}_{V_\pm}$，第二个方程在 $t = 0$ 处的取值就是超联络 $\mathbb{A}_\pm$ 的莱布尼茨法则。□

在上述平移下，重整化群流对应于指标理论中的一种标准结构。

定义 6.21 ([BGV92，第 267] 页)。通过 $\mathbb{R}_{>0}$-作用 (13) 定义 Clifford 线性超联络的*(Getzler)* 重标度。

重整化群在 1|1-欧几里得配边上的作用由引理 4.22 计算，并通过 (108) 限制到近常值超路径范畴。

命题 6.22。沿着 (11) 限制一个次数为 n 的场论中的重整化群流，即可确定命题 6.20 中提取的超联络的重标度。

证明。利用（108），我们可以通过重整化群在 sPath$_0(M)$ 上的作用进行计算。该作用已在（68）中计算。特别地，我们有一个同构

$$\mathcal{V}_\pm \xrightarrow{\sim} \mathsf{RG}_\mu^* \mathcal{V}_\pm, \qquad s \mapsto \mu^{\deg/2} s, \qquad s \in \Gamma(\mathcal{V}_\pm)$$

将源和目标视为 (143) 中的 $\Omega^\bullet(M)$-模，其中目标模结构由沿重整化群作用拉回而扭曲。因此，在上述识别下，sPath$_0(M)$ 的表示 $\rho_\pm(t, \theta)$ 经 RG_μ 作用后映为 $\mu^{-\deg/2}\rho(\mu^2 t, \mu\theta)\mu^{\deg/2}$。根据表示 $\rho_\pm(t, \theta)$ 定义超联络 $\mathbb{A}_+$ 和 $\mathbb{A}_-$ 的定义 (146)，可得公式 (13)。□

6.4. 次数 n 带有配对的表示。 映射 (102) 的限制决定

$$\mathrm{inv}\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)\to \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M),\quad (t,\theta,\phi)\mapsto(-t,-\theta,\phi\circ T_{t,\theta}^{-1}).$$

引理 6.23。 ρ_- 沿 inv 的拉回给出一个向量丛映射

$$\mathrm{inv}^*\rho_-\colon \mathrm{act}_+^*\mathcal{V}_-\to \mathrm{proj}_+^*\mathcal{V}_-$$

在 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)$ 上与 $\mathbb{Cl}_{-n}$-作用交换。

证明。 我们注意到这些三角形是交换的,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) & \xrightarrow{\mathrm{inv}} & \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) \\ & {\scriptstyle \mathrm{act}_+}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{proj}_-} & \\ & \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) & \xrightarrow{\mathrm{inv}} & \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) \\ & {\scriptstyle \mathrm{proj}_+}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{act}_-} & \\ & \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M) & \end{array}$$

利用

$$\mathrm{act}_\pm(t,\theta,\phi)=\phi\circ T_{t,\theta}^{-1},\qquad \mathrm{proj}_\pm(t,\theta,\phi)=\phi.$$

因此，我们有

$$\mathrm{act}_+^*\mathcal{V}_-\simeq \mathrm{inv}^*\mathrm{proj}_-^*\mathcal{V}_-\xrightarrow{\mathrm{inv}^*\rho_-}\mathrm{inv}^*\mathrm{act}_-^*\mathcal{V}_-\simeq \mathrm{proj}_+\mathcal{V}_-$$

所以 $\mathrm{inv}^*\rho_-$ 唯一确定了一个具有所述源和目标的映射。 □

定义 6.24。 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示上的配对是一个位于 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)$ 上的向量丛映射

$$L\colon \mathbb{Cl}_n\otimes_{\mathbb{Cl}_{-n}\otimes\mathbb{Cl}_n}(\mathcal{V}_-\otimes\mathcal{V}_+)\to\underline{\mathbb{C}} \tag{147}$$

并且满足以下性质：位于 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}\times\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)$ 上的向量丛图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Cl}_n\otimes_{\mathbb{Cl}_{-n}\otimes\mathbb{Cl}_n}(\mathrm{act}_+^*\mathcal{V}_-\otimes\mathrm{proj}_+^*\mathcal{V}_+) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\rho_+} & \mathrm{act}_+^*(\mathbb{Cl}_n\otimes_{\mathbb{Cl}_{-n}\otimes\mathbb{Cl}_n}(\mathcal{V}_-\otimes\mathcal{V}_+)) \\ {\scriptstyle \mathrm{inv}^*\rho_-\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{act}_+^*L} \\ \mathrm{proj}_+^*(\mathbb{Cl}_n\otimes_{\mathbb{Cl}_{-n}\otimes\mathbb{Cl}_n}(\mathcal{V}_-\otimes\mathcal{V}_+)) & \xrightarrow[\mathrm{proj}_+^*L]{} & \underline{\mathbb{C}}. \end{array} \tag{148}$$

引理 6.25。 假设假设 5.9 成立，则沿 (11) 限制一个次数为 n 的场论，会为所得的 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示赋予一个配对。

证明。 数据 (147) 是将 (L_M^-) E 沿 (142) 限制后，由推论 5.11 得到的。性质 (148) 则由命题 5.3 中的 (112) 得出。 □

命题 6.26。 给定 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示上的配对，命题 6.20 中的 Clifford 线性超联络 $\mathbb{A}_+$，$\mathbb{A}_-$ 满足伴随公式,

$$L(\mathbb{A}_-v,w)+(-1)^{|v|}L(v,\mathbb{A}_+w)=dL(v,w). \tag{149}$$

证明。 利用 $\mathrm{proj}_+^*\mathcal{V}_\pm$ 和 $\mathrm{act}_+^*\mathcal{V}_\pm$ 关于 $\Omega^\bullet(M;\,C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}))$ 与 $\Omega^\bullet(M;\,C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}))$ 上的模的描述（见引理 3.20），以及命题 6.20 中的记号，我们计算得

$$\begin{aligned} (\mathrm{proj}_+^*L)((\mathrm{inv}^*\rho_-)(t,\theta,v),w) &= L(\rho_-(-t,-\theta,v),w)=L((A_-(-t)+\theta B_-(-t))v,w)\\ &= (\mathrm{act}_+^*L)(v,\rho_+(t,\theta,w))\\ &= L(v,\rho_+(t,\theta,w)\rangle+\theta d\langle v,\rho_+(t,\theta,w))\\ &= L(v,(A_+(t)-\theta B_+(t))w\rangle+\theta d\langle v,(A_+(t)-\theta B_+(t))w), \end{aligned}$$

其中，上述等式成立于 $\Omega^\bullet(M;\, C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}))$ 的元素之间。汇集涉及 θ 的项，令 $t=0$，并利用超联络 $\mathbb{A}_+$ 和 $\mathbb{A}_-$ 的定义，即得所述结果。□

6.5. **反射结构与实结构**。利用引理 3.22 中的函子 R 和 Or，$(\mathsf{sPath}_0(M),\ \mathsf{R}\circ\mathsf{Or})$ 是定义 6.13 意义下的实超李范畴，其中 $(\mathsf{R}\circ\mathsf{Or})\circ(\mathsf{R}\circ\mathsf{Or}) = \mathrm{id}$（因此 η 是单位自然同构）。

定义 6.27。次数 n 扭曲的反射结构 是相对于 $(\mathsf{sPath}_0(M),\ \mathsf{R}\circ\mathsf{Or})$ 的该扭曲的实结构。

关于 $*$-超代数的定义，参见 §A.2。

引理 6.28。$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$ 上的 $*$-超代数结构决定了次数 n 扭曲的反射结构。

证明。根据定义 6.14 和引理 6.15，实结构是 $\mathrm{Ob}(\mathsf{sPath}_0(M)) \simeq \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M) \coprod \overline{\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},\ M)}$ 上一个可逆的 $\mathscr{T}_0$–$\mathsf{Or}_0^*\mathsf{R}_0^*\mathscr{T}_0$-双模，并附带对合数据。对于次数 n 扭曲，只需考虑 $M = \mathsf{pt}$ 的情形。这样的可逆双模可以由代数同构构造得到

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n} \simeq \overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_{\mp n} = \overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}^{\mathsf{op}}_{\pm n} \tag{150}$$

满足对合性质。事实上，上述内容使我们可以将 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 视为一个 $\mathbb{C}\mathrm{l}^{\mathsf{op}}_{\pm n}$-$\mathbb{C}\mathrm{l}_n$双模。对合代数同构 (150) 恰好就是一个 $*$-超代数结构的数据，由此证明了引理。□

此后，我们固定一个由以下 $*$-超代数结构在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$上给出的、对应于次数 n 扭曲的反射结构。

定义 6.29。在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上定义一个 $*$-超代数结构，它由对生成元上映射的 $\mathbb{C}$-反线性延拓给出，

$$f_j^* = -if_j, \qquad e_j^* = ie_j. \tag{151}$$

这里使用 (33) 中克利福德代数生成元的记号。

定义 6.30。假设给定 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的一个次数为 n 的表示 E，以及一个配对 L。对于由 (151) 固定的次数为 n 的扭曲所对应的反射结构，在 $(E,\ L)$ 上定义一个反射结构，使其成为一个实扭曲表示（见定义 6.14），并满足以下附加性质：该配对，

$$\langle -,-\rangle\colon \mathsf{Or}_0^*\mathsf{R}_0^*\overline{\mathcal{V}}_+ \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \mathcal{V}_+ \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\overline{\mathbb{C}\mathrm{l}}_n \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\mathsf{Or}_0^*\mathsf{R}_0^*\overline{\mathcal{V}}_+ \otimes \mathcal{V}_+) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\mathcal{V}_- \otimes \mathcal{V}_+) \xrightarrow{L} \underline{\mathbb{C}}$$

在 $\mathbb{Z}/2$ 分次意义下是厄米的，其中上述第二个同构用到了表示上的实结构。带有反射结构的 n 度表示若上述配对沿 $M \subset \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 限制后成为正定配对（同样是在 $\mathbb{Z}/2$ 分次意义下），则称其为反射正 的。

命题 6.31. 假设假设 5.9，沿 (11) 限制一个 n, $1|1$-欧几里得场论上的反射结构，可确定 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的一个带有反射结构的 n 度表示。沿 (11) 限制一个 n 反射正 $1|1$-欧几里得场论，可确定 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的一个 n 度反射正表示。

证明。假设 5.9 指出，次数为 n 的扭曲 $\mathscr{T}^{\otimes n}$： $1|1$-$\mathsf{EBord}(M) \to \mathsf{Alg}$ 的反射结构源自 $*$-超代数结构 on $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$。进一步考察命题 5.4 和推论 5.11 中的数据可知，沿 (142) 的反射结构限制显然确定了一个实次数 n 表示，它对应于由 $\mathsf{R}\circ\mathsf{Or}$ 给出的 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 上的实结构。定义 6.30 中配对的对称性由引理 5.14 推出。最后，我们注意到，定义 5.16 中的正性条件等价于定义 6.30 中的正性条件。□

命题 6.32。 与次数为 n 的反射正表示 $\mathbb{A}_+$ associatedwith 的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性超联络，相对于定义 6.30 中的配对是自伴的。

证明。 反射结构给出 Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上向量丛的同构，

$$\mathcal{V}_\mp \xrightarrow{\sim} \mathsf{Or}_0^*\mathsf{R}_0^*\overline{\mathcal{V}}_\pm. \tag{152}$$

相对于这些同构，我们有以下恒等式

$$\rho_\pm(t,\theta) = (\mathsf{or}^*\mathsf{r}^*\overline{\rho}_\mp)(t,\theta) = i^{\deg}\overline{\rho}_\mp(-t, i\theta).$$

对上述表达式进行泰勒展开（如同（145）中所做），我们发现超联络 $\mathbb{A}_-$ 在同构（152）下被映至 $-i^{\overline{\deg+1}}\mathbb{A}_+$。于是，由伴随公式（149）和厄米配对（138）的定义，我们得到 $\mathbb{A}_+$的所需自伴性。□

我们还可以考虑 sPath$_0(M)$ 的实次数 n 表示，其实结构由 R 给出。这引出了与反射结构类似的讨论。

引理 6.33。 对于实超李范畴 $(\mathrm{sPath}_0(M), \mathsf{R})$，次数为 n 的扭曲的实结构由 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$上的实结构确定。

定义 6.34. 定义反线性对合 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n \to \mathbb{C}\mathrm{l}_n$： 令 (33) 中克利福德代数的生成元为实，并将其扩张为一个 $\mathbb{C}$-反线性映射。

定义 6.35. 设给定一个 sPath$_0(M)$ 的次数为 n 的表示 E，并带有配对 L。对于由定义 6.34 固定的次数为 n 的扭曲的实结构，将一个实的、反射正的次数为 n 的 ***sPath*** 表示 sPath$_0(M)$定义为：相对于 R（按定义 6.14 的意义）作用在 E 上的实结构、作用在 E 上且满足反射正性条件的反射结构，以及配对满足实性条件这一附加条件

$$\langle x, y\rangle = (-1)^{|\overline{x}|}\mathsf{R}_0^*\overline{\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle} \tag{153}$$

对于 $x,\ y \in \Gamma(V_+)$，以及 $x,\ y$它们在同构 $V_+ \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}_0^*V_+$ 下的像。

命题 6.36. 假设 5.9 成立，则实的、反射正的、次数为 n, $1|1$ 的欧几里得场论沿 (11) 的限制，确定了一个 sPath$_0(M)$ 的实的、反射正的、次数为 n 的表示。

证明。 sPath$_0(M)$ 上的次数为 n 的表示 E 的实结构数据显然。剩下需要检查配对条件。根据 HST10 定理 6.48], 的证明中的论证，这一条件成立；其中 (65) 中反射与实结构之间的关系引入了符号 $(-1)^{|x|}$。 □

命题 6.37。 一个实的、反射正的次数为 n 的 sPath$_0(M)$ 表示赋予向量丛 $V = V_+$ 一个实结构，使得配对 (153) 来自底层实向量丛上的普通（即非 $\mathbb{Z}/2$-分次）实配对，并且自伴超联络 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_+$ 是实超联络。

证明。 相对于对合 R，一个次数为 n 的表示的实结构给出了 Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{\pm n}$-模丛之间的同构，

$$\mathcal{V}_\pm \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}_0^*\overline{\mathcal{V}}_\pm, \tag{154}$$

相对于在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上选定的实结构。这给出了 $V_+, V_- \to M$ 上的普通实结构。超半群表示满足恒等式

$$\rho_\pm(t,\theta) = (\mathsf{R}_1^*\overline{\rho}_\pm)(t,\theta). \tag{155}$$

对上述表达式进行泰勒展开（如式（145）所示），得到的超联络是实的。条件（153）意味着：偶截面之间的配对为实数，偶截面与奇截面之间的配对为零，而

奇截面之间的配对为纯虚数。超希尔伯特空间与 $\mathbb{Z}/2$-分次希尔伯特空间之间的平移为（参见 [DEF+99, 第 91] 页）

$$(v,w) := \begin{cases} \langle v,w\rangle & v,w \in \Gamma(V_+)^{\mathrm{ev}} \\ i^{-1}\langle v,w\rangle & v,w \in \Gamma(V_+)^{\mathrm{odd}} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{156}$$

因此我们看到，条件 (153) 按通常意义给出了一个实配对 (156)。 □

6.6. **迹类表示**。 我们回顾定义 3.26 中的超欧几里得环路空间 $\mathcal{L}^{1|1}(M)$，以及其上的 $\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 作用。我们注意到，环空间及其等变结构关于流形 M 是自然的，因此有一个栈映射

$$\mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2) \to \mathcal{L}^{1|1}(\mathrm{pt})/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{R}^{1|1}_{>0}/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2). \tag{157}$$

定义 6.38。 *Pfaffian* 线丛 $\mathsf{Pf} \to \mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 是沿 (157) 拉回由下式分类的奇线丛所得：

$$\mathbb{R}^{1|1}_{>0}/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p} \mathrm{pt}/\!\!/\mathbb{Z}/2 = \mathrm{pt}/\!\!/\{\pm 1\} \to \mathrm{pt}/\!\!/\mathbb{C}^\times$$

其中 p 由投影 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \to \mathrm{pt}$ 和 $\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$确定，并且我们在 $\Pi\mathbb{C}$（pt 上的平凡奇线丛）上取标准的 $\mathbb{C}^\times$ 作用。对于由光滑流形的映射 $M \to N$ 诱导的栈映射 $\mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2) \to \mathcal{L}^{1|1}(N)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2)$，Pfaffian 线丛具有自然性。

注6.39。 将商堆栈 $\mathbb{R}_{>0}/\!\!/\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 与带周期自旋结构的度量圆所成的栈等同，其中 $\mathbb{Z}/2$ 通过对旋量丛施加自旋翻转而作用，$\mathbb{R}$ 则通过旋转圆而作用。所选自旋结构下圆上的狄拉克算子给出一个定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2$-等变算子族。定义 6.38 中的术语源于这样一个事实：沿典范嵌入$\mathbb{R}_{>0}/\!\!/\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{R}^{1|1}_{>0}/\!\!/\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$对 Pf 作限制，所得正是狄拉克算子族的 Pfaffian 线丛。Stolz 和 Teichner 在其关于欧几里得配边范畴中不含超对称性的次数 n 扭曲的提纲中提到了这个 Pfaffian 线丛；参见 [ST11, §5.3]。

命题 6.40。 对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\mathsf{Pf}^{\otimes n}$ 表示 Pfaffian 线丛在 $\mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2)$ 上的 n 阶张量幂。截面与以下对象一一对应：

$$\Gamma(\mathcal{L}_0^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2); \mathsf{Pf}^{\otimes n}) \simeq \left\{ Z, Z_\ell \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})) \mid \begin{array}{c} dZ = 0,\ \partial_\ell Z = dZ_\ell \\ \deg(Z) = n \mod 2, \\ \deg(Z_\ell) = n-1 \mod 2 \end{array} \right\}.$$

证明。 在以下识别下

$$C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{>0} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{>0}))$$

$\mathsf{Pf}^{\otimes n}$ 的截面可以识别为取值于 $C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}_{>0})$ 的微分形式，并满足关于 $\mathbb{R}^{1|1} \rtimes \mathbb{Z}/2$ 作用的等变性条件。在 $\mathbb{R}^{1|1}_{>0}$ 上选取坐标 $(\ell,\ \lambda)$，并对奇变量 λ 中的截面 s 作泰勒展开，考虑如下参数化：

$$s = \ell^{\deg/2} Z + 2i\lambda\ell^{(\deg+1)/2} Z_\ell, \qquad Z, Z_\ell \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})).$$

根据 [BE23a, 命题 1.4]，$\mathbb{R}^{1|1}$-不变性等价于条件 $dZ = 0$ 和 $\partial_\ell Z = dZ_\ell$。$(Z,\ Z_\ell)$ 上的次数条件来自关于 $\mathbb{Z}/2$-作用的等变性；该作用在微分形式上分别通过 $(-1)^{\deg}$ 和 $(\ell,\ \lambda) \mapsto (\ell,\ \pm\lambda)$ 作用。结论得证。□

定义（33）中的记号所表示的 n阶克利福德代数中的元素 Γ_n

$$\Gamma_n := \begin{cases} 2^{-n/2} f_1 f_2 \dots f_n & n \geq 0 \\ 2^{n/2} e_1 e_2 \dots e_n & n < 0 \end{cases} \tag{158}$$

。 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性自同态 $T\colon V \to V$的 ***Clifford*** 超迹 为

$$\mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(T) := \mathsf{sTr}(\Gamma_n \circ T),$$

见下文 §A.4。

定义 6.41. $\mathsf{sPath}_0(M)$的迹类表示，次数为 n，是指一个次数为 n的 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 表示 E 以及一个截面 $(Z(E)\ Z(E)_\ell) \in \Gamma(\mathcal{L}_0^{1|1}(M); \mathsf{Pf}^{\otimes -n})$，满足以下性质

$$(159)\quad Z(E) = \ell^{-\deg/2}\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\rho_+|_{\mathbb{R}_{>0}\times \text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},M)}) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times \text{映射}(\mathbb{R}^{0|1},M)) \simeq \Omega^\bullet(M; \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$$

其中 $\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}$ 表示 Clifford 超迹。

引理 6.42. 对于一个迹类、次数为 n 的表示，$Z(E) \in \Omega^\bullet_{\mathrm{cl}}(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$ 是一个闭微分形式，其次数与 n 的奇偶性相同（即次数为偶数或奇数）。当 E 是实场论时，$Z(E)$ 是实微分形式。当 E 为实且反射正时，$Z(E)$ 为实形式，且仅包含模 4 等于 n 的次数。

证明. 首先注意，元素 $\Gamma_n \in \mathsf{Cl}_n \subset \mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 的奇偶性与 n 的奇偶性相同，因此自同态 $\Gamma_n \circ \rho_+$ 的奇偶性也等于 n 模 2。由此可知，对于任何次数为 n 且迹 (159) 有定义的表示，所得函数的奇偶性与此奇偶性相同。实结构保持 $\Gamma_n \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 不变，而实性条件 (155) 意味着 $Z(E)$ 等于其共轭。由于 $\Gamma_n \in \mathsf{Cl}_n$ 确定了一个实平凡化（见 (158)），这相当于要求，对于 $\mathbb{C}$ 值微分形式上的标准共轭作用，$Z(E) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)) \simeq \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0}))$ 是实微分形式。当 E 同时具有反射正性时，我们注意到 $\Gamma_n \mapsto i^n\Gamma_n$ 在 $*$- 超代数结构 (151) 下成立。这对 $Z(E)$ 施加了额外的不变性条件，意味着它取值于 4 周期微分形式。□

引理 6.43. 假设假设 5.9，给定 $\mathbb{R}^n$ 上的一个定向，即可确定 $\mathsf{Pf}^{\otimes n} \simeq \mathscr{T}^{\otimes n}(\mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1}\rtimes \mathbb{Z}/2))$ 与 $\mathcal{L}^{1|1}(M)/\!\!/(\mathbb{R}^{1|1}\rtimes\mathbb{Z}/2)$ 上次数为 n 的扭曲的值之间的一个同构。特别地，一个次数为 n 的场论确定了 $\mathsf{Pf}^{\otimes n}$ 的对偶的一个截面。

证明. 只需取 $M = \mathrm{pt}$。于是，扭曲在 $\mathcal{L}^{1|1}(\mathrm{pt})$ 上的值是其纤维为

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_n/[\mathbb{C}\mathrm{l}_n, \mathbb{C}\mathrm{l}_n].$$

一个定向的选择 $\Gamma_n \in \Lambda^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_n/[\mathbb{C}\mathrm{l}_n, \mathbb{C}\mathrm{l}_n]$ 将这个线丛平凡化，因此作出此选择后，只需计算其等变结构。根据假设 5.9，$\mathbb{R}^{1|1}$-作用是平凡的，而 $\mathbb{Z}/2$-作用由奇偶性给出。这就完成了证明。□

命题 6.44. 假设满足假设 5.9，沿 (11) 限制一个度数为 n 的场论，可确定一个迹类的、度数为 n 的 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 表示。

证明. 论证与 [ST11，引理 3.20] 类似。按照 [ST12], 的术语，复合的像中的态射

$$(160)\qquad \mathbb{R}_{>0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \hookrightarrow \mathrm{Mor}(\mathsf{sPath}_0(M)) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$$

是厚的：这由命题 4.15 得出。厚态射的范畴迹是幺半群单位的自同态。命题 4.18 表明，这个范畴迹是复合的像

$$\mathbb{R}_{>0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathcal{L}_0^{1|1}(M) \to \mathrm{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M)).$$

将一个度数为 n 的场论应用于这些族，根据推论 5.11，族 (160) 的范畴迹被映射为复合

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}\otimes R^+_{t,0}} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\mathcal{V}_+\otimes\mathcal{V}_-) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} (\mathcal{V}_-\otimes\mathcal{V}_+) \xrightarrow{L_0} \underline{\mathbb{C}}.$$

元素 Γ_n 给出了 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_n} \mathbb{C}\mathrm{l}_n \simeq \mathbb{C}$ 与平凡线丛之间的一个识别，而上述复合便成为 Clifford 超迹。最后，利用核 Fr´echet 空间具有逼近性质这一事实 [Sch71, 第 109], 页，我们发现上述范畴迹与加厚器的选择无关 [ST12, 定理 1.7], 从而完成证明。□

7. Energy cutoffs and the families index

本节中，我们通过将指标丛构造应用于命题 1.10 中从场论提取的自伴超联络，来证明定理 1.1。超联络的一般指标丛构造将在 §C 中回顾。将指标理论中的对象与之比较时，我们参见 §A，其中介绍了前几节采用的超符号约定与微分几何中关于 $\mathbb{Z}/2$-分次内积、自伴超联络和 Clifford 作用的标准符号约定之间的转换。

7.1. 能量截断。

定义 7.1. 令 E 表示 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示，并令 $\mathbb{A}_\pm$ 表示引理 4.24 所给出的超联络。若微分形式满足等式，则称 E 由无穷小生成

$$\mathsf{Tr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\rho_+|_{\mathbb{R}_{>0}\times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1},M)}) = \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(\exp(-t\mathbb{A}^2)) \in \Omega^\bullet(M; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})), \tag{161}$$

参见（159）。若无穷小生成的表示具有光滑能量截断，并且超联络 $\mathbb{A}_\pm$ 按照定义 C.16 的意义具有光滑指标丛，则称其满足上述条件。

注 7.2. 我们来讨论定义 7.1 中施加的条件。尽管人们预期场论由无穷小数据决定（这意味着条件（161）成立），但在形式体系 [ST11] 中，这并非必然，因为拓扑向量空间中的微分方程解未必存在且唯一；参见注 1.5。光滑指标丛的存在则更为微妙。对于狄拉克算子族，利用狄拉克拉普拉斯算子的特征截面是光滑的这一事实，可以由椭圆性推出指标丛的存在，例如参见 [BGV92，命题 9.10] 或 [LM94，III，定理 5.8]。因此，光滑截断的存在可视为场论的一种椭圆性性质。在高维中，可以针对按能量和动量共同索引的子空间 $\mathcal{H}^\lambda \subset \mathcal{H}$，formula 类似的光滑截断条件 $\vec{\ }$，其中截断指标的数量等于场论的维数。

定义 7.1 是群胚 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 的最后一个要素，见定义 1.11。为简便起见，我们常将一个对象称为 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$，以强调 $\mathsf{sPath}_0(M)$ 的次数为 n 的表示，并省略其余数据。$1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 中最简单的对象来自有限秩丛上的超联络。

以下是命题 1.4 显然的次数为 n 的推广。

命题 7.3。 存在范畴等价

$$\mathrm{sPar}\colon \mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n,\mathrm{ind}}(M) \xrightarrow{\sim} 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$$

从具有光滑指标丛的实 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性自伴超联络范畴，到范畴 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$。

证明。 对于实超向量丛 $V \to M$ 上的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$-线性超联络 $\mathbb{A}$，考虑定义在具有如下截面的向量丛上的表示 $\mathsf{sPath}_0(M)$

$$\Gamma(\mathcal{V}_+) := \Omega^\bullet(M; V_{\mathbb{C}}), \qquad \Gamma(\mathcal{V}_-) := \Omega^\bullet(M; \overline{V}_{\mathbb{C}})$$

以及由下式给出的超半群作用

$$e^{-t\mathbb{A}^2+\theta\mathbb{A}}\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0} \to \mathrm{End}(\Omega^\bullet(M; V_{\mathbb{C}})), \qquad e^{-t\overline{\mathbb{A}}^2+\theta\overline{\mathbb{A}}}\colon \mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0} \to \mathrm{End}(\Omega^\bullet(M; \overline{V}_{\mathbb{C}})). \tag{162}$$

此表示的配对继承自厄米配对 $V_{\mathbb{C}} \otimes V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$，该配对按照通常方式由 $\overline{V}$ 上的底层度量构造而成。实结构和反射结构由构造显而易见，反射正性条件亦然。迹结构利用了这一事实：$\exp(-t\mathbb{A}^2) \in \Omega^\bullet(M; \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}))$ 属于迹类（这源于光滑指标丛的存在），而 Z_ℓ 由对 $\mathbb{A}$ 进行 Getzler 重标度所得到的超联络单参数族对应的陈–西蒙斯形式确定。根据假设，截断函数存在。由此便在对象上构造了 (7) 中的函子 sPar。关于其在

态射上的构造则很直接：利用 162，超联络之间的同构被映为 $\mathrm{sPath}_0(M)$ 的表示之间的同构。该函子是满且忠实的，因为 $\mathrm{sPath}_0(M)$ 的表示之间的同构由向量丛的同构确定。最后，命题 1.10 验证了 sPar 本质满，因而它是一个等价。□

推论 7.4。 有限秩实向量丛上自伴 Cl_n-线性超联络所构成的群胚允许一个函子 sPar

$$\mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n,\mathrm{finite}}(M) \xrightarrow{\mathrm{sPar}} 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M) \qquad (V,\mathbb{A}) \mapsto E_{V,\mathbb{A}} \tag{163}$$

该函子由沿近乎常值超路径的超平行移动确定。

证明。 由有限维情形下光滑指标丛的存在性，这可直接由命题 1.4 得出，例如参见 [BGV92, §9.1]。□

对于对象 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$，令 $\mathcal{H} \to M$ 表示相对于实内积（参见命题 1.10）对底层实向量丛作逐纤维希尔伯特完备化所得的丛；$\mathcal{H}$ 通常只是 M上的连续丛。

定义 7.5。 给定 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，$\lambda$-截断理论 $E_{<\lambda} \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(U_\lambda)$定义为将函子 (163) 应用于带有克利福德线性自伴联络 $\nabla^{\mathcal{H}^{<\lambda}}$的超向量丛 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 所得的函子，即

$$E_{<\lambda} := E_{\mathcal{H}^{<\lambda},\nabla^{\mathcal{H}^{<\lambda}}} \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(U_\lambda)$$

采用推论 7.4 中的记号。

引理 7.6. E 的配分函数与 λ截断理论的配分函数之间的关系为

$$Z(E)|_{U_\lambda} = Z_{E^{<\lambda}} + d\eta_\lambda \in \Omega^\bullet(U_\lambda; C^\infty(\mathbb{R}_{>0})).$$

证明. 这可由 η微分形式 (212) 的构造得出。 □

7.2. **截断函数与重整化群流**。 正如下述引理所明确说明的，重整化群流在不同的截断理论之间进行插值。

命题 7.7. 重整化群流保持截断函数的存在性：对于 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$，$\mathsf{RG}^\mu(E)$ 的 λ 截断与 E 的 $\mu\lambda$ 截断典范同构

$$\mathsf{RG}^\mu(E)_{<\lambda} \simeq E_{<\mu\lambda} \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(U_{\mu\lambda}). \tag{164}$$

证明. 利用命题 7.7，我们可以借助 Getzler 重标度对重整化群作用的描述来分析截断函数。展开定义 1.11 可知，E 的 $\mu\lambda$截断与 $\mathsf{RG}^\mu(E)$ 的 λ截断是相同的数据：截断丛是 $\mathcal{H} \to U_\lambda$ 中的同一个子空间，并带有同一个联络（注意，$\mathbb{A}_1$ 在重整化群流下保持不变）。因此，典范同构 (164) 确实存在；此外，$\mathsf{RG}^\mu(E)$ 满足定义 1.11 的性质 (1) 和 (2)。性质 (3) 则由重整化群作用的 Getzler 重标度描述得出，其中 $\mathsf{RG}^\mu(E)$ 的配分函数由 Getzler 重标度后的超联络计算。最后，通过变量替换，可将 E 和 $\lambda\mu$ 对应的积分 (212) 与 $\mathsf{RG}^\mu(E)$ 和 λ对应的积分等同起来。证毕。□

定义 7.8。对象 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 在重整化群流下流向零，如果对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 和紧子流形 $K \subset M$，都存在 $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\mathsf{RG}^\mu(E)|_K$ 以零理论作为其 λ-截断，即 $K \subset U_\lambda$ 和 $\mathcal{H}^{<\lambda}|_K = \{0\}$。

引理 7.9. 对象 $E \in 1|1\text{-}\mathsf{eft}^n(M)$ 在重整化群流下流向零，当且仅当其关联超联络 $\mathbb{A}_0$ 的零次分量可逆。

证明。只需在 M 紧致时证明该引理。令 $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ 为 $\mathbb{A}_0^2$ 的最小特征值。如果 $\nu > 0$（即 $\mathbb{A}_0$ 可逆），对于任意 λ，我们都可以选取某个 $\mu \gg 0$，使得 $\mu\nu > \lambda$。根据引理 7.7，RG$^{\mu}$(E) 的 λ-截断理论是零理论。反过来，如果存在某个 μ，使得 RG$^{\mu}$(E) 的截断丛为零丛，那么 $\mu\nu$ 必须大于 λ，因此 $\nu \neq 0$，且 $\mathbb{A}_0$ 可逆。□

7.3. **定理 1.1 和 1.2 的证明。**

定义 7.10. 对于 $E \in 1|1\text{-eft}^n(M)$，选择一个离散子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$，使得$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 构成局部有限覆盖。然后定义微分上循环

$$\mathrm{Index}(E,\Lambda) = \{\mathcal{H}^{<\lambda}, \nabla^{\mathcal{H}^{<\lambda}}, g_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu}, \eta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \widehat{\mathrm{KO}}^n(M), \tag{165}$$

在 [BE23b, §7] 对微分 KO 理论的描述中。

简言之，[BE23b, §7] 的形式体系拓展了 Atiyah–Bott–Shapiro 的思想，将 ($\mathcal{H}^{<\lambda}$, $\nabla^{\mathcal{H}^{<\lambda}}$) 识别为微分 KO 类的局部数据，其庞特里亚金形式为 sTr$^{\mathrm{Cl}_n}(e^{-(\nabla^{\mathcal{H}^{<\lambda}})^2})$。包含映射 (216) 和奇端同态 (217) 提供了额外数据，可将这些局部庞特里亚金形式细化为一个全局 Čech–de Rham 上循环，表示 Index(E, Λ) 的庞特里亚金特征。微分形式 η_λ 是一个 Čech–de Rham 上边界，在该上循环与全局微分形式 Z(E) 之间起中介作用。

定理 *1.1* 的证明。将指标映射 (165) 应用于构成 $E \in 1|1\text{-eft}^n(M)$ 基础的自伴超联络，可得到所需类型的映射，但先验地依赖于子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$ 的选择，该子集决定了局部有限子覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的选取。为证明微分 KO 类与这一选择无关，可采用证明微分族指标定义良好的同一论证 [BE23b, §8.3]。回顾这一论证，对于另一种选择 $\Lambda' \subset \mathbb{R}_{>0}$，我们可以在共同细化 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in(\Lambda\bigcup\Lambda')}$ 上比较由此得到的 Cl$_{-n}$-丛。对于 $\lambda < \lambda'$，我们得到 Cl$_{-n}$-丛的包含映射 (216)，且包含映射的正交补上有彼此交换的 Cl$_{-1}$-作用。这给出了 Cl$_{-n}$-丛稳定等价的数据。根据 [BE23b，引理 5.9], ，这些 Cl$_{-n}$-丛因此协调等价，且微分 KO 类相同。这表明 (165) 与 Λ 的选择无关，指标映射定义良好。

根据引理 7.9，在 $1|1\text{-eft}^n(M)$ 中经重整化群流映至零的对象，在复合下也映至零类

$$1|1\text{-eft}^n(M) \to \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) \to \mathrm{KO}^n(M),$$

因为其关联超联络的零次部分可逆，因此底层 KO 类是平凡的。证明至此完成。□

以下将验证，定理 1.1 与韩飞利用 Dumitrescu 的超平行移动构造 $1|1$-欧几里得场论的陈形式相兼容。

命题 7.11. 前两个箭头的复合

$$\mathsf{Vect}^{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n,\mathrm{finite}}(M) \overset{\mathrm{sPar}}{\to} 1|1\text{-eft}^n(M) \overset{\mathrm{Index}}{\longrightarrow} \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) \overset{\mathrm{curv}}{\to} \Omega^\bullet_{\mathrm{cl}}(M)$$

将一个 Clifford 线性超联络映至预期的微分 KO 类，因此上述复合将一个 Cl$_n$-线性超联络 $\mathbb{A}$ 映至表示其陈特征的微分形式 sTr$^{\mathrm{Cl}_n}(e^{-\mathbb{A}^2})$。

证明. 不失一般性，可假设 M 是紧致的。选取一个取值 λ大于 $\mathbb{A}_0^2$最大特征值的截断后，指标构造将一个带有 Clifford 线性超联络的向量丛$\widehat{\ }$映至 KO^n(M) 中相应的微分类，而该类的曲率如上所述。证明至此完成。□

定理 *1.2* 的证明。利用命题 1.4，对于由黎曼自旋流形组成的族 $\pi\colon X \to M$ 以及一个实向量丛 $E \to X$，作用于

Fr´echet 丛 $V = \pi_*(\mathbb{S} \times E) \otimes \mathbb{C}$ 上的 Cl^{-n}-线性超联络 (221)，通过正向定向超路径的表示，确定了 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^{-n}(B)$ 的一个对象，

$$\rho_+(t,\theta) = \exp(-t\mathbb{A}^2 + \theta\mathbb{A}).$$

配对和反射正性数据继承自 $\pi_*(\mathbb{S}\times E) \otimes \mathbb{C}$ 上的厄米配对。实结构来自 $\pi_*(\mathbb{S} \times E) \otimes \mathbb{C}$ 上的复共轭。§C.3 中回顾的 Bismut 超联络的标准性质意味着微分指标丛的存在，因此我们确实得到了 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^{-n}(M)$ 中的一个对象。最后，将指标映射 (165) 应用于 $1|1\text{-}\mathsf{eft}^{-n}(B)$ 中的这个对象，恰好就是（实）族 Clifford 指标 [BE23b，定理 1.3]。证明完毕。□

Appendix A. Super hermitian structures, ∗-superalgebras, and supermanifolds

A.1. 实结构与厄米配对。 超向量空间 范畴是由 $\mathbb{Z}/2$ 分次向量空间构成的范畴，它们是定义在 $\mathbb{C}$ 上并配备了分次张量积。“超”这一形容词指的是编织同构中的符号，该符号作用于此张量积

$$\sigma\colon V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V \qquad v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v \quad v \in V,\ w \in W$$

其中 v 和 w 是次数为 $|v|$、$|w| \in \mathbb{Z}/2$的齐次元素。令 $V_{\text{偶}} \oplus V_{\text{奇}}$ 表示 V 的偶子空间和奇子空间的直和分解。分次对合是线性映射 $(-1)^{\mathsf{F}}\colon V \to V$，其在 $V_{\text{偶}}$ 上作用为 $+1$，在 $V_{\text{奇}}$上作用为 -1。

超向量空间范畴上存在一个对合，它在对象上反转复结构 $V \mapsto V$，即 V 由 V 通过将 $\mathbb{C}$ 的作用与复共轭复合得到。

定义 A.1. 超向量空间 V 上的实结构 是超向量空间的一个同构 $r\colon V \xrightarrow{\sim} V$，满足 $r \circ r = \mathrm{id}_V$。与实结构相关联的实子空间 是 r的不动点集 $V_{\mathbb{R}} \subset V$。

定义 A.2. 超向量空间 V 上的厄米形式 是一个映射 $\langle -,-\rangle\colon V \otimes V \to \mathbb{C}$，使图表交换，

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} \otimes V & \xrightarrow{\quad\langle -,-\rangle\quad} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle(\overline{\ })} \\ V \otimes \overline{V} & \xrightarrow[\quad\overline{\langle -,-\rangle}\quad]{} & \overline{\mathbb{C}} \end{array} \tag{166}$$

或者等价地，对齐次元素满足公式 $\langle x,y\rangle = (-1)^{|x||y|}\overline{\langle y,x\rangle}$。如果厄米形式是正定的，

$$\langle x,x\rangle > 0, \quad x \neq 0 \text{ even} \quad \text{and} \quad i^{-1}\langle x,x\rangle > 0, \quad x \neq 0 \text{ odd}. \tag{167}$$

在带有实结构的超向量空间上，实厄米形式是指：将其限制在 $(V_{\mathbb{R}})^{\mathrm{ev}} \subset V$ 上时取值于 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，而限制在 $(V_{\mathbb{R}})^{\mathrm{odd}} \subset V$ 上时取值于 $i^{-1}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 的厄米形式。

上述意义下的正定厄米形式，按照公式，可在底层（非分次）向量空间 V 上确定通常意义下的正定配对 $(-,-)$。

$$(x,y) = \begin{cases} 0 & |x| \neq |y| \\ \langle x,y\rangle & x,y \text{ even} \\ i\langle x,y\rangle & x,y \text{ odd} \end{cases} \tag{168}$$

具有偶子空间和奇子空间相互正交这一性质。当 V 配备实结构和实厄米形式时，(168) 确定了 $V_{\mathbb{R}}$ 上的实内积。

定义节 A.3. 设 V是一个配备正定厄米形式 $\langle -, - \rangle$的超向量空间。超伴随 线性映射 $T\colon V \to V$的超伴随由下式刻画

$$\langle x, Ty \rangle = (-1)^{|x||T|}\langle T^* x, y\rangle. \tag{169}$$

在向普通配对 (168) 的平移中，我们有

$$T^* = \begin{cases} T^\dagger & T \text{ even} \\ iT^\dagger & T \text{ odd} \end{cases} \tag{170}$$

其中 $(-)^\dagger$ 表示相对于正定配对 $(-,-)$ 的通常伴随。

A.2. **$*$-超代数**。超代数是超向量空间中的代数对象。超代数是一个幺半范畴中的对象，其中超代数 A和 B 的张量积是超向量空间 $A \otimes B$，其乘法为

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'.$$

超代数 A 的对代数是超代数 A^{op}，其底层超向量空间相同，乘法为

$$a \cdot_{\mathsf{op}} b := (-1)^{|a||b|} b \cdot a \tag{171}$$

其中 $b \cdot a$ 是 A中的乘法。 $*$-超代数是一个超代数，连同一个同态 $(-)^*\colon A \to A^{\mathsf{op}}$，该同态在 A 上的平方为单位元；我们强调，在分次范畴中，反同态带有一个符号，因此

$$(ab)^* = (-1)^{|a||b|} b^* a^*.$$

超代数上的实结构是一个对合的同构 $r\colon A \xrightarrow{\sim} A$，而 $A_{\mathbb{R}} \subset A$ 是不变子代数。给定一个带实结构的超代数，若一个 $*$-结构满足 $(-)^*$保持子代数 $(A_{\mathbb{R}})^{\mathrm{ev}} \subset A$，并将子空间 $(A_{\mathbb{R}})^{\mathrm{odd}} \subset A$ 映到 $i \cdot (A_{\mathbb{R}})^{\mathrm{odd}}$，则称其为实的。

例 A.4. 设 V是一个带有厄米内积的超向量空间。那么，超代数 End(W) 具有由超伴随 (169) 确定的 $*$-超代数结构。 W 上的实结构确定了 End(W) 上的实结构，使得这个 $*$-结构为实。

例 A.5. 式 (33) 中定义的克利福德代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 借助 (151) 具有 $*$-超代数结构。复共轭赋予 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 实超代数结构，使得这个 $*$-结构为实。

$*$-超代数结构的另一种概念，是为其底层（未分次）代数赋予 $*$-结构；我们将其称为 $\mathbb{Z}/2$- 分次 $*$- 代数。这等价于一个满足以下条件的反线性对合 $(-)^\dagger$，其作用于 A：

$$(xy)^\dagger = y^\dagger x^\dagger.$$

通过插入适当的 i [DEF+99 因子，可以在两种版本的 $*$-结构之间来回转换，参见第 90] 页。我们通过两个相关示例回顾这种平移。

例 A.6. 对于带有正定厄米形式 $\langle -, - \rangle$ 的超向量空间 V，超代数 End(V) 通过超伴随具有 $*$-超代数的结构。通过相对于由 (168) 确定的（非分次）内积的伴随，它具有 $\mathbb{Z}/2$-分次 $*$-代数的结构。这两种 $*$-结构由 (170) 联系起来。

例 A.7. 对于克利福德代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$，通过对生成元上的映射作 $\mathbb{C}$-反线性扩张，我们得到一个 $\mathbb{Z}/2$-分次 $*$-代数，

$$f_j^\dagger = -f_j, \qquad e_j^\dagger = e_j. \tag{172}$$

这与 $*$-超代数结构 (151) 相差一个因子 i。

A.3. **超 $*$-代数上的模**。 给定一个超代数 A，令 ${}_A\mathsf{Mod}$ 和 Mod_A 分别表示左、右 A-模的范畴，其对象是带有一个（分次） A-作用的超向量空间。这些范畴具有由 A-模的直和诱导的对称幺半结构。类似地，令 ${}_A\mathsf{Mod}_B$ 表示 $A-B$-双模的范畴。存在典范的范畴等价

$$\mathsf{Mod}_{A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}} \simeq {}_A\mathsf{Mod}_{B^{\mathsf{op}}} \simeq {}_{A\otimes B}\mathsf{Mod} \tag{173}$$

其中，左 $A\otimes B$-双模 W 被映射为底层超向量空间和作用相同的 $A-B^{\mathsf{op}}$-双模

$$a\cdot w\cdot b := (-1)^{|w||b|}(a\otimes b)\cdot w$$

类似的公式定义了右 $A^{\mathsf{op}}\otimes B^{\mathsf{op}}$-模。我们常用诸如 ${}_AW$ 的记号表示 ${}_A\mathsf{Mod}$ 中的对象，并用 ${}_AW_B$ 表示 ${}_A\mathsf{Mod}_B$ 中的对象。

例 A.8. 克利福德模是克利福德代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 上的分次模。典范同构 $\mathbb{C}\mathrm{l}_n^{\mathsf{op}}\simeq\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}$ 导出范畴之间的等价

$$\mathbb{C}\mathrm{l}_n\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-m}\mathsf{Mod} \simeq {}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}\mathsf{Mod}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_m} \simeq \mathsf{Mod}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_{-n}\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_m} \tag{174}$$

这使我们能够将任意克利福德（双）模转化为左克利福德模。

定义 A.9. 若在 V 上指定厄米形式，则 $*$-超代数 A 上的模 V 若其结构映射$A\to\mathrm{End}(V)$ 是一个 $*$-同态，便称为自伴。

注记 A.10。 当 $A=\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ 具有 (151) 中的 $*$-超代数结构时，上述定义等价于 [BGV92，定义 3.3] ，这可通过将示例 A.6 和 A.7 中的对象平移到 $\mathbb{Z}/2$-分次 $*$-代数得到。

例 A.11。 定义一个左 $\mathbb{C}\mathrm{l}_1\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-模，其底层超向量空间为$\mathbb{C}^{1|1}$ ，作用由下式确定：

$$f\mapsto\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\qquad e\mapsto\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}. \tag{175}$$

赋值 (175) 诱导出超代数的一个同构， $\mathbb{C}\mathrm{l}_1\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}\simeq\mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})$。换言之， $\mathbb{C}\mathrm{l}_1\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$ 与 $\mathbb{C}$Morita 等价。根据 (168)，这个 $\mathbb{C}\mathrm{l}_1\otimes\mathbb{C}\mathrm{l}_{-1}$-作用相对于 $\mathbb{C}^2$ 上的标准厄米配对所诱导的 $\mathbb{C}^{1|1}$ 上的分次厄米配对是自伴的。

A.4. **超迹**。 自同态 $T\colon V\to V$ 的超迹 为

$$\mathsf{sTr}(T) := \mathsf{Tr}((-1)^{\mathsf{F}}\circ T) \tag{176}$$

其中 Tr 是普通迹。超代数中元素的超交换子 为 s

$$[a,b] = ab-(-1)^{|a||b|}ba \qquad a,b\in A. \tag{177}$$

超代数上的超迹 是超向量空间之间的映射

$$\mathsf{sTr}_A\colon A\to\mathbb{C},\qquad \mathsf{sTr}_A([a,b])=0 \tag{178}$$

that 在超交换子上为零，因此由线性映射 $A/[A,A]\to$ 确定 $\mathbb{C}$.

超代数 A 上的超迹会在（有限维） A-模范畴上诱导出超迹。对于右 A-模，此超迹来自复合

$$\mathrm{End}_A(W)\xleftarrow{\sim} W\otimes_A W^\vee\to A/[A,A]\xrightarrow{\mathsf{sTr}_A}\mathbb{C} \tag{179}$$

其中 $W^\vee:=\mathrm{Hom}_A(W,A)$ 是对偶（左） A-模，而到 $A/[A,A]$ 的映射是由求值配对诱导的 Hattori–Stallings 迹，

$$\mathrm{eval}\colon W\otimes_{\mathbb{C}} W^\vee\to A.$$

利用（17，可以从 $A\otimes B^{\mathsf{op}}$ 上的迹得到双模（以及左模）的迹 3).

定义 ***Clifford*** 超迹

$$\mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}\colon\mathrm{End}(W)\to\mathbb{C},\qquad \mathsf{sTr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(T):=\mathsf{sTr}(\Gamma_n\circ T\colon W\to W) \tag{180}$$

其中 Γ_n 在（158）中定义。

A.5. **（实）超流形**。令 SMfld 表示其结构层定义在 $\mathbb{C}$上的超流形范畴；简要介绍请参阅 [ST11，第 4 节1] ，更全面的介绍请参阅 [DM99]。我们对通常的定义稍作推广，使其允许带边界超流形。与通常情况类似，这些超流形定义为豪斯多夫、第二可数的局部环化空间，且局部同构于 $\mathbb{H}^{n|m}$，其中 $\mathbb{H}^{n|m}$ 是 $\mathbb{R}^{n|m}$ 的结构层在半空间$\mathbb{H}^n := \{(x_1、\ldots\ldots、x_n)$上的限制 $\in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$.

在全文中， C^∞ 表示超流形 S的结构层，它是一个 $\mathbb{Z}/2$分次复代数层。整体截面记作 $C^\infty(S)$。我们将超流形上的截面称为函数 。令 S_{red} 表示 S的约化流形，即具有相同底层拓扑空间且结构层为 C^∞/nil 的局部环化空间，其中 nil 是幂零函数层，或者等价地，是由 C^∞的奇截面生成的理想层。

例 A.12. 令 $\mathbb{R}^{1|1}$ 表示这样一个超流形：其底层拓扑空间为 $\mathbb{R}$，结构层为 $\Lambda^\bullet\mathbb{C}^\vee$的截面层，其中 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$上的平凡复直线丛。然后，通过将 $\mathbb{R}^{1|1}$ 的结构层限制到$\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{R}$ 上，定义 $\mathbb{R}^{1|1}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{R}^{1|1}_{\leq 0}$ 。

例 A.13. 对于普通流形 N 上的复向量丛 $E \to N$ ，令 ΠE 表示这样一个超流形，其 $\mathbb{Z}/2$ 分次代数的结构层定义为

$$U \mapsto C^\infty(U) := \Gamma(U; \Lambda^\bullet E^\vee), \qquad U \subset N.$$

每个超流形 S 都同构于某个向量丛 $E \to N = S_{\mathrm{red}}$ [Bat79] 对应的 ΠE 。

在计算中，我们经常将超流形与其点函子（即它在嵌入到 SMfld 上的（集合）预层中的米田嵌入像）等同起来。我们用记号 $N(S)$ 表示超流形 N 的 S-点。

例 A.14. 超流形 $\mathbb{R}^{n|m}$ 是一个局部环化空间，其底层拓扑空间为 $(\mathbb{R}^{n|m})_{\mathrm{red}} = \mathbb{R}^n$ ，结构层为 $\Lambda^\bullet(\mathbb{C}^m)^\vee$ 的截面层；后者是 $\mathbb{R}^n$ 上的平凡秩 m 复向量丛。 $\mathbb{R}^{n|m}$ 的 S-点为

$$\mathbb{R}^{n|m}(S) \simeq \{t_1, \ldots, t_n \in C^\infty(S)^{\mathrm{ev}},\ \theta_1, \ldots, \theta_m \in C^\infty(S)^{\mathrm{odd}} \mid (f_i)_{\mathrm{red}} = \overline{(f_i)}_{\mathrm{red}} \in C^\infty(S_{\mathrm{red}})\}$$

其中， f_i 上的实性条件施加在 S 的约化流形上。

超流形中的许多定义都可以用点函子来表述。例如，超李群 是超流形中的一个群对象。有时，超流形首先根据其点函子来定义，然后再证明它是可表的。

例 A.15. 定义 Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 为超流形上的预层，其在S上的取值是映射 $S \times \mathbb{R}^{0|1} \to M$的集合；这个超流形是可表的 Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M) \simeq \Pi TM_{\mathbb{C}}$，例如参见 [HKST11，命题 3.1]。考虑 $\mathbb{R}^{0|1}$ 通过平移作用于自身的预复合作用，

$$\mathbb{R}^{0|1} \times \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M).$$

在 $0 \in \mathbb{R}^{0|1}$ 处求导得到 Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上的一个奇向量场。在同构 C^∞(Map$(\mathbb{R}^{0|1}, M)) \simeq C^\infty$ $(\Pi TM_{\mathbb{C}}) \simeq \Omega^\bullet(M)$ 下，这个向量场就是德拉姆微分，它以奇导子的形式作用于微分形式。

沿用 [HST10, ST11], a 中的术语，广义超流形是超流形上的站点上的一个预层（通常不是可表的）。广义超流形之间的映射是预层之间的映射。

例 A.16. 给定超流形 Σ和 X，定义映射对象

$$\mathsf{Map}(\Sigma, X) \colon \mathsf{SMfld}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}, \qquad \mathsf{Map}(\Sigma, X)(S) := \mathsf{SMfld}(S \times \Sigma, X)$$

作为具有所示 S-点的广义超流形。

例 A.17 ([HST10，例 5.5])。给定一个 $\mathbb{Z}/2$ 分次拓扑向量空间 $\mathcal{V}$，通过 S-点定义一个广义超流形

$$\mathcal{V}\colon \mathsf{SMfld}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}, \qquad \mathcal{V}(S) := (C^\infty(S)\otimes \mathcal{V})^{\mathrm{ev}}$$

其中，张量积是 $\mathbb{Z}/2$ 分次射影张量积。

定义 A.18。超流形范畴上存在一个对合，

$$(\overline{})\colon \mathsf{SMfld} \to \mathsf{SMfld}, \qquad S \mapsto \overline{S} \tag{181}$$

它将一个超流形映到具有相同局部环化空间、但其层上的复数作用通过复共轭给出的超流形。超流形上的实结构 S 是一个同构 $r_S\colon S \xrightarrow{\sim} \bar{S}$，使得 $r\circ r = \mathrm{id}_S$。超流形之间的映射 $f\colon S' \to S$ 若它们具有实结构，则称为实 映射，当且仅当 $r_S \circ f = f \circ r_{S'}$。

例 A.19。对于复向量丛 $E \to N$，其上的实结构（作为向量丛）决定了 E 上的实结构（作为超流形） ΠE

$$C^\infty(\Pi E) \simeq \Gamma(N;\Lambda^\bullet E^\vee) \simeq \Gamma(N;(\Lambda E^\vee_{\mathbb{R}})\otimes\mathbb{C}) \qquad (E_{\mathbb{R}})\otimes\mathbb{C} \simeq E.$$

事实上，复共轭确定了一个 $\mathbb{C}$-反线性映射 $C^\infty(\Pi E) \xrightarrow{\quad} C^\infty(\Pi E)$，它给出一个超流形同构 $\Pi E \xrightarrow{\sim} \Pi E$。

给定一个向量丛 $V \to M$，沿投影 $p\colon \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M) \simeq \Pi TM \to M$ 拉回后，我们得到一个向量丛 $p^*V \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$。

引理 A.20. 对于任意向量丛 $\mathcal{V} \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$，存在一个同构 $\mathcal{V} \simeq p^*V$，其中 $V \to M$ 是 M 上的一个向量丛。

证明。令 $i\colon M \hookrightarrow \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 表示约化流形的包含映射。给定一个向量丛 $\mathcal{V} \to \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$，命题中的 $V \to M$ 可取为 $V := i^*\mathcal{V}$。事实上，复合 $i\circ p$ 与 $\mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)$ 上的单位映射同伦。例如，考虑同伦 $\mathbb{R}\times \Pi TM_{\mathbb{C}} \to \Pi TM_{\mathbb{C}}$，它将 $\Pi TM_{\mathbb{C}} \to M$ 的奇纤维按标量 $t\in\mathbb{R}$ 缩放；在点函子中，该映射为 $(t, x, \psi) \mapsto (x, t\psi)$，其中 $t\in\mathbb{R}(S)$，且 $(x,\psi) \in \Pi TM_{\mathbb{C}}(S) \simeq \mathsf{Map}(\mathbb{R}^{0|1}, M)(S)$。现在利用同伦映射的拉回会给出同构的向量丛，可得 $p^*V = p^*i^*\mathcal{V} \simeq (i\circ p)^*\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{V}$ 同构。□

Appendix B. Review of Stolz and Teichner's Euclidean field theories

本节将依据 [ST11]，回顾 Stolz 和 Teichner 对扭曲几何场论的定义。他们的核心构造是一个几何配边范畴。它以刚性几何 $(G,\ \mathbb{M})$为输入，并输出一个从光滑流形到超流形上的站点中的对称幺半叠内的范畴的函子，

$$(G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(-)\colon \mathsf{Mfld} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Categories internal to} \\ \text{symmetric monoidal stacks} \end{array} \right\}, \qquad M \mapsto (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M),$$

其中 $(G,\ \mathbb{M})$-Bord(M) 是位于 M 上的 $(G,\ \mathbb{M})$-配边范畴。几何场论由此定义为从 $(G,\ \mathbb{M})$-Bord(M) 出发的函子，而扭曲场论则是从 $(G,\ \mathbb{M})$-Bord(M) 出发的函子之间的某些自然变换。

我们还在这一形式体系中引入反射正性数据 （见 §B.5），遵循 §2 中的动机性讨论。尽管这一结构并非 Stolz 和 Teichner 在 [ST11] 中定义的一部分，但它隐含在他们先前的工作 [ST04，定义 2.1.1，注 2.1.2] 中，并且似乎对猜想 (1) 的 $d=2$ 情形至关重要；见注 1.9。

注记 B.1。猜想 (1) 的 $d=2$ 情形要求将下文的定义推广到度为 n 的完全扩展 $2|1$ 维欧几里得场论。具体而言，这要求将 $2|1$-欧几里得配边范畴提升为某种（类型的）双范畴，以编码带角 $2|1$-欧几里得流形的切割与粘合。此类定义的框架目前仍在研究中，而且很可能会在多个方面偏离先前的方法。事实上，将 [ST11]

推广到对称幺半叠中内部的双范畴，似乎相当棘手。目前，受迭代 Segal 空间启发的光滑配边范畴似乎更容易处理，例如参见 [JFS17, DG20, LS21, BEP22]。

B.1. **刚性几何**。 受瑟斯顿 [Thu97，第 3 章3], 启发，刚性几何 是一个三元组 $(G,\ \mathbb{M},\ \mathbb{M}^c)$, 其中 $\mathbb{M}$ 是一个超流形， G 是作用于 $\mathbb{M}$上的超李群，而 $\mathbb{M}^c \subset \mathbb{M}$是一个余维 1 子流形。超流形 $\mathbb{M}$ 是该几何的局部模型，群 G 是等距群，而 $\mathbb{M}^c \subset \mathbb{M}$ 是（带领圈）边界的局部模型。刚性几何的数据通常简写为一对 $(G,\ \mathbb{M})$。

定义 B.2 （ST11 [定义 2.33 和 4.4] 的概述）。 一个 $(G,\ \mathbb{M})$-超流形族的数据是

(1) 一个光滑下沉 $p\colon Y \to S$; (2) Y 的一个极大图册 $\{U_i\}$，配备了在 S 上的开嵌入 $\varphi_i\colon U_i \hookrightarrow S \times \mathbb{M}$; (3) 过渡数据 $g_{ij}\colon p(U_i \bigcap U_j) \to G$。

Th嵌入 φ_i 必须与过渡数据 g_{ij} 相容（使用 G -acti在 $\mathbb{M}$ 上），且过渡数据必须满足进一步的余循环条件。

$(G,\mathbb{M})$-族之间的等距变换 是一个拉回 $f\colon Y \to Y'$，它定义在基变换 $S \to S'$ 之上，并具有如下性质： f 在确定 $(G,\mathbb{M})$-结构的图册上的限制，由 G 在 $\mathbb{M}$的开子空间上的作用给出。$(G,\mathbb{M})$-超流形及其等距变换构成超流形上的站点上的一个栈 $(G,\mathbb{M})$-SMfld；参见 [ST11, §2.8]和 [BBES21, 注 A.23]。

$(G,\mathbb{M})$-对的族 是一个 $(G,\mathbb{M})$-族 $Y \to S$，带有一个余维 1 子流形$Y^c \subset Y$，它定义在 S之上，并具有如下性质：对于 $(G,\mathbb{M})$-结构的一个坐标图，$U_i \bigcap Y^c \subset U_i$在 φ_i下的像落在子空间 $S \times \mathbb{M}^c \subset S \times \mathbb{M}$中。$(G,\mathbb{M})$-对之间的等距变换是 $(G,\mathbb{M})$-超流形的等距变换 $Y \to Y'$，且满足 $Y^c \subset Y$映到 $Y'^c \subset Y'$。这确定了超流形上的站点上的一个栈，其对象为 $(G,\mathbb{M})$-对。

关于刚性几何的更多讨论，另请参阅 [HST10, §6.3] 。

例 B.3 （欧几里得刚性几何）。 令 $\mathbb{A}^d$ 为仿射 d 空间，并将其视为黎曼自旋流形。保持自旋结构的等距变换群为 $\mathbb{R}^d \rtimes$Spin(d)，其中 Spin(d) 通过双覆盖 Spin(d) $\to$SO(d) 作用于 $\mathbb{R}^d$。 d 维欧几里得几何 由三元组 (G<style id="18">, $\mathbb{M}$<style id="21">, $\mathbb{M}^c$) = ($\mathbb{R}^d \rtimes$ Spin(d) $\mathbb{A}^d$<style id="28">, $\mathbb{A}^{d-1}$) 定义，其中 $\mathbb{A}^{d-1} \subset \mathbb{A}^d$ 来自全测地超平面的标准嵌入；选定基点后，它就是标准嵌入 $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$。($\mathbb{R}^d \rtimes$ Spin(d) $\mathbb{A}^d$)-超流形范畴中的 d 维欧几里得流形栈，其对象是 $Y \to S$ 上的纤维丛，纤维为 d 维流形，并配有平坦黎曼度量和自旋结构。 d 维欧几里得对的栈，其对象是 $Y \to S$ 上的纤维丛，纤维为 d 维流形，并配有平坦黎曼度量、自旋结构，以及由 S 参数化的全测地余维 1 子流形族 $Y^c \subset Y$。

引理 B.4。 固定一个刚性几何 $(G,\mathbb{M})$。给定一个同态 $g\colon G \to G$ 以及一个相对于 g 的 G-等变映射 $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$，且该映射保持包含映射 $\mathbb{M}^c \subset \mathbb{M}$的像，则存在唯一确定的栈映射

$$F\colon (G,\mathbb{M})\text{-SMfld} \to (G,\mathbb{M})\text{-SMfld}.$$

证明概要。 证明与 [HST10, 引理 6.19]中的论证相同。假设给定一个 $(G,\mathbb{M})$-流形的 S-族 $Y \to S$。我们得到一个新的 $(G,\mathbb{M})$-族 $f(Y \to S)$，它由同一个纤维化 $Y \to S$给出，但局部坐标图 $U_i \subset Y$ 经过与 f复合后作了修改，

$$Y \supset U \overset{\varphi_i}{\hookrightarrow} \mathbb{M} \times S \overset{f \times \mathrm{id}_S}{\to} \mathbb{M} \times S.$$

由于 f 相对于 g是 G-等变的，粘合数据 $g^{-1}g_{ij}g$ 确定了 Y上的一个 $(G,\ \mathbb{M})$-结构。类似地，由于 f 保持 $\mathbb{M}^c \subset \mathbb{M}$的像，它确定了 $(G,\ \mathbb{M})$-对范畴上的一个自函子。由于族 $Y \to S$ 上的底层映射是恒等映射，这些 $(G,\ \mathbb{M})$- 流形的自函子确定了叠映射。□

定义 B.5 ([HST10，定义 6.18])。刚性几何 $(G,\ \mathbb{M})$上的实结构 是 $\mathbb{M}^c$、 $\mathbb{M}$ 和 G 上的实结构，满足定义该刚性几何的所有映射在定义 A.18 的意义下都是实的。

B.2. **层叠中的内部范畴**。

定义 B.6 （摘自 [ST11，定义 2.13]）。一个范畴 C在对称幺半叠中是内部的，由对象与态射的对称幺半叠 Ob(C) 和 Mor(C)，以及源、目标、单位和复合函子构成

$$\mathsf{s},\mathsf{t}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C})\to \mathrm{Ob}(\mathsf{C})\quad \mathsf{u}\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{C})\to \mathrm{Mor}(\mathsf{C}),\quad \mathsf{m}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}\mathrm{Mor}(\mathsf{C})\to \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$$

以及额外的相容性数据（例如结合子和单位子），并满足相容性条件。

定义 B.7 （摘自 [ST11，定义 2.18]）。对于 C、D 这两个内部于对称幺半叠的范畴，内部函子 $F=(F_0,F_1,\mu,\varepsilon)$: C $\to$D 定义为层叠态射 F_0: Ob(C) $\to$ Ob(D)、 F_1: Mor(C) $\to$ Mor(D)，以及 2-交换数据，

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}(\mathsf{C})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\ \mathsf{m}\ } & \mathrm{Mor}(\mathsf{C})\\ {\scriptstyle F_1\times F_1}\downarrow & \mu & \downarrow{\scriptstyle F_1}\\ \mathrm{Mor}(\mathsf{D})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})}\mathrm{Mor}(\mathsf{D}) & \xrightarrow[\ \mathsf{m}\ ]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D})\end{array}\qquad \begin{array}{ccc}\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\ F_0\ } & \mathrm{Ob}(\mathsf{D})\\ {\scriptstyle \mathsf{u}}\downarrow & \varepsilon & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{u}}\\ \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow[\ F_1\ ]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D}).\end{array}\tag{182}$$

Th这些数据还须满足涉及结合子和单位子的进一步性质 .

定义 B.8 （ [ST11，定义 2.19] 的概要）。内部自然变换 $(\eta,\ \rho)$: $F\Rightarrow G$是内部函子 F, G: 复数域 $\to$D 之间的一个叠映射 η: Ob(C) $\to$Mor(D) 以及 2-交换数据 ρ

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) & \xrightarrow{\ \eta\circ\mathsf{t}\times F_1\ } & \mathrm{Mor}(\mathsf{D})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})}\mathrm{Mor}(\mathsf{D})\\ {\scriptstyle G_1\times\eta\circ\mathsf{s}}\downarrow & \rho & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}}\\ \mathrm{Mor}(\mathsf{D})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{D})}\mathrm{Mor}(\mathsf{D}) & \xrightarrow[\ \mathsf{m}\ ]{} & \mathrm{Mor}(\mathsf{D}).\end{array}\tag{183}$$

这些数据还需要满足额外的相干性条件。将内部自然变换 $(\eta,\ \rho)$ 之间的同构 $\Rightarrow(\eta',\ \rho')$ 定义为关于叠映射之间的 2-态射$\eta\Rightarrow\eta'$ 的数据，并要求 ρ 和 ρ' 与之相容。

定义 B.9。超李范畴 是一个内部于超流形中的范畴，其源映射与目标映射均为下沉。对于超李范畴 C，令 Ob(C) 和 Mor(C) 分别表示对象与态射的超流形，并令

$$\mathsf{u}\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{C})\to \mathrm{Mor}(\mathsf{C}),\ \mathsf{s},\mathsf{t},:\mathrm{Mor}(\mathsf{C})\to \mathrm{Ob}(\mathsf{C}),\ \mathsf{c}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C})\times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}\mathrm{Mor}(\mathsf{C})\to \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$$

分别表示单位、源、目标和复合映射。光滑函子F: C $\to$D 是一对超流形映射 F_0: Ob(C) $\to$Ob(D)、 F_1: Mor(C) $\to$Mor(D)，满足范畴之间函子的公理。光滑自然变换η: $F\Rightarrow G$ 是一个超流形映射 η: Ob(C) $\to$ Mor(D)，满足函子之间自然变换的公理。超李范畴、光滑函子和光滑自然变换构成一个严格 2-范畴。

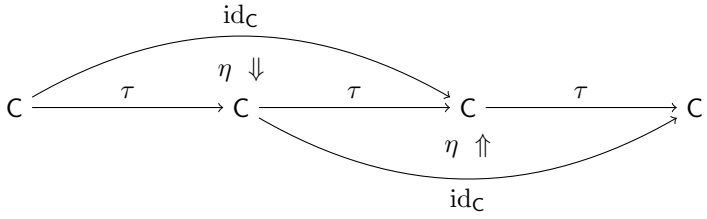
将超流形视为（可表）层叠后，任意超李范畴都会确定一个内于层叠的范畴（见定义 B.6）。根据层叠的约内达引理，超李范畴之间的函子和自然变换，等价于其对应的内于层叠的范畴之间的函子和自然变换。这也使我们能够考虑从超李范畴到内于层叠的范畴的函子。

Ex例 B.10. 任意超流形都会确定一个离散超李范畴，即一个超 r Lie 仅含恒等态射的范畴。

注 B.11. 层叠中的内范畴、内部函子和内部自然变换，其性质并不像人们所希望的那样良好。例如，一个（恰当地）本质满且忠实且充满的内部函子 C →D 未必存在逆函子。例如，令 C 为开覆盖 X 的 Čech 群胚，D 为由 X确定的（离散）内范畴；显然的内部函子 C → D 存在逆内部函子，当且仅当该覆盖有截面。因此，层叠中的内范畴所需的"正确"框架，必须对适当的一类弱等价进行局部化，这与将李群胚的 2-范畴同几何层叠联系起来的局部化类似 [Pro96]。对于本文中的操作，在进行这种局部化之前处理层叠中的内范畴就足够了。

以下关于内部对合和等变性数据的概念，是对 [HST10, 定义 6.47] 和 [ST11, 2.6] 的扩展。环境对合 SMfld → SMfld 采用 [FH21, 定义 B.1], 中的定义；在我们的应用中，它要么是恒等对合，要么是超流形上的共轭函子 (181)。

定义 B.12。 固定超流形范畴上的一个对合 SMfld → SMfld。对于超流形上的站点上（对称幺半）层叠内部的一个范畴 C，内部对合 是以下数据：一个覆盖超流形上所固定对合的内部函子 τ: C → C，一个内部自然同构 η: $\mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow \tau \circ \tau$，以及内部自然同构 $\tau \Rightarrow \tau$ 之间的一个同构 δ，如图表所示

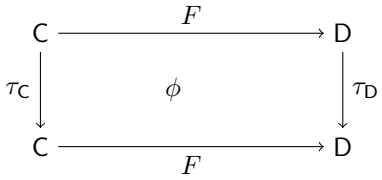


内部自然变换之间的同构 δ 对四重合成 $\tau \circ \tau \circ \tau \circ \tau$ 满足与 η 相容的条件。

以下内容将 FH21，定义 B.6] 推广到 Stolz 和 Teichner 的内部范畴。 [

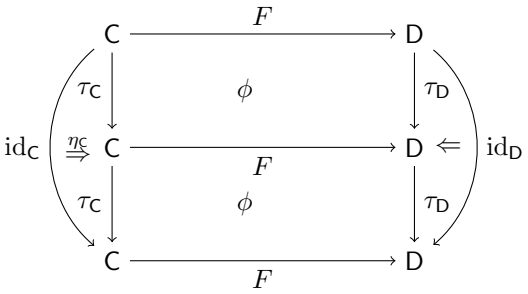
定义 B.13。 设 (复数域 $\tau_{\mathsf{C}}, \eta_{\mathsf{C}}, \delta_{\mathsf{C}}$) 和 (D $\tau_{\mathsf{D}}, \eta_{\mathsf{D}}, \delta_{\mathsf{D}}$) 是带有内部对合的内范畴，且 F: C → D 是一个函子。 F 的等变性数据 是一个内部自然变换 ϕ: $F \circ \tau_{\mathsf{C}} \Rightarrow \tau_{\mathsf{D}} \circ F$，即 2-交换数据

(184)



以及内自然变换图表中的一个同构 $\beta\colon \phi^2 \circ \eta_{\mathsf{C}} \to \eta_{\mathsf{D}}$

(185)



其中， β 与 δ_{C} 和 δ_{D} 相容。

层叠中的内部范畴也具有一种针对内部自然变换的等变性数据概念，定义如下。

定义 B.14. 设 (C $\tau_{\mathsf{C}}, \eta_{\mathsf{C}}, \delta_{\mathsf{C}}$) 和 (D $\tau_{\mathsf{D}}, \eta_{\mathsf{D}}, \delta_{\mathsf{D}}$) 是带有内部对合的内部范畴，且 $F, G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是带有等变性数据 (ϕ_F, β_F) 和 (ϕ_G, β_G) 的内部函子。内部自然变换：的等变性数据是自然变换的一个同构 $\sigma\colon \phi_G \circ E \simeq E \circ \phi_F$，它与 β_F 和 β_G 相容。

B.3. **Stolz 和 Teichner 的几何配边范畴**。给定一个光滑流形 M 和刚性几何 $(G, \mathbb{M})$，现在我们回顾 $(G, \mathbb{M})$-Bord(M) 作为对称幺半叠中的内范畴的定义。

定义 B.15 ([ST11，定义 2.21、2.46、2.48 末尾以及 4.4])。如下定义一个内在于对称幺半叠的范畴 $(G, \mathbb{M})$-Bord(M)。

栈 Ob($(G, \mathbb{M})$-Bord(M)) 的一个对象是以下数据的等价类：

(1) 一个 $(G, \mathbb{M})$-对 $Y^c \subset Y \to S$，其中 $Y^c \to S$ 为真；(2) 一个由两个连通分支组成的划分 $Y^+ \coprod Y^- \simeq Y \setminus Y^c \subset Y$；以及 (3) 一个超流形映射 $\phi\colon Y \to M$。

超流形 Y^c 称为核心。核心所在的超流形 $Y \supset Y^c$ 称为领圈。领圈被划分为一个出射连通分支 Y^+ 和一个入射连通分支 Y^-。我们对这些数据施加以下等价关系：

$$(Y^c \subset Y, Y^{\pm}, \phi) \sim (Y^c \subset Y, Y^{\pm}, \phi') \iff (\phi)|_{W^+ \bigcup Y^c} = (\phi')|_{W^+ \bigcup Y^c} \tag{186}$$

其中 $W \subset Y$ 是包含 $Y^c \subset Y$ 的开子流形，且 $W^+ = W \bigcap Y^+$。简言之，我们只保留出射领圈上 $Y^c \subset Y$ 邻域的半开芽上的映射 ϕ 的数据。我们通常将 Ob($(G, \mathbb{M})$-Bord(M)) 中对象的数据简记为 $\phi\colon Y \to M$。

Ob($(G, \mathbb{M})$-Bord(M)) 中的态射，记作 $(Y_0^c \subset Y_0, Y_0^{\pm}, \phi_0) \to (Y_1^c \subset Y_1, Y_1^{\pm}, \phi_1)$，是包含核心的开子流形 $V_0 \subset Y_0$ 和 $V_1 \subset Y_1$ 以及等距变换 $f\colon V_0 \to V_1$ 的一个等价类，它们构成交换图

$$\begin{array}{ccccc} Y_0^c & \hookrightarrow & V_0 & \hookrightarrow & Y_0 \\ {\scriptstyle f|_{Y_0^c}}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y_1^c & \hookrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & Y_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{\phi_0}{\searrow} \\ M. \\ \underset{\phi_1}{\nearrow} \end{array}$$

这些数据满足如下等价关系：若 $f|_{V_0 \bigcap V_0'} = f'|_{V_0 \bigcap V_0'}$，则 $f\colon V_0 \to V_1$ 和 $f'\colon V_0' \to V_1'$ 表示同一个同构。

不交并赋予 Ob($(G, \mathbb{M})$-Bord(M)) 对称幺半结构。

栈 Mor($(G, \mathbb{M})$-Bord(M)) 的一个对象由以下数据给出：

(1) a $(G, \mathbb{M})$-family $\Sigma \to S$,

(2) 一个超流形映射 $\Phi\colon \Sigma \to M$，(3) 一对 Ob((G, 𝕄)-Bord(M)) 中的对象，记作 $\phi_{\text{in}}\colon Y_{\text{in}} \to M$, $\phi_{\text{out}}\colon Y_{\text{out}} \to M$，(4) 光滑映射的跨度 $Y_{\text{out}} \hookleftarrow W_{\text{out}} \overset{i_{\text{out}}}{\to} \Sigma \overset{i_{\text{in}}}{\leftarrow} W_{\text{in}} \hookrightarrow Y_{\text{in}}$, 其中 $W_{\text{out/in}} \hookrightarrow Y_{\text{out/in}}$ 是开嵌入。

定义记号

$$W^{\pm}_{\text{in/out}} := Y^{\pm}_{\text{in/out}} \bigcap W_{\text{in/out}}, \quad i^{-}_{\text{in}} = i_{\text{in}}|_{W^{-}_{\text{in}}}, \quad i^{-}_{\text{out}} = i_{\text{out}}|_{W^{-}_{\text{out}}}.$$

则 $\Sigma^c := \Sigma \setminus (i_{\text{in}}(W^{-}{}_{\text{内}}) \cup i_{\text{out}}(W^{+}_{\text{out}}))$ 是核心。上述数据必须满足 (1) 像 $W_{\text{in/out}} \hookrightarrow Y_{\text{in/out}}$ 包含核心 $Y^c_{\text{in/out}}$的一个邻域；(2) $\Sigma^c \to S$ 是真映射；(3) $i^{-}{}_{\text{内}}$和 i^{-}_{out} 是到其在 $\Sigma \setminus i_{\text{out}}(W^{+}_{\text{out}} \cup Y^{c}{}_{\text{外}})$ 中像上的等距变换；以及 (4) 映射 $\phi_{\text{in/out}}\colon Y_{\text{in/out}} \to M$与 $\Phi\colon \Sigma \to M$相容。

与 (186) 类似，我们在对象上施加一个等价关系

$$(\Sigma, Y_{\text{in}}, Y_{\text{out}}, \Phi_1) \sim (\Sigma, Y_{\text{in}}, Y_{\text{out}}, \Phi_2) \iff (\Phi_1)|_{W^{+}_{\text{out}} \bigcup \Sigma^c} = (\Phi_2)|_{W^{+}_{\text{out}} \bigcup \Sigma^c} \tag{187}$$

因此， Φ 的等价类仍然仅是出射领圈内核心$\Sigma^c \to M$ 的一个半开邻域的数据。

Mor((G, 𝕄)-Bord(M)) 中的一个态射，是满足以下条件的开子超流形 $\Omega_i \subset \Sigma_i$, $V_{i,\text{in}} \subset Y_{i,\text{in}}$, $V_{i,\text{out}} \subset Y_{i,\text{out}}$ 的一个等价类:
$\Sigma^c_i \subset \Omega_i \subset \Sigma_i$, Y^c_i,in $\subset V_{i,\text{in}} \subset W_{i,\text{in}} \bigcap i^{-1}$ in $(\Omega_i) \subset Y_{i,\text{in}}$, Y^c_i,out $\subset V_{i,\text{out}} \subset W_{i,\text{out}} \bigcap i^{-1}_{\text{out}}(\Omega_i) \subset Y_{i,\text{out}}$以及等距变换 $f_{\text{in}}\colon V_{0,\text{in}} \to V_{1,\text{in}}$, $f_{\text{out}}\colon V_{0,\text{out}} \to V_{1,\text{out}}$ 和 $F\colon \Omega_0 \to \Omega_1$，它们构成了底空间 M 上超流形的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} Y^c_{0,\text{out}} & \hookleftarrow & V_{0,\text{out}} & \longrightarrow & \Omega_0 & \hookleftarrow & V_{0,\text{in}} & \hookrightarrow & Y^c_{0,\text{in}} \\ f_{\text{out}}|_{Y^c_{0,\text{in}}}\downarrow & & f_{\text{out}}\downarrow & & F\downarrow & & f_{\text{in}}\downarrow & & \downarrow f_{\text{in}}|_{Y^c_{0,\text{out}}} \\ Y^c_{1,\text{out}} & \hookleftarrow & V_{1,\text{out}} & \longrightarrow & \Omega_1 & \hookleftarrow & V_{1,\text{in}} & \hookrightarrow & Y^c_{1,\text{in}} \end{array} \tag{188}$$

这里还要求 F 保持配边的核心， $F|_{\Sigma^c_0}\colon \Sigma^c_0 \to \Sigma^c_1 \subset \Omega_1$。当满足以下条件时，这些数据等价:
$(f, g, F) \sim (f', g', F')$
$f_{\text{in}}|_{V_{0,\text{ in}} \bigcap V'_{0,\text{ 入}}} = f'_{\text{in}}|_{V_{0,\text{ in}} \bigcap V'_{0,\text{ 入}}}$ $f_{\text{out}}|_{V_{0,\text{ out}} \bigcap V'_{0,\text{ 出}}} = f'_{\text{in}}|_{V_{0,\text{ out}} \bigcap V'_{0,\text{ 出}}}$ $F|_{\Omega_0 \bigcap \Omega'_0} = F'|_{\Omega_0 \bigcap \Omega'_0}$.

不交并赋予 Mor((G, 𝕄)-Bord(M)) 对称幺半结构。我们常将 Mor((G, 𝕄)-Bord(M)) 中一个对象的数据简写为 $Y_{\text{in}} \coprod Y_{\text{out}} \to \Sigma \overset{\Phi}{\to} M$，或者更简洁地写成 $\Phi\colon \Sigma \to M$。

单位、源和目标函子由对象上的赋值给出

$$\mathsf{u}(Y \to M) = (Y \coprod Y \overset{\text{fold}}{\to} Y \to M), \qquad \mathsf{s}(Y_{\text{in}} \coprod Y_{\text{out}} \to \Sigma \to M) = (Y_{\text{in}} \to M)$$

$$\mathsf{t}(Y_{\text{in}} \coprod Y_{\text{out}} \to \Sigma \to M) = (Y_{\text{out}} \to M),$$

在态射上也作类似的赋值。对于任意 S，记 $\emptyset \in$ Ob((G, 𝕄)-Bord(M))(S) 和$\emptyset \in$ Mor((G, 𝕄)-Bord(M))(S) 为 S 上的空对象，也就是这些对称幺半叠在 S 上的对称幺半单位。

复合由沿领圈粘合配边给出；参见 [ST11，第 20] 页和 [HST10，定义 6.5]。

现在我们来处理一个小的技术问题。 [ST11] （遵循 [MF06]）的范畴论基础在内范畴的定义中使用层叠的严格纤维积，见上文定义 B.6。每当人们试图用对象和态射等价（但不同构）的层叠来替换内范畴时，这一框架就会导致问题。例如，生成元与关系论证会涉及这类并非同构的等价。解决这一技术问题的一个简单办法是修改定义 B.6,

要求源函子和目标函子是层叠的纤维化。这意味着严格纤维积与同伦纤维积相一致。幸运的是，$(G,\ \mathbb{M})$-Bord(M) 中的源函子和目标函子确实满足这一性质。

引理 B.16。 源函子和目标函子

$$\mathsf{s},\mathsf{t}\colon \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M)) \to \mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M))$$

是栈的纤维化。

证明。 我们回顾一下，若一个堆栈映射在每个超流形 S 上诱导出群胚的纤维化，则称其为纤维化，例如参见 [Hol08]。我们证明引理中关于函子 s 的结论；关于 t 的情形类似。只需证明，对于任意同构 $f\colon \mathsf{s}(\Sigma_0,\Phi_0) \to (Y_1,\phi_1)$，它属于 $\mathsf{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M'))(S)$，其中

$$(Y_1,\phi_1) \in \mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M'))(S), \quad (\Sigma_0,\Phi_0) \in \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M'))(S),$$

存在一个同构 $(f,g,F)\colon (\Sigma_0,\Phi_0) \to (\Sigma_1,\Phi_1)$，它属于 $\mathsf{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M'))(S)$，且 $\mathsf{s}(f,g,F) = f$。我们回顾一下，配边的记号 Σ_0 是以下数据的缩写

$$(Y_{0,\mathrm{out}} \hookleftarrow W_{0,\mathrm{out}} \overset{i_{0,\mathrm{out}}}{\hookrightarrow} \Sigma_0 \overset{i_{0,\mathrm{in}}}{\hookleftarrow} W_{0,\mathrm{in}} \hookrightarrow Y_{0,\mathrm{in}}, \Phi_0\colon \Sigma_0 \to M). \tag{189}$$

类似地，$f\colon \mathsf{s}(\Sigma_0,\Phi_0) \to (Y_1,\phi_1)$ 是以下数据的简写：包含核心的开子超流形$V_0 \subset Y_0$, $V_1 \subset Y_1$，以及一个保持各核不变的等距变换 $f\colon V_0 \to V_1$。

使用上述记号，我们通过以下数据定义 (Σ_1,Φ_1)

$$(Y_{0,\mathrm{out}} \hookleftarrow W_{0,\mathrm{out}} \overset{i_{0,\mathrm{out}}}{\hookrightarrow} \Sigma_0 \overset{i_{0,\mathrm{in}}\circ f^{-1}}{\hookleftarrow} f(W_{0,\mathrm{in}} \bigcap V_0) \hookrightarrow Y_1, \Phi_0\colon \Sigma_0 \to M). \tag{190}$$

其中相关性质由 (189) 继承。接下来，通过取 $V_{0,\mathrm{out}} = V_{1,\mathrm{out}} = W_{\mathrm{out}}$, $\Omega_0 = \Omega_1 = \Sigma_0$, $V_{0,\mathrm{in}} = W_{0,\mathrm{in}} \bigcap V_0$, $V_{1,\mathrm{in}} = f(W_{0,\mathrm{in}} \bigcap V_0)$, $f_{\mathrm{out}} = \mathrm{id}_{W_{\mathrm{out}}}$, $F = \mathrm{id}_{\Sigma_0}$ 和 $f_{\mathrm{in}} = f|_{W_{0,\mathrm{in}} \bigcap V_0}$，定义一个同构 $(\Sigma_0,\Phi_0) \to (\Sigma_1,\Phi_1)$。根据构造，图表 (188) 与这些数据交换，且满足定义 $\mathsf{Mor}(1|1\text{-}\mathsf{EBord}(M))$ 中同构所需的性质。将源函子作用于此同构后，限制到 $V_0 \bigcap W_{0,\mathrm{in}}$ 和 $f(V_0 \bigcap W_{0,\mathrm{in}})$ 上，与 (f,V_0,V_1) 一致，因此此态射等于 f，因为态射定义为等价类。证明完毕。□

以下内容由定义 B.15 显然可得。

引理 B.17. 光滑流形的一个映射 $f\colon M \to M'$ 会诱导一个内部函子

$$f_*\colon (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M) \to (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M'), \qquad \begin{array}{ccc} (\phi\colon Y \to M) & \mapsto & (f\circ\phi\colon Y \to M') \\ (\Phi\colon \Sigma \to M) & \mapsto & (f\circ\Phi\colon \Sigma \to M') \end{array}$$

并且，这些内部函子与流形之间映射的复合相容。

B.4. **扭曲几何场论**。

定义 B.18 （[ST11，定义 2.24、2.47、第 4.3] 节的概述）. 将对称幺半叠内部的范畴 Vect 定义如下。栈 Ob(Vect) 分类了 $\mathbb{Z}/2$-分次核 Fr´echet 空间丛在 $\mathbb{C}$ 上，即核 Fr´echet 超向量空间的局部自由层。栈 Mor(Vect) 的对象是向量丛之间的映射，其态射为交换方块

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ V' & \longrightarrow & W' \end{array} \tag{191}$$

其水平箭头是向量丛的映射，垂直箭头则是向量丛逐纤维的同构，也就是说，它们是沿基变换的拉回。从将方形（191）限制到左半部分和右半部分，可得到函子 s、t: $\mathsf{Mor}(\mathsf{Vect}) \to \mathsf{Ob}(\mathsf{Vect})$。最后，赋予 Ob(Vect) 和 Mor(Vect) 对称幺半结构，该结构来自拓扑向量丛的射影张量积。

注 B.19。 上述定义与 [ST11] 中的定义有两点不同。首先，我们只考虑向量丛，而不考虑一般的拓扑向量空间层（即，我们施加局部自由条件）。其次，我们将一般的局部凸拓扑向量空间特化为核 Fr´échet 空间。我们之所以作此选择，是为了确保量子场论函子性定义中的某些形式范畴结构与物理学中的标准结构一致：Fr´échet 空间具有逼近性质 [Sch71, 第 109], 页，因此核算子的迹理论性质良好，参见 [ST12, §4.5]。此外，指标理论中所有所需的构造恰好都产生核 Fr´échet 空间的向量丛，因此这一限制并未排除任何所需的例子。关于核 Fr´échet 空间的简要概述，请参见 [Cos11a, 附录 2] 。Stolz 和 Teichner 在更一般的拓扑向量空间层框架下工作的动机，见注 1.16。

定义 B.20 （略述 [ST11，定义 5.1]）。 如下定义内部莫里田范畴 Alg，使其成为对称幺半叠中的内部范畴。栈 Ob(Alg) 对核 Fr´échet 超代数的局部平凡丛及代数丛的同构进行分类。栈 Mor(Alg) 对拓扑代数上的核 Fr´échet 双模局部平凡丛进行分类。复合由双模丛的射影张量积给出，

$$\mathsf{c}\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathsf{Alg})} \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{Alg}), \qquad \mathsf{c}(B, B') = B \otimes_A B'.$$

将代数丛视为其自身上的双模，即可构造单位映射 u: Ob(Alg) →Mor(Alg)。赋予 Ob(Alg) 和 Mor(Alg) 由底空间结构层上的代数丛与双模丛的射影张量积诱导的幺半结构。

例 B.21。 给定任意一个对称幺半叠中的内部范畴 C，存在一个内部函子

$$\mathbb{1}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Alg}$$

定义如下。对于 $Y \in$ Ob(C)(S)，赋予 S 上的平凡代数丛，即其整体截面为 $C^\infty(S)$ 的代数层。对于 $\Sigma \in$ Mor(C)(S)，赋予 S 上的平凡双模丛，即其整体截面为 $C^\infty(S)$ 的双模层，并将其视为 $C^\infty(S)$ 上的双模。2-交换数据 μ 由典范同构$C^\infty(S) \otimes_{C^\infty(S)} C^\infty(S) \simeq C^\infty(S)$确定，而 2-交换数据 ϵ 则来自代数 $C^\infty(S)$ 与其自身上的恒等双模之间的典范识别。

定义 B.22 ([ST11，定义 2.25、2.48、4.12])。一个上的几何场论 M 是一个内部函子

$$E\colon (G, \mathbb{M})\text{-Bord}(M) \to \mathsf{Vect}. \tag{192}$$

定义 B.23 ([ST11，定义 5.2])。一个上的扭曲几何场论 M 是一个内部自然变换 E

$$(G,\ \mathbb{M})\text{-Bord}(M) \quad \overset{\mathbb{1}}{\underset{\mathscr{T}}{\Downarrow E}} \quad \mathsf{Alg} \tag{193}$$

其中， $\mathscr{T}$ 是一个扭曲函子，而 1 在例 B.21 中定义。扭曲场论是一个群胚的对象，其态射是内部自然变换之间的同构。

注记 B.24。 按照定义 B.22 的意义，一个（非扭曲的）几何场论会为平凡扭曲函子$\mathscr{T} = \mathbb{1}$ [ST11 确定一个按照定义 B.23 意义的扭曲场论，引理 5.7]。

B.5. **附加结构**。刚性几何（$G,\mathbb{M}$）中的附加结构会为内在配边范畴带来附加结构。

引理 B.25。 固定一个刚性几何 $(G,\mathbb{M})$。给定一个同态 $g\colon G\to G$，以及一个相对于 g 的 G-等变映射 $f\colon \mathbb{M}\to\mathbb{M}$，该映射保持包含映射 $\mathbb{M}^c\subset\mathbb{M}$ 的像，则存在唯一确定的内部函子

$$F\colon (G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M)\to(G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M).$$

Proof. 引理 B.4 中（$G,\mathbb{M}$）-流形的自函子决定了叠映射，

$$F_0\colon \mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M))\to\mathrm{Ob}((G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M)),\quad (Y\to S,\phi)\mapsto(f(Y\to S),\phi)$$

$$F_1\colon \mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M))\to\mathrm{Mor}((G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M)),(\Sigma\to M,\Phi)\mapsto(f(\Sigma\to M)\ \Phi),$$

通过在配边上取相同的领圈数据，但采用不同的（$G,\mathbb{M}$）-结构。根据构造，这些叠映射与定义（$G,\mathbb{M}$）-Bord(M) 的源、目标、单位和复合函子（严格）相容。□

例 B.26（带翻转的配边范畴）。 在引理 B.25 的情形下，设 fl: $\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ 是一个与 G 的作用可交换且保持 $\mathbb{M}^c\subset\mathbb{M}$的对合。由此，每个（$G,\mathbb{M}$）-流形族都带有一个对合。实际上，对合 fl: $\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ 来自一个自旋翻转 自同构，例如参见 [HST10，第 6.7 节、引理 6.39], [ST11，例 2.39 和第 4.1] 节以及（46）。依照 [ST11，第 2.6], 节，这种对合 fl 使我们能够将配边范畴视为内在于带对合的对称幺半叠中的范畴。

接下来我们注意到，每个超向量丛或代数丛都有一个典范自同构，它来自超向量空间上的宇称对合，

$$(-1)^{\mathsf{F}}\colon V\to V,\qquad (-1)^{\mathsf{F}}\colon A\to A \tag{194}$$

在偶截面上作用为单位元，在奇截面上作用为 -1。因此，我们可以将 Vect 和 Alg 视为带对合的对称幺半叠中的内范畴。Stolz 和 Teichner 将这些对合纳入其场论，具体如下。

定义 B.27 ([HST10，定义 6.44], [ST11，§2.6])。 固定一个刚性几何 $(G,\mathbb{M})$，并带有如例 B.26 中的对合 fl: $\mathbb{M}\to\mathbb{M}$。一个保翻转几何场论是带对合的对称幺半叠范畴中的函子 (192)。类似地，可以将保翻转扭曲 和保翻转扭曲几何场论 定义为带对合的对称幺半叠中的函子和自然变换。

每当配边范畴带有翻转时，我们总是将（扭曲）几何场论理解为保翻转（扭曲）几何场论。

例 B.28（定向反转）。 在流形 $\mathbb{M}_{\mathrm{red}}$ 上固定一个定向，并假设 or：$\mathbb{M}\to\mathbb{M}$ 是一个 G-等变映射，满足 $\mathrm{or}_{\mathrm{red}}\colon \mathbb{M}_{\mathrm{red}}\to\mathbb{M}_{\mathrm{red}}$ 是一个反转定向映射，且 $\mathrm{or}^2=$fl 是自旋翻转。于是，引理 B.25 确定了一个定向反转函子

$$\mathsf{Or}\colon (G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M)\to(G,\mathbb{M})\text{-Bord}(M) \tag{195}$$

并带有一个自然同构 Or $\circ$Or $\Rightarrow$ id（通过自旋翻转）。实际上，Or 确定了定义 B.12 意义下的一个内部对合。

在一维场论（即量子力学）中，定向反转与时间反演相同，后者通常在态空间上由一个 $\mathbb{C}$-反线性映射实现。这种结构是反射正性的一部分；通过要求相对于定向反转生成的作用（195）以及由复共轭导出的向量空间函子的等变性数据，可以将其推广到函子场论中，例如参见 [FH21，§3]。不过，在超流形的语境中，复共轭更为微妙，下面将对此作出解释。存在共轭函子，

$$\overline{(\ )}\colon \mathrm{Vect}\to\mathrm{Vect},\ (V\to S)\mapsto(V\to\overline{S})\quad \overline{(\ )}\colon \mathrm{Alg}\to\mathrm{Alg},\ (A\to S)\mapsto(A\to\overline{S}) \tag{196}$$

将向量丛、代数丛等映射到同一个丛，但其中复数通过共轭作用；当输入是超流形 S 上的丛时，$\bar{}$输出是共轭超流形 S 上的丛（见定义 A.18）。换言之，Alg 的自然内部对合（见定义 B.12）覆盖了超流形上的共轭函子。因此，要求存在混合 (195) 和 (196) 的等变性数据并无意义，因为它们是覆盖超流形上不同函子的内部函子（或者覆盖恒等函子）。对此，可以通过要求相关配边范畴具有实结构来加以修正；这种实结构可由刚性几何上的实结构得到，具体含义见定义 B.5。

例 B.29（具有实结构的配边范畴，[HST10，第 8] 节）。给定一个（G，$\mathbb{M}$）-超流形（$Y \to S$）的 S-族，刚性几何（G，$\mathbb{M}$）上的实结构会为该 S-族（$Y \to S$）赋予唯一的（G，$\mathbb{M}$）-结构。此结构可扩展为一个内部函子

$$\mathsf{R}\colon (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M) \to (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M), \qquad (S \leftarrow Y \to M) \mapsto (\overline{S} \leftarrow \overline{Y} \to \overline{M} \simeq M). \tag{197}$$

这一识别 $M \simeq \overline{M}$ 利用了 M 是普通流形这一事实，因此将其视为超流形时，它具有典范实结构。通过遗忘函子（G，$\mathbb{M}$）-Bord（M）$\to$SMfld（它将配边的 S-族映到 S），内部函子 (197) 覆盖超流形上的共轭函子。我们注意到，R 按照定义 B.12 的意义确定了一个内部对合。

函子 1:（G，$\mathbb{M}$）-Bord $\to$ Alg 对源上的任意内部对合都具有典范等变性数据。

定义 B.30。设 $(G,\ \mathbb{M})$ 是一个具有指定实结构和定向反转自同构的刚性几何。对于一个扭曲 $\mathscr{T}$，反射结构 是关于对合 R $\circ$ Or 和 ( ) 的等变性数据。对于一个扭曲场论 $E\colon \mathbb{1} \to \mathscr{T}$，反射结构 是关于内部自然变换 E的等变性数据。

注 B.31。粗略地说，反射结构规定，配边的定向反转对应于向量空间的复共轭（这是数据）。与此结构相伴的是反射正性，它要求某个厄米配对为正定。我们可以用如下方式来表示这个配对：

$$\overline{E(Y)} \otimes E(Y) \overset{h\otimes \mathrm{id}}{\simeq} E(\overline{Y}) \otimes E(Y) \overset{E(\Sigma)}{\to} \mathbb{C} \tag{198}$$

其中，同构 h 来自反射结构，而 Σ是一个边界为 $Y \coprod Y$ 的配边，其中 Y 是 Y 的定向反转。于是，正性就是配对 (198) 的正性。我们在定义 5.16 中给出 $1|1$-欧几里得场论的精确定义。

定义 B.32（比较 [HST10，定义 6.47]）。设 $(G,\mathbb{M})$ 是配备了所选实结构的刚性几何，且 $\mathscr{T}\colon (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M) \to \mathsf{Alg}$。对 $\mathscr{T}$ 而言，实结构 是对合 R 和 ( ) 的等变性数据。给定一个扭曲场论 $E\colon \mathbb{1} \to \mathscr{T}$，$E$ 上的实结构 是针对该内部自然变换的等变性数据。

例 B.33（重整化群流）。在许多情况下，$\mathbb{M}$ 上存在一个非平凡的 $\mathbb{R}_{>0}$- 作用，且与 G-作用交换。例如，例 B.3 中的欧几里得刚性几何通过 $\mathbb{R}^d$ 上的标准膨胀作用，具有这样的结构。应用引理 B.25，便得到重整化群的作用，

$$\mathsf{RG}^{\mu}\colon (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M) \to (G,\mathbb{M})\text{-}\mathsf{Bord}(M) \qquad \mu \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{199}$$

它随后通过与内部函子 (199) 前复合，在（扭曲）场论范畴上作用。

Appendix C. The families index in KO-theory

C.1. **超联络**。超向量丛是指一个由 $\mathbb{Z}/2$ 分次的核 Fr´echet 空间构成的局部自由层；我们不作有限秩假设。

定义 C.1 ([Qui85])。 设 $V \to M$ 是一个复向量丛。其上的一个超联络 $\mathbb{A}$是一个奇的、 $\mathbb{C}$-线性 Fr´echet 空间映射，并满足莱布尼茨法则

$$\mathbb{A}\colon \Omega^\bullet(M;V) \to \Omega^\bullet(M;V), \quad \mathbb{A}(\alpha\cdot v) = d\alpha\cdot v + (-1)^{|\alpha|}\alpha\cdot \mathbb{A}v \tag{200}$$

其中 $v \in \Omega^\bullet(M;\, V)$ 且 $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$。

利用微分形式上的 $\mathbb{Z}$ 分次，超联络可写为

$$\mathbb{A} = \sum \mathbb{A}^{[k]}, \qquad \mathbb{A}^{[k]}\colon \Omega^\bullet(M;V) \to \Omega^{\bullet+k}(M;V) \tag{201}$$

wh其中 $\mathbb{A}_1 = \nabla$ 是 V 上的普通联络，而 $\mathbb{A}_{2k} \in \Omega^{2k}(M;\, \mathrm{End}(V)^{\mathrm{odd}})$， $\mathbb{A}_{2k+1} \in \Omega^{2k+1}(M;\, \mathrm{End}(V)^{\mathrm{ev}})$ 是端同态值形式。

定义 C.2. 假设 $\langle -,-\rangle\colon V\otimes V \to \mathbb{C}$ 是一个（超）厄米配对，其中 $\otimes$ 是射影张量积。那么， V 上的超联络 $\mathbb{A}$ 是自伴的，当且仅当

$$\langle \overline{\mathbb{A}}_1 x, y\rangle + (-1)^{|x||y|}\langle x, \mathbb{A}_1 y\rangle = d\langle x,y\rangle, \qquad \mathbb{A}_k^* = i^{k+1}\overline{\mathbb{A}}_k, \tag{202}$$

其中 $\mathbb{A}_k^*$ 是 $\mathbb{A}_k$ 的超伴随。

备注 C.3。 按照 (170) 将超伴随转换为普通伴随后，上述内容等价于自伴超联络的标准定义 [BGV92，第 117] 页。

对于超联络 $\mathbb{A}$，定义如下单参数族：

$$\mathbb{A}(u) := u^{-1/2}\mathbb{A}^{[0]} + \mathbb{A}^{[1]} + u^{1/2}\mathbb{A}^{[2]} + \cdots + u^{j/2}\mathbb{A}^{[j]} + \dots$$

定义 C.4。 Cl_n-线性超联络的陈形式 是其 Clifford 超迹（对无穷秩丛而言，该迹未必存在）。

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) := \mathsf{STr}_{\mathbb{C}\mathrm{l}_n}(e^{-u\mathbb{A}(u)^2}) \in \Omega^\bullet(M;\mathbb{C}[u^{\pm 2}])). \tag{203}$$

$\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 中没有 u 的分数次幂，这源于奇自同态的超迹为零。自伴性质进一步意味着，该迹中只有 u 的偶次幂。

引理 C.5。 若存在，Cl_n-线性超联络 $\mathbb{A}$ 的陈形式是闭的，且总次数为 n。

C.2. **克利福德模与 KO 理论**。 我们概述一种由 [Che07, §1.3-1.4] 和 [HST10, 定理 7.1]，给出的 KO 谱模型，另见 [BE23b, §4]。

定义 C.6 ([Seg68, §2])。 拓扑范畴 是这样一种范畴：其对象和态射都是拓扑空间，且结构映射（源、目标、单位、复合）连续。对于拓扑范畴 $\mathcal{C}$，令 $\mathcal{C}_0$ 表示对象空间， $\mathcal{C}_1$ 表示态射空间。

令 $\mathcal{H}_n$ 表示一个无限维的 $\mathbb{Z}/2$ 分次可分希尔伯特空间，其上有 Cl_n 的自伴作用，并且满足 Cl_n 的每个不可约表示都以无限重数出现在 $\mathcal{H}_n$ 中。令 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ 表示带范数拓扑的 Cl_n-线性有界算子代数。

定义 C.7。 令 $\mathcal{M}_n$ 表示一个范畴，其对象是有限维 Cl_n-子模$W \subset \mathcal{H}_n$ ，其态射为

$$\mathrm{Mor}(W_0,W_1) := \begin{cases} \mathrm{Cl}_n\otimes\mathrm{Cl}_{-1}-\text{action on } W_0^\perp \\ \text{extending the } \mathrm{Cl}_n-\text{action} & \text{if } W_0\subseteq W_1\subset\mathcal{H}_n \\ \\ \emptyset & \text{else} \end{cases} \tag{204}$$

其中 $W_0^\perp \subseteq W_1$ 表示子空间 $W_0 \subseteq W_1$的正交补。对于嵌套包含映射 $W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2$ 的复合，利用克利福德模的直和，在 $W_0 \subseteq W_2$的正交补上构造 $\mathrm{Cl}_n \otimes\mathrm{Cl}_{-1}$-模结构。赋予 $\mathcal{M}_n$ 的对象和态射由这些嵌入所诱导的子空间拓扑

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{M}_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n), \qquad \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)^{\times 3} \tag{205}$$

其中，第一个包含映射将子模 $W_0 \subset \mathcal{H}_n$ 与（有限秩）投影 $\mathcal{H}_n \to W_0$相对应。对于第二个包含映射，三元组 $(W_0,\ W_1,\ e)$ 确定一对有限秩投影算子和一个有界算子 e。

定义 C.8. 拓扑范畴的脉络 是一个单纯空间，其中 k-单纯形为 $N_k\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ （当 $k = 0,$ 1 时），而当 $k > 1$ 时，则为由可复合态射构成的长度为 k 的链

$$\begin{aligned} N_k\mathcal{C} &= \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_k} x_k \mid x_i \in \mathcal{C}_0, f_i \in \mathcal{C}_1\} \\ &= \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \cdots \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1, \end{aligned}$$

其拓扑由纤维积给出。 $N_\bullet\mathcal{C}$ 中的面映射由态射的复合确定，而退化映射由 $\mathcal{C}$中的单位映射确定。

单纯空间 $Z_\bullet$ 的几何实现 为

$$|Z_\bullet| := (\coprod_n Z_n \times \Delta^n)/\sim \qquad (f^*x, t) \sim (x, f_*t) \quad \forall f\colon [l] \to [k] \tag{206}$$

其中 Δ^n 是标准的 n-单纯形，而 $f\colon [l] \to [k]$ 是保序映射。几何实现具有自然性：单纯空间的映射 $F\colon Z_\bullet \to Y_\bullet$ 确定一个实现之间的映射 $|F|\colon |Z_\bullet| \to |Y_\bullet|$。

命题 C.9 ([HST10，定理 7.1], [Che07，§1.3-1.4]). 分类空间 B$\mathcal{M}_n$表示函子KO^n(–)。

给定拓扑空间 Z 和 Z的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，定义 $U_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} U_i$ 为 $\sigma \subset I$ 非空有限子集所对应的交集。

定义 C.10. 对于 Z 拓扑空间和 $\{U_i\}_{i\in I}$ 开覆盖，ˇCech 范畴（记作 ˇC(U_i)）是一个拓扑范畴，其对象为 ˇC$(U_i)_0 = \coprod_\sigma U_\sigma$，态射空间为 ˇC$(U_i)_1 = \coprod_{\sigma\subseteq\tau} U_\tau$。源映射与目标映射由投影和包含映射 $U_\tau \subseteq U_\sigma$确定，单位由恒等映射 $U_\sigma \to U_\sigma$诱导，复合则来自嵌套的包含映射。

引理 C.11 ([Seg68，命题 4.12], [DI04，定理 2.1])。 对于 Z 拓扑空间和 $\{U_i\}_{i\in I}$ 开覆盖，典范映射

$$\mathrm{B}\check{C}(U_i) \xrightarrow{\sim} Z, \tag{207}$$

是一个同伦等价。

定义 C.12 ([BE23b, §4])。流形 M 上的 Cl$_n$-丛是以下数据：

(1) M的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$；(2) 对每个有限子集 $\sigma \subset I$，一个带有 Cl$_n$-作用的度量超向量丛 $W_\sigma \to U_\sigma$，使得 W_σ 的纤维是自伴 Cl$_n$-模；(3) 对每个 $\sigma \subset \tau$，一个 Cl$_n$-等变的超向量丛单射映射 $g_{\sigma\tau}\colon W_\tau \hookrightarrow W_\sigma$，以及在像的正交补上对 $W_\tau^\perp \subset W_\sigma$的 Cl$_n \otimes$Cl$_{-1}$-作用，该作用扩张了 Cl$_n$-作用。

对于 $\sigma \subset \tau \subset \rho$，我们要求映射 $g_{\sigma\tau} \circ g_{\tau\rho} = g_{\sigma\rho}\colon W_\rho \hookrightarrow W_\sigma$相等，并且 $W_\rho^\perp \subset W_\tau \hookrightarrow W_\sigma$ 上的 Cl$_{-1}$-作用是 $W_\tau^\perp \subset W_\sigma$上的 Cl$_{-1}$-作用的限制。

推论 C.13. 给定 M 上的一个 Cl$_n$-丛，存在一个连续函子

$$\check{\mathrm{C}}(U_i) \to \mathcal{M}_n \tag{208}$$

它在可缩空间的选择意义下唯一。经过实现后，这确定了一个映射 $M \to B\mathcal{M}_n \simeq$KO^n 到 KO 谱的第 n 个空间。

证明。 函子 (208) 源自对每个 $\sigma \subset I$ 选择一个 Cl$_n$-等变嵌入 $W_\sigma \subset \mathcal{H}_n \times U_\sigma$ over U_σ。根据 Kuiper 定理 [Kui65]，，此类选择构成的空间是可缩的。于是由命题 C.9 和引理 C.11 可得该推论。 □

引理 C.14 ([BE23b, §6])。 给定 M 上的一个 Cl_n 丛，在每个 W_σ 上选择自伴 Cl_n-线性 $\check{}$ 超联络 $\mathbb{A}_\sigma$，即可唯一确定 $[W]=[\{U_\sigma,W_\sigma,g_{\sigma\tau},e_{\sigma\tau}\}]\in \mathrm{KO}^n(M)$ 的庞特里亚金特征 $\mathrm{Ch}(W)\in \mathrm{H}^\bullet(M;\mathbb{R}[u,u^{-1}])$ 的一个 Čech–de Rham 代表。

证明概要。在每个 U_i 上，给 W_i 选择一个超联络，就得到一个总次数为 n 的微分形式 $\mathrm{Ch}_n(\mathbb{A}_i)\in\Omega^\bullet(U_i;\mathbb{R}[u,u^{-1}])$。数据 $g_{\sigma\tau},e_{\sigma\tau}$ 使得可以将其扩展为一个 Čech–de Rham 上循环。□

定义 C.15。相对于开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 定义的 Cl_n-丛 $V=\{V_\sigma,g_{\sigma\tau},e_{\sigma\tau}\}$ 的一种微分精化是如下数据：

i. 对每个 $\sigma\subset I$，在 $V_\sigma\to U_\sigma$ 上的一个自伴 Cl_n-线性超联络 $\mathbb{A}_\sigma$；ii. 一个总次数为 n 的闭全局形式 $\mathrm{Ch}(V,\mathbb{A},\phi)\in\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}[\alpha^{\pm1}])$；iii. 一个余边界 $\{\phi_\sigma\in\Omega^\bullet(U_\sigma;\mathbb{R}[\alpha^{\pm1}])\}$，其连接 $\mathrm{Ch}(V,\mathbb{A},\phi)$ 与引理 C.14 中的 Čech–de Rham 上循环 $\mathrm{Ch}_n(\{U_i\},\mathbb{A}_i)\in\Omega^\bullet(U_*;\mathbb{R}[u^{\pm1}])$。

Cl_n-丛的微分精化是一个微分上循环，记作 $(V,\ \mathbb{A},\ \phi)=\{(V_\sigma,\ \mathbb{A}_\sigma,\ \phi_\sigma),\ (g_{\sigma\tau},\ e_{\sigma\tau})\}$。

C.3. **指标丛**。给定向量丛$V\to M$上的自伴 Cl_n-线性超联络 $\mathbb{A}$，定义 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$ 对应的子集 $U_\lambda\subset M$ 如下。若 λ 不是算子$(\mathbb{A}^{[0]})^2_m$ 的（非负）特征值，则点 $m\in M$ 属于 U_λ（使用记号 (201)）：

$$U_\lambda =: \{m\in M\mid \lambda\notin \mathrm{Spec}((\mathbb{A}^{[0]})^2_m)\}\subset M. \tag{209}$$

令 $\mathcal{H}\to M$ 表示带度量向量丛 $V\to M$的逐纤维希尔伯特完备化；通常，$\mathcal{H}\to M$ 只是一个连续（而非光滑）向量丛。在每个子集 $U_\lambda\subset M$上，定义子集 $\mathcal{H}^{<\lambda}\subset\mathcal{H}|_{U_\lambda}$ 为算子$(\mathbb{A}^{[0]})^2_m$ 的 ν-特征子空间 $\mathcal{H}^\nu_m$ 的直和，其特征值为 $\nu<\lambda$

$$\mathcal{H}^{<\lambda}_m:=\bigoplus_{\nu<\lambda}\mathcal{H}^\nu_m\subset\mathcal{H}_m \tag{210}$$

令 m 变化，$\mathcal{H}^{<\lambda}$ 表示 $\mathcal{H}|_{U_\lambda}$ 的 Cl_{-n}-不变子集，其纤维为 $\mathcal{H}^{<\lambda}_m$。定义 U_λ 上的映射（集合之间的映射）

$$p^\lambda\colon \mathcal{H}|_{U_\lambda}\to\mathcal{H}^{<\lambda},\qquad i_\lambda\colon\mathcal{H}^{<\lambda}\to\mathcal{H}|_{U_\lambda} \tag{211}$$

其中，p^λ 是纤维正交投影，i_λ 是纤维包含映射。

定义 C.16。自伴克利福德线性超联络 $\mathbb{A}$ 存在光滑指标丛，如果

(1) 在 (209) 中定义的子集族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}$ 构成一个光滑开覆盖；(2) 子集 $\mathcal{H}^{<\lambda}\subset\mathcal{H}|_{U_\lambda}\to U_\lambda$ 是光滑向量丛；(3) 复合定义了一个光滑联络：

$$\nabla^{<\lambda}:=p^\lambda\circ\mathbb{A}^{[1]}|_{U_\lambda}\circ p^\lambda\colon\Gamma(\mathcal{H}^{<\lambda})\to\Omega^1(U_\lambda;\mathcal{H}^{<\lambda}),$$

(4) 陈–西蒙斯形式的极限

$$\eta_\lambda(t):=\lim_{r\to\infty}\int_1^r \mathsf{STr}_{\mathrm{Cl}_n}\Big(\frac{d\mathbb{A}_\lambda(s)}{ds}\exp(\mathbb{A}_\lambda(s))\Big)ds\in\Omega^\bullet(U_\lambda;C^\infty(\mathbb{R}_{>0})[u^{\pm1}]) \tag{212}$$

存在且满足

$$d\eta_\lambda(t)=\mathrm{Ch}(\mathbb{A}(t))|_{U_\lambda}-\mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda}) \tag{213}$$

其中，在式 (212) 中，$\mathbb{A}_\lambda(s)$ 是 $V|_{U_\lambda}\oplus\Pi\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上的超联络单参数族，

$$\mathbb{A}_\lambda(s)=\mathbb{A}_\lambda(s)^{[0]}+\mathbb{A}^{[1]}\oplus\nabla^{<\lambda}+\sum_{i>1}s^{-i}\mathbb{A}^{[i]}\oplus 0_{\Pi\mathcal{H}^{<\lambda}},\quad \mathbb{A}_\lambda(s)^{[0]}=\begin{bmatrix}\mathbb{A}^{[0]} & s\cdot i_\lambda\\ s\cdot p^\lambda & 0\end{bmatrix} \tag{214}$$

其中 i_λ 和 p^λ 是映射 (211)。

我们简述等式 (213) 的证明。在 $s = 0$ 处，超联络是 Bismut 超联络与普通联络$\nabla^{<\lambda}$（及其奇偶反转）的直和，给出 (213) 的右端。对于 $s > 0$，算子 $\mathbb{A}_\lambda(s)^{[0]}$ 可逆[FL10, 引理 7。18], ，因此其陈特征为零；极限 (212) 给出了陈形式的一个显式余边界。

对于允许使用截断函数的超联络，我们回顾 [BE23b, §8.2-8.3] 中的指标丛构造。注意，要构造一个映射到 KO 理论的指标映射，定义 C.16 中只需要条件 (1) 和 (2)；条件 (3) 和 (4) 则允许加细到微分 KO 理论。

命题 C.17. 给定一个允许使用截断函数的 Cl_n-线性超联络，以及与离散子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}_{>0}$ 相关联的局部有限开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的选取，可确定一个映射

$$\mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})\colon M \to \mathrm{KO}^n, \tag{215}$$

到 KO 谱的 n 次空间；该映射在可缩选择的意义下唯一。给定由开覆盖的加细相关联的选取$\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}_{>0}$，则对应的映射 (215) 之间存在唯一的同伦。

证明. Cl_n-模 $\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda$ 对每个 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 都确定一个类 $[\mathcal{H}^{<\lambda}] \in \mathrm{KO}^n(U_\lambda)$。对于 $\lambda < \mu$ 的交叠区域 $U_\lambda \bigcap U_\mu$，存在典范包含

$$g_{\lambda\mu}\colon \mathcal{H}^{<\lambda} \hookrightarrow \mathcal{H}^{<\mu} \tag{216}$$

而 $g_{\lambda\mu}$ 像的正交补带有 $\mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{-1}$-作用，该作用扩展了 Cl_n-作用，并由可逆奇端同态确定

$$e^{\lambda\mu}|_{\mathcal{H}_b^\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\mathbb{A}^{[0]}|_{\mathcal{H}_b^\nu}, \quad \mathcal{H}_b^\nu \subset (\mathcal{H}^{<\lambda})^\perp \subset \mathcal{H}^{<\mu} \tag{217}$$

这些奇端同态定义了生成元 $e \in \mathrm{Cl}_{-1}$的作用。包含映射 $g_{\lambda\mu}$ 和奇端同态$e^{\lambda\mu}$ 在三重交集上满足相容性性质。由推论 C.13，我们得到一个映射，映至 KO 谱 (215) 中的第 n 个空间。与 $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}_{>0}$ 相关的开覆盖加细确定了相应 Čech 范畴之间的连续函子；经过实现后，该函子是同伦等价。这导出一对函子 (C.13)，而算子 (217) 的限制给出这两个函子之间的自然同构。根据[Seg68，命题 2.1], ，所得映射 $\mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})$，$\mathrm{Ind}_{\Lambda'}(\mathbb{A})\colon M \to \mathrm{KO}^{-n}$ 彼此同伦。□

在 $\mathcal{H}^{<\lambda}$ 上的联络 $\nabla^{<\lambda}$ 确定了一个 Čech–de Rham 上循环，它表示与 (215) 相关的类的庞特里亚金特征，记作

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}_\Lambda(\mathbb{A})) = [U_\lambda, \mathrm{Ch}(\nabla^{<\lambda})] \in C^*(\{U_\lambda\}, \Omega^\bullet). \tag{218}$$

引理 C.18. 设 $\mathbb{A}$ 是一个具有光滑指标丛的自伴克利福德线性超联络。微分形式 (212) 表明，在 Čech–de Rham 复形中，(218) 与（全局定义的）上循环 $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ 之间存在一个余边界。因此，

$$\widehat{\mathrm{Ind}}_\Lambda(\mathbb{A}) = [\{\mathcal{H}^{<\lambda} \to U_\lambda, \nabla^{<\lambda}, \eta_\lambda, g_{\lambda\mu}, e^{\lambda\mu}\}] \in \widehat{\mathrm{KO}}^n(M) \tag{219}$$

由超联络 $\mathbb{A}$ 得到一个微分上循环。

证明。 Čech–de Rham 余边界由 (213) 得出。微分上循环 (219) 使用了 [BE23b, §7] 中对微分 KO 理论的描述。□

Bismut 超联络是具有光滑指标丛的超联络的主要示例，我们将在下文回顾。

定义 C.19。 秩为 n 的实定向带度量向量丛 $V \to M$ 的一种自旋结构 是一个 $\mathrm{Spin}(n)$-主丛 $P_V \to M$，它配备了一个双覆盖 $P_V \to \mathrm{Fr}(V)$，覆盖 V 的定向标架丛，并且相对于 $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ 是等变的。

V 上自旋结构构成一个范畴（可能为空），其态射是与 V 的标架丛映射相容的主丛同构。对于黎曼流形族 $\pi\colon X \to M$，该族上的自旋结构是垂直切丛 $T(X/M) = \ker(d\pi) \subset TM$ 上的自旋结构。我们将要求由自旋结构构造的两类克利福德模丛。

定义 C.20。对于 $\pi\colon X \to M$一个黎曼流形丛，其中 $T(X/M)$ 具有自旋结构，其旋量丛 为

$$\mathbb{S}_{X/M} = P_{T(X/M)} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Cl}_n. \tag{220}$$

$\mathbb{S}_{X/M}$ 的截面支持一个 M 参数的狄拉克算子族 $\not{D}$，它与左侧 $\mathrm{Cl}_{-n} = \mathrm{Cl}_n^{\mathrm{op}}$ 作用分次对易。

利用 Quillen [Qui85]和 Bismut [Bis86], 的工作，指标丛数据 (210)、(216) 和 (217) 可以细化为一个微分 KO 类。在 $\pi_*(\mathbb{S} \otimes V)$ 上存在一个酉 Cl_{-n} 线性联络 $\nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)}$，它由 $\mathbb{S}$ 上的列维 - 奇维塔联络、 V 上的联络，以及 $\pi\colon X \to M$ [的纤维的平均曲率构造而成，参见 BGV92，命题 9.13]。*Bismut* 超联络 定义为 [，参见 BGV92，命题 10.15]

$$\mathbb{A} = \not{D} \otimes V + \nabla^{\pi_*(\mathbb{S}\otimes V)} - \frac{c(T)}{4} \tag{221}$$

其中， $c(T)$表示由丛 π的曲率二形式 T所给出的克利福德乘法： $X \to M$。Bismut 超联络的这一形式是实的且为 Cl_{-n}-线性的：式 (221) 右侧的三项分别都与 Cl_{-n} 作用对易（算子$c(T)$使用 $\mathrm{Cl}(T(X/M))$ 作用，该作用与 Cl_{-n} 作用对易）。

命题 C.21. 任意有限秩自伴克利福德线性超联络都存在截断函数。与一族克利福德线性狄拉克算子相适配的自伴克利福德线性超联络都存在截断函数。

证明。有限秩情形见 [BGV92，定理 9.7]。对于与狄拉克算子相适配的超联络（不带克利福德作用），这由 [BGV92，命题 9.10 和定理 9.26], 推出；另见 [FL10，§7.2]。将这些结果直接推广到克利福德线性狄拉克算子，见 [BE23b，§8.2-8.3]。□

References

[ABS64] M. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology 3（1964），第 1 号增刊，3–38。[Ati66] M. Atiyah, *K-theory and reality*, The Quarterly Journal of Mathematics 17（1966）。[Bat79] M. Batchelor, *The structure of supermanifolds*, Transactions of the A.M.S. 253（1979）。[BBES21] T. Barthel、D. Berwick-Evans 和 N. Stapleton, *Power operations in the Stolz–Teichner program*, 即将在 2021 Geometry and Topology 发表（）。[BE23a] D. Berwick-Evans, *Chern characters and supersymmetric field theories*, 即将在 Geometry and Topology 发表（2023）。[BE23b] , *The families Clifford index and differential KO-theory*, 预印本（2023）。[BE23c] , *How do field theories detect the torsion in topological modular forms?*, 预印本（2023）。[BEH16] D. Berwick-Evans 和 F. Han, *The equivariant Chern character as super holonomy on loop stacks* 2016 ,

预印本（）。[BEP22] D. Berwick-Evans 和 D. Pavlov, *Smooth one-dimensional topological field theories are vector bundles with connection* 2022 , 即将在 Algebraic and

Geometric Topology 发表（）。[BGV92] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer, 1992。[Bis86] J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs* **83** 1986 ,

Inventiones mathematicae（）。[Che07] P. Cheung, *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 博士论文, 2007。[Cos10] K. Costello, *A geometric construction of the Witten genus I*, International Congress of Mathematicians 会议论文集（2010）。[Cos11a] , *Renormalization and effective field theories*, American Mathematical Society, 2011。[Cos11b] Kevin Costello, *A geometric construction of the Witten genus II*, 预印本（2011）。[DEF+99] P. Deligne、P. Etingof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、J. Morgan、D. Morrison 和 E. Witten, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, Volume 1*, American Mathematical Society, 1999。

[DG20] Dmitri Pavlov、Daniel Grady, *Extended field theories are local and have classifying spaces*, 预印本（2020）。[DH11] Christopher L. Douglas 和 Andr´e G. Henriques, *Topological modular forms and conformal nets*, 《量子场论与微扰弦理论的数学基础》, Proc. Sympos. Pure Math., 第 83 卷, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011 年, 第 341–354 页。[DI04] D. Dugger 和 D. Isaksen, *Topological hypercovers and $\mathbb{A}^1$-realizations*, Math. Z. 246（2004）, 第 4 号。[DK70] P. Donovan 和 M. Karoubi, *Graded brauer groups and K-theory with local coefficients*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.（1970）, 第 38 号。[DM99] P. Deligne 和 J. Morgan, *Notes on supermanifolds*, 《量子场与弦：数学家课程》, 第 1 卷（P. Deligne、P. Etingof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、J. Morgan、D. Morrison 和 E. Witten 编）, American Mathematical Society, 1999。[Dum08] F. Dumitrescu, *Superconnections and parallel transport*, Pacific Journal of Math 236（2008）。[Dum12] , *A geometric view of the Chern character*, 预印本（2012）。[FH21] D. Freed 和 M. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geometry and Topology 25（2021）, 第 3 号。[FHT11] D. Freed、J. Hopkins 和 C. Teleman, *Loop groups and twisted K-theory I*, J. Topol. 4（2011）, 第 4 号, 737–798。[FL10] D. Freed 和 J. Lott, *An index theorem in differential K-theory*, Geometry and Topology 14（2010）。[Fre99] D. Freed, *Five Lectures on Supersymmetry*, American Mathematical Society, 1999。[Fre12] , *Lectures on twisted K-theory and orientifolds*, 维也纳ESI讲座（2012）。[GL15] A. Gorokhovsky 和 J. Lott, *A Hilbert bundle description of differential K-theory*, Advances in Mathematics 328（2015）。[GPPV21] S. Gukov、D. Pei、P. Putrov 和 C. Vafa, *4-manifolds and topological modular forms*, Journal of High Energy Physics 2021（2021）, 第 84 号。[Gun16] S. Gunningham, *Spin Hurwitz numbers and topological quantum field theory*, Geometry and Topology 20（2016）。[Ham82] R. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 7（1982）, 第 1 号, 65–222。[HH92] M. Hopkins 和 M. Hovey, *Spin cobordism determines real K-theory*, Mathematische Zeitschrift 210（1992）。[HK04] P. Hu 和 I. Kriz, *Conformal field theory and elliptic cohomology* **189** 2004 2, , Adv. Math. 325 412 （）, 第 – 号。[HKST11] H. Hohnhold、M. Kreck、S. Stolz 和 P. Teichner, *Differential forms and 0-dimensional super symmetric field theories* **2** 2011 , Quantum Topol（）。[Hol08] J. Hollander, *A homotopy theory for stacks*, Israel Journal of Mathematics 163（2008）, 93–124。[HST10] H. Hohnhold、S. Stolz 和 P. Teichner, *From minimal geodesics to super symmetric field theories* **50** 2010 , CRM Proceedings and Lecture Notes（）。[JFS17] T. Johnson-Freyd 和 C. Scheimbauer, *(Op)lax natural transformations twisted quantum field theories* **307** 2017 , , *and even higher morita categories*, Advances in Mathematics（）。[Kar68] M. Karoubi, *Algébres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1（1968）。[KS21] M. Kontsevich 和 G. B. Segal, *Wick rotation and the positivity of energy in quantum field theory* 2021 , 预印本（）。[Kui65] N. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3（1965）。[LM94] H. Lawson 和 M. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, University Press, 1994。[LS21] M. Ludewig 和 A. Stoffel, *A framework for geometric field theories and their classification in dimension one* **17** 2021 , SIGMA（）。[Mac87] K. Mackenzie, *Lie groupoids and lie algebroids in differential geometry*, Cambridge U. Press, 1987。[MF06] N. Martins-Ferreira, *Pseudo-categories*, J. Homotopy Relat. Struct. 1（2006）。[MS67] H.P. McKean 和 I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry 1（1967）。[Pro96] D. Pronk, *Etendues and stacks as bicategories of fractions*, Compositio Mathematica 102（1996）。[Qui85] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology 24（1985）。[Sch71] H.H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer, 1971。[Seg68] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publications Math´ematiques de l'IH´ES 34（1968）。[Seg88] , *Elliptic cohomology*, S´eminaire N. Bourbaki 695（1988）。[ST04] S. Stolz 和 P. Teichner, *What is an elliptic object?*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. LNS 308, Cambridge Univ. Press（2004）, 247–343。

[ST11] , *Supersymmetric field theories and generalized cohomology*, 量子场论与微扰弦论的数学基础（B. Jurčo、H. Sati、U. Schreiber 编），纯数学研讨会论文集，2011 年。[ST12] , *Traces in monoidal categories*, 美国数学会汇刊 **364** （2012），第 8 期。[Sto19] A. Stoffel, *Supersymmetric field theories from twisted vector bundles*, 数学物理通讯 **367** （2019）。[Thu97] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. vol. 1.*, 普林斯顿大学出版社，1997 年。[Ulr21] P. Ulrickson, *Supersymmetric Euclidean field theories and K-theory*, 几何与物理学杂志 **161** （2021），104015。[Wit82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, 微分几何杂志 **17** （1982），661–692。[Wit88] , *The index of the Dirac operator in loop space*, 代数拓扑中的椭圆曲线与模形式（P. Landweber 编），施普林格·柏林·海德堡，1988 年。