arXiv:2303.09316v1 [physics.soc-ph] 16 Mar 2023

高阶相关揭示时间超图中的复杂记忆

Luca Gallo,[1,*] Lucas Lacasa,[2] Vito Latora,[3,4,5,6] 和 Federico Battiston[1,†]

[1] *Department of Network and Data Science, Central European University, Vienna, Austria*

[2] *Institute for Cross-Disciplinary Physics and Complex Systems (IFISC), CSIC-UIB, Palma de Mallorca, Spain*

[3] *School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London, London E1 4NS, UK*

[4] *Department of Physics and Astronomy, University of Catania, 95125 Catania, Italy* [5] *INFN Sezione di Catania, Via S. Sofia, 64, 95125 Catania, Italy* [6] *Complexity Science Hub Vienna, A-1080 Vienna, Austria*（日期：2023年3月17日）

许多现实世界中的复杂系统都以随时间变化的群体互动为特征。然而，当前的时序网络方法仅基于成对相互作用，无法描述群体动力学。在此，我们使用时变超图来描述这类系统，并提出一种基于高阶相关的框架，用于刻画其时间组织结构。我们分析了多种社会系统，发现不同规模的群组具有典型的长程时间相关模式。此外，我们的方法揭示了不同群体规模之间存在非平凡的时间相互依赖关系。我们提出了一种具有非马尔可夫群体相互作用的时间超图模型，揭示复杂记忆是数据中观测到的模式背后的基本机制。

时序网络中的连接并非持续活跃，这类网络为模拟复杂系统中的相互作用如何随时间演化提供了一个框架 [1–3]。它们揭示了理解现实世界中社会和生物系统的时变相互作用网络如何影响动力学过程（如流行病传播 [4–7], 扩散 [8–12], 同步 [13, 14], 及其他过程 [15–18]）的关键。近期研究结果凸显了每条连接的活动如何以复杂的方式依赖于所有其他连接的活动，并表明时序网络中的记忆 [19–22] 本质上是一个多维概念，具有明确的微观形态 [23]。不同方法尝试将网络的时间演化描述为图空间中的一条轨迹，自然地将相关性 [24] 甚至动力学稳定性 [25] 等传统上用于标量或向量时间序列的概念推广至图的情形。

然而，时序网络方法存在一个重大局限。它们基于网络描述，因此只能描述二元相互作用（即连接）如何随时间变化。另一方面，许多现实世界中的社会 [26–30], 生物 [31, 32], 神经 [33, 34]和生态 [35, 36] 系统都表现出高阶相互作用，即三个或更多单元同时参与的相互作用。此类多体相互作用更适合用高阶网络建模，例如超图和单纯复形，其中超边和单形编码了任意数量单元之间的相互作用 [37, 38]。值得注意的是，已知将现实世界系统的高阶架构纳入考量，会在多种动力学过程中产生新的集体现象，包括扩散 [39, 40], 同步 [41–45], 传染 [46, 47]和演化博弈 [48, 49]。

一些早期研究已经开始探索高阶相互作用的时间维度。例如，在现实世界中的社会系统中，群体互动被发现以持续的活动爆发形式发生 [28], ，不同规模的事件在时间上相近时，在网络中也存在空间相关性 [50]。研究表明，这类持续的时间高阶相互作用能够预示流行病过程中的地方性状态出现 [51], ，并影响非线性共识动力学的收敛时间 [52]。近期，研究者还开发了用于对时间群组激活数据建模的理论框架 [53], ，以及基于脑功能活动、金融市场和疾病传播的多变量时间序列拓扑数据分析来构建单纯复形的方法 [54] 。然而，如何分析和刻画具有高阶相互作用的现实复杂系统的时间组织结构，至今仍是一个未解问题。

在这封信件中，我们通过提出一个用于研究复杂系统中高阶时间依赖关系的通用框架，弥补了这一空白。我们将具有群组交互的复杂系统表示为时间超图，其中群体规模和组成可随时间变化；也就是说，时间超图是一种超边随时间变化且阶数各异的超图。随后，我们定义了一组用于提取高阶时间相关性的度量，即刻画不同阶数超边的动态如何相互关联。通过聚焦于多种经验社会系统，我们的框架揭示了不同群体规模下长程相关性的存在及其层级组织。此外，我们还发现不同规模群组之间存在时间相关性，也就是不同阶数超边之间存在时间相关性，

* gallol@ceu.edu

† battistonf@ceu.edu

从而捕捉到连贯的中观结构之间涌现出的交互作用。最后，为了深入理解其背后的微观机制，我们提出了具有高阶记忆的全新时间超图模型，能够解释观察到的经验模式。

超图中的时间相关性。—具有高阶相互作用的系统可用超图 [55] 表示。超图是一个元组 $(\mathcal{V},\ \mathcal{H})$，其中$\mathcal{V}$ 是由 N 个节点构成的集合，$\mathcal{H}$ 是由 M 条超边构成的集合。每条超边由若干节点组成，表示多个单元之间的一种相互作用。阶数为 2 的超边（即 2-超边）是由两个节点组成的集合，表示二体相互作用；3-超边是由三个节点组成的集合，表示三个单元之间的群体相互作用，依此类推，最高可达 D阶。超图可用一组邻接矩阵 $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, 。 。 。 , $A^{(D)}$ 编码，其中矩阵$A^{(d)}$ 的元素 $a_{ij}^{(d)}$ 统计节点 i和 j 共同所属的 d阶超边数量，而元素 $a_{ii}^{(d)}$ 设为零。为了描述高阶相互作用的时间演化，我们考虑时间超图 [28]。时间超图是一个由（静态）超图 $(\mathcal{V},\ \mathcal{H}(t))$ 构成的有序序列，其中 $t \in \{1,\ldots,T\}$，而 $\mathcal{H}(t)$ 是在时间 t存在的超边集合。对于每个阶数 d，我们可以定义一个邻接矩阵序列$\{A^{(d)}(t)\}_{t=1}^{T} = \{A^{(d)}(1)\ A^{(d)}(2)$ 。 。 。 ，$A^{(d)}(T)\}$，以表示系统中 d 阶相互作用的时间演化。

高阶相互作用的存在使时间相关性的分析成为一个多方面的问题。首先，为了量化给定阶数 d 的相互作用中的时间相关性，我们引入阶内相关矩阵

$$\mathcal{C}^{(d)}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}\frac{1}{(d-1)!^2}\left[A^{(d)}(t)-\mu^{(d)}\right]\cdot\left[A^{(d)}(t+\tau)-\mu^{(d)}\right]^{\intercal}, \tag{1}$$

其中 $d \in \{2,\ldots,D\}$ 为时间滞后，A 表示 A 的转置，并且我们将

$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A^{(d)}$ t $d=2$ 1 d $\mu^{(d)}$ = 阶

的退火邻接矩阵定义为 ( )。注意，对于 ，式 ( ) 可还原为时序网络的相关矩阵 [24]。 $\mathcal{C}^{(d)}(\tau)$ 的对角项刻画了 d 阶超边的时间自相关，而非对角项则量化了交叉相关。当后者可以忽略时，我们可以关注对角项，并定义阶内相关函数

$$c^{(d)}(\tau) = \mathrm{tr}(\mathcal{C}^{(d)}(\tau)), \tag{2}$$

它提供了一个标量，用于衡量 d 阶超边在滞后 τ 时的自相关程度。

其次，可以探究两个不同阶的相互作用 d_1 是否表现出时间上的相互依赖，还是各自独立演化。为估计这种跨阶时间相关，我们引入

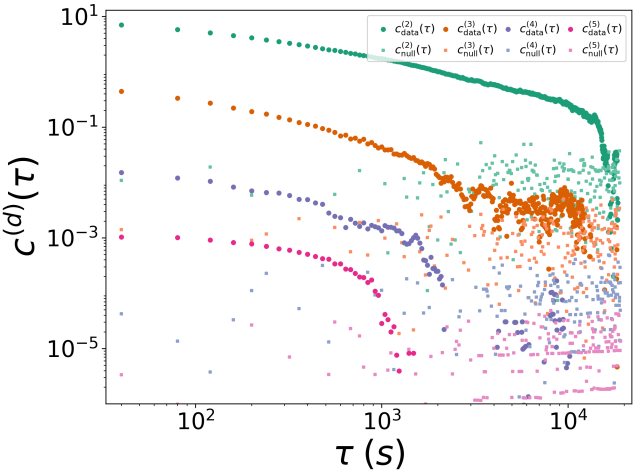


图 1. 人际面对面互动中的阶内相关。圆圈表示不同规模群组中的互动所对应的 $c^{(d)}(\tau)$ 值，$d \in \{2,\ldots,4\}$。方块表示随机化零模型，其中通过重新排列时间步移除了时间相关性。

阶间相关矩阵

$$\mathcal{C}^{(d_1,d_2)}(\tau) = \sum_{t=1}^{T-\tau}\frac{\left[A^{(d_1)}(t)-\mu^{(d_1)}\right]\cdot\left[A^{(d_2)}(t+\tau)-\mu^{(d_2)}\right]^{\intercal}}{(T-\tau)(d_1-1)!(d_2-1)!}, \tag{3}$$

其中 d_1，$d_2 \in \{2,\ldots,D\}$。注意，当 $d_1 = d_2 = d$ 时，我们得到阶内相关矩阵 $\mathcal{C}^{(d)}$。随后可将标量阶间相关函数定义为

$$c^{(d_1,d_2)}(\tau) = \mathrm{tr}(\mathcal{C}^{(d_1,d_2)}(\tau)). \tag{4}$$

关于阶内相关和阶间相关的全部信息都可以编码在一个 $(D-1)\times(D-1)$ 归一化交互矩阵 $\mathcal{K}_{d_1d_2}(\tau) = c^{(d_1,d_2)}(\tau)/2\sqrt{\sigma^{(d_1}\sigma^{(d_2}}$, 中，其中 $\sigma^{(d)} = c^{(d)}(0)$，其元素 $\mathcal{K}_{d_1d_2}(\tau)$ 描述给定时刻的 d_1 阶互动与 d_2 阶、发生在之后 τ 个时间步的互动之间的相关性。注意，矩阵 $\mathcal{K}_{d_1d_2}(\tau)$ 并非对称，因为量 $_{c^{(d_2,d_1)}}(\tau)$ 衡量的是 d_1 阶与 d_2 阶在早于 τ 个时间步时的相关性，且通常不同于 $c^{(d_1,d_2)}(\tau)$。这两个量之间存在显著差异，反映了不同互动阶数之间时间依赖关系的不对称性。我们用跨阶间隙函数来量化这种不对称性

$$\delta^{(d_1,d_2)}(\tau) = \frac{c^{(d_1,d_2)}(\tau)-c^{(d_2,d_1)}(\tau)}{2\sqrt{\sigma^{(d_1)}\sigma^{(d_2)}}}. \tag{5}$$

$\delta^{(d_1,d_2)}(\tau)$ 为正，意味着大小为 d_1 的群组的出现与经过时间滞后 τ 后大小为 d_2 的群组的出现相关，而且这种相关性强于反向相关。

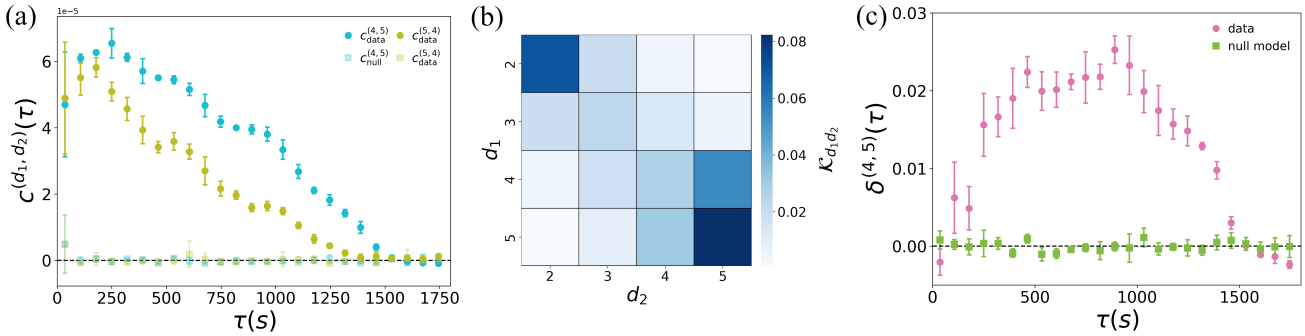


图 2. 人类面对面互动中的跨阶相关性。(a) 跨阶相关函数，$c^{(4,5)}(\tau)$（青色）和$c^{(5,4)}(\tau)$（橄榄色），描述四阶互动与五阶互动之间的时间依赖关系。我们将实证系统（圆形）与打乱时间步后得到的随机化零模型（方形）进行比较。(b) 归一化交互矩阵 $\mathcal{K}_{d_1 d_2}(\tau)$，用于表征任意阶数为 d_1，$d_2 \in \{2,\ldots,4\}$ 的互动对之间在时间滞后 $\tau = 600s$下的时间依赖关系。(c) 跨阶间隙函数 $\delta^{(4,5)}(\tau)$（紫色圆形），并与零模型（绿色方形）进行比较。

社会系统中不同阶之间及阶内的时间依赖关系。——现在，我们刻画现实世界系统中群体相互作用的时间相关性。我们考察了多个社会系统，并获得了有关其时间演化的高分辨率数据。本文重点关注一个数据集，该数据集记录了一场科学会议中 $N = 403$ 名参会者在 32 小时内的面对面互动 [56, 57]。另外三个案例，即办公室 [58]，、医院病房 [59] 和大学校园 [60] 中发生的社会互动，详见补充材料（SM）。我们将该数据集的细粒度时间信息编码为一个时间超图（$\mathcal{V}$，$\mathcal{H}(t)$），其中 $|\mathcal{V}| = 403$ 且 $t \in \{1,\ldots,T\}$。集合 $\mathcal{H}(t)$ 的构造依据是：假设在给定时刻相互接触的 d 个个体t 共同参与一个大小为 d 的群体互动，因此在时刻 t 对应一条阶数为 d 的超边。

我们首先研究给定规模的群组在时间上的相关性。图 1 展示了阶数为 $d \in \{2,\ldots,4\}$ 的群组（圆形）的阶内相关函数 $c^{(d)}(\tau)$。不同阶数的互动均呈现显著的长程时间自相关，表现为在双对数尺度下，$c^{(d)}(\tau)$ 随 τ 缓慢衰减，直至某个阈值；该阈值通常随d增大而降低。这表明，规模较大的群组通常只能在较短时间内保持自相关。有趣的是，我们还观察到规模为三的群组互动存在饱和效应，一系列峰值揭示了在较大时间尺度下存在微弱的周期性（更多细节见补充材料）。我们将实证结果与通过打乱定义时间超图的序列得到的零模型（方形）进行比较。

我们现在考察，特定规模 d_1 的群组中的互动是否也与规模为 $d_2 \neq d_1$ 的群组中的互动相关。图 2(a) 展示了规模分别为四人和五人的群组的跨阶相关函数 $c^{(4,5)}(\tau)$（青色圆圈）和 $c^{(5,4)}(\tau)$（橄榄色圆圈），清楚地表明存在显著的跨阶相关性（关于其他群组规模的分析，见补充材料）。我们观察到，这两个函数都呈现出一个峰值，随后缓慢衰减，而对应的零模型（方块）无法重现这一现象。为清晰起见，我们展示了交叉相关函数的分箱平均值及相应的标准差。图 2(b) 展示了时间滞后 $\tau = 600s$ 时的归一化交互矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$（关于不同 τ 的分析，见补充材料）。我们观察到，主对角线周围呈现带状结构，这意味着规模相近的群组之间跨阶相关性更高。这表明，在此处分析的科学会议互动中，群组规模逐渐变化，成员人数增减一两人（关于其他社会系统的交互矩阵，见补充材料，其中包括大学校园中的社会接触；在该系统中，大群组呈现出更复杂的相关模式）。最后，图 2(c) 展示了跨阶间隙函数 $\delta^{(4,5)}(\tau)$（紫色圆圈）。在所考察的时间滞后 τ 范围内几乎所有位置上，$\delta^{(4,5)}(\tau) > 0$ 的取值都表明，在某一时刻出现的四人群组与 τ 个时间步后出现的五人群组之间的相关性，比反向情形更强。这一结果同样无法由零模型（绿色方块）重现；它表明，四人群组形成五人群组的可能性，高于五人群组失去一名成员的可能性，显示出该社会系统群体形成／解散动态中存在优先的时间方向（关于其他群组规模的 $\delta^{(d_1,d_2\text{分析}}(\tau)$，见补充材料）。

具有高阶记忆的时序超图模型。——为了探究塑造同阶和跨阶相关性曲线形成机制的因素，我们受 DAR 过程 [21, 23,61] 启发，提出了两种用于生成具有高阶记忆的时间超图的模型。第一个模型称为离散自回归超图（DARH）模型，它将

每条超边 $h^\alpha \in \{0,1\}$（不存在/存在）的二元状态视为独立的随机过程。每条超边通过从其过去状态中抽取一个状态，或随机采样一个新状态来更新状态。以 $q^{(d)}$ 的概率（其中 $d \in \{2,\dots,D\}$），一条阶数为 d 的超边从其 $m_s^{(d)}$个过去状态中均匀随机地采样状态。以 $1-q^{(d)}$ 的概率，超边状态按照概率为 $y^{(d)}$ 的伯努利过程随机抽取。形式上，阶数为 d、h^α 的超边的动力学由 $h_t^\alpha = Q_t h_{t-\mu}^\alpha + (1-Q_t)Y_t$ 给出，其中 $Q_t \sim$ 伯努利($q^{(d)}$)，$Y_t \sim$ 伯努利($y^{(d)}$)，且$\mu \sim$ 均匀分布(1，$m_s^{(d)}$)。

我们的第一个模型呈现阶内时间相关性，但不存在跨阶时间相关（DARH 模型的特征描述见补充材料）。接着，我们引入第二个模型——跨记忆DARH（cDARH）模型，它是 DARH 模型的一种变体：阶数为 d 的超边更新状态时，不仅会参考自身的过去，也会参考另一阶超边的过去。我们将这一特性称为跨阶记忆。在从记忆中复制时，每条超边以概率 $p^{(d)}$从其他超边的过去复制，以概率 $1-p^{(d)}$从自身的过去复制。我们假设超边只能从与其重叠的超边的记忆中复制。这一选择源于此前关于社交网络中高阶相互作用的研究；这些研究指出，群组倾向于逐步增加或移除成员，每次只增减一个成员 [28]。例如，考虑大小为二和三的群组：一条 2-超边$\{i,j\}$ 从包含节点 i 和 j 的 $(N-2)$ 条可能的 3-超边中选取一条，并从其此前的 $m_c^{(3,2)}$ 个状态中进行抽取。同样，一条 3-超边 $\{i,j,k\}$ 从由其构成的三条 2-超边中选取一条，即 $\{i,j\}$、$\{j,k\}$ 和 $\{i,k\}$，并复制其此前$m_c^{(2,3)}$步中的一个状态。这种机制可以直接推广到其他阶数的超边。形式上，我们可以将阶数为 d 的超边的动力学写作

$$h_t^\alpha = Q_t h_{t-\mu}^{\varepsilon_t(\alpha)} + (1-Q_t)Y_t. \tag{6}$$

对于 DARH 模型，我们有 $Q_t \sim$Bernoulli($q^{(d)}$) 和 $Y_t \sim$ Bernoulli($y^{(d)}$)，而新的随机变量 $\varepsilon_t(\alpha)$ 用于选择复制过去信息的超边。因此，变量μ 不仅取决于 h^α 的阶数，还取决于 $\varepsilon_t(\alpha)$ 的值。例如，在 2-超边的情况下，如果 $\varepsilon_t(\alpha) = \alpha$，则 $\mu \sim$ Uniform(1，$m_s^{(2)}$)；而在从 3-超边复制时，如果 $\varepsilon_t(\alpha) \neq \alpha$，则$\mu \sim$ Uniform(1，$m_c^{(3,2)}$)。

我们使用 cDARH 模型生成包含 $N=10$ 个节点、超边最大阶数为$D=3$、时间范围为 $T=3\cdot 10^4$ 个时间步的时间超图。图 3 展示了在设定 $p^{(2)}=0$ 和 $p^{(3)}=0.6$时得到的结果，这意味着三阶超边可以从二阶超边的过去复制，而二阶超边则独立演化。我们还设定

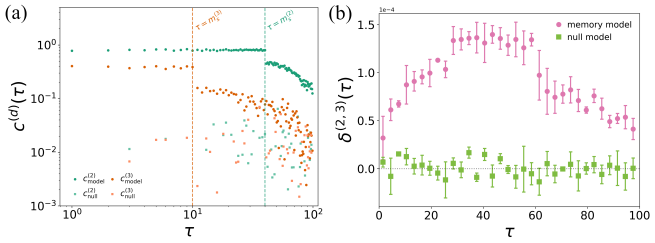


图 3. cDARH 模型中的时间相关性。(a) 阶内相关性 $c^{(d)}$，其中 $d \in \{2,3\}$，针对阶数为二（绿色圆形和方形）和三（橙色圆形和方形）的超边。虚线分别对应于阶数为二（绿色）和三（橙色）的超边的阶内记忆值。(b) 阶数为二和三的超边之间的跨阶间隙函数 $\delta^{(2,3)}$。我们比较了使用 cDARH 模型生成的超图中的阶内相关性和跨阶相关性，以及随机化零模型中的对应相关性。

$m_s^{(2,3)}=60$，作为三阶超边的跨阶记忆；$m_s^{(2)}=40$ 和 $m_s^{(3)}=10$ 分别作为二阶和三阶超边的阶内记忆。图 3(a)显示，二阶超边（绿色圆形）和三阶超边（橙色圆形）中均存在显著的阶内时间相关性。具体而言，我们注意到，函数 $c^{(2)}$ 和 $c^{(3)}$ 在 $\tau \le m^{(d)}$内保持不变，之后则以相同的速率呈指数衰减（更深入的分析见补充材料）。这个最简模型表明，记忆可以是阶内时间相关性产生的驱动机制，不同阶数具有不同程度的记忆，这解释了数据中观察到的相关性的层级结构。$c^{(d)}(\tau)$ 的曲线与实证数据并不完全吻合，后者呈现幂律衰减。这并不意外，因为 cDARH 模型考虑的是一组固定的值 $m_s^{(2)}$和 $m_s^{(3)}$，而现实世界中的社会互动可能受到不同记忆尺度 [23]的影响。图 3(b)显示，对于不同的 τ（紫色圆形），$\delta^{(2,3)}(\tau) > 0$，这意味着与反向情况相比，二阶超边与之后出现的三阶超边之间的相关性更强。我们观察到，这一趋势与图 2(c)中实证数据所呈现的趋势惊人地相似。这一结果表明，跨阶记忆是现实世界社会互动中跨阶间隙产生的一个基本因素。实证系统中观察到的 $\delta^{(4,5)}(\tau)$ 的两个峰值再次表明，其对记忆的依赖关系更加复杂，可能是由多个时间尺度造成的。

讨论。——在这封信件中，我们提出了一个框架，用于刻画具有高阶相互作用的网络化系统中记忆的不同维度。我们发现，现实世界中的社会系统在不同群体规模下呈现长程时间相关性，这些群体规模以跨越多个尺度的层级结构组织，或——

——以跨越多个尺度的层级结构组织。此外，我们发现群体互动具有跨阶相关性，这表明介观记忆之间涌现出非平凡的交互，最终形成复杂的记忆结构。在社会系统的背景下，这种跨阶交互可以用分裂现象来解释 [62–65],: 人类交互中的群体规模（例如对话中的群体规模）会发生波动、聚集，并呈现复杂动力学。本文提出的形式体系可以自然地推广到其他传统上以交互网络建模的高阶复杂系统，例如人脑和生物生态系统。总之，我们的工作揭示了现实世界中的交互系统所涌现出的、出乎意料的复杂且多面向的记忆特性。我们希望，这项工作也能为研究各类物理系统中涌现相干结构的高阶动力学开辟新途径，涵盖从核物理中的多重碎裂到大气或其他流体动力系统中的涡旋相互作用。

致谢。——L.G. 感谢 C. Zappal`a 富有启发性的讨论和意见。L.G. 和 F.B. 感谢美国空军科学研究办公室通过编号为 FA8655-22-1- 7025 的资助提供支持。L.L. 感谢西班牙研究署（AEI）通过 DYNDEEP (EUR2021- 122007)、MISLAND (PID2020-114324GB-C22) 项目以及 Mar´ıa de Maeztu 项目 CEX2021-001164-M 提供资助。

[1] P. Holme 和 J. Saram¨aki, 《时序网络》, 《物理学报告》**519**, 97 (2012)。[2] N. Masuda 和 R. Lambiotte, 《网络流中的记忆》（世界科学出版社, ）。[3] P. Holme 和 J. Saram¨aki, *Temporal network theory*, 第 2 卷（施普林格, 2019）。[4] M. Karsai、M. Kivel¨a、R. K. Pan、K. Kaski、J. Kert´esz、A.-L. Barab´asi 和 J. Saram¨aki, 《小而慢的世界：网络拓扑和突发性如何减缓传播》, 《物理评论E》**83**, 025102 (2011)。[5] P. Van Mieghem 和 R. Van de Bovenkamp, 《非马尔可夫感染传播显著改变网络中的易感者—感染者—易感者流行病阈值》, 《物理评论快报》**110**, 108701 (2013)。[6] M. Rosvall、A. V. Esquivel、A. Lancichinetti、J. D. West 和 R. Lambiotte, 《网络流中的记忆及其对传播动力学和社群检测的影响》, 《自然·通讯》**5**, 4630 (2014)。[7] N. Masuda 和 P. Holme, 《时间网络上的随机游走》（施普林格, ）。[8] N. Perra、A. Baronchelli、D. Mocanu、B. Gon.calves、R. Pastor-Satorras 和 A. Vespignani, 《时变网络中的随机游走与搜索》, 《物理评论快报》**109**, 238701 (2012)。[9] M. Starnini、A. Baronchelli、A. Barrat 和 R. Pastor-Satoras, 《时间网络上的随机游走》, 《物理评论E》**85**, 056115 (2012)。[10]N. Masuda、K. Klemm 和 V. M. Egu´ıluz, 《时序网络：持久相互作用减缓扩散》, 《物理评论快报》111, 188701（2013）。[11] I. Scholtes、N. Wider、R. Pfitzner、A. Garas、C. J. Tessone 和 F. Schweitzer, 《因果关系驱动的非马尔可夫时序网络扩散减速与加速》, 《自然·通讯》5, 5024（2014）。[12] J.-C. Delvenne、R. Lambiotte 和 L. E. Rocha, 《网络化系统中的扩散取决于时间还是结构》, 《自然·通讯》6, 7366（2015）。[13] V. Kohar、P. Ji、A. Choudhary、S. Sinha 和 J. Kurths, 《时变网络中的同步》, 《物理评论E》90, 022812（2014）。[14] Y. Zhang 和 S. H. Strogatz, 《设计在资源约束下实现同步的时序网络》, 《自然·通讯》12, 3273（2021）。[15] M. Zanin、L. Lacasa 和 M. Cea, 《预定网络中的动力学》, 《混沌：非线性科学跨学科期刊》19, 023111（2009）。[16] M. Starnini、A. Baronchelli 和 R. Pastor-Satorras, 《面对面互动网络的人类动态建模》, 《物理评论快报》110, 168701（2013）。[17] F. D. V. Fallani、V. Latora、L. Astolfi、F. Cincotti、D. Mattia、M. G. Marciani、S. Salinari、A. Colosimo 和 F. Babiloni, 《从人类执行简单运动时的高分辨率脑电图记录中估计的时变皮层网络持续互联模式》, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41, 224014（2008）。[18] T. P. Peixoto 和 M. Rosvall, 《利用动态社群结构对序列和时序网络建模》, 《自然·通讯》8, 582（2017）。[19] C. L. Vestergaard、M. G´enois 和 A. Barrat, 《记忆如何在时序网络中产生异质性动态》, 《物理评论E》90, 042805（2014）。[20] T. P. Peixoto 和 L. Gauvin, 《时序网络中的变化点、记忆与流行病传播》, Scientific Reports 8, 15511（2018）。[21] O. E. Williams、F. Lillo 和 V. Latora, 《记忆对非马尔可夫时序网络中传播过程的影响》, 《新物理学杂志》21, 043028（2019）。[22] O. E. Williams、P. Mazzarisi、F. Lillo 和 V. Latora, 《具有自相关和交叉相关链路动态的非马尔可夫时序网络》, 《物理评论E》105, 034301（2022）。[23] O. E. Williams、L. Lacasa、A. P. Mill´an 和 V. Latora, 《时序网络中的记忆形态》, 《自然·通讯》13, 499（2022）。[24] L. Lacasa、J. P. Rodriguez 和 V. M. Eguiluz, 《网络轨迹的相关性》, 《物理评论研究》4, L042008（2022）。[25] A. Caligiuri、V. M. Eguiluz、L. di Gaetano、T. Galla 和 L. Lacasa, 《时序网络的李雅普诺夫指数》, arXiv 预印本 arXiv:2301.12966（2023）。[26] A. R. Benson、R. Abebe、M. T. Schaub、A. Jadbabaie 和 J. Kleinberg, 《单纯复形闭包与高阶链路预测》, 《美国国家科学院院刊》115, E11221（2018）。[27] A. Patania、G. Petri 和 F. Vaccarino, 《合作关系的形态》, 《EPJ 数据科学》6, 1（2017）。[28] G. Cencetti、F. Battiston、B. Lepri 和 M. Karsai, 《社交网络中高阶相互作用的时序特性》, Scientific Reports 11, 7028（2021）。[29] Q. F. Lotito、F. Musciotto、A. Montresor 和 F. Bat-

tiston, 《超图中的高阶模体分析》, Communications Physics 5, 79（2022）。[30] M. Contisciani、F. Battiston 和 C. De Bacco, 《超图中超边与重叠社区的推断》, 《自然·通讯》13, 7229（2022）。[31] S. Klamt、U.-U. Haus 和 F. Theis, 《超图与细胞网络》, 《公共科学图书馆计算生物学》5, e1000385（2009）。[32] A. Zimmer、I. Katzir、E. Dekel、A. E. Mayo 和 U. Alon, 《基于药物对测量结果预测多维药物剂量反应》, 《美国国家科学院院刊》113, 10442（2016）。[33] G. Petri、P. Expert、F. Turkheimer、R. Carhart-Harris、D. Nutt、P. J. Hellyer 和 F. Vaccarino, 《脑功能网络的同调骨架》, 《英国皇家学会界面》11, 20140873（2014）。[34] C. Giusti、R. Ghrist 和 D. S. Bassett, 《两者成伴, 三者（或更多）成单纯形》, 《计算神经科学杂志》41, 1（2016）。[35] J. M. Levine、J. Bascompte、P. B. Adler 和 S. Allesina, 《超越复杂群落中物种共存的成对机制》, Nature 546, 56（2017）。[36] J. Grilli、G. Barab´as、M. J. Michalska-Smith 和 S. Allesina, 《高阶相互作用稳定竞争网络模型中的动力学》, Nature 548, 210（2017）。[37] F. Battiston、G. Cencetti、I. Iacopini、V. Latora、M. Lucas、A. Patania、J.-G. Young 和 G. Petri, 《超越成对相互作用的网络：结构与动力学》, 《物理学报告》874, 1（2020）。[38] F. Battiston、E. Amico、A. Barrat、G. Bianconi、G. Ferraz de Arruda、B. Franceschiello、I. Iacopini、S. K´efi、V. Latora、Y. Moreno、 *et al.*, 《复杂系统中高阶相互作用的物理学》, Nature Physics 17, 1093（2021）。[39] M. T. Schaub、A. R. Benson、P. Horn、G. Lippner 和 A. Jadbabaie, 《单纯复形上的随机游走与归一化霍奇1-拉普拉斯算子》, 《SIAM评论》62, 353（2020）。[40] T. Carletti、F. Battiston、G. Cencetti 和 D. Fanelli, 《超图上的随机游走》, 《物理评论E》101, 022308（2020）。[41] P. S. Skardal 和 A. Arenas, 《全局耦合振子单纯形中的突发去同步与广泛多稳态》, 《物理评论快报》122, 248301（2019）。[42] A. P. Mill´an、J. J. Torres 和 G. Bianconi, 《单纯复形上的爆炸性高阶 Kuramoto 动力学》, 《物理评论快报》124, 218301（2020）。[43] M. Lucas、G. Cencetti 和 F. Battiston, 《用于高阶网络同步的多阶拉普拉斯算子》, 《物理评论研究》2, 033410（2020）。[44] L. V. Gambuzza、F. Di Patti、L. Gallo、S. Lepri、M. Romance、R. Criado、M. Frasca、V. Latora 和 S. Boccaletti, 《单纯复形中的同步稳定性》, 《自然·通讯》12, 1（2021）。[45] T. Carletti、D. Fanelli 和 S. Nicoletti, 《超图上的动力系统》, Journal of Physics: Complexity 1, 035006（2020）。[46] I. Iacopini、G. Petri、A. Barrat 和 V. Latora, 《社会传染的单纯复形模型》, 《自然·通讯》10, 1（2019）。[47] G. St-Onge、H. Sun、A. Allard、L. H´ebert-Dufresne 和 G. Bianconi, 《异质暴露下高阶网络的通用非线性感染核》, 《物理评论快报》127, 158301（2021）。

[48]U. Alvarez-Rodriguez, F. Battiston, G. F. de Arruda, Y. Moreno, M. Perc, 和 V. Latora, 《社交网络中高阶相互作用的演化动力学》, Nature Human Behaviour **5**, 586 (2021)。[49] A. Civilini, N. Anbarci, 和 V. Latora, 《超图上群体选择困境的演化博弈模型》, 《物理评论快报》**127**, 268301 (2021)。[50] A. Ceria 和 H. Wang, 《高阶演化网络的时间拓扑特性》, arXiv 预印本 arXiv:2211.01128 (2022)。[51] S. Chowdhary, A. Kumar, G. Cencetti, I. Iacopini, 和 F. Battiston, 《时间高阶网络中的单纯形传染》, Journal of Physics: Complexity **2**, 035019 (2021)。[52] L. Neuh¨auser, R. Lambiotte, 和 M. T. Schaub, 《时间超图上的共识动力学》, 《物理评论E》**104**, 064305 (2021)。[53] G. Petri 和 A. Barrat, 《单纯形活动驱动模型》, 《物理评论快报》**121**, 228301 (2018)。[54] A. Santoro, F. Battiston, G. Petri, 和 E. Amico, 《多变量时间序列的高阶组织》, Nature Physics, 1 (2023)。[55] C. Berge, *Graphs and hypergraphs* (North-Holland Pub. Co., 1973)。[56] C. Cattuto, W. Van den Broeck, A. Barrat, V. Colizza, J.-F. Pinton, 和 A. Vespignani, 《基于分布式 RFID 传感器网络的人际互动动力学》, PloS One **5**, e11596 (2010)。[57] L. Isella, J. Stehl´e, A. Barrat, C. Cattuto, J.-F. Pinton, 和 W. Van den Broeck, 《人群中有什么？面对面行为网络分析》, Journal of Theoretical Biology **271**, 166 (2011)。[58] M. G´enois, C. L. Vestergaard, J. Fournet, A. Panisson, I. Bonmarin, 和 A. Barrat, 《办公楼中的面对面接触数据表明, 可基于社区连接者制定低成本疫苗接种策略》, Network Science**3**, 326 (2015)。[59] P. Vanhems, A. Barrat, C. Cattuto, J.-F. Pinton, N. Khanafer, C. R´egis, B.-a. Kim, B. Comte, 和 N. Voirin, 《利用可穿戴邻近传感器估算医院病房中的潜在感染传播途径》, PloS One **8**, e73970 (2013)。[60] P. Sapiezynski, A. Stopczynski, D. D. Lassen, 和 S. Lehmann, 《哥本哈根网络研究的互动数据》, Scientific Data **6**, 315 (2019)。[61] P. A. Jacobs 和 P. A. Lewis, *Discrete Time Series Generated by Mixtures. III. Autoregressive Processes (DAR (p))*, 技术报告（美国加州蒙特雷海军研究生院, 1978）。[62] G. Palla, A.-L. Barab´asi, 和 T. Vicsek, 《社交群体演化的量化》, Nature **446**, 664 (2007)。[63] J. Stehl´e, A. Barrat, 和 G. Bianconi, 《社交网络中的动态与突发性互动》, 《物理评论E》**81**, 035101 (2010)。[64] M. M. Egbert, 《分裂式对话：从单一对话到多重对话的协作式转变》, Research on Language and Social Interaction **30**, 1 (1997)。[65] M. Mastrangeli, M. Schmidt, 和 L. Lacasa, 《圆桌讨论：对话动力学的抽象模型》, Journal of Artificial Societies and Social Simulation **13**(2010)。

论文《高阶相关揭示时间超图中的复杂记忆》的补充材料

具有高阶相互作用的社会系统中的阶内相关

在正文中，我们重点讨论了一个描述科学会议中面对面互动的数据集。本节将分析另外三个社会系统中的阶内时间相关性。其中两个数据集来自 Sociopatterns 项目，描述了以下面对面互动：*(i)* 办公室中工作人员之间、持续 11天 的互动 [58]；以及*(ii)* 医院病房中患者、医生、护士和行政人员之间、持续 72小时 的互动 [59]。第三个数据集则包含丹麦技术大学（DTU）哥本哈根校区学生的邻近数据，时间跨度为 一个月 [60]。

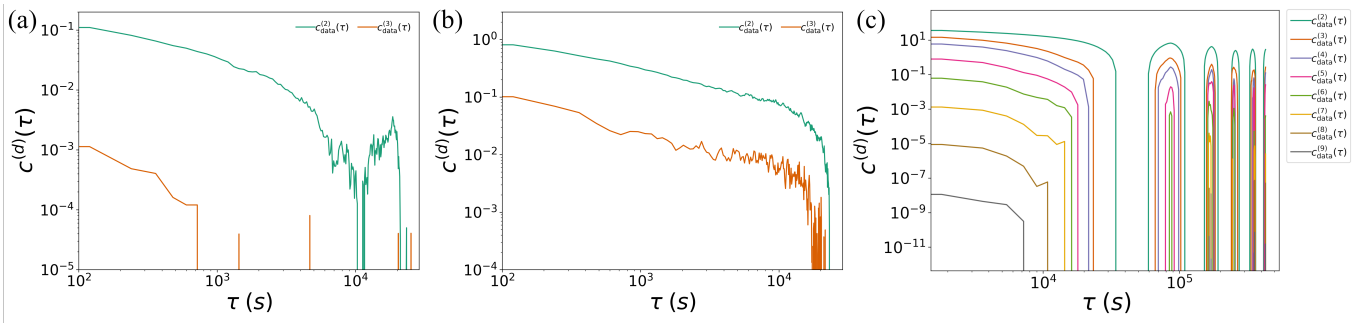


图 S1. 办公室（a）、医院病房（b）和大学校园（c）中人类面对面互动的阶内相关函数，按不同群体规模划分。

本节分析规模相同的群组内的时间相关性。图 S1 展示了所考察的三个实证系统中，若干群体规模 d 对应的阶内相关函数值；这三个系统分别是工作场所（a）、医院病房（b）和大学校园（c）中的面对面互动。对于每个系统，我们仅考虑统计数据充足的群体规模。总体而言，在不同群体规模下，每个社会系统都呈现出长程、缓慢衰减的时间自相关层级。此外，我们注意到，阶内相关性会在一个典型时间阈值之后骤然消失；该阈值随群体规模 d 的增大而减小，即规模越大的群组，其时间相关性持续的时间越短。

我们在工作场所和大学校园中发生的互动里观察到了周期性模式。尤其对于后者，我们注意到在较大时间尺度上出现了一系列峰值，呈现出与较小时间尺度上观察到的相同层级结构。有关具有周期性的时间超图的最简模型，请参见图 S10。

跨阶相关性揭示高阶相互作用的非平凡时间组织结构

本节将深入分析不同规模群组之间的时间相关性。在正文中，我们展示了统计显著的跨阶相关性。在科学会议中的面对面互动里，我们特别关注了规模为四和五的群组之间的跨阶相关性。这里我们展示，同一系统中其他规模组合的群组之间也存在时间相关性。

图 S2 展示了跨阶相关函数 $c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色），用于描述规模为二和三的群组之间的跨阶相关性。我们还报告了随机化零模型的跨阶相关函数，其中的相关性已通过时间重排移除（较浅色方块）。两个函数均呈现指数衰减，这与正文图 2(a) 中所示跨阶相关函数 $c^{(4,5)}(\tau)$ 和 $c^{(5,4)}(\tau)$ 的变化趋势并不一致，这表明不同规模组合的群组可能呈现不同类型的相互依赖。

图 S3 展示了不同时间滞后下的归一化交互矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$，分别对应 $\tau = 60s$ (a)、$\tau = 300s$ (b) 和 $\tau = 1500s$ (c)。我们观察到，不同群体规模之间可能会出现跨阶时间相关。具体而言，正如正文所讨论的，矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$ 在主对角线周围呈现带状结构，这意味着规模相近的群组之间相关性更高。随着时间滞后增大，相关性在更长的时间尺度上逐渐消失，带状结构也随之消失。

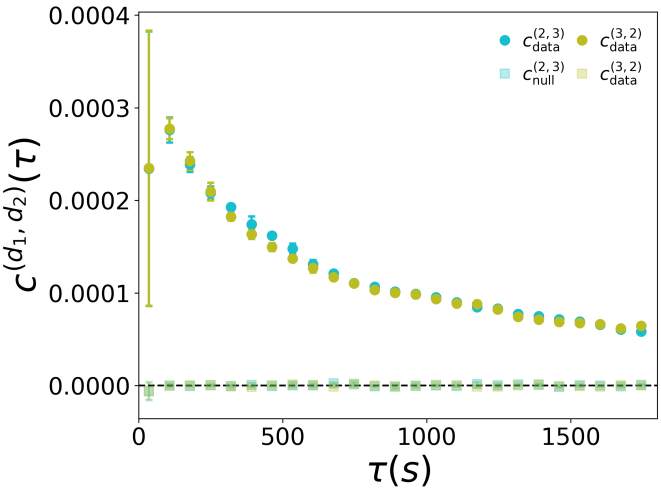


图 S2. 科学会议面对面互动中，大小为二和三的群组的跨阶相关函数，即 $c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色）。将实证系统（深色圆点）与时间步重新洗牌的随机化零模型（浅色方块）进行比较。

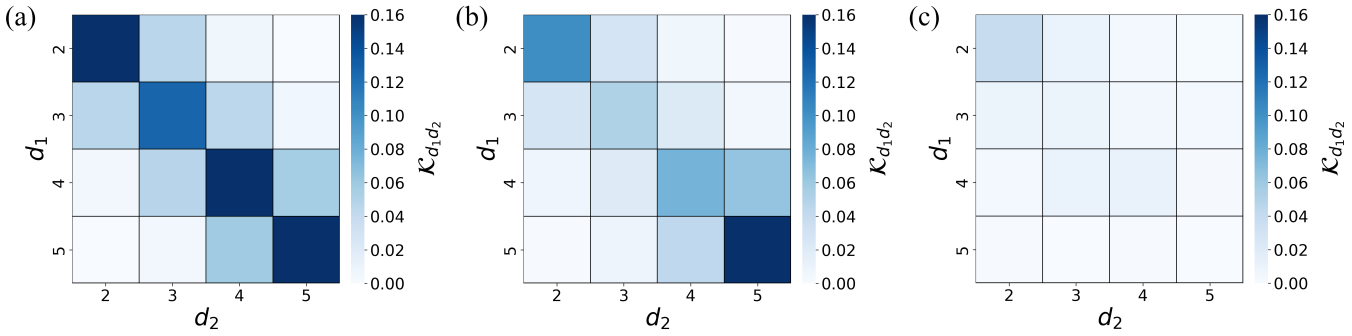


图 S3. 科学会议面对面互动中，时间滞后为 $\tau = 60s$ (a)、 $\tau = 300s$ (b) 和 $\tau = 1500s$ (c) 时的归一化跨阶相互作用矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$。

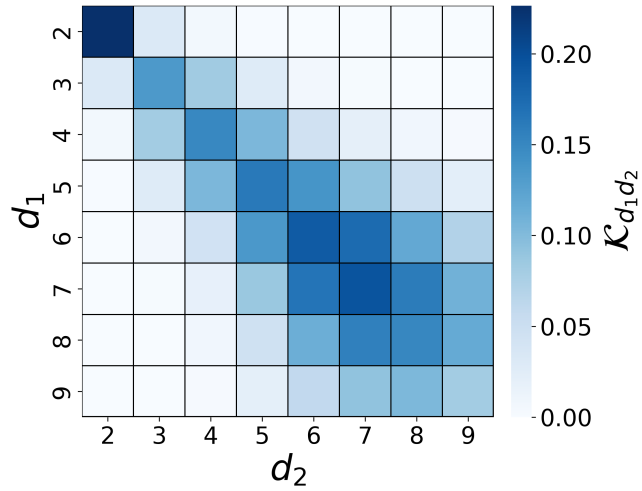


图 S4. 哥本哈根 DTU校园中，时间滞后为 $\tau = 300s$ 时的归一化交互矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$。

.....的带状结构　　矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$ 表明，在科学会议数据集中，群组往往会改变

逐渐变化，每次失去或增加一名成员。现在，我们想探究规模较大的群组是否也具有相同的特性。为回答这个问题，我们聚焦于发生在哥本哈根DTU校园内的学生之间的交互；在那里，规模较大的群组也有足够的统计数据。图 S4 展示了时间滞后为 $\tau = 300s$ 时的归一化交互矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$。再一次，矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$ 显示出特征性的带状结构。然而，与科学会议的情况相比，我们注意到规模较大的群组呈现出不同的模式。事实上，我们可以观察到不同规模群组之间显著的跨阶相关性，例如，规模为九人的群组与规模为五人的群组在时间上相关。这一结果表明，较大的群组与较小的群组相比，其演化方式有所不同。具体而言，小规模群组会逐渐变化，每次失去或增加一名成员；而大规模群组的动态则更为复杂，因为它们也可能分裂成较小的群组，或由较小的群组汇聚而成。

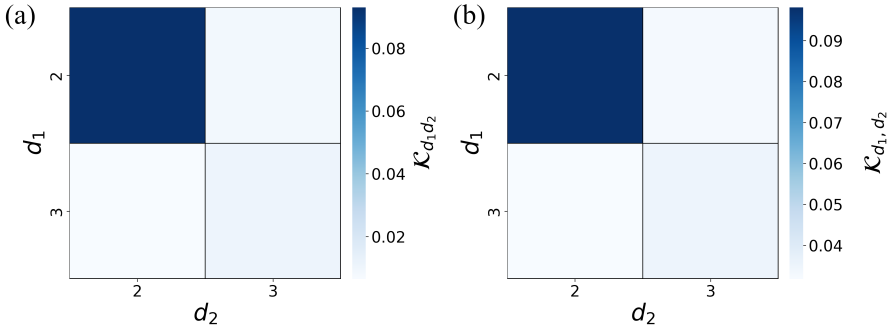


图 S5. 办公室（a）和医院病房（b）中发生的面对面互动在时间滞后 $\tau = 300s$ 时的归一化交互矩阵 $\mathcal{K}(\tau)$。

为完整起见，图 S5 报告了相对于办公室（a）和医院病房（b）中发生的二人组和三人组互动，在时间滞后 $\tau = 300s$ 时计算得到的归一化交互矩阵。

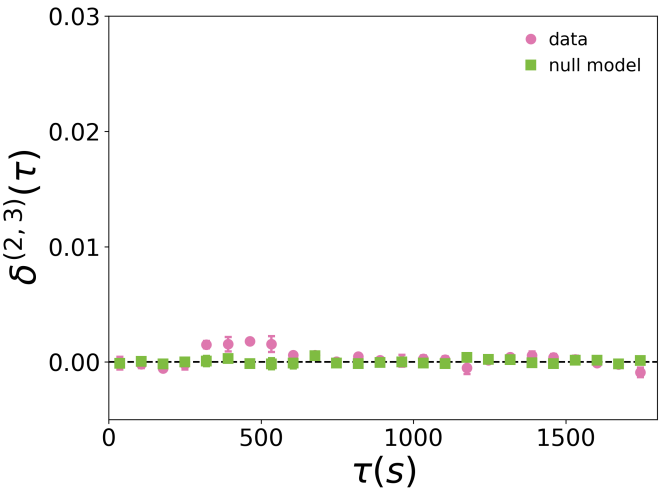


图 S6. 科学会议中二人组和三人组互动的跨阶间隙函数 $\delta^{(2,3)}(\tau)$（紫色圆形），并与零模型（绿色方形）进行比较。

在正文中，我们展示了，相对于规模为 d_1 和 d_2 的群组，跨阶相关函数可能存在显著差异：某一特定规模的群组可能会预示另一种规模群组的出现，反之则未必成立，或者两种效应的强度可能有所不同。两个函数之间的这种差异可通过跨阶间隙函数 $\delta^{(d_1,d_2)}(\tau)$ 来量化。为补充正文中的分析，我们在此考察科学会议中的相互作用，研究其他群体规模组合的跨阶相关函数可能存在的间隙。图 S6 展示了真实社交网络（紫色圆形）的跨阶间隙函数 $\delta^{(2,3)}(\tau)$。请注意，图中的坐标轴刻度与正文中的图 2(c) 相同，以便进行适当比较。我们观察到，$\delta^{(2,3)}(\tau)$ 与对时间快照进行重新排列的零模型相比，并无显著差异。这表明，规模为二的群组和规模为三的群组都没有倾向于预示对方的出现，这意味着

两人群组增加一名成员的概率，与三人群组失去一名成员的概率相同。

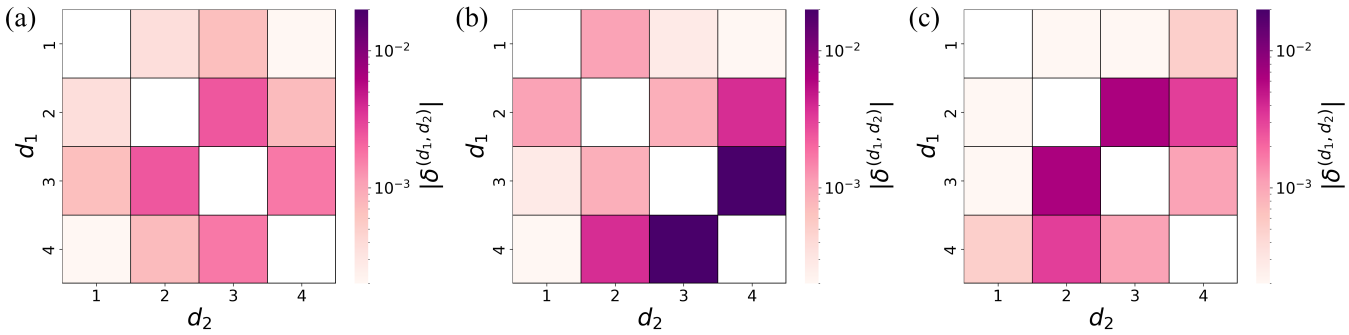


图 S7. 在科学会议中的面对面互动里，不同群体规模 d_1 和 d_2下， $|\delta^{(d_1,d_2)}|$ 的值在不同时间滞后下的情况，分别为 $\tau = 60s$ (a)、$\tau = 600s$ (b) 和 $\tau = 1500s$ (c)。

图 S7 展示了不同 d_1 和 d_2取值下， $|\delta^{(d_1,d_2)}|$ 的值在不同时间滞后下的情况，分别为 $\tau = 60s$ (a)、$\tau = 600s$ (b) 和 $\tau = 1500s$ (c)。我们观察到，其他不同的配对 d_1, d_2 也呈现出非零的 $|\delta^{(d_1,d_2)}|$值，这再次表明不同互动阶数之间存在非平凡的时间组织结构。

DARH 模型的分析

本节分析离散自回归超图（DARH）模型，即一种具有记忆的时序高阶网络最简模型。如正文所述，在 DARH 模型中，每条超边 h^α都独立演化，并在每个时间步 t 通过从其记忆中抽取或随机选择来更新状态。以概率 $q^{(d)}$从过去抽取，其中对于大小从二到 D的超边， $d \in \{2, \ldots, D\}$；而以概率 $1 - q^{(d)}$，则根据概率为 $y^{(d)}$的伯努利过程随机选择下一个状态。当超边的状态从过去抽取时，我们假设大小为 d 的超边会复制此前的某个 $m_s^{(d)}$状态。形式上，阶数为 d, h^α的超边的动力学为

$$h_{t+1}^\alpha = Q_t h_{t-\mu}^\alpha + (1 - Q_t) Y_t, \tag{S1}$$

其中 $Q_t \sim$ 服从伯努利分布($q^{(d)}$)， $Y_t \sim$ 服从伯努利分布($y^{(d)}$)，而 $\mu \sim$ 服从均匀分布(1， $m_s^{(d)}$)。

我们使用 DARH 模型生成时间超图。我们构建了一个包含 $N = 5$ 个节点、由 $T = 10^5$ 个快照组成的高阶网络。我们考虑最高达四阶的超边。二阶、三阶和四阶交互的记忆参数分别设为 $m_s^{(2)} = 5$、 $m_s^{(3)} = 4$ 和 $m_s^{(4)} = 3$。不同交互阶数从过去抽取的概率分别设为 $q^{(2)} = 0.60$、 $q^{(3)} = 0.55$ 和 $q^{(4)} = 0.50$。最后，在无记忆过程中激活每条超边的概率分别设为 $y^{(2)} = 0.4$、 $y^{(3)} = 0.05$ 和$y^{(4)} = 0.02$。图 S8 展示了使用 DARH 模型生成的时间超图中各交互阶数的阶内相关函数 (a)，以及跨阶相关函数 $c^{(2,3)}(\tau)$ 和 $c^{(3,2)}(\tau)$ (b)。为简化分析，对于跨阶相关函数，我们仅分析了二阶和三阶超边。

在图 S8(a)中，我们观察到，对于所有超边阶数，阶内相关性在 $1 \le \tau \le m_s^{(d)}$（竖直虚线）之前保持不变，而在超过该值后呈指数衰减。在 $\tau = 0$ 处，自相关函数的值显然更高，并且取决于整个时间范围内给定阶数超边的平均数量。

对于每个阶数 d，阶内相关函数都可以通过尤尔-沃克方程（虚线）重现：

$$c^{(d)}(\tau) = \frac{q^{(d)}}{m_s^{(d)}} \sum_{k=1}^{m_s^{(d)}} c^{(d)}(\tau - k), \tag{S2}$$

它们确定了自相关 DAR($m_s^{(d)}$) 过程的相关函数。特别是，可以证明 [21] that $c^{(d)}(\tau)$

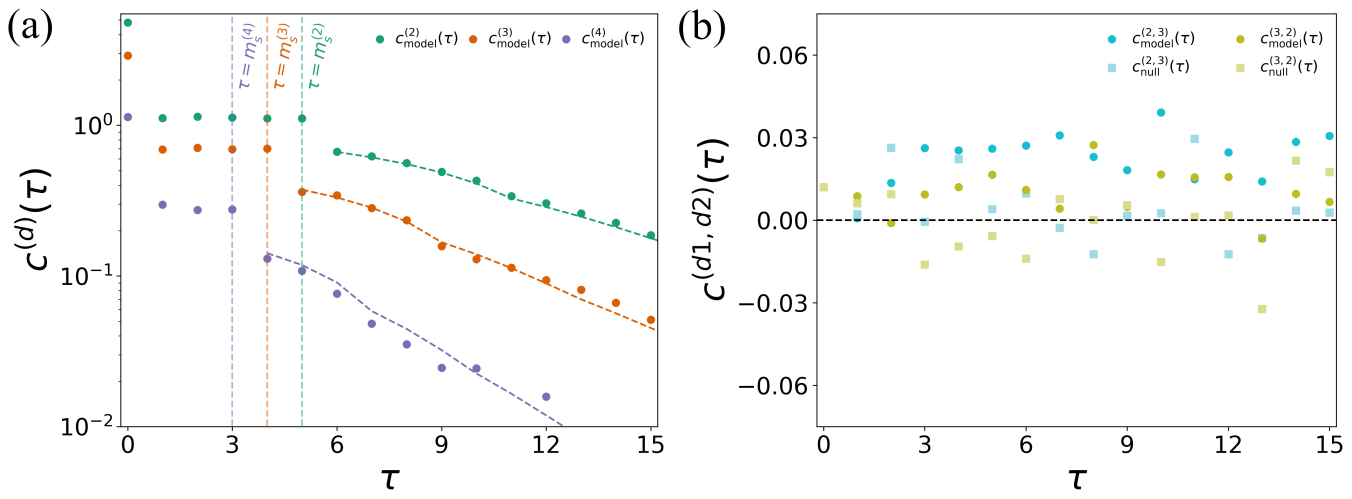


图 S8. DARH 模型中的阶内相关函数和跨阶间隙函数。(a) 阶内相关。每种颜色代表一种交互阶数。竖直虚线表示数值 $\tau = m_s^{(d)}$，其中 $d \in 1$，2、3。其他颜色的虚线表示尤尔-沃克方程的理论预测。(b) 二阶和三阶超边之间的跨阶相关函数，即 $c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色）。深色圆点表示 DARH 模型得到的数值，浅色方块则表示时间重排超图的相关函数。

对于 $\tau \leq m_s^{(d)}$ 为常数，其值为

$$c^{(d)}(\tau \leq m_s^{(d)}) = c^{(d)}(0)\left[m_s^{(d)}\left(\frac{1}{q^{(d)}} - 1\right) + 1\right]^{-1}, \tag{S3}$$

这使我们能够求解 Eqs. (S2)，直至任意有限滞后 τ。DARH 模型表明，记忆可能是阶内时间相关性产生的驱动因素。该模型揭示，数据中观测到的相关范围的层级结构（参见正文和本补充材料前文）源于超边所具有的记忆程度不同。

相反，图 S8(b) 显示，大小为 2 和 3 的超边不存在跨阶相关性。事实上，$c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色）都接近于零（深色圆点），且与将时间超图的时间步重新排列后得到的零模型数值（浅色方块）相比，并无显著差异。事实上，在 DARH 模型中，每条超边的演化都独立于其他超边，无论其他超边与其大小相同还是不同。因此，我们观察不到不同大小超边之间的跨阶相关性。

CDARH 模型中的指数衰减

本节分析 cDARH 模型中的阶内相关性。在正文中，我们考虑了超边最大阶数为 $D = 3$ 的模型配置：二阶超边可以从自身的过去复制，而三阶超边还可以从与其重叠的二阶超边的过去复制（更多细节请参见正文）。在这种情况下，我们发现，阶内相关函数 $c^{(2)}(\tau)$ 可以由尤尔-沃克方程 (S2) 重现，而 $c^{(3)}(\tau)$ 则无法重现。这并不令人意外，因为二阶超边彼此独立演化，因此其状态遵循独立的 DAR 过程（更多细节见上一节）；而三阶超边的演化也取决于与其重叠的三条二阶超边的动力学。

为了深入了解 cDARH 模型的行为，我们拟合了 $c^{(2)}(\tau)$ 和 $c^{(3)}(\tau)$ 的指数衰减。我们发现，两者的指数衰减速率相同，即 $c^{(d)} \sim e^{\beta\tau}$，且 $\beta = 0.02$，如图 S9 所示。这一结果本质上是因为三阶超边具有对二阶重叠超边的记忆。这一机制或许也能解释，为什么现实世界系统中的交互具有衰减速率相近的长程阶内相关函数（见补充材料图 S1 和正文图 1）。请注意，

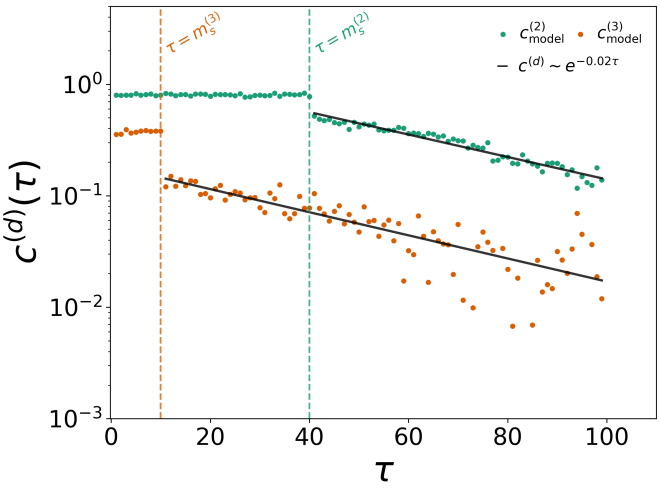


图 S9. cDARH 模型中的阶内相关。绿色和橙色圆圈分别表示阶数为二和三的超边的 $c^{(d)}$ 值。虚线分别对应阶数为二（绿色）和三（橙色）的超边的阶内记忆值。黑色实线显示了对 $c^{(2)}$ 和 $c^{(3)}$进行指数衰减拟合的最佳结果。

为了更好地比较衰减速率，此处我们采用线性-对数刻度，而正文图 3(a) 中采用的是双对数刻度。

周期性时间超图的相关性分析 **H**

社会系统呈现出多种时间模式，从周期性到衰减的自相关。在正文中，我们着重讨论了后一种特征，并介绍了一个具有记忆的时间高阶网络最简模型。本节则转而关注具有高阶相互作用的系统中的周期性时间模式。为此，我们构建了一个包含 N 个节点的时间超图，其中每种交互阶数具有不同的周期性。为简单起见，且不失一般性，我们将分析范围限制在大小为二和三的群组。首先，我们构造一个长度为 T_2 的随机 2-均匀超图序列，即所有超边的阶数均为二的超图序列。每条超边以概率 p_2 创建。该序列中的每个超图都是一个 Erd¨os-R´enyi 随机网络，即 ER(N, p_2)。接着，我们构造另一个长度为 T_3 的序列，由随机 3-均匀超图组成，即每条超边恰好连接三个节点。每条超边以概率 p_3 创建。对于每种交互阶数，我们将相应的多个序列依次串接，从而构建两个时间均匀超图。我们重复这些序列，使两个时间超图各自都包含T 个时间步。最后，在每个时间步，我们合并对应的两个静态均匀超图。这样便得到一个长度为 T 的单一时间超图，其中 2-超边每隔 T_2 个时间步重复一次，而 3-超边的周期则为 T_3。

图 S10 展示了由 $N = 10$ 个节点构成的周期性时间超图的阶内相关函数（a）和跨阶相关函数（b）。该超图由 $T = 1.95 \cdot 10^5$ 个快照组成。每条 2-超边以 $p_2 = 0.1$ 的概率存在，并以 $T_2 = 15$ 为周期重复。相比之下，3-超边以概率 $p_3 = 0.03$ 激活，周期为 $T_3 = 8$。

两种互动阶数都呈现出明显的周期性行为。具体而言，对于二体和三体相互作用，阶内相关函数分别在 $\tau = kT_2$ 和 $\tau = kT_3$ 处达到峰值，且 $k \in \mathbb{N}$；而在其他 τ 值下，$c^{(2)}(\tau)$ 和 $c^{(3)}(\tau)$ 均接近于零。时间超图的周期性也反映在跨阶相关函数 $c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色）中。尤其是，我们观察到它们在不同的谐波处达到峰值，并且通常 $c^{(2,3)}(\tau) \neq c^{(3,2)}(\tau)$，因为两种互动阶数的周期振荡并不同相。

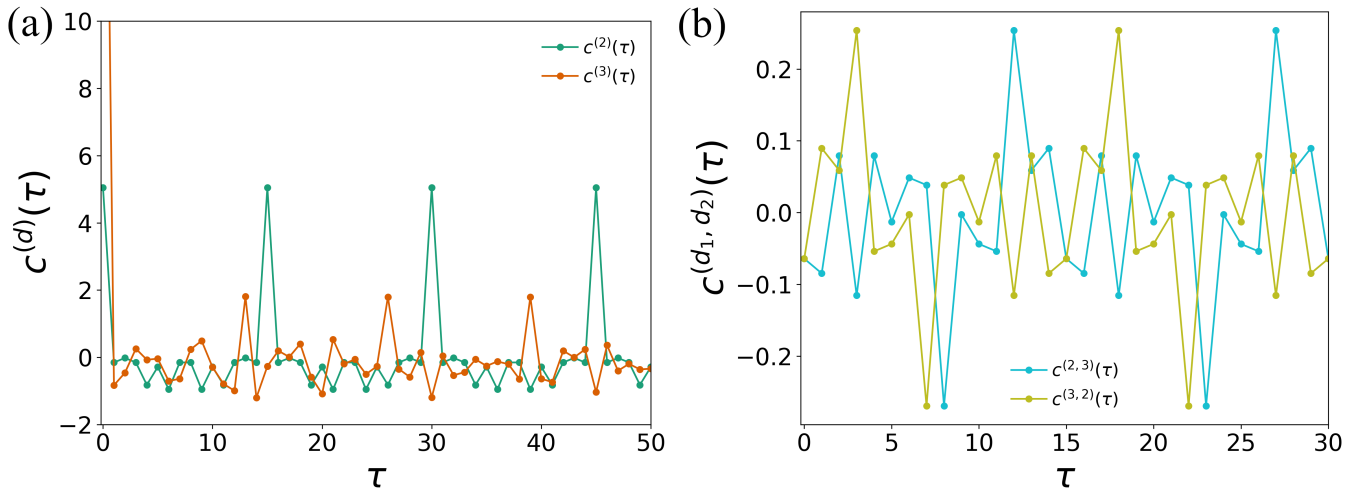


图 S10. 周期性时间超图最简模型中的阶内相关函数和跨阶间隙函数。(a) 阶数为二（绿色）和三（橙色）的超边中的阶内相关性。(b) 阶数为二和三的超边之间的跨阶相关函数，即 $c^{(2,3)}(\tau)$（青色）和 $c^{(3,2)}(\tau)$（橄榄色）。