arXiv:2303.09300v1 [math.GR] 16 Mar 2023

双曲反射群中的无穷远反射长度

MARCO LOTZ

Abstract. 在由超平面反射生成的离散群中，若该群作用于 n 维双曲空间，则一个元素的反射长度是指群中足以将该元素分解的超平面反射的最少数量。对于以这种方式产生、且不能分解为球面反射群与仿射反射群直积的考克斯特群，其反射长度无界。考克斯特群的作用在双曲空间中诱导出一种镶嵌。固定一个基本域后，铺砌块与群元素之间存在双射。我们描述 n 维双曲空间视觉边界上的某些点，在这些点的每个邻域中都包含具有任意反射长度的铺砌块。为证明这一点，我们证明在 n 维双曲空间中，若两个不相交的超平面没有公共边界点，则它们有唯一一条公垂线。

Introduction

在 n 维双曲空间中，两个不同的超平面 $\mathbb{H}^n$ 相交、在其视觉边界 $\partial\mathbb{H}^n$ 有公共点，或彼此超平行。若一组有限的 S 个超平面反射所对应的超平面两两不相交，或其二面角为 π 的真因数，则这些反射生成一个考克斯特群 W。该群作为 $\mathbb{H}^n$ 的等距变换群的离散子群 W，其作用是适当的。该作用的严格基本域 P 是与生成元对应的超平面的半空间之交。这在 $\mathbb{H}^n$ 中诱导出由 P 的副本组成的镶嵌。铺砌块与 W 中的元素之间存在双射。将一个铺砌块 wP 通过 W 中的超平面反射映回基本域 P 所需的最少反射次数 $w \in W$，即为其反射长度。W 中的超平面反射集合 R，恰好是与 S 中某个生成元共轭的元素集合。铺砌块 wP 的反射长度，等于元素 w 关于生成集R 的字长 $l_R(w)$；我们称之为反射长度。

球面反射群和仿射反射群中的反射长度已得到充分理解，已有相关公式，且它在这些群上是有界函数（见 [3] 和[13]）。另一方面，对于不能分解为球面反射群与仿射反射群直积的考克斯特群，人们对其中的反射长度知之甚少。我们将这类群称为无限非仿射群。Duszenko 证明，无限非仿射考克斯特群中的反射长度无界（见 [6]）。对于至少三个不同生成元之间不存在辫关系的群，考克斯特元素的幂

Date：2023年3月15日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：20F55、20F65；次分类号：51M20、51M10。*Key words and phrases.* 反射长度、考克斯特群、双曲反射群、视觉边界、双曲几何。

具有无界的反射长度（见 [5]）。一般而言，这一结论并不成立，而且很难找到反射长度较大的元素。

我们将由有限多个超平面反射生成的无限非仿射 Coxeter 群称为 $\mathbb{H}^n$ 中的双曲反射群，并常用一个带有其生成集的有序组来表示。令 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 为 $\mathbb{H}^n$ 与其赋有锥拓扑的视觉边界 $\partial\mathbb{H}^n$ 的并集。本文证明，在视觉边界中某些点的每个邻域内，都存在反射长度为 n 的铺砌块。这些点具体是 R 中两个不同超平面所共有的理想点，或两个超平行超平面的公垂线的端点。

定理 1. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个双曲反射群，其基本域为 P。设 R 为 W中的反射集。设 U是 $\overline{\mathbb{H}}^n$中点 ξ 的一个邻域，其中 ξ 属于 $\partial\mathbb{H}^n$。假设 ξ 满足以下条件之一：

(i) ξ 是两个平行超平面 $H_r, H_{r'}$ 的公共点，其中 $r, r' \in R$。 (ii) ξ 是两个超平行超平面 $H_r, H_{r'}$的公垂线的端点，其中 $r, r' \in R$。

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个 $w \in W$，其满足 $l_R(w) = k$，使得区域 wP 包含于 U。

这里，超平面与反射的下标关联表示：关于该超平面的反射是 W 中的一个元素。为了考察这两类理想点，我们证明，在 $\mathbb{H}^n$ 中任意一对超平行超平面都有唯一一条公垂线。这推广了 $\mathbb{H}^2$ 中希尔伯特的一个定理，使其适用于任意维数。

定理 2（子空间超平行定理）。$\mathbb{H}^n$ 中任意一对超平行测地子空间都有一条公垂线。如果这两个子空间都是超平面，则公垂线唯一。任何与这两个超平面都成直角相交的超平面都包含这条公垂线。

最后，我们将注意力限定在以凸多胞体为严格基本域的双曲反射群上。我们证明，满足定理 1 中条件 (i) 或 (ii) 的理想点集合在 $\partial\mathbb{H}^n$ 中稠密。因此，在这一情形下，即使去掉对理想点的条件，定理 1 仍然成立。

定理 1 和 2 的证明具有几何性质，并使用 Poincar´e 球模型以及 $\mathbb{H}^n$ 的双曲面模型。

结构。本文共分为五节。在预备知识部分简要回顾双曲空间的基础知识以及考克斯特群与双曲几何之间的联系后，我们将在第 2 节证明具有基本欧几里得几何的子空间超平行定理。第三节将建立主要结果，即定理 1。随后，我们将在第 4 节证明一些几何引理，为最后一节做准备；最后一节中，我们只考虑作为严格基本域的凸多胞体。

1. Preliminaries

本节回顾实双曲 n空间 $\mathbb{H}^n$的基本概念、考克斯特群的基础知识，以及双曲

几何与考克斯特群理论之间的联系。 $\mathbb{H}^n$ 是一个完备、单连通的黎曼 n维流形，其截面曲率为常数 -1。文中介绍 $\mathbb{H}^n$ 的双曲面模型和庞加莱球模型´。此外，我们还定义了 $\overline{\mathbb{H}}^n$上的视觉边界和锥拓扑。关于这些主题的详细论述，请参阅 [2], [4] 和 [17]。

定义 1.1. 设 $\mathbb{X}$ 是一个度量空间， I 是形如 $(-\infty,\infty)$,$[a,\infty)$ 或 $[a,b]$ 的区间，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。 $\mathbb{X}$ 中的测地线、测地射线、测地线段是一个等距变换 $\gamma\colon I\to\mathbb{X}$。我们用 $\gamma\subseteq\mathbb{X}$ 代替 $\gamma(I)\subseteq\mathbb{X}$。如果对于 $\mathbb{X}$ 中的任意一对点 x,y ，都存在一条测地线段$\lambda\colon[a,b]\to\mathbb{X}$ ，满足 $\lambda(a)=x$ 且 $\lambda(b)=y$，则称空间 $\mathbb{X}$ 为测地空间。

双曲面模型。设 $\mathbb{R}^{n,\,1}$ 是配备有对称双线性型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的实向量空间，其型为 $(n,1)$（n 个正特征值和 1 个负特征值）。 n 维双曲面模型是一个双曲面的上叶，定义如下：

$$\mathbb{H}^n:=\{v=(v_1,\dots,v_{n+1})\in\mathbb{R}^{n,1}\mid\langle v|v\rangle=-1,v_{n+1}>0\}.$$

双线性形式诱导出度量 $d(x,y)=\cosh^{-1}(-\langle x|y\rangle)$，其中 $x,y\in\mathbb{H}^n$。我们始终将 $\mathbb{H}^n$ 视为度量空间。 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中与 $\mathbb{H}^n$ 的二维子空间的非空交集，是 $\mathbb{H}^n$ 中的测地线。对于在点 $p\in\mathbb{H}^n$ 相交的两条测地线γ_1 和 γ_2 ，存在单位向量 $u_i\in\mathbb{R}^{n,1}$ ，满足$\langle u_i|p\rangle=0$ ，且根据 γ_i， u_i 包含于 $\mathbb{R}^{n,1}$的二维子空间中。 γ_1 与 γ_2 之间的双曲角是唯一满足 $\alpha=\cos^{-1}(\langle u_1|u_2\rangle)$ 的数$\alpha\in[0,\pi]$ 。

超平面定义为 $\mathbb{R}^{n,1}$ 的 n维子空间与 $\mathbb{H}^n$ 的非空交集，并且与 $\mathbb{H}^{n-1}$等距。对于超平面 H，我们用 V_H表示 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中对应的子空间。我们有两个（闭）半空间 $V_H^+,V_H^-\subseteq R^{n,1}$，满足 $V_H^+\cup V_H^-=\mathbb{R}^{n,1}$和 $H^\pm=V_H^\pm\cap\mathbb{H}^n$，其中 $H_i^+\cup H_i^-=\mathbb{H}^n$。每个超平面 H 在 $\mathbb{H}^n$上诱导一个等距变换，即关于 H的反射 s：

$$s:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n;\qquad x\mapsto x-2\langle u_H,x\rangle u_H \tag{1.1}$$

其中， u_H 是在 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中相对于双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$与 V_H 正交且在相差一个符号的意义下唯一的单位向量。 s 的不动点集恰好是 H，且一个半空间被映射到另一个半空间。

庞加莱球模型。在庞加莱球模型中，双曲空间中的点由欧几里得 n 维空间 $\mathbb{E}^n$ 中开单位球 D^n 内的点表示。存在一个同胚 $D^n\to\mathbb{H}^n$ ，可以将 $\mathbb{H}^n$ 上的度量拉回到 D^n 上。测地线是与边界 $\partial D^n=\mathbb{S}^{n-1}$ 成直角相交的 $\mathbb{E}^n$ 中的直线和圆。从一点出发的两条线段之间的角度，等于这两条线段之间的欧几里得角。令 $\overset{\frown}{\mathbb{E}}^n:=\mathbb{E}^n\cup\{\infty\}$ 表示 $\mathbb{E}^n$ 的一点紧化。在此模型中，超平面 $\widehat{\ }$ 是 D^n 与 $\mathbb{E}^n$ 中和 $\mathbb{S}^{n-1}$ 正交相交的（$n-1$）维球面的交集。如果超平面 H 是包含 ∞ 的（$n-1$）维球面与 D^n 的交集，那么 H 上的反射就是 H 上作为 $\mathbb{E}^n$ 中（$n-1$）维子空间的反射，限制在 D^n 上。否则， H 表示为一个半径为 r 、中心为 c 的球面 S。在这种情况下，关于 H 的反射是 i_S,

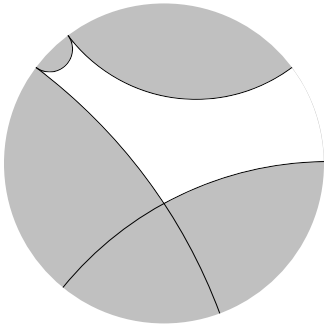

FIGURE 1.庞加莱球模型中的一个凸多面体，以白色标示

$\widehat{\ }$ 在一点紧化 $\mathbb{E}^n$ 中关于 S 的反演，限制在 D^n 上:

$$i_S : \widehat{\mathbb{E}}^n \to \widehat{\mathbb{E}}^n ; \qquad x \mapsto \frac{r^2}{||x-c||^2} \cdot (x-c) + c. \tag{1.2}$$

定义 1.2。

(1) C 中的凸多面锥是由有限个半空间的交集构成的，这些半空间由 n维子空间在 $\mathbb{R}^{n,\ 1}$ 中标记。(2) $\mathbb{H}^n$ 中的凸多胞体（可能具有理想顶点）是$\mathbb{H}^n$ 与 C $\mathbb{R}^{n,\ 1}$ 中的一个凸多面锥的交集，该凸多面锥包含于光锥中

$$\{v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle v|v\rangle \leq 0, v_{n+1} > 0\}.$$

(3) $\mathbb{H}^n$ 中的凸多面体是$\mathbb{H}^n$ 中有限个半空间的交集，且具有非空内部。

凸多胞体这一概念也包括有限体积的凸多面体。

1.1. 考克斯特群与双曲反射群。我们研究 Iso($\mathbb{H}^n$) 中的离散子群，其中 Iso($\mathbb{H}^n$) 是由有限个超平面反射生成的 $\mathbb{H}^n$ 的等距变换群。在将讨论范围限定于双曲几何之前，我们先从代数角度引入考克斯特群，可以将其理解为抽象反射群。

定义 1.3. 一个由有限生成元集 $S = \{s_1, \dots s_n\}$ 生成，且具有如下形式表示的群

$$\langle S \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = \mathbb{1}\ , \forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ m_{ij} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}\rangle,$$

称为考克斯特群。我们称这一对 (W, S) 为考克斯特系统。

无限非仿射考克斯特群是指不能分解为球面反射群与仿射反射群直积的考克斯特群。

考克斯特系统 (W, S) 的特殊子群是由子集 $S' \subseteq S$ 生成的子群。

球面反射群和仿射反射群已得到完整分类（例如，参见 [11]）。我们在 $\mathbb{H}^n$ 中阐述了无限非仿射考克斯特群与反射群之间的关系。关于考克斯特群和反射群的经典著作包括 [11] 和 [4]。

定义 1.4. 凸多面体

$$P = \bigcap_{i \in I} H_i^{\varepsilon_i}$$

若满足 $\varepsilon_i \in \{+, -\}$，则称其为考克斯特多面体，当且仅当对所有相交的超平面 H_i、H_j，在满足 i、$j \in I$、$i \neq j$ 时，二面角 $\measuredangle(H_i, H_j)$ 是 π 的一个约数。若超平面 H_i 与闭包 $\overline{P}$ 和 H_i 相交，则称其为墙。

定义 1.5。设 G 是一个离散群。群 G 在豪斯多夫空间 Y 上的作用称为适当的（或适当不连续的），若满足以下三个条件：

(i) Y/G 是豪斯多夫空间。(ii) 对每个 $y \in Y$，稳定子 $G_y = \{g \in G \mid gy = y\}$ 都是有限的。(iii) 每个 $y \in Y$ 都有一个 G_y-稳定邻域 U_y，使得对所有 $g \in G - G_y$，都有 $gU_y \cap U_y = \varnothing$。

定义 1.6. 假设群 G 作用于空间 Y。若每个 G-轨道与闭集 $A \subseteq Y$ A 恰好交于一点，则称 $A \subseteq Y$ 为严格基本域。

以下定理给出了本文中双曲几何与考克斯特群之间最重要的联系。

定理 1.7（Vinberg，[17], 第 199 页）。设 $\mathbb{H}^n$ 中的 $P = \bigcap_{i \in I} H_i^{\varepsilon_i}$ 是一个考克斯特多面体，且 $W(P)$ 是由其壁上的反射 $\{s_i \mid i \in I\}$ 生成的群。在这些假设下，以下结论成立：

(i) $W(P)$ 是由超平面反射生成的 $Iso(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群。(ii) $W(P)$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上适当作用。(iii) P 是 $W(P)$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上作用的严格基本域。(iv) $W(P)$ 是一个考克斯特群，其定义关系为 $s_i^2 = id$，对所有 $i \in I$，以及对于相交且二面角为 $\measuredangle(H_j, H_k) = \pi^{m_{jk}}$ 的 H_j 和 H_k，有 $(s_j s_k)^{m_{jk}} = id$。(v) 任意点 $x \in P$（包括无穷远处的点）的稳定子 $W(P)_x$，由包含 x 的 P 的壁上的反射生成。

推论 1.8. 基本域 $wP$with $w \in W(P)$ 覆盖空间 $\mathbb{H}^n$and $W(P)$ 与基本域集合 wP 之间存在双射。具体而言，

$$w \mapsto wP \quad with\, w \in W(P).$$

定义 1.9. 如果一个由超平面反射生成的 $Iso(\mathbb{H}^n)$ 离散子群的底层考克斯特系统是无限非仿射的，我们就称其为双曲反射群。在下文中，双曲反射群通常用其底层考克斯特系统 (W, S) 表示，其中集合 S 是与 $\mathbb{H}^n$ 中有限个超平面 $\{H_1, \dots H_n\}$ 相对应的超平面反射集合 s_i。

关于双曲反射群的一般性参考资料，可参见 [17] 第 5 章。

注 1.10. 同构群可以由 $\mathbb{H}^n$ 中不同的超平面排列生成。有些考克斯特群无法嵌入为 $Iso(\mathbb{H}^n)$ 中由超平面反射生成的离散子群，任意 $n \in \mathbb{N}$ 都不例外（见 [9]）。此外，双曲 Coxeter 多胞体和多面体尚未得到完全分类。据我们所知，目前还没有针对考克斯特群的一般判据，能够确定该群何时同构于双曲反射群。因此，我们研究的是双曲反射群，而不是具有附加性质的考克斯特群。紧致

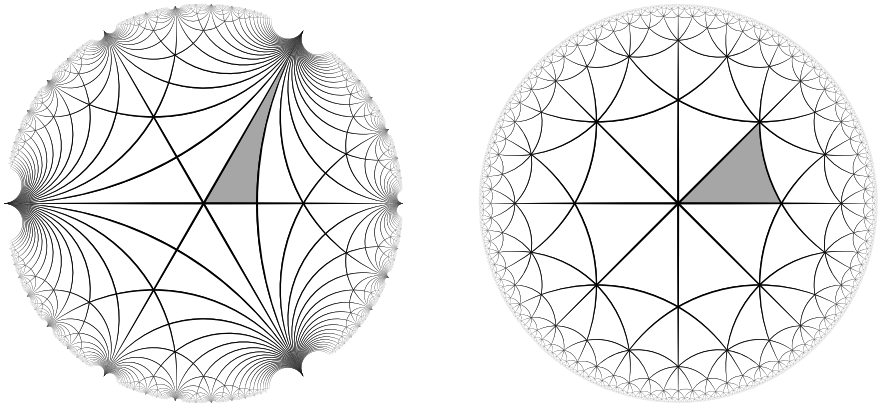

FIGURE 2. 庞加莱球模型中的镶嵌，基本域以灰色标示

双曲 Coxeter 多胞体在高于 29 维的维数中不存在（见 [16]）。有限体积双曲 Coxeter 多胞体在高于 995 维的维数中不存在（见 [12] 和 [15]）。

在给出例子之前，我们先陈述一个定理： [6], 该定理结合了 [1]第五章中的一系列结果。它指出，极小无限非仿射 Coxeter 群可以表示为双曲反射群，其基本域是一个单纯形。

定义 1.11. 极小无限非仿射 Coxeter 群是指这样一种无限非仿射 Coxeter 群：它的真特殊子群均为球面反射群和仿射反射群的直积。

注 1.12. 每个无限非仿射 Coxeter 群都含有一个极小无限非仿射特殊子群；它是包含关系下所有无限非仿射特殊子群中的极小者。

定理 1.13（Duszenko， [6]）。每个极小无限非仿射 Coxeter 系统（W， S）都可以忠实表示为作用于双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 上的离散反射群，其中 $n = |S| - 1$。 S 中的元素作为关于单纯形 Δ 的余维一面的反射（ Δ 的某些顶点可能是理想点）。

例 1.14. 根据定理 1.13，对于每个极小无限非仿射考克斯特系统 (W, S)，都存在一个以单纯形为基本域、且与 (W, S) 同构的双曲反射群。图 2 中庞加莱球模型里的 $\mathbb{H}^2$ 镶嵌对应于双曲反射群，这些群与极小无限非仿射考克斯特系统同构。

与左图对应的考克斯特系统具有如下表示：

$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2 = (s_1 s_2)^2 = (s_1 s_3)^3 = (s_1 s_3)^\infty = \mathbb{1} \rangle$$

以及与右图对应的系统

$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_1 s_3)^4 = (s_1 s_3)^4 = \mathbb{1} \rangle.$$

1.2. 抽象反射。今后，设 (W, S) 为一个考克斯特系统。

定义 1.15。 S 中标准生成元的共轭元称为反射。反射是对合，而反射集合

$$R := \{wsw^{-1} \mid w \in W,\ s \in S\}$$

是群 W的生成集。因此，类似于字长，我们可以定义反射长度

$$l_R : W \to \mathbb{N}; \qquad w \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid w \in R^n\}$$

其中 $R^n = \{r_1 \cdots r_n \in W \mid r_i \in R\}$。单位元 1 的反射长度为零。我们称元素 R 的最小反射分解为约化的，称最小标准生成元分解 S为约化的。

下述定理是目前已知的、计算任意考克斯特群中反射长度的唯一方法。粗略地说，它表明，一个元素的反射长度可以理解为该元素在群中与单位元相差多少个生成元的一种度量。

定理 1.16（Dyer, [7]）。设 $w \in W$ 的一个 S-约化表达式为 $w = s_1 \cdots s_n$ $w \in W$。则 $l_R(w)$ 等于满足以下条件的自然数 p 的最小值：存在 $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$，使得 $s_1 \cdots \hat{s}_{i_1} \cdots \hat{s}_{i_p} \cdots s_n = \mathbb{1}$，其中，在某个因子上方加帽表示省略该因子。

备注 1.17。在球面反射群和仿射反射群中，存在反射长度的公式，并且 l_R 是一个有界函数（见 [3] 和 [13]）。反射长度在直积上具有可加性（见 [14], 命题 1.2）。与此相反，无限非仿射考克斯特群具有无界的反射长度。

定理 1.18（Duszenko, [6]）。设 (W, S) 是一个无限非仿射 Coxeter 系统。反射长度 l_R 在 W 上是无界函数。

注 1.19。设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中一个具有基本多面体 P、壁 $\{H_1, \ldots, H_m\}$ 和生成集 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ 的双曲反射群。反射 $ws_iw^{-1} \in R$ $(w \in W,\ 1 \le i \le m)$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上的作用是关于 wH_i 的超平面反射。对于每个满足 $v \in W$ 的多面体 vP，将 vP 映射到 P 所需的、关于 $\{wH_i \subseteq \mathbb{H}^n \mid w \in W, 1 \le i \le m\}$ 中超平面的超平面反射的最少次数，恰好等于 v 的反射长度。对于反射$r \in R$，我们用 H_r 表示其在 $\mathbb{H}^n$ 中对应的超平面。

1.3. 双曲超平面及其边界。

定义 1.20. 度量空间 $\mathbb{X}$ 中的两条测地射线 $\gamma, \gamma' \colon [0, \infty) \to \mathbb{X}$ 若 $\sup\{d(\gamma(x)\ \gamma'(x)) \mid x \in [0, \infty)\} < \infty$，则称它们渐近。这是测地射线集合上的一个等价关系。

视觉边界 $\partial\mathbb{X}$ 是测地射线的等价类集合。我们称其元素为理想点，并用 $\gamma(\infty)$ 表示。空间与其视觉边界的并集记为 $\overline{\mathbb{X}} := \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X}$。

注 1.21. 两条测地射线渐近，当且仅当它们的豪斯多夫距离有限。在我们的情形中，视觉边界与格罗莫夫边界相同，因为 $\mathbb{H}^n$ 是一个 CAT(0) 可见空间。

例 1.22. 在庞加莱球模型中，视觉边界 $\partial\mathbb{H}^n$ 恰好是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$。在双曲面模型中，如果两条测地射线渐近，那么对应子空间在 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中的交点是一条包含于光锥边界 $\{v=(v_1,..,v_{n+1})\in\mathbb{R}^{n,1}\mid\langle v|v\rangle=0, v_{n+1}>0\}$中的直线（参见 [2],第 262 页）。

我们赋予 $\overline{\mathbb{X}}$ 锥拓扑。

定义 1.23。固定 CAT(0)度量空间 $(\mathbb{X},d)$ 中的一点 x_0 。设 c 为一条满足 $c(0)=x_0$ 的测地射线，且 r、$\epsilon>0$ 为实数。设 p_r 为 $\overline{\mathbb{X}}$ 在闭球 $\overline{B}(c(0),r)$ 上的投影：对于 $x\notin B(c(0),r)$，投影 $p_r(x)$ 分别是线段 $[x_0,x]$、测地射线上与 x_0 的距离为 r 的点。我们定义

$$U(c,r,\epsilon):=\{x\in\overline{\mathbb{X}}\mid d(x,c(0))>r,\ d(p_r(x),c(r))<\epsilon\}.$$

集合 $U(c,r,\epsilon)$ 构成 $c(\infty)$ 的邻域基，而所有开球 $B(x,r)$ 与所有形如 $U(c,r,\epsilon)$ 的集合（其中 c 是一条满足 $c(0)=x_0$ 的测地射线）共同构成 $\overline{\mathbb{X}}$ 上锥拓扑的基。锥拓扑与点 x_0 的选取无关。

现在，我们转而讨论双曲面模型中 $\mathbb{H}^n$ 的任意维测地子空间。$\mathbb{H}^n$ 中的测地线恰好是 $\mathbb{R}^{n,1}$ 的二维向量子空间与 $\mathbb{H}^n$的非空交集。$\mathbb{H}^n$ 中的 m维测地子空间是 $\mathbb{R}^{n,1}$ 的（$m+1$）维向量子空间与 $\mathbb{H}^n$ $(m\leq n)$的非空交集。这些子空间与 $\mathbb{H}^m$ 等距。

对于子空间 $H\subseteq\mathbb{H}^n$，我们将其在 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中的对应子空间记为 V_H。

定义 1.24. 如果两个互不相交的任意维测地子空间 H_1 和H_2 属于 $\mathbb{H}^n$，且不存在渐近的测地射线 $\gamma_1\subseteq H_1$ 和$\gamma_2\subseteq H_2$，则称它们为超平行。换言之，这些子空间在 $\partial\mathbb{H}^n$中没有公共点。

定义 1.25. 两个相交的测地子空间 H_1、$H_2\subseteq\mathbb{H}^n$ 在 $\mathbb{H}^n$中交于一点，且其交点处成直角，当且仅当存在非零向量 $u_1,...,u_m$，使得 $m>0$属于正交补 $V_{H_1}^{\perp}\subseteq\mathbb{R}^{n,1}$，从而

$$\langle(V_{H_1}\cap V_{H_2})\cup\{u_1,\dots,u_m\}\rangle=V_{H_2}.$$

测地子空间 $H\subseteq\mathbb{H}^n$ 的一条垂线，是一条与 H 作为子空间成直角相交的测地线。

注 1.26. 根据上述定义，该定义是对称的。根据定义，V_{H_1} 包含于$\langle\{u_1,\dots,u_m\}\rangle^{\perp}$，且有 $V_{H_2}^{\perp}=\langle\{u_1,\dots,u_m\}\rangle^{\perp}\cap(V_{H_1}\cap V_{H_2})^{\perp}$。因此，我们可以选取向量 $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V_{H_2}^{\perp}$，使得

$$\langle(V_{H_1}\cap V_{H_2})\cup\{v_1,\dots,v_n\}\rangle=V_{H_1}.$$

例 1.27. 设 H_1 是一个超平面，H_2 是一条测地线，且 $H_1\cap H_2\neq\varnothing$和 $H_2\nsubseteq H_1$。子空间 $V_{H_1}\cap V_{H_2}$ 和 $V_{H_1}^{\perp}$ 均为一维。H_2 是 H_1 的垂线，当且仅当 $V_{H_1}^{\perp}\subseteq V_{H_2}$。

两个超平面相交成直角，当且仅当对应的正交单位向量彼此正交。

2. Ultra-parallel theorem for subspaces in $\mathbb{H}^n$

David Hilbert 基于他关于$\mathbb{H}^2$的公理系统证明了以下定理。

定理 2.1（Hilbert, [10]第 149 页）。在 $\mathbb{H}^2$中，任意两条超平行测地线都有一条公垂线。

我们将此定理推广到 $\mathbb{H}^n$ 中的超平行测地子空间，并证明当两个子空间都是超平面时，公垂线是唯一的。我们的证明不同于 Hilbert 的证明，并且包含了他的定理。因此，我们需要以下几何引理，它可由基本的欧几里得几何推出。

引理 2.2. 设 $\mathbb{S}^n$ 是嵌入在 $\mathbb{E}^{n+1}$ 这一 $(n+1)$ 维欧几里得空间中的单位球面，且 S_1、S_2 是两个维数为 n 或更低、彼此正交相交的球面。

(i) 若 S_1 与 S_2 在闭单位球 $\overline{D}^{n+1}$ 中不相交，则连接 S_1 和 S_2 的中心 C_1 和 C_2 的线段 $[C_1, C_2]$ 恰好与 $\mathbb{S}^n$ 相交两次。(ii) 若 S_1 与 S_2 在开单位球 D^{n+1} 中不相交，则 $S_1 \cap S_2$ 是 $\mathbb{S}^n$ 中的一个点，或为空集。

在 $\mathbb{H}^n$ 的庞加莱球模型中，超平面表示为彼此正交相交的 $(n-1)$ 维球面。这就是下面的推论显而易见的原因。

推论 2.3. 设 H_1 和 H_2 是 $\mathbb{H}^n$ 中两个平行超平面。∂H_1 与 ∂H_2 的交集为空集，或是 $\partial\mathbb{H}^n$ 中的一个点。

定理 2（子空间超平行定理）。$\mathbb{H}^n$ 中的每一对超平行测地子空间都有一条公垂线。如果这两个子空间都是超平面，则公垂线唯一。任何与这两个超平面都成直角相交的超平面都包含这条公垂线。

证明。证明分为两部分。存在性部分在庞加莱球模型中以构造方式证明，唯一性部分则由上双曲面模型得出。

设 H_a 和 H_b 是 $\mathbb{H}^n$中的两个超平行测地子空间。在庞加莱球模型中，它们分别由球面 S_a 和 S_b 表示，并与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 正交相交。由于它们超平行，S_a 和 S_b 在闭单位球$\overline{D}^n$中不相交。不失一般性，假设存在一个经过 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的中心 M 的超平面 S，使得对于开半空间有 $S_a \subseteq \mathring{S}^+$ 和 $S_b \subseteq \mathring{S}^-$。如有必要，对庞加莱球模型施加平移。平移是等距变换，并保持欧几里得角（见 [2], 6.5和6.11）。我们进行如下构造：

设 M_a, M_a 是球面 S_a 和 S_b的中心。由于我们假设S_a 和 S_b 可以由经过 M的超平面分隔，因此 M_a 和 M_b 均不是∞。线段 $[M_a, M_b]$ 位于 $\mathbb{E}^n$ 中，并与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 交于两点 I_a 和 I_b，因为S_a 和 S_b 超平行（见引理 2.2）。此外，该线段与 S_a 和S_b 正交，因为它从这些球面的中心出发。若$M \in [M_a, M_b]$，则 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中的公垂线由 $[I_a, I_b]$表示。

在 $M \notin [M_a, M_b]$的情况下，三角形 $\Delta M I_a I_b$是等腰三角形，且线段 $[M, I_a]$和 $[M, I_b]$包含于唯一的平面 $E \subseteq \mathbb{E}^n$ 中。令 X为

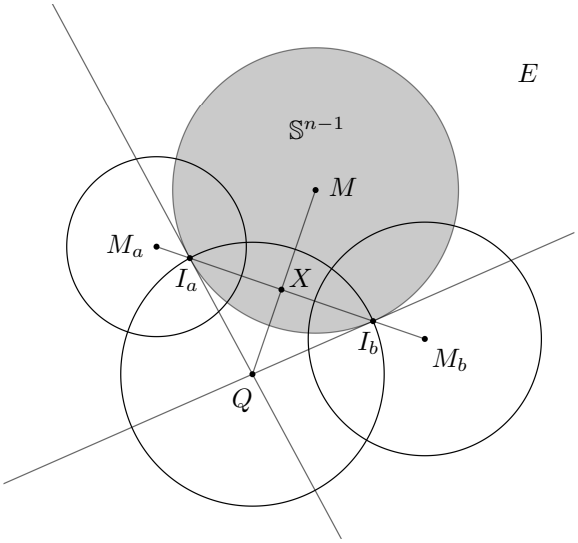

FIGURE 3. 由 E 截出的截面

线段 $[I_a, I_b]$ 的中点。由于角 $\measuredangle I_b I_a M$ 和 $\measuredangle M I_b I_a$ 相等，$\mathbb{S}^{n-1}$ 在 E 中经过 I_a 和 I_b 的唯一切线，以及直线（M, X），都交于一点 Q。由于三角形 $\Delta I_a X Q$ 和 $\Delta I_b X Q$ 全等，我们可以作一个以 Q 为中心、经过 I_a 和 I_b 的圆 C_Q。C_Q 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 正交，因为它的中心位于一条切线上。因此，它在庞加莱球模型中表示一条测地线。还需证明 C_Q 与 S_a 和 S_b 正交。由勾股定理可得以下方程，其中 r_M、r_a、r_b 和 r_Q 是 $\mathbb{E}^n$ 中相应球面的半径：

$$\text{(i)} \qquad r_M^2 = d(I_a, X)^2 + d(M, X)^2$$

$$\text{(ii)} \qquad r_Q^2 = d(I_a, X)^2 + d(Q, X)^2$$

$$\text{(iii)} \qquad d(M, M_a)^2 = d(M_a, X)^2 + d(M, X)^2$$

$$\text{(iv)} \qquad d(M_a, Q)^2 = d(Q, X)^2 + d(M_a, X)^2$$

$$\text{(v)} \qquad d(M, M_a)^2 = r_M^2 + r_a^2$$

代入后得到：

$$\begin{aligned} r_a^2 + r_Q^2 &\overset{\text{(v)}}{=} d(M, M_a)^2 - r_M^2 + r_Q^2 \overset{\text{(iii)}}{=} d(M_a, X)^2 + d(X, M)^2 - r_M^2 + r_Q^2 \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} d(M_a, X)^2 + d(M, X)^2 - r_M^2 + d(I_a, X)^2 + d(Q, X)^2 \\ &\overset{\text{(iv)}}{=} d(M_a, Q)^2 + d(M, X)^2 - r_M^2 + d(I_a, X)^2 \\ &\overset{\text{(i)}}{=} d(M_a, Q)^2. \end{aligned}$$

根据勾股定理，$\measuredangle I_a Q_a Q$ 是直角，其中 Q_a 是 D^n 中 C_Q 与 S_a 的交点。类似地，我们得出 $\measuredangle I_b Q_b Q$ 是直角。因此，圆 C_Q 表示 S_a 与 S_b 的一条公垂线，存在性得以证明。

为证明唯一性，我们改用双曲面模型。在证明的其余部分，我们假设H_a 和 H_b 是超平面。根据定义 1.25，若存在 $v \in V_L \cap V_H$ 使得 $\langle\{u_H, v\}\rangle = V_L$，则超平面 H 与测地线 L 在 $\mathbb{H}^n$ 处成直角相交，其中 u_H 是$V_H^{\perp}$中的唯一单位向量（相差一个符号）。从证明的第一部分可知， H_a和 H_b 有一条公垂线。设 u_{H_a} 和 u_{H_b} 为对应的单位向量。由于我们假设这些超平面及其正交补彼此不同，因此，能表示公垂线的二维子空间只有 $\langle\{u_{H_a}, u_{H_b}\}\rangle$这一种可能。由此可知，存在的公垂线是 $\langle\{u_{H_a}, u_{H_b}\}\rangle \cap \mathbb{H}^n$，且唯一。

˜设 H 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个超平面，与 H_a 和 H_b 相交成直角。我们有$\langle\{u_{H_i}\} \cup (V_{H_i} \cap V_{\tilde{H}})\rangle = V_{\tilde{H}}$，其中 $i = a$、b。这意味着 $u_{H_i} \in V_{\tilde{H}}$，其中 $i = a$、b。由此可知，每个与两个超平面超平行的超平面都包含它们唯一的公垂线。

□

注 2.4. 公垂线的唯一性使我们能够定义 $\overline{\mathbb{H}}^n$中超平面之间的距离。

¯定义 2.5. 设 H_a 和 H_b 是 $\mathbb{H}^n$中的两个超平面。这些超平面之间的距离 $d(H_a, H_b)$ 定义如下:

$$\bar{d}(H_a, H_b) := \begin{cases} d(\rho(a), \rho(b)) & H_a, H_b \text{ ultra-parallel} \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

其中， $d(\rho(a)\ \rho(b))$ 是 H_a和H_b 的交点 $\rho(a)\ \rho(b)$ 之间沿其唯一公垂线 ρ 的距离。

本节其余部分将介绍下面的引理，该引理为以多胞体为基本域的双曲反射群中的超平行关系提供了群论意义。

引理 2.6. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个双曲反射群，其 Coxeter 多面体为 P。设 $\{H_1, \ldots, H_m\}$ 是与 S 中元素对应的超平面，R 是反射的集合。此外，设 H_{r_1}, H_{r_2} 是两个不同的超平面，满足 $r_i \in R$。

(i) H_{r_1}, H_{r_2} 在 $\mathbb{H}^n$ 中相交，当且仅当存在 $s_i, s_j \in S$，满足 $m_{ij} < \infty$ 且 $w \in W$，使得

$$r_1 r_2 = w(s_i s_j)^k w^{-1} \quad \textit{with } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(ii) 若 P 是一个凸多胞体，则 H_{r_1}, H_{r_2} 不超平行，当且仅当存在 $s_i, s_j \in S$ 和 $w \in W$，使得

$$r_1 r_2 = w(s_i s_j)^k w^{-1} \quad \textit{with } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

证明。我们证明 (i)。假设 H_{r_1} 和 H_{r_2} 交于 $\mathbb{H}^n$。因此，存在w_1、$w_2 \in W$，使得 $H_{r_1} = w_1 H_i$和 $H_{r_2} = w_2 H_j$，其中某些 i、$j \in \{1, \ldots, m\}$和$\tilde{w} = w_1^{-1} \cdot w_2 = (s_i s_j)^l$ 满足 $l \in \mathbb{Z}$。由于交点 $H_{r_1} \cap H_{r_2}$ 在 $\mathbb{H}^n$中非空，我们有 $m_{ij} < \infty$。由此可得 $r_1 = w_1 s_i w_1^{-1}$和 $r_2 = w_1 \tilde{w} s_x \tilde{w}^{-1} w_1^{-1}$，其中 $s_x \in \{i, j\}$。因此，我们得到

$$r_1 r_2 = w_1 s_i \tilde{w} s_x \tilde{w}^{-1} w_1^{-1} = w_1 (s_i s_j)^k w_1^{-1}$$

与 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

现在，令 $r_1r_2 = w(s_is_j)^kw^{-1}$，其中 $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$、$m_{ij} < \infty$ 和 $w \in W$。不失一般性，我们还可以假设 $r_1 = s \in S$（对两边进行共轭）。两边乘以 r_1，得到 $r_2 = s \cdot w(s_is_j)^kw^{-1}$。两边的反射长度均为 1。还可以假设 k 是极大的，即表示 w 的词的末尾字母不是 s_i 或 s_j。若 $s \notin \{s_i, s_j\}$，则由定理 1.16 可得 $l_R(s\cdot w(s_is_j)^kw^{-1}) = 3$。若进一步假设 s 不与 w 对易，同样根据这一判据，也可得 $l_R(s\cdot w(s_is_j)^kw^{-1}) = 3$。因此，得到 $s \in \{s_i, s_j\}$，且 s 与 w 对易。设 $v = s_is_j\cdots$ 是一个具有 S-长度 k 的二面体元素。我们有 $r_1 = wsw^{-1}$，且 $r_2 = s \cdot w(s_is_j)^kw^{-1} = wvs_xv^{-1}w^{-1}$，其中 $s_x \in \{s_i, s_j\}$。超平面 H_i 和 H_j 相交，因为 $m_{ij} < \infty$。因此，超平面 H_s 和 $H_{vs_xv^{-1}}$ 相交，H_{r_1} 和 H_{r_2} 也相交。第二个陈述的证明类似，只需忽略条件 $m_{ij} < \infty$。□

3. Arbitrary reflection length close to boundary points

为证明任意双曲反射群的定理 1，我们先陈述一系列引理。

引理 3.1. 设 $\mathbb{S}^n$ 是欧几里得空间 $\mathbb{E}^{n+1}$中的单位球面。对于 $\mathbb{S}^n$ 中的每个 $(n-1)$ 维球面 O，都存在唯一一个位于 $\mathbb{E}^{n+1}$ 中的 $(n-1)$ 维球面S_O，满足

$$\mathbb{S}^n \cap S_O = O$$

且 S_O 与 $\mathbb{S}^n$ 以直角相交。

证明。我们给出证明的概要，详细步骤留给读者。给定$O \subseteq \mathbb{S}^n$，我们通过以下构造得到 S_O：

取 $n+1$ 个互不相交的点 $p_1, \dots, p_{n+1}$，位于 O 中，并考虑这些点处的切空间 $T_1, \dots, T_{n+1}$。这些切空间是 $\mathbb{E}^{n+1}$ 中彼此不同的超平面，它们交于一点 c。点 c 是 S_O 的中心，并且它与 O 中的一个点共同唯一确定 S_O。□

我们回顾一下，D^n 是 $\mathbb{E}^n$ 中单位球的简写。

推论 3.2. $\widehat{\mathbb{E}}^{n+1}$ 中与 $\mathbb{S}^n$ 正交相交的球面上的反演将 $\mathbb{S}^n$ 和 D^{n+1} 作为集合固定。

证明。$\mathbb{E}^n$ 中球面上的反演将球面映射为球面，并保留相交球面之间的欧几里得角（见 [2], 命题 6.5）。结合引理 3.1，即可得出该推论。□

以下两个引理的主要意义在于从定理 1 的条件 (i) 和 (ii) 中得出结论。它们是证明该定理的重要组成部分。

引理 3.3. 设 H_1 和 H_2 是 $\mathbb{H}^n$ 中经过公共点 $\xi \in \partial H_1 \cap \partial H_2 \subseteq \partial\mathbb{H}^n$的两个平行超平面。设 $S = \{s_1, s_2\} \subseteq Iso(\mathbb{H}^n)$ 分别是关于 H_1、H_2的对应反射。对于 ξ 的任意邻域 U，考克斯特群 $\langle S\rangle \subseteq Iso(\mathbb{H}^n)$ 中都存在一个反射 r，使得 $H_r \subseteq U$。

证明。在 Poincar´e 球模型中进行证明。超平面 H_i 由一点紧化 $\mathbb{E}^n$ 中的球面 S_i 表示，这些球面与单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 正交。我们可以假设这些球面具有半径 r_i，

中心 c_i 和一个对踵点 a_i，相对于 ξ（如果一个球面包含 ∞，则对另一个球面施加反演）。令 $(\hat{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为如下定义的球面序列：

$$\hat{S}_0 := S_2 \text{ and } \hat{S}_i = i_{\hat{S}_{i-1}}(S_1),$$

其中 $i_{\hat{S}_{i-1}}$ 是球面 S_{i-1}上的反演。根据推论 3.2，单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 作为一个集合，在所有反演 $i_{\hat{S}_i}$下保持不变。所有球面 $(\hat{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 都包含 ξ，因为 ξ 在每个 $i_{\hat{S}_i}$下都保持不变。令 $\hat{c}_i$ 为中心，$\hat{r}_i$ 为 S_i的半径。对于所有 $i \in \mathbb{N}$，点 $\hat{\xi}$、c_i、a_i、$\hat{c}_i$ 在 $\mathbb{E}^n$ 中共线。这可由球面反演的定义得出。我们有 $d_2(\xi, \hat{c}_i) = \hat{r}_i$。给定中心 $\hat{c}_{i-1}$ 和半径 $\hat{r}_{i-1}$，根据球面反演的公式 (1.2)，以下等式成立：

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= \frac{1}{2} \cdot (\xi - i_{\hat{S}_{i-1}}(a_1)) + i_{\hat{S}_{i-1}}(a_1),\\
\hat{r}_i &= \frac{1}{2} \cdot d_2(i_{\hat{S}_{i-1}}(a_1), \xi),\\
i_{\hat{S}_{i-1}}(a_1) &= \frac{\hat{r}_{i-1}{}^2}{||a_1 - \hat{c}_{i-1}||^2} \cdot (a_1 - \hat{c}_{i-1}) + \hat{c}_{i-1}.
\end{aligned}$$

所有 $i_{\hat{S}_i}(a_1)$ 都位于线段 $[\xi,\hat{c}_{i-1}]$ 上。由于序列 $(d_2(i_{\hat{S}_i}(a_1)\ \xi))_{i\in\mathbb{N}}$ 单调递减且以下界 0 有界，因此它收敛于唯一可能的极限 0。

因此，我们找到了一个反演 $i_{\hat{S}_i}$，通过将 a_1 反演，它将 a_1 映射到任意小的球面，它们位于 $\mathbb{E}^n$ 中并包含 ξ 作为 $i \to \infty$。这些球面表示与 $\{wsw^{-1} \mid s \in S, w \in \langle S\rangle\}$ 中的反射相对应的超平面，我们可以找到一个足够小的球面，它表示一个包含于 U 中的超平面 H_r。□

引理 3.4. 设 H_1 和 H_2 是 $\mathbb{H}^n$ 中的两个超平行超平面，且 $S = \{s_1, s_2\} \subseteq Iso(\mathbb{H}^n)$ 是相应的反射。设 γ 是包含于 H_1 与 H_2 的唯一公垂线 $\bar{\gamma}$ 中的一条测地射线。对于 $\gamma(\infty)$ 的任意邻域 U，考克斯特群 $\langle S\rangle \subseteq Iso(\mathbb{H}^n)$ 中存在一个反射 r，使得 $H_r \subseteq U$。

证明。等距变换保持角度，也保持子空间以直角相交。令R 为 $\langle S\rangle$中的反射集合。根据第 1 节中关于双曲面模型内超平面反射的公式 (1.1)，显然，对所有 R中的 $\tilde{r}$，关于 $H_{\tilde{r}}$ 反射都会使 $\bar{\gamma}$ 作为一个集合保持不变。因此，$\mathcal{H} = \{H_{\tilde{r}} \mid \tilde{r} \in R\}$ 中的所有超平面都以$\bar{\gamma}$ 为公垂线。

与引理 3.3 的证明一样，我们继续使用庞加莱球模型，并$\hat{}$定义一个球面序列。令 S_i 为 $\mathbb{E}^n$ 中表示 H_i的球面。不失一般性，我们可以假设 S_i 的半径为 r_i，中心为 c_i，与 $\mathbb{E}^n$ 中的线段 $[c_1, c_2]$ 相交于 x_i，且 a_i 是 x_i 的对踵点（若一个球面包含 ∞，则对另一个球面作反演）。令 $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为如下定义的球面序列

$$\hat{S}_0 := S_2 \text{ and } \hat{S}_i = i_{\hat{S}_{i-1}}(S_1),$$

$\hat{}\hat{}$其中 $i_{\hat{S}_{i-1}}$ 是球面 S_{i-1}上的反演。对于所有 S_i，都存在一个反射 $r_i \in R\hat{}\hat{}\hat{}$，使得 S_i 表示 H_{r_i}。设$\hat{c}_i$ 为 S_i的中心，$\hat{x}_i$ 为 $S_i\hat{}$与 $\mathbb{E}^n$ 中的线段 $[c_1, c_2]$ 的交点，$\hat{a}_i$ 为$\hat{x}_i$ 在 S_i上的对踵点。根据定理 2 的证明以及第 1 节中的公式 1.2，我们推得所有$\hat{c}_i$、$\hat{x}_i$、$\hat{a}_i$

以及 $\gamma(\infty)$ 都位于测地线段 $[c_1, c_2]$ 上。给定点$\hat{c}_{i-1}$、$\hat{a}_{i-1}$、$\hat{x}_{i-1}$，公式 (1.2) 推出：

$$\hat{x}_i = i_{\hat{S}_{i-1}}(x_1) = \frac{d_2(\hat{a}_{i-1}, \hat{x}_{i-1})^2}{4 \cdot ||x_1 - \hat{c}_{i-1}||^2} \cdot (x_1 - \hat{c}_{i-1}) + \hat{c}_{i-1} \quad \in (\hat{x}_{i-1}, \gamma(\infty)),$$

$$\hat{a}_i = i_{\hat{S}_{i-1}}(a_1) = \frac{d_2(\hat{a}_{i-1}, \hat{x}_{i-1})^2}{4 \cdot ||a_1 - \hat{c}_{i-1}||^2} \cdot (a_1 - \hat{c}_{i-1}) + \hat{c}_{i-1} \quad \in (\gamma(\infty), \hat{c}_{i-1}),$$

$$\hat{c}_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_i - \hat{a}_i) + \hat{a}_i \quad \in (\gamma(\infty), \hat{a}_i).$$

我们考虑距离序列 $(d_2(\hat{c}_i, \hat{x}_i))_{i\in\mathbb{N}}$，其中$\hat{c}_i$ 位于闭单位球 $\overline{D}^n$ 之外，而 $\hat{x}_i$ 始终位于开单位球 D^n 内，因为与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 正交相交的球面反演是 $\widehat{\mathbb{E}}^n$ 上的一个双射，并且作为集合保持 $\mathbb{S}^{n-1}$ 和 D^n 不变（推论 3.2）。该序列单调递减并收敛于 0，因为点序列 $(\hat{c}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(\hat{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 都收敛于 ∞ 中的 $\hat{\gamma}$。因此，球面序列 $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 中包含半径任意小且中心任意接近 $\mathbb{E}^n$ 中 $\gamma(\infty)$ 的元素。这意味着，在与 $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 对应的超平面序列 $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 中，存在一个超平面 $\hat{} H_r$，使得 $H_r \subseteq U$ with $r \in R$. □

我们重述定理 1。

定理 1. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中一个基本域为 P 的双曲反射群。设 R 是 W 中的反射集合。设 U 是 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中点 ξ 的一个邻域，其中 ξ 位于 $\partial\mathbb{H}^n$。假设 ξ 满足以下条件之一：

(i) ξ 是两条平行超平面 $H_r, H_{r'}$ 的公共点，且 $r, r' \in R$。(ii) ξ 是两条超平面 $H_r, H_{r'}$ 的公垂线的端点，其中这两条超平面超平行，且 $r, r' \in R$。

对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $w \in W$，使得 $l_R(w) = k$，且区域 wP 包含于 U。

证明。对于点 $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$，取 $U(c, d, \epsilon)$ 包含于邻域 U，其中 c 是一条测地射线，满足 $c(\infty) = \xi$。在两种情形下，根据引理 3.3 和引理 3.4，都存在一个超平面H_r，使得 $r \in R$ 完全包含于 $U(c, d, \epsilon)$。因此， P 在 r 下的像 rP 包含于 U。这就证明了反射长度为 1 时的定理。一般而言， l_R 在 W 上无界（见定理 1.18）。因此，存在$w \in W$，其反射长度为 $l_R(w) = k + 1$。若 wP 位于 H_r^- 的半空间内，且该半空间包含于 U，则证明完成。否则， $wP \subseteq H_r^+$，并将 wP 关于 H_r 反射，得到 $wrP \subseteq U$。元素 wr 的反射长度为 $n + 1 \pm 1$（见[13] , 1.3）。 U 中连接 rP 与 wrP 的一列相邻铺砌块 $(w_1P, \ldots, w_lP)$ 包含铺砌块 w_iP，其反射长度 $l_R(w_i)$ 取遍 1 到 $l_R(wr)$ 之间的所有值（见第 [13], 段 1.3）。□

4. Hyperplanes not generating a hyperbolic reflection group

本节陈述三个结果，这些结果将在最后一节中用到，但它们在更一般的情形下也成立。

引理 4.1。对于 $k \geq 3$，设 $\{H_{r_1}, \ldots, H_{r_k}\}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中一组两两平行超平面。若所有 H_{r_i} 在 $\partial\mathbb{H}^n$ 中有一个公共点 ξ，且由关于 H_{r_i} 的反射 r_i 生成的群 D 是 $Iso(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群，则 D 作为群同构于无限二面体群 D_∞。

证明。由推论 2.3 可知， $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ 是 ∂H_{r_1}、.....、∂H_{r_k} 的唯一公共点。关于 H_{r_i} 的超平面反射 r_i 将 $\{H_{r_1}, \ldots, H_{r_k}\}$ 中的超平面映射为边界上有 ξ 的超平面，因为 H_{r_i} 和 ∂H_{r_i} 被 r_i 逐点固定。设 R 为群 $D = \langle r_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\rangle$ 中所有反射组成的集合。相应的超平面在其边界上都包含 ξ。

我们固定一个超平面 $H \in \mathcal{H} := \{H_r \mid r \in R\}$。由于 W 是离散的，我们可以选择 ε、$\delta \in \{+, -\}$，使得半空间 $H^\varepsilon \cap H_1^\delta$ 的交集非空，且不是一个半空间，并且不包含 $\mathcal{H}$ 中的其他超平面。我们证明，与 H_1 和 H 对应的反射 s_1 和 s 生成 W。因此，我们假设存在一个 H_{r_i}，使得 r_i 不能写成 s_1 和 s 的乘积。存在一个元素 $w \in \langle\{s, s_1\}\rangle$，使得

$$H_{r_i} \subseteq wH^\varepsilon \cap wH_1^\delta.$$

换言之，超平面 H_{r_i} 包含于由 H 和 H_1 的副本所确定的两个半空间的交集中，因为 H_{r_i} 的边界也包含 ξ。因此，超平面 $w^{-1}H_{r_i} \in \mathcal{H}$ 包含于 $H^\varepsilon \cap H_1^\delta$ 中。这与我们的假设矛盾，由此证明了 $\langle\{s, s_1\}\rangle = D$。由于 H 和 H_1 在 $\mathbb{H}^n$ 中不相交，ss_1 是无限阶的，并且 D 同构于 D_∞。□

引理 4.2. 设 $\{H_{r_1}, \ldots, H_{r_k}\}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中一组两两超平行的超平面，满足 $k \geq 3$，且公垂线为 ϱ。若由关于 H_{r_i} 的反射 r_i 生成的群 D 是 $Iso(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群，则作为群，D 与 D_∞ 同构。

证明. 关于 H_{r_i} 的超平面反射 r_i 将 $\{H_{r_1}, \ldots, H_{r_k}\}$ 中的超平面映射为一组两两超平行的超平面，其公垂线为 ϱ，因为 r_i 将 ϱ 作为一个集合保持不变。设 R 为群 $D = \langle r_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\rangle$ 中所有反射构成的集合。集合 $\mathcal{H} := \{H_r \mid r \in R\}$ 中的超平面两两超平行，且公垂线为 ϱ。证明的其余部分与引理 4.1 的证明类似。□

引理 4.3. 设 (W, S) 是一个以 P 为基本多面体的双曲反射群。设 R 为反射集。对于每个 $r \in R$ 和每个 $\epsilon > 0$，都存在 $r_\epsilon \in R$，使得超平面 H_{r_ϵ} 和 H_r 超平行，并且

$$\bar{d}(H_r, H_{r_\epsilon}) > \epsilon.$$

¯证明。只需证明存在 $\tilde{r} \in R$ 使得 $d(H_r, H_{\tilde{r}}) > 0$，因为我们可以让这些超平面彼此反射数次，从而得到 H_{r_ϵ}。超平面反射将垂线作为集合保持不变。

W 具有任意大秩的泛 Coxeter 群作为反射子群（见 [8]）。设 $W_3 = \langle r_1, r_2, r_3\rangle$ 是一个包含于 W 中的泛 Coxeter 群，且它是一个反射子群，其考克斯特生成集为 $\{r_1, r_2, r_3\} \subseteq R$。 H_{r_1}, H_{r_2} 和 H_{r_3} 在 $\mathbb{H}^n$ 中两两不相交，因为 r_1, r_2, r_3 的阶两两无限。假设所有 H_{r_i} 都与 H_r 在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中相交。否则，就会存在一个与 H_r 的距离大于零的超平面。

假设超平面 H_{r_1} 和 H_r 在 $\mathbb{H}^n$ 中不相交，且在 $\partial\mathbb{H}^n$中有一个公共点。 H_r 包含在一个半空间 $H_{r_1}^\varepsilon$ 中，且 $\varepsilon \in \{+, -\}$。 H_{r_2} 和 H_{r_3} 也各自包含在一个半空间中。由于 W_3 与 D_∞不同构，超平面 H_{r_1}、H_{r_2} 和 H_{r_3} 在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中没有公共点（见引理 4.1）。这意味着存在 H_{r_j}，使得 $j \in \{2, 3\}$，且 H_{r_j} 不相交

在点 $H_r \cap H_{r_1} \subseteq \overline{\mathbb{H}}^n$ 处与 H_r 相交（见引理 2.3）。因此， H_{r_j} 也包含在 $H_{r_1}^{\varepsilon}$ 中。超平面 $H_{r_1 r_j r_1}$ 关于 H_{r_1} 的反射与 H_r 在 $\overline{\mathbb{H}}^n$中不相交。

设 H_r 与 H_{r_i} 中的所有超平面 $\mathbb{H}^n$ 都相交。由于 $\langle \{r_1, r_2, r_3\} \rangle$ 同构于一个泛 Coxeter 群，两个不同且非超平行的超平面 H_{r_i} 和 H_{r_j}、$1 \leq i$、$j \leq 3$ 的交集为空，且 $\partial H_{r_i} \cap \partial H_{r_j} = \{\delta\}$（见推论 2.3）。存在 δ 在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中的一个邻域 U，使得 $U \cap \overline{H}_r = \varnothing$，因为 H_r 与所有 H_{r_i} 相交。由引理 3.3，我们可以在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中 $\delta \in \partial \mathbb{H}^n$ 的任意小邻域内得到超平面。这给出了满足 $\tilde{r} \in R$ 的 $H_{\tilde{r}} \subseteq U$，且 $H_{\tilde{r}}$ 与 H_r 超平行。设 H_{r_i} 两两超平行。根据引理 4.2，我们可以假设 H_r 与 H_{r_i} 不正交。这意味着 H_r 不包含 H_{r_i} 和 H_{r_j} 的唯一公垂线 γ（见定理 2）。因此，由引理 3.4，存在一个超平面 $H_{\hat{r}}$，其 $\hat{r} \in R$ 位于端点 $\gamma(\infty)$ 的邻域 V 内，且满足 $V \cap H_r = \varnothing$。 H_r 和 $H_{\hat{r}}$ 超平行。□

5. Polytopes as fundamental domains

引理 5.1. 设 (W, S) 是一个双曲反射群，其凸多胞体 P 是一个基本域。设 R 是 W 中反射的集合。超平面的理想点集合

$$\mathcal{H}_\infty := \{\gamma(\infty) \mid \gamma \subseteq H_r \text{ geodesic ray}, r \in R\}$$

在 $\partial \mathbb{H}^n$ 中稠密。

证明。由于 W 是离散的，且集合 $\mathcal{H}_\infty$ 是可数个与 $\mathbb{S}^{n-2}$ 同胚的球面的并，因此我们有 $\mathcal{H}_\infty \subsetneq \partial \mathbb{H}^n$（见第 1.3 节）。设 $\xi \in \partial \mathbb{H}^n \setminus \mathcal{H}_\infty$，并设 $c\colon [0, \infty] \to \overline{\mathbb{H}}^n$ 是一条满足 $c(\infty) = \xi$ 的测地射线。对于 ϵ， $r > 0$，集合 $U(c, s, \epsilon)$ 构成 ξ 的一个邻域基（见定义 1.23）。我们固定任意的 ϵ， $r > 0$。在庞加莱球模型中，测地射线的端点集合 $C(\infty)$

$$C := \{c^* \mid c^* \text{ geodesic ray}, c^*(0) = c(0),\ d(c^*(r), c(r)) = \epsilon\}$$

是 $\partial \mathbb{H}^n$ 中的一个球面。根据引理 3.1，存在一个超平面 E，它可能不在 $\{H_r \mid r \in R\}$ 中，且满足 $\partial E = C(\infty)$。令 E^+ 为满足 ξ 位于 $\overline{E^+}$ 闭包中的半空间。要证明该引理，只需证明存在一个超平面 $H_{r'}$，满足 $r' \in R$，且与半空间 E^+ 有非空交集。于是$U(c, s, \epsilon) \cap \partial H_r' \neq \varnothing$，因为超平面以及 $\mathbb{H}^n$ 都是唯一测地子空间（见 [2], 第 21 页）。由于 P 是严格基本域，存在$w \in W$ 满足 $E^+ \cap wP \neq \varnothing$。这意味着存在一个超平面 $H_{r'}$，满足$r' \in R$，使得 $E^+ \cap H_{r'} \neq \varnothing$，因为 P 是凸多胞体。□

记号 5.2. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个双曲反射群。设 R 为反射集。对于理想点集 $\xi \in \partial \mathbb{H}^n$，若存在与 $r_1, r_2 \in R$对应且满足 $\xi \in \partial H_{r_1} \cap \partial H_{r_2}$ 的两个平行超平面 H_{r_1} 和 H_{r_2}，使得 W，则记为 $\mathcal{I}_p(W)$。此外，对于理想点集$\mu \in \partial \mathbb{H}^n$，若 μ 是与 $r_3, r_4 \in R$对应的两个超平面 H_{r_3} 和 H_{r_4} 的公垂线的一个端点，则记为 $\mathcal{P}_{up}(W)$。

定理 5.3. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个双曲反射群，其基本域为凸多胞体 P。其并集

$$\mathcal{I}_p(W) \cup \mathcal{P}_{up}(W)$$

在视觉边界 $\partial \mathbb{H}^n$ 中稠密。

证明。假设存在一点 $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$、实数 $\epsilon, \delta > 0$ 以及 ξ 的一个邻域 $U(c, \delta, \epsilon)$，使得 $\mathcal{I}_p(W) \cap U(c, r, \epsilon) = \varnothing$。令 R 为反射集。我们想证明 $\mathcal{P}_{up}(W) \cap U(c, \delta, \epsilon) \neq \varnothing$，首先证明存在一条测地射线 φ 的一个端点 $\varphi(\infty) \in U(c, \delta, \epsilon)$，该射线包含在 $\mathcal{H} = \{H_r \mid r \in R\}$ 中有限个超平面的一个一维交集中。因此，接下来我们依次考察每个更低维情形下的推论：

引理 5.1 指出，$\mathcal{H}_\infty = \{\gamma(\infty) \mid \gamma \subseteq H_r$ 测地射线的端点 $r \in R\}$ 在 $\partial\mathbb{H}^n$中稠密。因此，存在一个超平面 H_r，满足 $r \in R$，以及一个理想点 ν，使得 $\nu \in \partial H_r \cap U(c, \delta, \epsilon)$。该超平面 H_r与 $\mathbb{H}^{n-1}$等距（见第 1.3 节），而交点 $\partial H_r \cap U(c, \delta, \epsilon)$ 是 $\overline{H_r}$中 ν 的一个邻域。我们考虑 H_r 中的超平面，它们是 $t \in R$的交点 $H_r \cap H_t$。存在$w \in W$，使得 $P' = wP \cap H_r$ 是 H_r 中的一个多胞体；随后我们可以再次应用引理 5.1，并采用类似的论证，逐步降至低一维，直至一维。

因此，存在一条测地线 γ，它位于 $\mathbb{H}^n$ 中，是 $\mathcal{H}$中有限多个超平面的交集，并且在 $U(c, \delta, \epsilon)$中有一个端点 $\gamma(\infty)$。测地射线 γ包含无穷多个具有 $u \in W$的 uP 的维数为 1 的面，因为 P是一个多胞体，并且我们假设 $\mathcal{I}_p(W) \cap U(c, \delta, \epsilon)$为空。考察 uP的维数为 0 的面，这意味着超平面 H_t 在具有 $t \in T \subseteq R$ 和 $|T| = \infty$的条件下，与 γ 相交于有限多个不同长度的区间中的孤立点。

在庞加莱球模型中，这一情形对应于球面 S_t（具有 $t \in T$），它们与对应于 γ 的圆 C_γ 相交，其中对于所有 $t \in T$，S_t 和 C_γ 都与 $\mathbb{S}^{n-1}$正交。球面 S_t 与 C_γ 以有限种不同角度相交，因为可能出现的角度仅继承自 P，而 P 是一个凸多胞体和严格基本域。因此，我们可以选取一个球面 $S_{t'}$（具有 $t' \in T$），使其与 C_γ 相交，并且充分接近 $\gamma(\infty)$，从而交集 $S_{t'} \cap D^n$ 与开单位球 D^n 的交集包含于 $U(c, \delta, \epsilon)$中。对应于 $S_{t'}$的超平面的一侧半空间 $H^\varepsilon_{t'}$包含于 $U(c, \delta, \epsilon)$ 中。对于$H_{t'}$，存在一个与 $H_{t'}$ 超平行的超平面 $H_{\tilde{t}} \in \mathcal{H}$（见引理 4.3）。$H_t$ 与 $H_{t'}$的唯一公垂线 ϱ（由定理 2 保证存在）有一个端点 $\varrho(\infty) \in \mathcal{P}_{up}(W)$，位于边界 $\partial H^\varepsilon_{t'} \subseteq U(c, \delta, \epsilon)$ 上。由此可得$\mathcal{P}_{up}(W) \cap U(c, \delta, \epsilon) \neq \varnothing$，证明完毕。□

定理 5.4. 设 (W, S) 是 $\mathbb{H}^n$ 中的一个双曲反射群，其基本域为一个多胞体 P。设 R 是 W 中反射的集合。设 U 是 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中点 ξ 的一个邻域，其中 ξ 属于 $\partial\mathbb{H}^n$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $w \in W$，使得 $l_R(w) = k$，且区域 wP 包含于 U 中。

证明. 定理 5.3 指出，存在一点 $\nu \in \partial\mathbb{H}^n$ 属于 U，使得 ν要么是对应于 R 中反射的两个平行超平面的一个理想点，要么是对应于 R中反射的两个超平面的公垂线的一个端点，这两个超平面超平行。因此，ν 满足定理 1 中的一个条件，并且对于 ν 的每个邻域以及每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 wP，使得 $l_R(w) = k$。由于 $\mathbb{H}^n$ 是一个度量空间，存在 ν 的一个邻域 U'，该邻域完全包含于 U 中，定理得证。□

注 5.5。定理 5.4 仅适用于以多胞体为基本域的反射群。对于以非多胞体多面体为基本域的反射群，该定理不成立。此类反射群的一个例子是由三条两两超平行的

超平面在 $\mathbb{H}^n$ 中生成的双曲反射群。该群同构于由三个生成元构成的泛 Coxeter 群 W_n。令 w 属于 W_n，并令 R 为 W_n 中的反射集合。由于每个区域 wP 的边界上都存在点 ξ_w 的邻域 U_w，使得 $U_w \cap wP = U_w$，因此任意接近 $w\xi$ 的反射长度只有反射长度 $l_R(w)$。

致谢。作者感谢 Petra Schwer 和 Thomas Kahle 在论文准备过程中提出的许多宝贵建议。此外，作者感谢 Sami Douba 提醒自己关注 Felikson 和 Tumarkin 的工作。作者部分得到了德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）项目 314838170、GRK 2297 MathCoRe 的资助。

References

[1] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algérbes de Lie*, Springer Berlin Heidelberg, 2007。[2] Martin R. Bridson 和 Andr´e H¨afliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer Berlin Heidelberg, 1999。[3] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Mathematica 25（1972），第 1 期，1–59（英文）。[4] Michael Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2012年11月26日。[5] Brian Drake 和 Evan Peters, *An upper bound for reflection length in Coxeter groups*，代数组合学杂志 54（2021年1月），第 2 期，599–606。[6] Kamil Duszenko, *On minimal lengths of expressions of Coxeter group elements as products of reflections*，伦敦数学会通报 44（201106）。[7] M.J. Dyer, *Reflection length in non-affine Coxeter groups* **129** 200101 ，美国数学会会刊（），[8] Tom Edgar, *reflections universal reflection subgroups and exponential growth in Coxeter groups* **41** 2013 4, 1558 1569, ，代数通讯（），第 – 期，可在 https://doi.org/10.1080/00927872.2011.644367 查阅。[9] A. A. Felikson 和 Pavel Tumarkin, *A series of word-hyperbolic Coxeter groups*, arXiv：群论（2005）。[10] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner Leipzig, 1913。[11] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, 剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社，1990。[12] A. G. Khovanskii, *Hyperplane sections of polyhedra toroidal manifolds and discrete groups* , , , 泛函分析 *in Lobachevsky space* **20** 1986 1, 41 50 及其应用（），第 – 期。[13] Joel Brewster Lewis、Jon McCammond、T. Kyle Petersen 和 Petra Schwer, *Computingreflection length in an affine Coxeter group*，美国数学会汇刊 371（2018年12月），第 6 期，4097–4127。[14] Jon McCammond 和 T. Kyle Petersen, *Bounding reflection length in an affine Coxeter group* **34** 2011 711 719, 1009.4918 ，代数组合学杂志（），– 可在 查阅。[15] M N Prokhorov, *The absence of discrete reflection groups with noncompact fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevsky space of large dimension*，苏联数学汇报 28（1987年4月），第 2 期，401–411。[16] E. B. Vinberg, *Discrete linear groups generated by reflections in Lobachevsky spaces of large dimension* **15** 1981 2, 128 130 ，泛函分析及其应用（），第 – 期。[17] E. B. Vinberg 和 O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature* 139 248 ，几何学 II, 1993年，第 – 页。

Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg*Current address*：代数与几何研究所（IAG），马格德堡奥托·冯·格里克大学，Universitätsplatz 2，德国马格德堡39106*Email address*： marco.lotz@ovgu.de