arXiv:2303.09251v1 [math.RT] 16 Mar 2023

Kazhdan-Lusztig 多项式的抛物递归与超立方体分解

MAXIM GUREVICH 和 CHUIJIA WANG

ABSTRACT. 我们采用一般的抛物递归方法，证明了近期提出的关于 S_n 的 Kazhdan–Lusztig 多项式的超立方体公式，并通过代数证明将其推广到有限 Coxeter 系统的完整情形。

我们介绍了在此框架下对 q 导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式进行正分解的方法，并利用 Dyer-Lehrer 和 Grojnowski-Haiman 关于 Hecke 代数正性的经典结果。这为该主题带来了另一种基于从抛物子群归纳的算法方法。

我们提出组合不变性猜想的若干适当弱化版本，并验证了它们对置换群成立。

1. 引言

Kazhdan–Lusztig 多项式是与 Coxeter 群中每一对元素相关联的整数不变量。这些多项式因能够传达群所呈现的对称结构中的复杂细节而闻名，例如李群表示的重数、复代数簇上同调空间的维数，以及赫克代数特殊基之间的过渡矩阵。鉴于其重要性，可以认为，找到有效方法来获取其中编码的信息，并为这些多项式提供具体的算法描述，对于从根本上理解对称性至关重要。

在最近的一项研究 [BBD+22、DVB+21] 中，研究人员运用人工智能方法，针对对称群中一对置换 σ、$\omega \in S_n$ 所对应的 Kazhdan-Lusztig 多项式 $P_{\sigma,\ \omega}$ 解决了这一问题。他们提出了一个新颖的公式，并利用等变交叉上同调的理论工具证明了该公式。该公式涉及所谓的 q-导出 Kazhdan-Lusztig 多项式 $P^{\partial}_{\sigma,\ \omega}$，从中可以轻松提取 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的值。

我们先给出一个临时版本，以便用于后续讨论。我们用$\mathbb{Z}[q]^+$ 表示形式变量 q 的非负系数整系数多项式半环。

定理 1.1. [BBD+22，定理 3.7] 对于 $\sigma,\omega \in S_n$，存在多项式 $Q_{\sigma,\omega} \in \mathbb{Z}[q]^+$和 $I_{\sigma,\omega,\zeta} \in \mathbb{Z}[q]^+$，对所有 $\zeta \in S_{n-1}$，使得

$$P^{\partial}_{\sigma,\omega} = Q_{\sigma,\omega} + \sum_{\zeta \in S_{n-1}} I_{\sigma,\omega,\zeta}$$

日期：2023年3月17日。

成立。$I_{\sigma,\,\omega,\,\zeta}$ 的值可根据群 S_{n-1} 的 Kazhdan-Lusztig 多项式的值，以及布鲁哈特序中 S_n上 $\sigma<\kappa\leq\omega$ 的 $P_{\kappa,\,\omega}$ 的值，通过线性计算得出。

$Q_{\sigma,\,\omega}$ 的值可根据以下数据通过组合方法计算得出：区间 $\{\kappa\in S_n:\ \ \sigma\leq\kappa\leq\omega\}$ 上的布鲁哈特序、陪集 $S_{n-1}\cdot\sigma$ 在该区间中的位置，以及上述 $P_{\kappa,\,\omega}$ 的值。

定理 1.1 中的公式被称为超立方体分解，这是因为产生 $Q_{\sigma,\,\omega}$的算法具有《自然》的特性。随后又有人猜想 [BBD$^+$22，猜想 3.8]，对于后一种计算，所需输入并不需要包含该陪集在布鲁哈特区间中的位置。这一性质将意味着著名的组合不变性猜想（参见第 5 节中的讨论）。

1.1 主要结果。我们的工作旨在将定理 1.1 的公式推广到有限考克斯特群 W 的情形，以取代 S_n；同时，我们还从赫克代数组合学的固有视角阐释并重新证明原来的排列情形。

我们给出一个通用递归过程，用于计算与一对 σ、$\omega\in W$ 相关联的 Kazhdan-Lusztig 多项式，并将其表示为与所选抛物子群 $W_J<W$ 中元素相关联的 Kazhdan-Lusztig 多项式。

定理 1.2。给定一个有限考克斯特群 W 及其考克斯特生成元集合 S，对于每个子集 $J\subseteq S$ 的选取，都存在一组劳朗多项式 $R_{\kappa_1,\,\kappa_2,\,J}\in\mathbb{Z}[q^{1/2},q^{-1/2}]$，对所有 κ_1、$\kappa_2\in W$ 均成立如下结论。

(1) 对所有 σ、$\omega\in W$，都有如下分解：

$$P^{\partial}_{\sigma,\omega}=Q^{J}_{\sigma,\omega}+I^{J}_{\sigma,\omega}\ ,$$

其中 $Q^{J}_{\sigma,\,\omega}$,$I^{J}_{\sigma,\,\omega}\in\mathbb{Z}[q]^+$，因此恒等式

$$Q^{J}_{\sigma,\omega}=\frac{q^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)}}{1-q}d\left(\sum_{\sigma<\kappa\leq\omega}R_{\sigma,\kappa,J}P_{\kappa,\omega}\right)$$

成立。

这里，ℓ 是 W 上的长度函数，d 是劳朗多项式上的环对合，由 $d(q)=q^{-1}$ 给出。

(2) 多项式$I^{J}_{\sigma,\,\omega}$ 可分解为以下各项之和

$$I^{J}_{\sigma,\omega}=\sum_{\kappa\in W_J\,:\,\sigma<\kappa\cdot{}^J\sigma\leq\omega}P^{\partial}_{\sigma_J,\kappa}\gamma'_{\kappa}\ ,$$

其中 $\gamma'_{\kappa}\in\mathbb{Z}[q]^+$，对所有 $\kappa\in W_J=\langle J\rangle$ 均成立（由 J生成的抛物子群）。

这里，$\sigma=\sigma_J{}^J\sigma$与 $\sigma_J\in W_J$和 ${}^J\sigma\in W$是陪集 $W_J\sigma$的最短长度代表元。

（3）多项式组 $\{\gamma'_\kappa\}_{\kappa\in W_J}$ 是以下线性方程组的解

$$(P_{\zeta,\kappa})_{\zeta,\kappa\in W_J}\cdot(\gamma'_\kappa)_{\kappa\in W_J}=(P_{\zeta\cdot J\sigma,\omega})_{\zeta\in W_J}\ ,$$

采用矩阵记法时。

劳朗多项式 $R_{\sigma,\ \omega,\ J}$，我们称之为 J 相对 R 多项式；从上述定理的表述可见，它们在我们的工作中起着至关重要的作用。虽然我们在以往文献中尚未见到对这些多项式的明确研究，但下文将进一步说明，它们如何自然地出现在 Hecke 代数的 Dyer–Lehrer 理论中。

在命题 3.12 中，我们给出了一个抛物递归公式，其中使用 R 多项式，而非 Kazhdan-Lusztig 多项式；后者是 Kazhdan–Lusztig 理论中的常见做法。有趣的是，这种递归形式更易于表述，但无法体现定理 1.2 的正性性质。

我们期待 Brenti-Marietti 即将发表的工作将进一步探讨这种替代递归形式的应用。

回到置换群的情形，我们给出定理 1.1 的一种新证明，该证明仅依赖于[1] Hecke 代数方法。

定理 1.3。设群 S_n 采用标准约定，即考克斯特生成元为简单换位。设 $J=\{(1,2)\ldots,(n-2,n-1)\}\subseteq S_n$ 是考克斯特生成元的一个固定子集。

对于 $\sigma,\omega\in S_n$，令 $\mathcal{P}(\sigma,\omega)$ 表示满足以下两个条件的子集 $B\subseteq\{1,\ldots,n-1\}$ 的集合：

(1) 对于所有 $i\in B$, $\sigma<(i,n)\sigma$ ，在布鲁哈特序中均成立，
(2) ω 是集合 $\{\sigma\}\cup\{(i,n)\sigma\}_{i\in B}$ 在布鲁哈特序中的上确界。

那么，

$$R_{\sigma,\omega,J}=\sum_{B\in\mathcal{P}(\sigma,\omega)}(q-1)^{|B|}$$

成立。

特别是在这种情况下，定理 1.2 的分解与定理 1.1 的超立方体分解一致。

在本文的最后一节，我们旨在刻画抛物递归在探究组合不变性中的作用。

长期以来，人们一直相信（关于近期进展的回顾，见综述 [Bre04], ；或讨论 [BBD+22] ），Kazhdan-Lusztig 多项式 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的值应当能够通过“盲目审视”区间内元素之间的布鲁哈特序结构$\zeta\in W$ 来提取，其中区间的元素位于 $\sigma\le\zeta\le\omega$之间。

为了给这一经典的组合不变性猜想提供可能的阶段性进展，我们提出了两个较弱的变体。回顾分析表明，对于对称群而言，这两个变体均已隐含地作为定理 1.1 的推论得到证明。

[1]定理陈述中关于正性的部分并非通过代数方法推导得出。相反，我们展示了它们如何从赫克代数中早先出现的正性现象 [DL90, GH07] 推导出来；这些现象最初是以几何方法证明的。

猜想 5.2 提出，对于有限 Coxeter 系统（W, S），存在一个子集$J \subsetneq S$，使得$R_{\sigma,\ \omega,\ J}$的取值可以由 σ 与 ω之间区间上的布鲁哈特图，以及图中哪些边来自子群 W_J中的元素这一信息确定。

猜想 5.3 表明，可以为每个 Bruhat 区间图指定一种至多使用 $|S|$ 种颜色的典范着色，从而能够从着色后的有向图中提取 Kazhdan-Lusztig 多项式的值。

以下内容实质上阐述了 [BBD+22] 中的一个核心主题。

定理 1.4（定理 5.8）。猜想 5.2 和猜想 5.3 中提出的两个弱组合不变性猜想，在置换群的情形下均成立。

1.2. 证明方法。我们的主要研究思路重新审视了 Dyer-Lehrer [DL90] 关于赫克代数的理论。

回顾一下，Kazhdan-Lusztig 理论在 [KL79], 中的基本表述涉及与考克斯特系统（W、 S）相关联的赫克代数 $\mathcal{H}(W)$，以及其两个以 W 标记的基：标准基 $\{h_\omega\}_{\omega\in W}$ 和典范基 $\{c_\omega\}_{\omega\in W}$。

按我们的记号，对于每个给定的元素 $\tau \in W$，我们考虑 $\mathcal{H}(W)$ 的扭曲基 $\{h_\tau^{-1}h_{\tau\omega}\}_{\omega\in W}$。Dyer-Lehrer 的一项重要早期发现指出，任意扭曲基与典范基之间的过渡矩阵具有非负系数。

利用连续基变换所导出的恒等式，我们可以运用这一正性结果，并结合 Dyer 对 R-多项式所作的进一步组合分析，阐明由 q 导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式的结构化分解。

因此，在命题 3.3 和推论 3.4 中，我们为 σ、 ω、 $\tau \in W$（此处 W 是有限的）构造多项式族 $I^\tau_{\sigma,\omega} \in \mathbb{Z}[q]^+$，使得对称关系

$$P^\partial_{\sigma,\omega} = I^\tau_{\sigma,\omega} + q^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)-1} d(I^{\omega_0\tau}_{\sigma,\omega}) \ , \tag{1}$$

成立，其中 $\omega_0 \in W$ 是群中的最长元素。

为了得到定理 1.2 的抛物递归公式，我们将 (1) 的分解特化到 $\tau = \omega_0^J$ 的情形，其中 $\omega_0^J \in W_J$ 是抛物子群中的最长元素。

J-相对的 R-多项式由过渡常数定义

$$h_{\omega_0\omega_0^J} h_\omega = \sum_{\sigma\in W} q^{\frac{\ell(\sigma)-\ell(\omega)}{2}} R_{\sigma,\omega,J} h_{\omega_0\omega_0^J\sigma} \ ,$$

，它们对应于 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数 $\mathcal{H}(W)$ 中的基之间。

另一个值得强调的关键方面，是定理 1.2(2) 中所述正分解背后的机制。对于 $\kappa \in W_J$ 而言，多项式 γ'_κ 是赫克代数中先前已研究过的另一种正性现象的一个特例。

Grojnowski-Haiman [GH07] 为 $\mathcal{H}(W)$ 引入了一种 J-混合基，由形如 $c_{\omega_J} h_{J_\omega}$ 的乘积组成；对于每个 $\omega = \omega_J{}^J\omega \in W$，按定理 1.2 中的写法即可得到。他们的主要发现是，将一个典范基元素 c_ω 再次按 J-混合基展开，所得系数仍然非负。在命题 3.7 中，我们证明这些系数恰好就是我们的分解所需的常数。

1.3. 进一步讨论。除了我们在第 5 节提出的猜想之外，我们的结果还提出了若干值得未来研究的自然问题，我们认为有必要将其指出。

首先，值得探究定理 1.2 中的分解是否具有直接的几何解释，类似于最初用于证明定理 1.1 的解释。在 [BBD+22] 中，q-导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式被表示为与舒伯特几何相关的某些射影簇的 Poincaŕe 多项式，而超立方体分解则成为该簇上层的导出范畴中的一个恒等式的去范畴化。能否以这种方式得到抛物递归的更多情形?

其次，除了猜想 5.2 中组合不变性的背景之外，值得思考 J-相对的 R-多项式是否也能在第 4 节所讨论情形以外的其他情形中，拥有像定理 1.3 那样优雅的公式。换言之，在 A 型之外，超立方体会是什么样子?

此外，源自 [DVB+21] 的机器验证表明，定理 1.1 的分解所处的背景比 Coxeter 群中抛物子群的陪集更为一般。若能寻找类似的图论公理化，使其为其他有限 Coxeter 系统导出与定理 1.2 类似的分解，将会很有意思。

最后，我们简要提及一个构成本工作的初始动机的主题。李论中，S_n-Kazhdan-Lusztig 多项式的一种体现，是 A 型拟遗传 Hecke 代数表示论中的分次分解数（例如参见 [BK09]）。非分次变体延伸到 p-进 Kazhdan-Lusztig 猜想 [Zel81], ；而其去范畴化变体，则相当于描述量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)^+$ [Lus90] 中 PBW 基与典范基之间的变换。

这一背景与超立方体分解相关，是因为量子群 Hecke 代数的真标准模，其分解为简单构成因子的方式由 S_n-Kazhdan-Lusztig 多项式给出，而这些模是按照 [KR11] 的意义，由 n 尖点[2] 模卷积构造而成。因此，与另一个尖点模进行卷积的函子，充当从S_n 的谱理论到其抛物子群 S_{n-1}的谱理论之间的归纳步骤。

从这个意义上说，定理 1.1 可以实现范畴化，并将在一项即将发表的工作中完成。然而，我们提出这样一个问题：是否存在其他李论背景，能够为定理 1.2 的抛物递归提供范畴论基础?

1.4. 致谢。第一作者谨向奥伯沃尔法赫 2022年8月举办的“特征理论与范畴化”研讨会组织者致谢，感谢他们提供了展示与本研究相关成果的平台，并使作者得以获得宝贵的反馈。

感谢 Geordie Williamson 分享他对这一主题的见解，这为本项目提供了最初的大部分动力。

第一作者感谢 Martina Lanini 的宝贵讨论，并感谢她在罗马第二大学接待其访问。我们向弗朗切斯科

[2]请勿与 p-进意义下的尖点性混淆。

·布伦蒂和 Mario Marietti 致谢，感谢他们分享对新兴超立方体主题的见解；同时感谢 GastonBurrull 为我们介绍了必要的背景资料。

我们特别感谢 Nicol´as Libedinsky 指引我们注意到 Grojnowski-Haiman 的工作与本研究主题相关这一关键观察。

本研究由以色列科学基金会资助（资助编号：737/20）。

2. Preliminaries

2.1. Hecke 代数与 Kazhdan-Lusztig 多项式。 令 $\mathcal{L} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 为形式变量 v 的劳朗多项式环，$\mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}$ 为其由系数为正的劳朗多项式构成的子半环。

按照惯例，在全文中固定记号 $\alpha = v^{-1} - v, q = v^{-2} \in \mathcal{L}$。我们记 $d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 为由 $d(v) = v^{-1}$ 给出的环对合。显然，$d(\alpha) = -\alpha$。

Let (W, S) 是一个有限 Coxeter 系统 (也就是说，假设群 W 是有限的).

我们记 $\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为其长度函数，$\omega_0 \in W$ 为其最长元素，$e \in W$ 为其单位元。我们还在 W 上赋予相对于 S 的 Bruhat偏序，记作 $\leq$。

令 $\mathcal{H}(W)$ 表示与 (W, S) 相关联的 Hecke 代数。这是一个由标准基 $\{h_\omega\}_{\omega \in W}$[3] 张成的 $\mathcal{L}$-代数，其乘法关系为

$$h_{\omega_1} h_{\omega_2} = h_{\omega_1 \omega_2}, \quad \text{for all } \omega_1, \omega_2 \in W, \text{ such that } \ell(\omega_1) + \ell(\omega_2) = \ell(\omega_1 \omega_2) \ ,$$

$$(h_s + v)(h_s - v^{-1}) = 0, \quad \text{for all } s \in S \ .$$

关于该理论基础知识的一部综合性参考文献是 [Soe97]。

通过基的对偶来表述基本的 Kazhdan-Lusztig 理论会很方便。

我们将对偶的 $\mathcal{L}$-模记为

$$\mathcal{H}(W)^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{H}(W), \mathcal{L})$$

其自然配对为 $\langle , \rangle : \mathcal{H}(W)^* \times \mathcal{H}(W) \to \mathcal{L}$。

$\mathcal{H}(W)^*$ 的对偶标准基 $\{h^\omega\}_{\omega \in W}$ 则由下式给出

$$\langle h^{\omega'}, h_\omega \rangle = \delta_{w,w'}, \forall \omega, \omega' \in W \ .$$

我们也用 d 表示 $\mathcal{H}(W)$ 的环对合，其定义如下:

$$d(v) := v^{-1}, d(h_\omega) := (h_{\omega^{-1}})^{-1} \ \forall \omega \in W \ ,$$

它扩展了此前在 $\mathcal{L}$上定义的对合。

根据 [KL79], , 存在唯一的基 $\{c_\omega\}_{\omega \in W}$, 其特征性质为

$$d(c_\omega) = c_\omega, \quad \langle h^\omega, c_\omega \rangle = 1, \quad \langle h^\sigma, c_\omega \rangle \in v\mathbb{Z}[v] \subseteq \mathcal{L} \ , \forall \sigma, \omega \in W \ .$$

我们将（未归一化的）Kazhdan–Lusztig 多项式（与 (W, S) 相关）定义为

$$\check{P}_{\sigma,\omega} = \langle h^\sigma, c_\omega \rangle \in \mathcal{L} \ ,$$

对所有 $\sigma, \omega \in W$。

[3]文献中常见的另一种归一化方式为 $T_\omega := v^{-\ell(\omega)} h_\omega$。

源自著名几何解释的通用归一化，将 Kazhdan-Lusztig 多项式定义为满足以下条件的元素 $P_{\sigma,\ \omega} \in \mathbb{Z}[q] \subseteq \mathcal{L}$

$$P_{\sigma,\omega} = v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)} \check{P}_{\sigma,\omega} \ .$$

根据计算需要，在归一化记法和未归一化记法之间切换将很有用。

ˇ我们回顾，$P_{\sigma,\ \omega} = P_{\sigma,\ \omega} = 0$，除非 $\sigma \leq \omega$。

2.2. R-多项式和 q-导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式。Kazhdan-Lusztig 多项式中编码的信息，往往可以通过类似的 R-多项式概念来获取；现在我们回顾其相关性。

令 d^* 表示 $\mathcal{H}(W)^*$ 上的 $\mathcal{L}$-线性对合，其定义为

$$d^*(\phi) := d \circ \phi \circ d, \ \forall \phi \in \mathcal{H}(W)^* \ .$$

我们定义 R-多项式

$$\check{R}_{\sigma,\omega} = \langle d^*(h^\sigma), h_\omega \rangle \in \mathcal{L} \ ,$$

对于所有 $\sigma, \omega \in W$。同样，将这一概念归一化也是一种常见约定：

$$R_{\sigma,\omega} = v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)} \langle d^*(h^\sigma), h_\omega \rangle \in \mathcal{L} \ .$$

ˇ 与 Kazhdan–Lusztig 多项式一样，容易证明 $R_{\sigma,\ \omega} = R_{\sigma,\ \omega} = 0$，除非 $\sigma \leq \omega$。

显然，基 $\{d^*(h^\omega)\}_{\omega \in W}$是 $\mathcal{H}(W)^*$的对偶基。因此，考虑到基 $\{c_\omega\}_{\omega \in W}$ 是 d-不变量，可得恒等式

(2)
$$d(\check{P}_{\sigma,\omega}) = \langle d^*(h^\sigma), c_\omega \rangle = \sum_{\kappa \in W} \langle d^*(h^\sigma), h_\kappa \rangle \langle h^\kappa, c_\omega \rangle = \sum_{\sigma \leq \kappa \leq \omega} \check{R}_{\sigma,\kappa} \check{P}_{\kappa,\omega} = v^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)} \sum_{\sigma \leq \kappa \leq \omega} R_{\sigma,\kappa} P_{\kappa,\omega}$$

由此得到。

由此引出了 q-导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式这一概念，其未归一化变体定义如下：

$$\check{P}^{\partial}_{\sigma,\omega} = \alpha^{-1} \langle d^*(h^\sigma) - h^\sigma, c_\omega \rangle = \frac{d(\check{P}_{\sigma,\omega}) - \check{P}_{\sigma,\omega}}{v^{-1} - v} \in \mathcal{L} \ ,$$

对于 σ、$\omega \in W$。

注意，ˇ$P^{\partial}_{\sigma,\ \omega}$ 是定义良好的 d-不变量劳朗多项式。出于计算目的，ˇ$P_{\sigma,\ \omega}$ 属于环 $v\mathbb{Z}[v]$ 这一事实，使得 d(ˇ$P_{\sigma,\ \omega}$) 属于环$v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$ ，并且可以直接从 ˇ$P^{\partial}_{\sigma,\ \omega}$的值中提取 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的值。

q派生的 Kazhdan–Lusztig 多项式的归一化变体可表示为劳朗多项式

$$P^{\partial}_{\sigma,\omega} = v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)+1} \check{P}^{\partial}_{\sigma,\omega} = \frac{q^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)} d(P_{\sigma,\omega}) - P_{\sigma,\omega}}{q-1} \in \mathbb{Z}[q] \ .$$

由于对于所有 $\sigma \in W$，$R_{\sigma,\sigma} = 1$，现在可以将恒等式 (2) 理解为

$$P^{\partial}_{\sigma,\omega} = \frac{1}{q-1} \sum_{\sigma < \kappa \leq \omega} R_{\sigma,\kappa} P_{\kappa,\omega} \ . \tag{3}$$

事实上，上述形式常被用作递归计算 Kazhdan–Lusztig 多项式的标准方法。

3. Positive decompositions

3.1. Dyer-Lehrer 基。按照 Dyer-Lehrer [DL90]，我们定义这些元素

$$f_{\omega,\tau} := h_\tau^{-1} h_{\tau\omega} \in \mathcal{H}(W) \ ,$$

对于 $\omega, \tau \in W$。对于固定的 $\tau \in W$，$\{f_{\omega,\tau}\}_{\omega \in W}$ 显然是 $\mathcal{H}(W)$ 的一组基。我们将其在 $\mathcal{H}(W)^*$ 中的对偶基记作 $\{f^{\omega,\tau}\}_{\omega \in W}$。

由于对于任意 $\omega \in W$，我们有 $\ell(\omega_0\omega) + \ell(\omega^{-1}) = \ell(\omega_0)$，因此 $h_{\omega_0\omega} h_{\omega^{-1}} = h_{\omega_0}$，由此可得

$$f_{\omega,\omega_0} = h_{\omega_0}^{-1} h_{\omega_0\omega} = h_{\omega^{-1}}^{-1} = d(h_\omega) \ . \tag{4}$$

此外，对于所有的 ω、$\tau \in W$，我们有

$$d(f_{\omega,\tau}) = d(h_\tau)^{-1} d(h_{\tau\omega}) = f_{\tau,\omega_0}^{-1} f_{\tau\omega,\omega_0} = (h_{\omega_0}^{-1} h_{\omega_0\tau})^{-1} h_{\omega_0}^{-1} h_{\omega_0\tau\omega} = f_{\omega,\omega_0\tau} \ .$$

特别地，

$$d^*(f^{\omega,\tau}) = f^{\omega,\omega_0\tau} \tag{5}$$

在 $\mathcal{H}(W)^*$ 中成立。

本小节后续分析的大部分内容隐含在 Dyer 的著作 [Dye93] 中。为使讨论更加清晰，我们倾向于将论证完整地呈现出来。

引理 3.1. 设给定 $\tau \in W$，且 $s \in S$ 是一个简单反射，使得 $\tau < s\tau$ 成立。记 $t = \tau^{-1} s \tau \in W$。那么，对于所有 $\omega \in W$，我们有如下等式

$$f_{\omega,s\tau} = \begin{cases} f_{\omega,\tau} & t\omega > \omega \\ f_{\omega,\tau} - \alpha f_{t\omega,\tau} & t\omega < \omega \end{cases} \ ,$$

在 $\mathcal{H}(W)$ 中，或对偶地，在 $\mathcal{H}(W)^*$ 中，

$$f^{\omega,s\tau} = \begin{cases} f^{\omega,\tau} & t\omega > \omega \\ f^{\omega,\tau} + \alpha f^{t\omega,\tau} & t\omega < \omega \end{cases} \ .$$

证明。假设 $t\omega > \omega$成立。由于 $\tau t > \tau$，根据 Coxeter 群的一个众所周知的性质（[BB05, 引理 2.2.10]），我们有 $s\tau\omega = \tau t\omega > \tau\omega$。因此，

$$f_{\omega,s\tau} = (h_s h_\tau)^{-1} (h_s h_{\tau\omega}) = f_{\omega,\tau} \ .$$

类似地，当 $t^2\omega > t\omega$时，我们有 $\tau\omega = \tau t^2 \omega > \tau t\omega = s\tau\omega$。因此，在后一种情况下，我们得到

$$h_{\tau t\omega} = h_s^{-1} h_{\tau\omega} = (h_s - \alpha) h_{\tau\omega} = h_s (h_{\tau\omega} - \alpha h_{\tau t\omega}) \ ,$$

这意味着 $f_{\omega,\ s\tau} = (h_s h_\tau)^{-1} h_{\tau t\omega} = h_\tau^{-1} (h_{\tau\omega} - \alpha h_{\tau t\omega})$。

最后一个恒等式成立，因为 $f_{t\omega,\ s\tau} = f_{\omega,\ \tau}$ 与前一种情况相同。

□

令 $T \subseteq W$ 表示 Coxeter 群中的反射集合，即 $T = \bigcup_{\omega \in W} \omega S \omega^{-1}$。对于 τ、$\kappa \in W$，若元组 t_1、…、$t_k \in T$满足 $\kappa = \tau t_1 \dots t_k$，且对所有 $1 \le i \le k$，都有$\ell(\tau t_1 \dots t_i) = \ell(\tau) + i$，则称其为 (τ, κ)-凸的。

可以证明，若 $t_1, \dots, t_k \in T$构成一个 (τ, κ)-凸序列，则所有 t_i 彼此不同。

一个 (e, ω_0)-凸元组相当于对 T的线性序。这些序称为反射序，或称为与 W相关联的根系中正根的凸序；这里假设 W 是魏尔群。

上述概念与 W 上的弱（左）布鲁哈特序 $\le_L$ 自然存在联系。回顾一下，当可以将 $\kappa = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k \tau$写成$s_1, \dots, s_k \in S$，且 $\ell(\kappa) = \ell(\tau) + k$时，$\tau \le_L \kappa$ 成立。

现在 很容易得出，$\tau <_L \kappa$ 成立当且仅当存在一个 (τ, κ)-凸元组 .

命题 3.2. 设 $t_1, \dots, t_k \in T$ 是一个固定的 (τ, κ)-凸元组。

那么，对于所有互不相同的 $\sigma, \omega \in W$，公式

$$\langle f^{\sigma,\tau}, f_{\omega,\kappa} \rangle = \sum_{\rho \in A(\sigma,\omega)} (-\alpha)^{n(\rho)}$$

成立，其中 $A(\sigma, \omega)$ 是所有满足以下条件的序列 $\rho = (1 \le i_1 < \ldots < i_{n(\rho)} \le k)$ 的集合：

$$\omega = t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_{n(\rho)}} \sigma > t_{i_2} \cdot \ldots \cdot t_{i_{n(\rho)}} \sigma > \ldots > t_{i_{n(\rho)}} \sigma > \sigma$$

该条件成立。

In addition, we have $\langle f^{\omega,\tau}, f_{\omega,\kappa} \rangle = 1$*, for all* $\omega \in W$*.*

证明。递归应用引理 3.1 可得

$$f_{\omega,\kappa} = f_{\omega,\tau t_1 \cdots t_k} = f_{\omega,\tau} + \sum_{\rho = (i_1, \dots, i_{n(\rho)}) \in A(\omega)} (-\alpha)^{n(\rho)} f_{t_{i_{n(\rho)}} \cdot \ldots \cdot t_{i_1} \omega, \tau} \ ,$$

其中 $A(\omega)$ 表示所有满足以下条件的序列 $\rho = (1 \le i_1 < \ldots < i_{n(\rho)} \le k)$：

$$\omega > t_{i_1} \omega > t_{i_2} t_{i_1} \omega > \ldots > t_{i_{n(\rho)}} \cdot \ldots \cdot t_{i_1} \omega \ .$$

换言之，$A(\omega) = \sqcup_{\sigma \in W} A(\sigma, \omega)$。

□

3.2. Dyer 过滤。对于给定的元素 $\tau, \sigma \in W$，根据 (5) 我们可以写成

$$d^*(h^\sigma) - h^\sigma = (f^{\sigma,\tau} - h^\sigma) - d^*(f^{\sigma,\omega_0 \tau} - h^\sigma) \in \mathcal{H}(W)^* \ .$$

由此可知，对于所有 $\tau, \sigma, \omega \in W$，我们可以将 q-导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式分解为以下形式

$$\check{P}^{\partial}_{\sigma,\omega} = \check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} + \check{Q}^{\tau}_{\sigma,\omega} = \check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} + d(\check{I}^{\omega_0 \tau}_{\sigma,\omega}) \ , \tag{6}$$

其中

$$\check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} := \alpha^{-1} \langle f^{\sigma,\tau} - h^\sigma, c_\omega \rangle \in \mathcal{L} \ ,$$

$$\check{Q}^{\tau}_{\sigma,\omega} := -\alpha^{-1} \langle d^*(f^{\sigma,\omega_0 \tau} - h^\sigma), c_\omega \rangle = d(\alpha^{-1} \langle f^{\sigma,\omega_0 \tau} - h^\sigma, c_\omega \rangle) \in \mathcal{L} \ .$$

最后一个等式利用了 c_ω 是 d-不变量这一事实。

由 (4) 可知 $\check{}I^{\omega_0}_{\sigma,\omega} = \check{}Q^{e}_{\sigma,\omega} = \check{}P^{\omega_0}_{\sigma,\omega}$ 和 $\check{}I^{e}_{\sigma,\omega} = \check{}Q^{\omega_0}_{\sigma,\omega} = 0$。因此，下面的命题阐明了多项式族 $\{\check{}I^{\tau}_{\sigma,\omega}\}_{\tau\in W}$ 作为 q-导出的 Kazhdan-Lusztig 多项式的滤过的意义。

命题 3.3. 对所有满足 $\tau_1 \leq_L \tau_2$ 的 $\sigma,\omega,\tau_1,\tau_2 \in W$，我们有单调性性质

$$\check{I}^{\tau_2}_{\sigma,\omega} - \check{I}^{\tau_1}_{\sigma,\omega} \in \mathcal{L}^+ .$$

˘˘ 证明。只需假设 $\tau_1 < \tau_2 = s\tau_1$，其中 $s \in S$。现在，由引理 3.1，$I^{\tau_2}_{\sigma',\omega} - I^{\tau_1}_{\sigma',\omega}$ 对于 $\sigma' = \tau_1^{-1} s\tau_1\sigma \in W$ 等于 0 或 $f^{\sigma',\tau_1}(c_\omega)$。正性现由 [DL90] 得出。

□

推论 3.4. 对所有 $\sigma,\omega,\tau \in W$，$\check{}I^{\tau}_{\sigma,\ \omega}$ 和 $\check{}Q^{\tau}_{\sigma,\ \omega}$ 均属于 $\mathcal{L}^+$。

˘˘ 证明。由于 $I^{e}_{\sigma,\ \omega} = 0$，关于 $I^{\tau}_{\sigma,\ \omega}$ 的结论可由命题 3.3 得出。对合d显然保持 $\mathcal{L}^+$。

□

注意到，与 (3) 类似，我们可以写成

$$\check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} = \alpha^{-1} \sum_{\sigma<\kappa\leq\omega} \langle f^{\sigma,\tau}, h_\kappa\rangle \check{P}_{\kappa,\omega} ,$$

and

$$\check{Q}^{\tau}_{\sigma,\omega} = -\alpha^{-1} \sum_{\sigma<\kappa\leq\omega} \langle f^{\sigma,\tau}, d(h_\kappa)\rangle d(\check{P}_{\kappa,\omega}) .$$

因此可见，对于固定的 $\tau \in W$，通过计算 $\langle f^{\kappa_1,\ \tau}、\ h_{\kappa_2}\rangle$ 和 $\langle f^{\kappa_1,\ \tau}、\ d(h_{\kappa_2})\rangle$ 在 $\sigma \leq \kappa_1 < \kappa_2 \leq \omega$ 下的值，可以得到 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的递归公式。

我们还引入归一化变体

$$I^{\tau}_{\sigma,\omega} := v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)+1}\check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega}, \quad Q^{\tau}_{\sigma,\tau} := v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)+1}\check{Q}^{\tau}_{\sigma,\omega} = v^{2(\ell(\sigma)-\ell(\omega))+2} d(I^{\tau}_{\sigma,\omega}) \in \mathcal{L} ,$$

使得

$$P^{\partial}_{\sigma,\omega} = I^{\tau}_{\sigma,\omega} + Q^{\tau}_{\sigma,\omega}$$

对所有的 σ、ω、$\tau \in W$，均成立。

3.3. 抛物递归公式——I。我们希望考察形如 (6) 的分解的一些特殊情形；这类分解给出了一个算法，能够递归地求出秩更小的 Coxeter 群的 Kazhdan-Lusztig 多项式的值，也就是说，求出 W 的某个抛物子群的 Kazhdan-Lusztig 多项式的值。

对于由简单反射组成的子集 $J \subseteq S$，我们将由 J 生成的（抛物）子群记为 $W_J < W$。

回想一下，$W_J \backslash W$ 中的每个陪集都包含唯一一个最短长度元素。令 ${}^JW \subseteq W$ 为这个陪集空间中所有此类最短长度代表元组成的集合。

对于 $\omega \in W$，现在我们可以将 $\omega = \omega_J {}^J\omega$写作唯一的元素 $\omega_J \in W_J$和 ${}^J\omega \in {}^JW$。沿用 Grojnowski-Haiman [GH07], ，我们定义这些元素

$$h_{\omega,J} := c_{\omega_J} h_{{}^J\omega} \in \mathcal{H}(W) ,$$

它们给出了 $\mathcal{H}(W)$ 的 J-混合基 $\{h_{\omega,J}\}_{\omega\in W}$。我们将其在 $\mathcal{H}(W)^*$ 中的对偶基记为 $\{h^{\omega,J}\}_{\omega\in W}$。

这是 [GH07] 的一个推论：

$$\check{\gamma}^J_{\sigma,\omega} := \langle h^{\sigma,J}, c_\omega\rangle \in \mathcal{L}^+ ,$$

对所有 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，

让我们考察 J-混合基相对于 Dyer-Lehrer 基族的行为，尤其是相对于标准基的行为。

引理 3.5. 对所有 $\tau \in W_J$ 和 σ、$\omega \in W$，有

$$\langle f^{\sigma,\tau}, h_{\omega,J}\rangle = \begin{cases} \langle f^{\sigma_J,\tau}, c_{\omega_J}\rangle & {}^J\sigma = {}^J\omega \\ 0 & {}^J\sigma \neq {}^J\omega \end{cases} .$$

证明。注意到 $f_{\zeta,\ \tau} = f_{\zeta_J,\ \tau}h_{J_\zeta}$ 对所有 $\zeta \in W$ 均成立。由于 $\ell(\tau\zeta) = \ell(\tau\zeta_J) + \ell({}^J\zeta)$，该恒等式可由对方程

$$c_{\omega_J} = \sum_{\upsilon\in W_J} \langle f^{\upsilon,\tau}, c_{\omega_J}\rangle f_{\upsilon,\tau}$$

由右侧的 h_{J_ω}。 □

以下命题指出，$\check{\gamma}^J_{\sigma,\ \omega}$ 可由群 W 和 W_J对应的 Kazhdan-Lusztig 多项式的值线性计算得出。

为了以归一化的方式表述这一点，我们引入 Grojnowski-Haiman 多项式的归一化变体：对所有 σ、$\omega \in W$和$J \subseteq S$，定义 $\gamma^J_{\sigma,\ \omega} := v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)}\check{\gamma}^J_{\sigma,\ \omega}$。

命题 3.6. 对所有 σ、$\omega \in W$，有

$$\sum_{\kappa\in W_J} P_{\sigma_J,\kappa}\gamma^J_{\kappa\cdot J\sigma,\omega} = P_{\sigma,\omega} .$$

特别地，对于固定的 $\upsilon \in {}^JW$，我们可以用矩阵记法写成

$$(P_{\zeta,\kappa})_{\zeta,\kappa\in W_J}\cdot(\gamma^J_{\kappa\upsilon,\omega})_{\kappa\in W_J} = (P_{\zeta\upsilon,\omega})_{\zeta\in W_J} .$$

证明。由引理 3.5（取 $\tau = e$），

$$\langle h^\sigma, c_\omega\rangle = \sum_{\kappa'\in W}\langle h^\sigma, h_{\kappa',J}\rangle\langle h^{\kappa',J}, c_\omega\rangle = \sum_{\kappa\in W_J}\langle h^{\sigma_J}, c_\kappa\rangle\langle h^{\kappa\cdot J\sigma,J}, c_\omega\rangle .$$

归一化得出这些结果，注意对于 $\kappa \in W_J$，

$$\begin{aligned}\ell(\sigma) - \ell(\omega) &= \ell(\sigma_J) + \ell({}^J\sigma) - \ell(\omega)\\ &= \ell(\sigma_J) - \ell(\kappa) + \ell(\kappa) + \ell({}^J\sigma) - \ell(\omega)\\ &= (\ell(\sigma_J) - \ell(\kappa)) + (\ell(\kappa\cdot{}^J\sigma) - \ell(\omega)) .\end{aligned}$$

□

命题 3.7. 对于 $\tau \in W_J$ 和 σ、$\omega \in W$，我们有如下分解

$$\check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma < \kappa \cdot^J \sigma \leq \omega} \check{I}^{\tau}_{\sigma_J,\kappa} \check{\gamma}^J_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega} \ ,$$

and

$$I^{\tau}_{\sigma,\omega} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma < \kappa \cdot^J \sigma \leq \omega} I^{\tau}_{\sigma_J,\kappa} \gamma^J_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega} \ ,$$

其中每个加项都属于 $\mathcal{L}^+$。

证明。在 与命题 3.6 证明中的论证类似，我们可以写成 e

$$\check{I}^{\tau}_{\sigma,\omega} = \alpha^{-1} \sum_{\kappa \in W_J} \langle f^{\sigma_J,\tau} - h^{\sigma_J}, c_\kappa \rangle \langle h^{\kappa \cdot^J \sigma, J}, c_\omega \rangle \ ,$$

并对归一化变体重复同样的证明论证。 □

设 $w_0^J \in W_J$ 表示抛物子群中的最长元素 p.

对于任意的 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，我们将这些元素记作

$$I^J_{\sigma,\omega} := I^{\omega_0^J}_{\sigma,\omega}, \quad Q^J_{\sigma,\omega} := Q^{\omega_0^J}_{\sigma,\omega}, \quad \check{I}^J_{\sigma,\omega} := \check{I}^{\omega_0^J}_{\sigma,\omega}, \quad \check{Q}^J_{\sigma,\omega} := \check{Q}^{\omega_0^J}_{\sigma,\omega} \ \in \mathcal{L}^+ \ .$$

推论 3.8. 对于 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，有

$$I^J_{\sigma,\omega} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma < \kappa \cdot^J \sigma \leq \omega} P^{\partial}_{\sigma_J,\kappa} \gamma^J_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega} \ .$$

证明。将 $I^{\omega_0^J}_{\sigma_J,\ \kappa}$（其中 $\sigma \in W$ 和 $\kappa \in W_J$）视为由代数 $\mathcal{H}(W_J)$ 定义的多项式，可以得出等式 $I^{\omega_0^J}_{\sigma_J,\ \kappa} = P^{\partial}_{\sigma_J,\ \kappa}$，它由式 (4) 得出。因此，该结论由命题 3.7 得证。

□

既然已将 $I^J_{\sigma,\ \omega}$ 表示为依赖于抛物子群 W_J 的递归形式，我们希望通过一种与熟知恒等式 (3) 类似的递归，来描述余项 $Q^J_{\sigma,\ \omega} = P^{\partial}_{\sigma,\ \omega} - I^J_{\sigma,\ \omega}$。

对于 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，我们将 J-相对 R-多项式定义为

$$\check{R}_{\sigma,\omega,J} := \langle f^{\sigma,\omega_0\omega_0^J}, h_\omega \rangle = d(\langle f^{\sigma,\omega_0^J}, d(h_\omega) \rangle) \in \mathcal{L} \ ,$$

最后一个等式是由 (4) 推出的，以及它们的归一化变体

$$R_{\sigma,\omega,J} := v^{\ell(\sigma)-\ell(\omega)} \check{R}_{\sigma,\omega,J} \ .$$

注意，$R_{\sigma,\ \omega,\ \emptyset} = R_{\sigma,\ \omega}$、$R_{\sigma,\ \omega,\ S} = \delta_{\sigma,\ \omega}$。

现在很容易看出 (3) 的类似结果成立。

命题 3.9. 对所有 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，恒等式

$$Q^J_{\sigma,\omega} = \frac{q^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)}}{1-q} d\left(\sum_{\sigma < \kappa \leq \omega} R_{\sigma,\kappa,J} P_{\kappa,\omega} \right)$$

成立。

证明。利用事实 $\check{Q}^J_{\sigma,\omega} = d(\check{I}^{\omega_0\omega_0^J}_{\sigma\ \omega})$ 和 $R_{\sigma,\sigma,J} = 1$ (命题 3.2)，这就是该等式的规范化形式

$$\langle f^{\sigma,\omega_0\omega_0^J} - h^\sigma, c_\omega\rangle = \sum_{\kappa\in W}\langle f^{\sigma,\omega_0\omega_0^J}, h_\kappa\rangle\langle h^\kappa, c_\omega\rangle - \langle h^\sigma, c_\omega\rangle = \sum_{\sigma<\kappa\le\omega}\langle f^{\sigma,\omega_0\omega_0^J}, h_\kappa\rangle\langle h^\kappa, c_\omega\rangle\ .$$

□

我们的主要结果定理 1.2 现在可由推论 3.8 和命题 3.9 直接推出。

注 3.10. 定理 1.2（以及引理 3.6）的一个显然推论是这样一种算法：给定 σ、$\omega\in W$，利用多项式 $R_{\sigma,\ \zeta,\ J}$ 对 $\sigma<\zeta\le\omega$ 的取值，以及 $P_{\zeta,\ \omega}$ 对 $P_{\sigma_J,\ \kappa}$ 的取值，其中 $c\in W_J$ 是满足 $c\cdot{}^J\sigma\le\omega$ 的最大元素，即可计算 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的值。

3.4. 抛物递归公式——II. 让我们重新审视 Kazhdan-Lusztig 理论中一个熟悉的主题：由恒等式 (3) 可知，多项式 $P_{\sigma,\ \omega}$ 的计算可以递归地转化为多项式 $R_{\sigma,\ \omega}$ 的计算。尽管在这一过程中，通常会失去对情形的几何处理方法及其带来的强正性优势，但命题 3.2 中这类较简单的算法公式或许更具优势。

事实上，定理 1.2 中关于 J-相对 R-多项式的分解，也可以在不显式使用 Kazhdan-Lusztig 基 $\{c_\omega\}_{\omega\in W}$ 的情况下表述。

为此，我们先来考察引理 3.5 中这一现象的一个自然推广，该推广不涉及 J-混合基。

引理 3.11. 对任意 σ、$\omega\in W$、$J\subseteq S$ 以及 τ、$\kappa\in W_J$，有

$$\langle f^{\sigma,\tau}, f_{\omega,\kappa}\rangle = \begin{cases}\langle f^{\sigma_J,\tau}, f_{\omega_J,\kappa}\rangle & {}^J\sigma = {}^J\omega\\ 0 & {}^J\sigma\ne{}^J\omega\end{cases}\ .$$

因此，

$$\langle f^{\sigma,\omega_0}, f_{\omega,\omega_0\omega_0^J}\rangle = \begin{cases}\check{R}_{\sigma_J,\omega_J} & {}^J\sigma = {}^J\omega\\ 0 & {}^J\sigma\ne{}^J\omega\end{cases}$$

成立，并且 $\langle f^{\sigma,\ \omega_0\omega_0^J}, f_{\omega,\omega_0}\rangle = d(\langle f^{\sigma,\ \omega_0}, f_{\omega,\omega_0\omega_0^J}\rangle)$.

证明。第一个结论的证明与引理 3.5 的证明相同，只需作相应调整。由此可得

$$\begin{aligned}\langle f^{\sigma,\omega_0}, f_{\omega,\omega_0\omega_0^J}\rangle &= d\left(\langle d^*(f^{\sigma,\omega_0}), d(f_{\omega,\omega_0\omega_0^J})\rangle\right)\\ &= d\left(\langle h^\sigma, f_{\omega,\omega_0^J}\rangle\right)\\ &= \begin{cases} d\left(\langle h^{\sigma_J}, f_{\omega_J,\omega_0^J}\rangle\right) & {}^J\sigma = {}^J\omega\\ 0 & {}^J\sigma\ne{}^J\omega\end{cases},\end{aligned}$$

˘ 请记住，h_{ω_J}在代数 $\mathcal{H}(W_J)$ 的 d-对合下映射为 $f_{\omega_J,\ \omega_0^J}$，由此得到 $R_{\sigma_J,\ \omega_J}$的表达式。

最后一个等式由类似的考量得出。 □

命题 3.12. 对所有 σ、$\omega \in W$ 和 $J \subseteq S$，公式

$$\check{R}_{\sigma,\omega} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma \le \kappa \cdot^J \sigma \le \omega} \check{R}_{\sigma_J,\kappa} \check{R}_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega,J}, \quad R_{\sigma,\omega} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma \le \kappa \cdot^J \sigma \le \omega} R_{\sigma_J,\kappa} R_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega,J}$$

成立。

逆关系

$$R_{\sigma,\omega,J} = \sum_{\kappa \in W_J \,:\, \sigma \le \kappa \cdot^J \sigma \le \omega} d(R_{\sigma_J,\kappa}) R_{\kappa \cdot^J \sigma,\omega}$$

同样成立。

证明。由引理 3.11，这些恒等式归结为

$$\langle f^{\sigma,\omega_0}, h_\omega \rangle = \sum_{\kappa' \in W} \langle f^{\sigma,\omega_0}, f_{\kappa',\omega_0 \omega_0^J} \rangle \langle f^{\kappa',\omega_0 \omega_0^J}, h_\omega \rangle \ ,$$

其中归一化常数如命题 3.6 的证明中那样相互抵消。

对于逆关系，我们改变基变换的顺序，得到

$$\langle f^{\sigma,\omega_0 \omega_0^J}, h_\omega \rangle = \sum_{\kappa' \in W} \langle f^{\sigma,\omega_0 \omega_0^J}, f_{\kappa',\omega_0} \rangle \langle f^{\kappa',\omega_0}, h_\omega \rangle \ ,$$

并应用引理 3.11 陈述中的最后一个等式。

□

通过抛物子群的嵌套链简化上述恒等式，有助于论证 J-相对 R-多项式可视为 Kazhdan-Lusztig 多项式的计算构件。下面明确说明这一观点。

给定一条链 $\emptyset = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \ldots \subsetneq J_r = S$和 $\sigma \in W$，记唯一分解为 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r$，使得 $\sigma_i \in {}^{J_{i-1},\, J_i}W$，其中 ${}^{J_{i-1},\, J_i}W \subseteq W_{J_i}$表示陪集空间 $W_{J_{i-1}} \setminus W_{J_i}$的最短长度代表元集合。

推论 3.13。对于所有满足 σ 如上所述分解的 $\sigma, \omega \in W$，我们有 e

$$R_{\sigma,\omega} = \sum_{(\kappa_1,\ldots,\kappa_{r-1})} R_{\sigma_1,\kappa_1} \left(\prod_{j=1}^{r-2} R_{\kappa_j \sigma_{j+1},\kappa_{j+1},J_j} \right) R_{\kappa_{r-1}\sigma_r,\omega,J_{r-1}} \ ,$$

其中求和遍及所有满足 $\kappa_i \in W_{J_i}$, $i = 1, \ldots, r-1$的元组。

作为对注 3.10 的后续，上述推论使这样一种方法更加清晰：Kazhdan-Lusztig 多项式 $P_{\sigma,\ \omega}$（或其类比多项式$R_{\sigma,\ \omega}$）可以根据多项式 $R_{\kappa^1_{J_i},\ \kappa^2_{J_i},\ J_{i-1}}$ 的取值递归生成，其中 $\kappa^1, \kappa^2 \in W$ 满足 $\sigma \le \kappa^1 < \kappa^2 \le \omega$ 和 $1 \le i \le r$。

4. The case of S_n

本节中，我们固定原型考克斯特系统 (W, S)，其中将 $W = S_n$ 视为作用在 n 个指标 $\{1, \dots, n\}$ 上的置换群，其考克斯特生成元为简单换位

$$S = \{s_i = (i,\, i+1)\}_{i=1}^{n-1} \subseteq S_n\ .$$

这里，我们采用常见记号 $(i, j) \in S_n$，表示交换给定指标 $1 \le i \ne j \le n$ 并固定所有其他指标的排列。

我们还固定 $J = \{s_1, \dots, s_{n-2}\} \subseteq S$，由此得到由以指标 n 为不动点的排列组成的抛物子群 $W_J < S_n$。自然地，群 W_J 可视为由 $\{1, \dots, n-1\}$ 上的排列构成的群 S_{n-1}。

我们的目标是证明，在这种情况下，J-相对 R-多项式有一种简洁的描述，并且这对 Kazhdan-Lusztig 多项式的组合不变性猜想具有启示意义。

我们先介绍一些置换群中特有的进一步记号。自然地，我们将 S_n 中的元素视为函数 $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$。

对于指标子集 $A = \{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ 和排列 $\sigma \in S_n$，限制 $\sigma|_A \in S_k$ 定义为满足以下条件的排列：当且仅当 $\sigma(i_t) < \sigma(i_s)$ 成立时，$\sigma|_A(t) < \sigma|_A(s)$。

以下命题是一个众所周知的事实，在 [BBD+22，命题 5.6] 中被称为子词条件。

命题 4.1。给定一个指标集 $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ 和一个排列 $\tau \in S_{|A|}$，记

$$\mathcal{I}_{A,\tau} = \{\sigma \in S_n \,:\, \sigma|_A = \tau\} \subseteq S_n\ .$$

那么，从 $\mathcal{I}_{A,\,\tau}$ 到 $S_{n-|A|}$ 的双射 $\sigma \mapsto \sigma|_{\{1,\dots,n\}\setminus A}$ 是偏序集的一个同构，其中 S_n 和 $S_{n-|A|}$ 上均取布鲁哈特序。

为增加灵活性，我们将 $\omega_{0,k} \in S_n$ 记作将 i 映到 $k+1-i$、对 $1 \le i \le k$ 成立且保持所有 $k < i$ 指标不变的排列。特别地，$\omega_{0,n} = \omega_0 \in S_n$ 是最长置换，而 $\omega_{0,n-1} = \omega_0^J \in W_J$ 是抛物子群中的最长元素。

4.1. $R_{\sigma,\omega,J}$的计算。对于 $1 \le i < n$，我们记 $t_i = (i, n) \in T$。注意，$t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1$ 构成一个 (ω_0^J, ω_0)-凸元组，我们现在将其固定下来。

命题 4.2. 设 $\sigma \in S_n$ 为一个排列，$A = \{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ 为一个指标集合。以下条件等价：

（1）不等式

$$\sigma < t_{i_1}\sigma < t_{i_2}t_{i_1}\sigma < \dots < t_{i_k}t_{i_{k-1}} \cdot \dots \cdot t_{i_1}\sigma$$

在 S_n 的布鲁哈特序中成立。

(2) 等式 $\omega_{0,k} = (\sigma^{-1})|_{A\cup\{n\}}$ 成立，作为 S_{k+1} 中的置换。(3) 对每个 $i \in A$，$\sigma < t_i\sigma$ 成立，并且置换 $\{t_i\sigma\}_{i\in A}$ 在 S_n 的布鲁哈特序中两两不可比。

证明。假设条件 (2)，则 (1) 和 (3) 中的陈述可由命题 4.1 轻易推出。

现在，假设条件 (3) 成立。对于 $i, j \in A$ 且 $i < j$，考虑排列$\tau = (\sigma^{-1})|_{\{i,j,n\}} \in S_3$。由此可得 $\tau < \tau \cdot (1, 3)$ 和 $\tau < \tau \cdot (2, 3)$ 成立，并且 $\tau \cdot (1, 3)$ $\tau \cdot (2, 3)$ 这一对在 S_3 的布鲁哈特序中不可比较。考察少数几种可能性后，我们得出结论： $\tau = (213)$。换言之， $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ $< \sigma^{-1}(n)$。考察 A 中所有可能的配对，可得 $\sigma^{-1}(i_k) < \ldots < \sigma^{-1}(i_1) < \sigma^{-1}(n)$ 成立，这相当于条件 (2)。

接下来需要证明 (1) 蕴含 (2)。我们对 A 的大小 k 进行归纳证明。

根据归纳假设，我们知道 $(\sigma^{-1})|_{\{i_1,\ldots,i_{k-1},n\}} = \omega_{0,\ k-1}$。接下来只需证明 $\sigma^{-1}(i_k) < \sigma^{-1}(i_{k-1})$。

事实上，注意到 $\omega := t_{i_{k-1}} \cdot \ldots \cdot t_{i_1} \sigma$必须满足 $\omega^{-1}(n) = \sigma^{-1}(i_{k-1})$，且假设 $\omega < t_{i_k} \omega$成立，即可得出所需的不等式。

□

对于一个排列 $\sigma \in S_n$，我们用 $\mathcal{S}(\sigma)$ 表示 $\{1, \ldots, n-1\}$的子集所构成的集合，其中这些子集相对于 σ满足命题 4.2 的等价条件。

对于 $A = \{i_1 < \ldots < i_k\} \in \mathcal{S}(\sigma)$，我们记作

$$\sigma^A = t_{i_k} t_{i_{k-1}} \cdot \ldots \cdot t_{i_1} \sigma = (i_1, \ldots, i_k, n)\sigma \in S_n \ ,$$

其中最后一个表达式使用了置换的循环表示法。

约定 $\emptyset \in \mathcal{S}(\sigma)$，我们令 $\sigma^\emptyset = \sigma$。

命题 4.3. 对所有 σ、$\omega \in S_n$，公式

$$\check{R}_{\sigma,\omega,J} = \begin{cases} \alpha^{|A|} & \textit{if exists } A \in \mathcal{S}(\sigma),\ \textit{such that } \omega = \sigma^A \ . \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

成立。

证明。由于 $\check{R}_{\sigma,\omega,J} = d(\langle f^{\sigma,\omega_0^J}, f_{\omega,\omega_0} \rangle)$、 $d(\alpha) = -\alpha$和 $t_{n-1}, \ldots, t_1$是一个 (ω_0^J, ω_0)-凸元组，公式可直接由命题 3.2 和 $\mathcal{S}(\sigma)$ 的定义推出。

□

有趣的是，归一化多项式 $R_{\sigma,\omega,J}$ 有其自身的自然描述，对于给定的 $A \in \mathcal{S}(\sigma)$，无需直接计算归一化常数 $\ell(\sigma) - \ell(\sigma^A)$。

为此，我们需要对组合情形进行更细致的分析。对于固定的 $\sigma \in S_n$，记 $\mathcal{D}(\sigma)$ $\subseteq \{1, \ldots, n-1\}$为满足 $\sigma < t_i \sigma$（或等价地，满足 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(n)$）的指标 i 的集合。

令 $\mathcal{P}(\sigma)$表示 $\mathcal{D}(\sigma)$的所有 $2^{|\mathcal{D}(\sigma)|}$ 子集组成的偏序集。

我们定义一对保包含映射

$$A \mapsto A^\sigma \ , \quad B \mapsto B_\sigma \ ,$$

从 $\mathcal{P}(\sigma)$到其自身，如下所示。

对于 $A \in \mathcal{P}(\sigma)$，我们设

$$A \subseteq A^\sigma = \{1 \le j < n \,:\, \exists i \in A,\ i \le j,\ \sigma^{-1}(i) \le \sigma^{-1}(j) \le \sigma^{-1}(n)\}\,.$$

给定 $B \in \mathcal{P}(\sigma)$，我们使用 [BBD+22 第 5 节.1] 中描述的算法（略作调整）来定义 $B_\sigma \subseteq B$。

将指标 $i_1 \in B$ 设为满足 $\sigma^{-1}(i_1) < \sigma^{-1}(n)$ 的最小指标。随后，$i_2 \in B$ 设为大于 i_1 且满足 $\sigma^{-1}(i_2) < \sigma^{-1}(i_1)$ 的最小指标。依此归纳进行，我们得到 $B_\sigma := \{i_1 < \ldots < i_k\}$。

以下引理很容易验证。

引理 4.4. 对所有 $A \in \mathcal{P}(\sigma)$，包含关系 $A \subseteq (A_\sigma)^\sigma$、$(A^\sigma)_\sigma \subseteq A$ 以及等式 $(A_\sigma)_\sigma = A_\sigma$、$(A^\sigma)^\sigma = A^\sigma$ 均成立。

特别地，映射对 $A \mapsto A^\sigma$ 和 $B \mapsto B_\sigma$ 在偏序集 $\mathcal{P}(\sigma)$与其自身之间构成伽罗瓦连接。

映射 $B \mapsto B_\sigma$ 的像恰为 $\mathcal{S}(\sigma)$。

现在可以方便地描述 $B \mapsto B_\sigma$ 的纤维。

推论 4.5. 对所有 $A \in \mathcal{S}(\sigma)$，我们有

$$\{B \in \mathcal{P}(\sigma) \,:\, B_\sigma = A\} = \{B \in \mathcal{P}(\sigma) \,:\, A \subseteq B \subseteq A^\sigma\}\,.$$

另一方面，对于 $A \in \mathcal{S}(\sigma)$，集合 A^σ自然出现在我们所关注的计算中。

引理 4.6. 对任意 $A \in \mathcal{S}(\sigma)$，长度恒等式

$$\ell(\sigma^A) - \ell(\sigma) = 2|A^\sigma| - |A|$$

成立。

证明。固定 $A = \{i_1 < \ldots < i_k\} \in \mathcal{S}(\sigma)$，并记作 $\omega = \sigma^A \in S_k$。我们还记 $A_1 = \{i_1 < \ldots < i_{t-1}\} \in \mathcal{S}(\sigma)$ 和 $\omega_1 = \sigma^{A_1} = t_{i_k}\omega$。

考虑指标集合

$$C = \{i_k < i < n \,:\, \sigma^{-1}(i_k) < \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i_{k-1})\}\,.$$

这里，若 $k = 1$，则将 i_0 取为 n。

对置换作简单分析可知，$\ell(t_{i_k}\omega_1) - \ell(\omega_1) = 2|C| + 1$。另一方面，我们看到 $A^\sigma = A_1^\sigma \dot\cup C \dot\cup \{i_k\}$。因此，我们可以写成

$$\ell(\omega) - \ell(\omega_1) = 2(|A^\sigma| - |A_1^\sigma|) - 1\,.$$

对参数 $|A|$ 作归纳推理，即得所述结论。 □

给定 $\sigma \in S_n$ 和 $B \in \mathcal{P}(\sigma)$，我们将 $\sigma^B := \sigma^{B_\sigma} \in S_n$ 作为简写记号。

命题 4.7. 对所有 σ、$\omega \in S_n$，公式

$$R_{\sigma,\omega,J} = \sum_{B \in \mathcal{P}(\sigma)\,:\,\sigma^B = \omega} (q-1)^{|B|}$$

成立。

证明。根据推论 4.5，对于 $A \in \mathcal{S}(\sigma)$,

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathcal{P}(\sigma)\,:\,B_\sigma=A}(q-1)^{|B|} &= \sum_{D\subseteq A^\sigma\setminus A}(q-1)^{|A|+|D|}\\ &= (q-1)^{|A|}\sum_{r=0}^{|A^\sigma|-|A|}\binom{|A^\sigma|-|A|}{r}(q-1)^r\\ &= (q-1)^{|A|}q^{|A^\sigma|-|A|}\,.\end{aligned}$$

现在，由引理 4.6，$(q-1)^{|A|}q^{|A^\sigma|-|A|} = v^{\ell(\sigma)-\ell(\sigma^A)}v^{|A|}(v^{-2}-1)^{|A|} = v^{\ell(\sigma)-\ell(\sigma^A)}\alpha^{|A|}$。结论现由命题 4.3 中的未归一化公式得出。

□

4.2. 超立方体分解。

引理 4.8. 对于 $\sigma \in S_n$ 和非空的 $B \in \mathcal{P}(\sigma)$，$\sigma^B$ 是布鲁哈特序下集合 $\{t_i\sigma\}_{i\in B}$ 的上确界（并）。

证明。首先来看，集合 $\{t_i\sigma\}_{i\in B}$ 的上确界可以由可能更小的集合 $\{t_i\sigma\}_{i\in B_\sigma}$ 的上确界取得。

事实上，给定 $j \in B \setminus B_\sigma$，必存在 $j > i \in B$，使得 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(n)$。换言之，限制置换 $(\sigma^{-1})|_{\{i,j,n\}}$ 在 S_3 中是平凡的。由于 (2, 3) < (1, 3)，可得 $t_j\sigma < t_i\sigma$。

因此，我们可以假设 $B \in \mathcal{S}(\sigma)$，并且由命题 4.2 可得 $(\sigma^B)^{-1}|_{B\cup\{n\}} = \omega_{0,\ k+1}$。

容易验证，置换集合的 Bruhat 上确界

$$\{\omega_{0,k}(1,k+1), \omega_{0,k}(2,k+1)\ldots, \omega_{0,k}(k,k+1)\}$$

在 S_{k+1} 中由最长元素 $\omega_{0,\ k+1}$ 给出。

该结论由命题 4.1 得出。

□

命题 4.7 和引理 4.8 的结合给出了定理 1.3 的要旨。此外，若将 J-相对 R-多项式的超立方体公式代入命题 3.9 中的一般表达式，我们便得到对 [BBD+22] 中所述超立方体分解的代数证明和诠释。我们单独列出以下表达式，以完成定理 1.3 的证明。

定理 4.9. 对所有 σ、$\omega \in S_n$ 和 $J = \{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$，等式

$$Q^J_{\sigma,\omega} = \frac{q^{\ell(\omega)-\ell(\sigma)}}{1-q}\sum_{\emptyset\neq B\in\mathcal{P}(\sigma)}(q^{-1}-1)^{|B|}d(P_{\sigma^B,\omega})\,,$$

成立，其中 $\sigma^B \in S_n$ 可取为布鲁哈特序中排列集合 $\{t_i\sigma\}_{i\in B}$的上确界。

5. On combinatorial invariance

为了证明组合不变性猜想，[BBD+22] 中引入了定理 4.9 中的表达式作为一个垫脚石，尤其是针对对称群。为重新探讨这一主题，我们将先回顾经典猜想，然后从 J-相对R-多项式的角度探究我们的发现对该猜想的影响。

在本节中，(W,S) 是一个带有限 W 的考克斯特系统，而 $T \subseteq W$ 如前所述，是 S 的共轭闭包。

对于一对 $\sigma,\omega \in W$，Bruhat 区间 $G[\sigma,\omega] = (V,E)$ 被视为一个有向图，其顶点集 V 由所有满足 $\sigma \le z \le \omega$ 的元素 $z \in W$ 构成，而边可以定义为顶点的有序对

$$E = \{(z_1,z_2) \in V \times V \ : \ z_2 z_1^{-1} \in T, \ell(z_1) < \ell(z_2)\} .$$

自然地，有向图 (V_1,E_1) 和 (V_2,E_2) 的同构是一个双射 $\phi: V_1 \to V_2$，使得对于一对 $z,z' \in V_1$，有 $(z,z') \in E_1$，当且仅当 $(\phi(z)\ \phi(z')) \in E_2$。

以下是广受研究的组合不变性猜想，自 20 世纪 80 年代初以来便被归于 Lusztig，并见于 Dyer 的学位论文 [Dye87]。

猜想 5.1. 对任意考克斯特系统 (W_1,S_1)、(W_2,S_2)，以及任意两对 $\sigma_1,\omega_1 \in W_1$,$\sigma_2,\omega_2 \in W_2$，若其 Bruhat 区间 $G[\sigma_1,\omega_1], G[\sigma_2,\omega_2]$ 作为有向图同构，则等式 $P_{\sigma_1,\ \omega_1} = P_{\sigma_2,\ \omega_2}$ 成立。

不难验证，上述猜想成立等价于将 $P_{\sigma_i,\ \omega_i}$ 替换为 $P_{\sigma_i,\ \omega_i}$、$R_{\sigma_i,\ \omega_i}$ 或 $R_{\sigma_i,\ \omega_i}$后，猜想仍然成立。

我们提出组合不变性的一种变体，涉及 J-相对 R-多项式的概念。

猜想 5.2（相对组合不变性）。对于任意有限 Coxeter 系统 (W,S)，存在一个指定的子集 $\mathbb{J}(W) \subsetneq S$，使得下述性质成立。

设 $\sigma_1,\omega_1 \in W_1$, $\sigma_2,\omega_2 \in W_2$ 是有限 Coxeter 系统 (W_1,S_1)、(W_2,S_2)中的两对元素。设存在 Bruhat 区间 $G[\sigma_1,\omega_1], G[\sigma_2,\omega_2]$之间的一个同构 ϕ，它是有向图同构，并且对于 $G[\sigma_1,\omega_1]$中的任意一条边 $\sigma_1 \le z < tz \le \omega_1$，条件

$$t \in (W_1)_{\mathbb{J}(W_1)}, \quad \textit{if and only if,} \ \ \phi(tz)\phi(z)^{-1} \in (W_2)_{\mathbb{J}(W_2)}$$

成立，那么，$R_{\sigma_1,\omega_1,\mathbb{J}(W_1)} = R_{\sigma_2,\omega_2,\mathbb{J}(W_2)}$。

对于考克斯特系统 (W,S)，我们称链

$$\underline{J} = (\emptyset = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \ldots \subsetneq J_r = S)$$

是该系统上的一个滤过。我们称 $(W,\underline{J})$ 为滤过考克斯特系统。

一个滤过 $\underline{J}$ 产生一个反射着色映射 $\alpha: \ T \to \{1,\ldots,r\}$ 其定义为将$\alpha(t)$（对 $t \in T$）设为满足 $t \in W_{J_i}$ 的最小 i。

在组合不变性的背景下，我们将 α 视为对所有 Bruhat 区间 $G[\sigma,\omega]$ 中的边进行着色，颜色不超过 $|S|$ 种，其中 σ、$\omega \in W$。

猜想 5.3（滤过组合不变性）。对于任意有限 Coxeter 系统（W， S），存在一个指定的典范滤过 $\underline{J}^0$，使其满足以下性质。

设 $\sigma_1,\omega_1 \in W_1, \sigma_2,\omega_2 \in W_2$ 是有限 Coxeter 系统中的两对对象，并且它们配备了典范滤过，由此得到相应的反射着色映射 α_1,α_2。

假设存在同构 ϕ，将 Bruhat 区间 $G[\sigma_1,\omega_1],G[\sigma_2,\omega_2]$ 视为有向图时联系起来。

进一步假设存在递增映射 $\gamma\colon \{1,\dots,r_1\}\to\{1,\dots,r_2\}$，使得对于 $G[\sigma_1,\omega_1]$ 中的任意边 $\sigma_1 \le z < tz \le \omega_1$，颜色恒等式 $\gamma\circ\alpha_1(t) = \alpha_2(t')$ 成立，其中 $t'\in W_2$ 是满足 $\phi(tz)=t'\phi(z)$ 的反射。

那么，等式 $P_{\sigma_1,\ \omega_1} = P_{\sigma_2,\ \omega_2}$ 成立。

注 5.4. 显然，猜想 5.3 可由猜想 5.1 中的完整组合不变性推出。若假设完整猜想成立，则典范滤过的概念便是多余的，可以任意选取。

下文将用到以下基本引理，为完整起见，我们给出其证明。

引理 5.5. 对于 $J\subseteq S$，设 $\sigma,\omega\in W$ 满足 ${}^J\sigma = {}^J\omega$（即 $W_J\sigma = W_J\omega$）。那么，考克斯特系统 (W_J, J) 的 Bruhat 区间 $G[\sigma_J,\omega_J]$ 与 Bruhat 区间 $G[\sigma,\omega]$ 同构，同构映射为 $\kappa\mapsto\kappa\cdot{}^J\sigma$。

证明。映射 $z\mapsto {}^Jz$ 在 W 上保持布鲁哈特序（[BB05, 命题 2.5.1]）。因此，对于任意 $\sigma\le z\le\omega$，必有 ${}^Jz = {}^J\sigma$。

特别地，由此可知，对于任意 $\sigma\le z<tz\le\omega$，必有 $t\in W_J$。

最后需要指出，对于任意满足 $\kappa < t\kappa$ 的 $t\in T\cap W_J$ 和 $\kappa\in W_J$，也有 $\kappa\cdot{}^J\sigma < t\kappa\cdot{}^J\sigma$。事实上，$\check{t}:=\kappa^{-1}t\kappa\in T\cap W_J$, $\kappa<\kappa\check{t}$ 且 ${}^J\sigma < \check{t}\cdot{}^J\sigma$。

□

命题 5.6。猜想 5.2 蕴含猜想 5.3。

证明。假设相对组合不变性成立，也就是说，对于任意有限 Coxeter 系统 (W,S)，都定义了一个子集 $\mathbb{J}(W)\subsetneq S$，使得猜想 5.2 中的条件成立。

对于这样的 (W,S)，我们通过取 $J_i = \mathbb{J}(W_{J_{i+1}})\subsetneq J_{i+1}$，赋予其一个典范滤过 $\underline{J}^0 = \{J_i\}_{i=0}^r$。

我们将对考克斯特系统的秩 $|S|$ 进行归纳，以证明猜想 5.3。与通常一样，只需证明 R-多项式相等，因为由 (3) 可归纳推出 Kazhdan-Lusztig 多项式相等。

现在，假设给定了成对的 σ_1、$\omega_1\in W_1$、 σ_2、$\omega_2\in W_2$，一个同构 ϕ 以及一个函数 γ，并满足猜想 5.3 的假设。

根据这些假设可知， $G[\sigma_2,\omega_2]$ 中没有边被大于 $\gamma(r_1)$ 的数染色。换言之，对所有满足 $\sigma_2\le z<tz\le\omega_2$ 的 $t\in T_2$ 和 $z\in W_2$，都有$\alpha_2(t)\le\gamma(r_1)$。特别地， $\sigma_2\in W_{J_{\gamma(r_1)}}\omega_2$。

根据引理 5.5，我们可以将 $G[\sigma_2,\omega_2]$ 视为 Bruhat 区间 $G[(\sigma_2)^{J_{\gamma(r_1)}},\ (\omega_2)_{J_{\gamma(r_1)}}]$ 中的一个。也很容易验证，$R_{\sigma_2,\ \omega_2} = R_{(\sigma_2)^{J_{\gamma(r_1)}},\ (\omega_2)^{J_{\gamma(r_1)}}}$ (例如，通过

在命题 3.12 中取恒等式，并注意到根据命题 3.2，$R_{\kappa\cdot^{J_{\gamma(r_1)}}\omega_2,\ \omega_2,\ J_{\gamma(r_1)}}=0$ 对所有 $\kappa\in W_{J_{\gamma(r_1)}}$ 都成立，除非 $\kappa=(\omega_2)^{J_{\gamma(r_1)}}$。）

因此，我们可以假设 $\gamma(r_1)=r_2$。

记 $J=J_{r_1-1}=\mathbb{J}(W_1)$ 和 $J'=J_{r_2-1}=\mathbb{J}(W_2)$。对于一条边 $\sigma_1\le z<tz\le\omega_1$，我们看到，包含关系 $t\in W_J$ 等价于 $\alpha_1(t)\neq r_1$。根据关于 ϕ 的假设，最后一个条件也等价于 $\alpha_2(\phi(tz)\phi(z)^{-1})\neq r_2$，这又意味着 $\phi(tz)\phi(z)^{-1}\in W_{J'}$。

因此，所假设的猜想 5.2 推出 $R_{z,\ \omega_1,\ J}=R_{\phi(z),\ \omega_2,\ J'}$ 对所有 $\sigma_1\le z\le\omega_1$ 都成立。

对于给定的 $\sigma_1\le z\le\omega_1$（满足 ${}^Jz={}^J\sigma_1$），由引理 5.5，Bruhat 区间 $G[\sigma_1,z]$ 同构于 $G[(\sigma_1)_J,z_J]$。在图中选取一条路径时，我们可以写成 $z=t_1\dots t_s\sigma_1$，其中 t_1，……，$t_s\in T_1\cap W_J$。同样，根据关于 ϕ 的假设，我们推得存在 t'_1，……，$t'_s\in T_2\cap W_{J'}$，使得 $\phi(z)=t'_1\dots t'_s\sigma_2$。因此，${}^{J'}\phi(z)={}^{J'}\sigma_2$。

对逆同构 ϕ^{-1} 进行类似的论证可知，事实上，对于任意满足 ${}^{J'}\phi(z)={}^{J'}\sigma_2$ 的 $\sigma_1\le z\le\omega_1$，我们必然有 ${}^Jz={}^J\sigma_1$。

再次对 $G[\sigma_2,\phi(z)]$ 运用引理 5.5，并对秩更小的考克斯特系统 (W_J,J) 和 $(W_{J'},J')$ 应用归纳假设，我们可推出 $R_{(\sigma_1)_J,\ z_J}=R_{(\sigma_2)^{J'},\ \phi(z)^{J'}}$。

最后，由命题 3.12，

$$\begin{aligned}R_{\sigma_1,\omega_1}&=\sum_{\kappa\in W_J:\,\sigma_1\le\kappa\cdot^J\sigma_1\le\omega_1}R_{(\sigma_1)_J,\kappa}R_{\kappa\cdot^J\sigma_1,\omega_1,J}\\&=\sum_{\kappa\in W_J:\,\sigma_1\le\kappa\cdot^J\sigma_1\le\omega_1}R_{(\sigma_2)_{J'},\phi(\kappa^J\sigma_1)_J}R_{\phi(\kappa\cdot^J\sigma_1),\omega_2,J'}\\&=\sum_{\kappa'\in W_{J'}:\,\sigma_2\le\kappa'\cdot^{J'}\sigma_2\le\omega_2}R_{(\sigma_2)_{J'},\kappa'}R_{\kappa'\cdot^J\sigma_2,\omega_2,J'}\\&=R_{\sigma_2,\omega_2}\ .\end{aligned}$$

□

我们还要简单指出，我们新提出的两个猜想实际上都是完全组合不变性猜想的弱化变体。

命题 5.7. 猜想 5.1 蕴含猜想 5.2。

证明。命题 3.12 中的逆关系将 J-相对于 R 的多项式表示为关于 W 和 W_J 的 R 多项式，只要 W_J 陪集在 Bruhat 区间内可以相互对应。因此，采用与命题 5.6 证明中类似的论证即可。□

作为本节的总结，我们将说明定理 1.1 中提出的超立方体分解及其在第 4 节中的进一步阐述，如何影响我们最近提出的组合不变性调整方案。

定理 5.8（对称群的滤过组合不变性）。设 σ_1、$\omega_1 \in S_{n_1}$ 和 σ_2、$\omega_2 \in S_{n_2}$ 是两对置换。

假设存在一个 Bruhat 区间 $G[\sigma_1, \omega_1]$、$G[\sigma_2, \omega_2]$ 之间的同构 ϕ，将它们视为有向图。

进一步假设存在一个递增映射 $\gamma\colon \{1, \dots, n_1\} \to \{1, \dots, n_2\}$，满足以下性质：

对于任意边 $\sigma_1 \le z < (i,j)z \le \omega_1$，其中 $1 \le i < j \le n_1$，使得 $\phi((i,j)z) = (i',j')\phi(z)$，且 $1 \le i' < j' \le n_2$，必有 $j' = \gamma(j)$。

那么，等式 $P_{\sigma_1,\ \omega_1} = P_{\sigma_2,\ \omega_2}$ 成立。

证明。对于考克斯特系统 $(S_n, \{s_1, \dots, s_n\})$，定义 $\mathbb{J}(S_n) = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$。按照这一约定，只需证明在所涉及的考克斯特系统为对称群的情形下，猜想 5.2 成立。

事实上，对于这些情形，所需的结论就是猜想 5.3。稍微展开命题 5.6 的证明，并注意到 $W_{\mathbb{J}(W)} \cong S_{n-1}$ 对于 $W \cong S_n$，即可推出该结论。

现在，由于命题 4.7 和引理 4.8 蕴含 $R_{\sigma,\ \omega,\ \mathbb{J}(S_n)}$ 是不变量，同时也是形如 $\sigma \le z < (i,n)z \le \omega$ 的特征边的一种标记，因此这些情形下的猜想 5.2 成立。

□

References

[BB05] 安德斯·比约纳和弗朗切斯科·布伦蒂。《考克斯特群组合学》，《数学研究生教材》第 231 卷。施普林格，纽约，2005 年。[BBD+22] 查尔斯·布伦德尔、拉斯·布辛、亚历克斯·戴维斯、Petar Veli˘ckovi´c 和 Geordie Williamson。迈向 Kazhdan-Lusztig 多项式的组合不变性。《表示论》，26:1145–1191，2022 年。[BK09] 乔纳森·布伦丹和亚历山大·克列什切夫。分圆赫克代数的分次分解数。《数学进展》，222(6):1883–1942，2009 年。[Bre04] 弗朗切斯科·布伦蒂。Kazhdan-Lusztig 多项式：历史、问题与组合不变性。《洛塔尔组合学研讨会》，49：第 B49b 条，30 页，2002/04。[DL90] M. J. 戴尔和 G. I. 莱勒。赫克代数中的正性。《几何奉献》，35(1-3):115–125，1990 年。[DVB+21] 亚历克斯·戴维斯、Petar Veli˘ckovi´c、拉斯·布辛、萨姆·布莱克韦尔、丹尼尔·郑、Nenad Toma˘sev、理查德·坦伯恩、彼得·巴塔利亚、查尔斯·布伦德尔、Andr´as Juh´asz 等。通过人工智能引导人类直觉，推动数学发展。《自然》，600(7887):70–74，2021 年。[Dye87] 马修·约翰·戴尔。考克斯特群中的赫克代数与反射。博士论文，悉尼大学数学系，1987 年。[Dye93] M. J. 戴尔。赫克代数与 Bruhat 区间的壳化。《组合数学》，89(1):91–115，1993 年。[GH07] 伊恩·格罗伊诺夫斯基和马克·海曼。仿射赫克代数以及 LLT 多项式和麦克唐纳多项式的正性。预印本，2007 年。[KL79] 大卫·卡兹丹和乔治·卢斯蒂格。考克斯特群与赫克代数的表示。《数学发明》，53(2):165–184，1979 年。[KR11] 亚历山大·克列什切夫和阿伦·拉姆。霍瓦诺夫-劳达-鲁基耶代数的表示与林登词的组合学。《数学年刊》，349(4):943–975，2011 年。[Lus90] G. Lusztig。由量子包络代数产生的典范基。《美国数学会杂志》，3(2):447–498，1990 年。

[Soe97] Wolfgang Soergel。倾斜模的 Kazhdan-Lusztig 多项式与组合学[s]。《表示论》，1:83–114, 1997 年。[Zel81] A. V. Zelevinskiĭ。《Kazhdan-Lusztig 猜想的 p-进类比》。《功能分析及其应用》，15(2):9–21，96，1981 年。

Department of Mathematics,
Technion – Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.电子邮箱：maxg@technion.ac.il
Department of Mathematics, Technion – Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.电子邮箱：wangcj@campus.technion.ac.il